UNIVERSIDAD NACIONAL
"SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

ESCUELA DE POSTGRADO

"APROXIMACIONES DISCRETAS DE ECUACIONES OPERATORIAS"

Tesis para optar el grado de Maestro en Matemática

RUBEN MARIO LEIVA BERNUY

Asesor: Dr. BIBIANO MARTÍN CERNA MAGUIÑA

Huaraz – Perú
2017

N° Registro T0540

MIEMBROS DEL JURADO

Magister **Perpetua María Alayo Meregildo** **Presidenta**

_____

Doctor **Jonhson Diomedes Valderrama Arteaga** **Secretario**

_____

Doctor **Bibiano Martín Cerna Maguiña** **Vocal**

_____

ASESOR

Doctor **Bibiano Martin Cerna Maguiña**

AGRADECIMIENTO

Mi más sincero Agradecimiento:

A todas las personas que desinteresadamente me apoyaron y contribuyeron en la culminación del presente trabajo.

Al *Doctor* Bibiano Martín Cerna Maguiña, asesor de esta tesis por su apoyo incondicional y sus sugerencias constructivas, que me han permitido realizar exitosamente todo el proceso de ejecución de este trabajo de investigación.

De todo corazón a mi familia
que siempre me ha apoyado
incondicionalmente y que son
mis más preciados tesoros.

A mis hijos Jenifer y Jofre que me
impulsan a seguir superándome
Profesionalmente y como Persona.

INDICE

	Pagina
Resumen	ix
Abstract	x
I. INTRODUCCIÓN	1
Objetivo General	2
Objetivos Específicos	2
II. MARCO TEÓRICO	3
2.1.Antecedentes	3
2.2.Bases teóricas	4
Espacio Métricos	4
Sucesión en espacios Métricos	6
Espacio Normado	7
Desigualdad de Schwarz y de Holder para Sumas	9
Desigualdad de Minkowski para Sumas	10
Espacios de Banach	11
Espacios de Hilbert	13
Producto Interno y Espacios de Hilbert	13
Lema (Desigualdad de schwarz)	14
Lema (Desigualdad de Minkowski)	16
Proposición (Ley del Paralelogramo)	18
Ortogonalidad	18
Operadores Lineales y Continuos	26
Continuidad	27

2.3.Definición de términos 28

III. METODOLOGÍA 29

3.1.Tipo y Diseño de Investigación 29

IV. RESULTADOS 29

4.1. Aproximaciones Discretas de Ecuaciones Operatorias 30

Definición 01 (T-convergente) 30

Definición 02 (Grado de aproximación) 33

Definición 03 34

Definición 04 34

Definición 05 35

Teorema 01 35

Proposición 01 36

Definición 06 37

Teorema 02 37

Definición 07 38

Teorema 03 38

Lema 01 43

Definición 08 45

Proposición 02 45

Definición 09 45

Proposición 03 46

Definición 10 48

Teorema 04 48

Lema 02 49

Definición 11 51

Proposición 04 52

Teorema 05 53

Teorema 06 54

Proposición 05 54

Lema 03 55

Proposición 06 56

Proposición 07 56

Corolario 01 56

V. CONCLUSIONES 58

VI. RECOMENDACIONES 59

Definición de símbolos 60

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 62

RESUMEN

La presente investigación es descriptiva y exploratoria por lo que está orientada al estudio de las aproximaciones de la ecuación con un operador lineal, teniendo como objetivo resolver aproximadamente la ecuación Ax=y con un operador lineal A, que actúa del campo de definición D(A)⊂X en el Campo de valores R(A)⊂Y (X e Y son espacios de Banach), y el segundo miembro $y \in Y$ se considera una sucesión de aproximaciones $\bar{A}_n\bar{x}_n=\bar{y}_n$, $n \in \mathbb{N}$ llamada esquema aproximado con operadores lineales $\bar{A}_n$ que actúan de $D(\bar{A}_n)\subset X_n$ en $R(\bar{A}_n)\subset Y_n$, en $\bar{y}_n \in \bar{Y}_n$, (X_n e Y_n son espacios de Banach). Para ello se ha realizado un estudio de los esquemas aproximadas y el análisis funcional en general, llegando a la conclusión de que al resolver la ecuación $Ax = y$ donde $D(A) \subset X$, $R(A) \subset Y$, con X, Y que son espacios de Banach, se observa que el operador A, se puede aproximar por una sucesión de operadores $\{\bar{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y obtener soluciones aproximadas, el T-limite es único, por lo tanto la aproximación de A_n hacia A es buena cumpliéndose la condición de estabilidad, de igual manera cuanto mayor sea el grado de aproximación la aproximación de los operadores A_n aproxima a A entonces la convergencia es rápida.

PALABRAS CLAVES

Espacios de Banach, T- Convergente, normas concordadas, normas regulares, norma cubica.

ABSTRACT

The present investigation is descriptive and exploratory for what is guided to the study of the approaches of the equation with a lineal operator, having as objective to solve the equation approximately Ax=y with a lineal operator $\boldsymbol{A}$ that acts of the definition D(A)⊂X field in the Field of values R(A)⊂Y (X and Y they are spaces of Banach), and the second member is considered a succession of approaches $\bar{A}_n\bar{x}_n=\bar{y}_n$, $n \in \mathbb{N}$ called approximate outline with lineal operators $\bar{A}_n$ that you they act of $D(\bar{A}_n)\subset X_n$ in $R(\bar{A}_n)\subset Y_n$, in $\bar{y}_n \in \bar{Y}_n$ (X_n and Y_n they are spaces of Banach). For they has been carried out it a study of the approached outlines and the functional analysis in general, reaching the conclusion that when solving the equation $Ax = y$ where $D(A) \subset X$, $R(A) \subset Y$, with X, Y that they are spaces of Banach, it is observed that the operator A, it can approach for a succession of operators $\{\bar{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ and to obtain approximate solutions, the one T-limits it is only, therefore the approach of A_n toward A it is good being completed the condition of stability.

KEY WORDS

Spaces of Banach, T - Convergent, agreed norms, regular norms, norm cubes.

I. INTRODUCCIÓN.

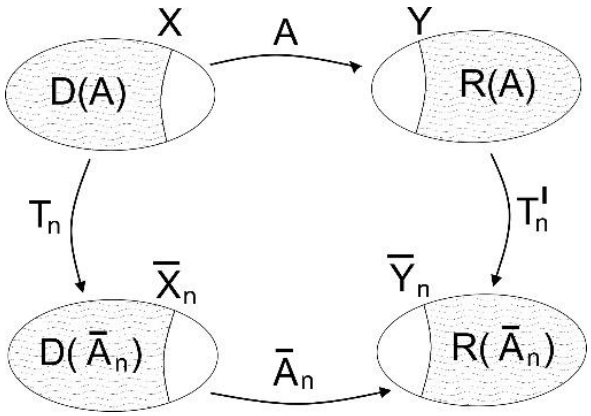
Las aproximaciones de la ecuación con un operador lineal, es un ´área en la Matemática que tiene un gran número de aplicaciones, por ello son de gran importancia tanto en la física como en la matemática, ya que un gran número de problemas son modelados por ecuaciones diferenciales lineales con valores en la frontera. Estos problemas de valores en la frontera pueden ser resueltos aproximadamente por varios métodos.

Por ende los físicos, ingenieros y matemáticos son conscientes que en muchos casos la solución de un problema con valores en la frontera pueden garantizar como minimizar un cierto funcional (usualmente especifica la energía del sistema físico).

Teniendo en cuenta lo mencionado, en el presente trabajo de investigación se presenta un panorama general de la teoría de Aproximaciones Discretas de Ecuaciones Operatorias, de igual manera se presenta el marco teórico (los antecedentes, bases teóricas, preliminares definiciones y conceptos básicos referentes a Aproximaciones Discretas de Ecuaciones Operatorias), finalizando con los resultados de la investigación de Aproximaciones Discretas de Ecuaciones Operatorias, demostrando las definiciones, teoremas, proposiciones, lemas y corolarios con sus respectivos ejemplos, basados en una teoría de la Topología y Análisis Funcional.

Teniendo en cuenta los operadores y espacios de Banach resolveremos $Ax=y$, donde A es un operador lineal que actúa del campo de definición $D(A)\subset X$ en el Campo de valores $R(A)\subset Y$ (X e Y son espacios de Banach), y el segundo miembro $y \in Y$ se considera una sucesión de aproximaciones

$\bar{A}_n\bar{x}_n=\bar{y}_n$, $n \in \mathbb{N}$ llamada esquema aproximado con operadores lineales $\bar{A}_n$ que actúan de $D(\bar{A}_n)\subset X_n$ en $R(\bar{A}_n)\subset Y_n$ (X_n e Y_n son espacios de Banach). Utilizando teorías como continuidad, operadores lineales, Espacios de Banach, sucesiones o secuencias, etc.



Objetivos

Objetivo General

Resolver aproximadamente la ecuación Ax=y mediante aproximaciones discretas de ecuaciones operatorias.

Objetivos Específicos

- Estudiar las sucesiones T-Convergentes en espacios de Banach.
- Estudiar las condiciones de estabilidad en espacios de Banach.
- Estudiar las normas regulares y las normas concordadas.
- Analizar el grado de aproximación de un elemento $x\in X$ y el grado de aproximación de un esquema.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Muchos han sido los investigadores, tanto en el área de la ingeniería, como en el área de la mecánica aplicada que han participado en el desarrollo de aproximaciones discretas de ecuaciones operatorias. En 1909, Ritz desarrollo un método muy poderoso con el cual se puede obtener soluciones aproximadas, de problemas asociados al campo de la mecánica. En este método, se asume la "forma" de las incógnitas involucradas en el problema, en términos de unas funciones de aproximación conocidas y unos parámetros a determinar. La introducción de estas funciones en el funcional que describe el problema en estudio, y su posterior diferenciación con respecto a los referidos parámetros, produce una ecuación la cual es igualada a cero. Si existe n parámetros desconocidos, se formará un sistema de n ecuaciones simultáneas. La solución de dicho sistema permite determinar dichos parámetros y, por lo tanto, obtener la solución aproximada del problema Este método es similar a la estimación de los parámetros de ajuste en los problemas de mínimos cuadrados. La limitación más severa del método de Ritz, está en el hecho que las funciones de aproximación, deben verificar las condiciones de contorno especificadas en el problema en estudio, lo cual restringe la aplicación del método a aquellos problemas con dominios de forma geométrica relativamente simples.

En 1943, Courant hizo una muy significativa extensión del método de Ritz introduciendo funciones seccionalmente continuas, definidas sobre áreas

triangulares, lo cual, conjuntamente con el principio de mínima energía potencial, le permite estudiar problemas de torsión. En estos problemas, las incógnitas se seleccionaron de tal modo que fueran iguales a los valores de las funciones, en los puntos de interconexión de las áreas triangulares. Por otro lado, la limitación del método de Ritz fue eliminada ya que las condiciones de contorno se satisfacen, ahora, en un número finito de puntos sobre el contorno.

2.2. Bases Teóricas

2.2.1. Espacios Métricos

Definición: Sea X un espacio vectorial diferente del vacío. Se dice que X es un espacio métrico; si existe una función:

$$d: XxX \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

Tal que satisfacen las siguientes propiedades:

i) $d(x,y) \geq 0, \ \forall x,y \in X; \quad d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x), \ \forall x,y \in X$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \ \forall x,y,z \in X$

El par (X,d) es llamado espacio métrico relativo a d.

Ejemplo 01: Sea el conjunto $X = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d: \ & \mathbb{R}x\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \rightarrow |e^x - e^y| \end{aligned}$$

¿Será una métrica?

Solución:

i. $\mathrm{d}(x,y) = |e^x - e^y| \geq 0, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\mathrm{d}(x,y) = 0 \rightarrow |e^x - e^y| = 0 \rightarrow e^x - e^y = 0 \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$

Similarmente $\mathrm{x} = \mathrm{y} \rightarrow e^x - e^y = 0 \rightarrow \left|e^x - e^y\right| = 0$

$\rightarrow \mathrm{d}(x,y) = 0$

ii. $\mathrm{d}(x,y) = |e^x - e^y| = |e^y - e^x| = \mathrm{d}(y,x)$

iii. $\mathrm{d}(x,y) = |e^x + e^z - e^z - e^y|$

$\mathrm{d}(x,y) \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y|$

$\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$\therefore$ El par (X,d) es llamado espacio métrico relativo a d.

Ejemplo 02: Sea $\rho(x,y)$ una métrica en un conjunto X, demostrar que la función $\rho_1(x,y) = \ln(1 + \rho(x,y))$ sea una métrica sobre X.

Solución:

i. $\rho_1(x,y) \geq 0, \qquad \forall x,y \in \mathrm{X}$

Además $\rho_1(x,y) = 0 \rightarrow \ln\big(1 + \rho(x,y)\big) = 0$

$$\ln\big(1 + \rho(x,y)\big) = Ln(1)$$

$$1 + \rho(x,y) = 1$$

$$\rho(x,y) = 0$$

Como ρ es una métrica entonces $\mathrm{x} = \mathrm{y}$

Similarmente $x = y \rightarrow \rho_1(x, y) = 0$

ii. $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$ porque $\rho(x, y)$ es una métrica

iii. $\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(y, z)$

como $\rho(x, y)$ *es una métrica entonces*

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$$

$$1 + \rho(x, y) \leq 1 + \rho(x, z) + \rho(y, z)$$

$$\leq \big(1 + \rho(x, z)\big)\big(1 + \rho(y, z)\big)$$

$$Ln\big(1 + \rho(x, y)\big) \leq \mathrm{Ln}\Big(\big(1 + \rho(x, z)\big)\big(1 + \rho(y, z)\big)\Big)$$

$$Ln\big(1 + \rho(x, y)\big) \leq \mathrm{Ln}\big(1 + \rho(x, z)\big) + \mathrm{Ln}\big(1 + \rho(y, z)\big)$$

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(y, z)$$

$\therefore$ El par (X, ρ_1) es llamado espacio métrico relativo a ρ_1.

2.2.2. Sucesión en espacios Métricos

Definición: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (x, d). Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto x de X.

Si dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural N_0 tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq N_0$.

Notación:

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge al punto x, escribiremos $x_n \rightarrow x$.

Proposición: Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico (x, d) . Entonces $a \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A tal que $a_n \rightarrow a$.

Sucesión de Cauchy: Una sucesión $\{x_n\}$ es un espacio métrico con (x, d) **se llama una sucesión de Cauchy**, si dado $\varepsilon > 0$, existe un numero natural N_0 tal que $n, m \geq N_0$ entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

En otras palabras, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy si

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_m, x_n) = 0$$

2.2.3. Espacio Normado

Definición: Sea X un espacio vectorial diferente del vacío. Se dice que X es un espacio normado; si existe una función:

$$\| . \| : X \quad \to \quad \mathbb{R}_0^+$$

Que satisface las siguientes propiedades

i) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in X; \quad \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \ \forall x \in X, \ \lambda \in (\mathbb{R} \vee \mathbb{C})$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$

El par $(X, \| . \|)$ es llamado espacio normado.

OBSERVACIÓN:

Si X es un espacio normado con la norma $\| . \|$ a partir de esa norma podemos definir una métrica d, de la siguiente manera:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Definición: Sean $(X, \| . \|)$ un espacio normado y $A \subset X$, se dicen que A es un conjunto si $\forall a \in A$, existe $r>0$ tal que $B_r(a) \subset A$ en este caso $B_r(a) = \{x \in X \,/\, \|x - a\| < r\}$.

Definición: Sean (X , $\|.\|$) un espacio normado y $A \subset$ X , se dicen que A es un conjunto cerrado si A^c es abierto.

Definición: Sean (X , $\|.\|$) un espacio normado y

$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subset$ X , A es un conjunto cerrado.

Definición: El conjunto $B_r(x_0) = \{x \in X\colon \|x - x_0\| < r\}$ se llama bola abierta con centro en el punto x_0 y radio r>0.

El conjunto $\bar{B}_r(x_0) = \{x \in X\colon \|x - x_0\| \leq r\}$ se llama bola cerrada con centro en el punto x_0 y radio r>0.

Definición: El conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subset$ X se llama acotado si es posible encerrado en una bola (abierta o cerrada) es decir existe M>0 / $\|x\| \leq M$ $\forall$x$\in$A.

Definición: El número $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$ se llama distancia entre los conjuntos A y B contenidos en X.

Definición: Un conjunto $M \subset$ X, se llama abierto si para cualquier $x_0 \in$M, existe un r>0 tal que , $B_r(x_0) \subset$ A.

Definición: Un punto $a \in$X se llama punto de acumulación del conjunto M $\subset$ A si $(B_r(a) - \{a\}) \cap M \neq \emptyset$. $\forall$r>0.

Definición: El conjunto de todos los puntos de acumulación se designa por M$'$.

Definición: El conjunto $M \cup M'$ se denomina clausura (adherencia) del conjunto M y se denota por $\overline{\text{M}}$.

Definición: El conjunto se llama cerrado si $M = \overline{M}$.

Definición: una sucesión $x_n \in X$ ($n \in N$) se llama convergente hacia el elemento $x_0 \in X$ y se escribe $x_n \to x_0$.

Si $\|x - x_0\| \to 0$ para $n \to \infty$.

Teorema del valor medio para derivadas Si f es continua en $[a, b]$ donde $a < b$ y diferenciable sobre $\langle a, b \rangle$, entonces existe un punto $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Teorema del valor medio para Integrales Si f es continua [a, b] existe al menos un número c∈[a, b] tal que: $\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b - a)$ Al número f(c) se le llama valor medio de f en el intervalo [a, b]

2.2.4. Desigualdad de Schwarz y de Holder para Sumas

Sean p y q números reales tales que p>1, q>1 y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

i. Si c_i , d_i , i=1…n son números complejos

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i d_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |d_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ii. Si $\{c_i\}, \{d_i\}$, son sucesiones de números complejos tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |d_i|^q < \infty$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i d_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |d_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

2.2.5. Desigualdad de Minkowski para Sumas

i. Si a_i , b_i , i=1…n son números complejos $p \geq 1$ un número real, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ii. Si $\{a_i\}, \{b_i\}$, son sucesiones de números complejos tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p < \infty$$

Entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

2.2.6. Espacios de Banach

Definición: Sea X un espacio vectorial normado y sea d la métrica asociada. Si X es un espacio métrico completo con respecto a d se dice que X es un espacio de Banach.

Definición: Sea X un espacio normado $\{x_n\} \subset X$ se dice que es una secuencia de Cauchy.

Si dado $\varepsilon \geq 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon,\ \forall\ n, m \geq N$ o equivalente a

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x_n - x_m\| = 0$$

Ejemplo 1:

Sea $X = \mathbb{R}$, $\quad \|\,.\,\|: \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$(x, y) \to |e^x - e^y|$

¿ $X_n = Ln\left(\frac{1}{n}\right)$ *es una sucesión de Cauchy* ?

Solución:

$$d(x_n, y_m) = |e^{x_n} - e^{y_m}| = \left|e^{Ln\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{Ln\left(\frac{1}{m}\right)}\right|$$

$$d(x_n, y_n) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right|$$

$$0 \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(\mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n) \leq 0$$

$$\to \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(\mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n) = 0$$

$\therefore \mathrm{X}_n$ *es una sucesión de Cauchy*

Ejemplo 2: $\left(\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}],\ \|\,.\,\|_{\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]}\right)$ es un espacio de Banach, donde

$$\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]} = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]} |f(t)|$$

Solución:

Sea $\{\, f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$

Dado $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, $\exists\ \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \operatorname*{Sup}_{t\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]} |f_n(t) - f_m(t)| = \|f_n - f_m\|_{\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\forall n, m \geq \mathrm{N}_0$$

$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n, m \geq \mathrm{N}_0 \quad y \ \ t \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$…. (1)

Luego para t fijo $\{f(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$

Siendo este espacio completo tenemos que existe $f(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

En (1) tenemos para $n \to \infty$

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad \forall n \geq \mathrm{N} \quad \text{y} \quad t \in [\mathrm{a},\mathrm{b}] \ \ \ldots(2)$$

$$\|f_n - f\| = \operatorname*{Sup}_{t\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]} |f_n(t) - f(t)| \ \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad \forall n \geq \mathrm{N} \quad \ldots(3)$$

Por lo tanto de (3) tenemos $f_n \to f$

Ahora probaremos que f sea continua en $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$

f_n es continua en $[a, b]$, luego es continua en $t = t_0 \in [a, b]$

Es decir:

Dado $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$|t - t_0| < \delta \rightarrow |f_n(t) - f_n(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ , ... } \forall n \in \mathbb{N}$$

De (1), (2) y (3)

$$|f(t) - f(t_0)| = |f(t) - f_n(t) + f_n(t) - f_n(t_0) + f_n(t_0) + f(t_0)|$$

$$\leq \underbrace{|f(t) - f_n(t)|}_{\forall n \geq N,\ t \in [a,b]} + \underbrace{|f_n(t) - f_n(t_0)|}_{\forall n \geq N, siempre\ que\ |t - t_0| < \delta} + \underbrace{|f_n(t_0) + f(t_0)|}_{\forall n \in \mathbb{N},\ t_0 \in [a,b]}$$

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$, siempre que $|t - t_0| < \delta$ entonces f es continua en $t = t_0$.

2.2.7. Espacios de Hilbert

2.2.7.1. Producto Interno y Espacios de Hilbert

Definición: Sea X en espacio vectorial complejo un producto interno en X es una aplicación.

$$< \ , > : XxX \rightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$

Que asocia a cada par ordenado de vectores x e y, α un escalar denotado por $< x , y >$ que satisface las siguientes propiedades:

i. $< x , x > \geq 0 \quad \forall x \in X \rightarrow < x , x > = 0 \leftrightarrow x = 0$

ii. $< x + y , z > = < x , z > + < y , z > \quad \forall x, y, z \in X$

iii. $< \alpha x , y > = \alpha < x , y > \quad \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}$

iv. $< x , y > = \overline{< y, x >} \quad \forall x, y \in X$

Verificar las siguientes igualdades:

a) $< x\,,\ y+z >=< x\,,y > \ +< x\,,z >,\ \forall x,y,z \in X$

b) $< x\,,\alpha y > = \bar{\alpha} < x\,,y >\quad \forall x,y \in X, \alpha \in \mathbb{C}$

Demostración:

a) $< x\,,\ y+z > = \overline{<\ y+z,\ x >}$

$< x\,,y+z > =\overline{< y,x >} \ + \ \overline{< z,x >}$

$< x\,,y+z > =< x\,,y > \ +< x\,,z >$

b) $< x\,,\alpha y > =\overline{< \alpha\, y,x >}$

c) $< x\,,\alpha y > = \bar{\alpha}\ \overline{<\ y,\ x >}$

d) $< x\,,\alpha y > = \bar{\alpha} < x\,,y >$

2.2.7.2. Lema (Desigualdad de schwarz).- Si $(X,<\,,\ >)$ es un espacio producto interno, entonces;

a) $|< x,y >| \leq \sqrt{< x,x >}\ \sqrt{< y,y >}$ para todo x, y en X

b) La igualdad en a) se cumple si y solo si existen escalares α,β tales que:

$$\alpha x + \ \beta y = 0$$

Demostración:

a) Como $< x,x >\geq 0$ para todo x en X

$< x-\alpha y, x-\alpha y >\geq 0$

$< x,x > +< x,-\alpha y > +< -\alpha y,x > +< -\alpha y,-\alpha y >\geq 0$

$< x,x > -\bar{\alpha} < x,y > -\alpha\ \overline{< x,y >}+ |\alpha|^2 < y,y >\geq 0$

$< x,x > +|\alpha|^2 < y,y >\geq \bar{\alpha} < x,y > +\alpha < y,x >$

Escogemos $\alpha = \frac{<x,y>}{<y,y>}$, $y \neq 0$

$$|\alpha| = \frac{|<x,y>|}{<y,y>}$$

$$\frac{< y,y >}{< y,y >} < x,x > + \frac{|< x,y >|^2}{< y,y >^2} < y,y > \quad \geq$$

$$\frac{\overline{< x,y >}}{< y,y >} < x,y > + \frac{< x,y >}{< y,y >} < y,x >$$

$$< y,y >< x,x > + |< x,y >|^2 \quad \geq$$

$$< y,x >< x,y > + < x,y >< y,x >$$

$$< y,y >< x,x > + |< x,y >|^2 \geq |< x,y >|^2 + |< x,y >|^2$$

$$\sqrt{< y,y >}.\sqrt{< x,x >} \geq |< x,y >|$$

Si y=0 la desigualdad es evidente.

b) ←) si $\alpha x + \beta y = 0 \rightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha} y = ry$ donde $r = -\frac{\beta}{\alpha}$

$$|< x,y >| = |< ry,y >| = |r||< y,y >| \qquad ... (i)$$

$$\sqrt{< x,x >} = \sqrt{< ry,ry >}$$

$$= \sqrt{r\bar{r} < y,y >} = |r|\sqrt{< y,y >}$$

$$\sqrt{< y,y >}.\sqrt{< x,x >} = \sqrt{< y,y >}.|r|\sqrt{< y,y >}$$

$$= |r| < y,y > \qquad \ldots \text{(ii)}$$

De (i)= (ii)

$$\rightarrow) \; |< x,y >| = \sqrt{< y,y >}.\sqrt{< x,x >}$$

tomamos $< x - \alpha y, x - \alpha y >= 0$

Con $\alpha = \frac{<x,y>}{<y,y>}$, $y \neq 0$ entonces $x - \alpha y = 0 \rightarrow x = \alpha y$

2.2.7.3. Lema (Desigualdad de Minkowski).- Sea $(X, <\ ,\ >)$ es un espacio producto interno, entonces:

a) $\sqrt{< x+y, x+y >} \leq \sqrt{< x, x >} + \sqrt{< y, y >}$

b) La igualdad en a) se cumple si y solo si existe un número real $\alpha \geq 0$ talque:

$$y = \alpha x\ ,\ \text{ó}\ x = \alpha y$$

Demostración:

a)$< x+y, x+y >=< x, x > +< x, y >$

$$+< y, x > +< y, y >$$

$$=< x, x > +< x, y > +\overline{< x, y >} +< y, y >$$

También

$< y, x >=\overline{< x, y >} = real < x, y > -iIm < x, y >$ …(i)

$< x, y >= real < x, y > +iIm < x, y >$ … (ii)

$|< x, y >| = \sqrt{(real < x, y >)^2 + (Im < x, y >)^2}$

$|< x, y >| \geq \sqrt{(real < x, y >)^2} = |real < x, y >|$

$|< x, y >| \geq |real < x, y >|$ …(iii)

Reemplazando (i) y (ii) en la ecuación.

$< x+y, x+y >=< x, x > +real < x, y > +iIm < x, y >$

$$+real < x, y > -iIm < x, y > +< y, y >$$

$< x+y, x+y >=< x, x > +2real < x, y > +< y, y >$…(iv)

Reemplazando (iii) en (iv)

$< x+y, x+y >\leq< x, x > +2|< x, y >|+< y, y >$

Por la desigualdad de Cauchy

$< x+y, x+y >\leq< x, x > +2\sqrt{< y, y >}.\sqrt{< x, x >} +< y, y >$

$$< x+y, x+y > \leq \left(\sqrt{< x,x >} + \sqrt{< y,y >}\right)^2$$

$$\sqrt{< x+y, x+y >} \leq \sqrt{< x,x >} + \sqrt{< y,y >}$$

b) →) elevando al cuadrado a) se obtiene

$$|real < x,y >| = \underbrace{\sqrt{< x,x >}}_{\geq 0} \underbrace{\sqrt{< y,y >}}_{\geq 0} \geq |< x,y >|$$

$$|real < x,y >| \geq 0$$

$$|< x,y >| = |real < x,y >|$$

Sea $< x,y >= a + ib$

$$|< x,y >| = \sqrt{a^2 + b^2} = a \text{ , si b=0}$$

$$|< x,y >| = \sqrt{< x,x >}\sqrt{< y,y >}$$

De la desigualdad obtenemos que $y = \alpha x$, ó $x = \alpha y$

$$< \alpha y, y >= a$$

$$\alpha \underbrace{< y,y >}_{>0} = \underbrace{a}_{>0}$$

$$\therefore \quad \alpha \geq 0$$

←) $< x+y, x+y >=< \alpha y + y, \alpha y + y >$

$$< x+y, x+y >=< \alpha y + y, \alpha y + y >$$

$$< x+y, x+y >=< (\alpha+1)y, (\alpha+1)y >$$

$$< x+y, x+y >= (\alpha+1)\overline{(\alpha+1)} < y,y >$$

$$= (\alpha+1)^2 < y,y > \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$

$$< x,x >=< \alpha y, \alpha y >= (\alpha)^2 < y,y >$$

$$\sqrt{< x,x >} + \sqrt{< y,y >} = \sqrt{(\alpha)^2 < y,y >} + \sqrt{< y,y >}$$

$$\sqrt{< x,x >} + \sqrt{< y,y >} = \alpha\sqrt{< y,y >} + \sqrt{< y,y >}$$

$$\sqrt{< x,x >} + \sqrt{< y,y >} = (\alpha + 1)\sqrt{< y,y >} \qquad \ldots(ii)$$

(i) = (ii)

Definición.- Sea $(X, <\ ,\ >)$ un espacio producto interno.

Si X con la norma $\|X\| = \sqrt{< x,x >}$ es completo, entonces $(X, <\ ,\ >)$ se llama espacio de Hilbert

2.2.7.4. Proposición (Ley del Paralelogramo).- Si $(X, <\ ,\ >)$ es un espacio producto interno, entonces:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Para todo x , y en X.

Demostración:

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y \geq < x,x > +< x,y >$$

$$+< y,x > +< y,y > \quad \ldots..(i)$$

$$\|x - y\|^2 =< x - y, x - y \geq < x,x > -< x,y >$$

$$-< y,x > +< y,y > \quad \ldots..(ii)$$

(i) + (ii)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

2.2.7.5. Ortogonalidad

Definición.- Dos vectores x, y en un espacio producto interno X se llama ortogonales si $< x\ ,\ y > = 0$

Notación: Si $< x\ ,\ y > = 0$ escribiremos $x \perp y$.

Nota: el vector cero es ortogonal con cualquier vector x.

Definición.- Sea X un espacio producto interno $A \subset X$ un conjunto no vacío.

a) Se dice que A es un conjunto ortogonal de vectores si**:**

$< x\ ,\ y > = 0$ para todo x, y en A con $x \neq y$.

b) Se dice que A es un conjunto ortonormal de vectores si es un conjunto ortogonal **y** $\|X\| = 1$ para todo $x \in A$.

2.2.7.6. Teorema de Pitágoras.- Si $x \perp y$, entonces:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demostración:

Tenemos $< x\ ,\ y > = 0$ y $< y\ ,\ x > = 0$ porque $x \perp y$

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y \geq < x, x > +< x, y >$$

$$+< y, x > +< y, y >$$

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >= < x, x > +< y, y >$$

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >= \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Ejemplo: Sea $(\mathbb{R}^n, \| \,.\, \|_1)$, donde:

$$\|\bar{x}\,\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \qquad \bar{x} = (x_1, \dots x_n)$$

¿Será un espacio de Hilbert?

Solución:

Supongamos que $(\mathbb{R}^n, \| \ . \|_1)$ es un espacio de Hilbert, luego $\| \ . \|_1$ proviene de un producto interno, entonces cumple la ley del paralelogramo.

$$\bar{x} = (1,2,0,0,\dots,0) \rightarrow \|\bar{x}\| = 3$$

$$\bar{y} = (-2,-1,0,0,\dots,0) \rightarrow \|\bar{y}\| = 3$$

$$\bar{x} + \bar{y} = (-1,1,0,0,\dots,0) \rightarrow \|\bar{x} + \bar{y}\| = 2$$

$$\bar{x} - \bar{y} = (3,3,0,0,\dots,0) \rightarrow \|\bar{x} - \bar{y}\| = 6$$

Reemplazamos en la ley del paralelogramo

$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$2^2 + 6^2 = 2.3^2 + 2.3^2$

$$40 \neq 36$$

$\therefore$ No es un espacio de Hilbert.

Ejemplo:

Sea $\left(\mathrm{C}[0,1], \| \ . \|_{\mathrm{C}[0,1]}\right)$ donde $\|f\|_{\mathrm{C}[0,1]} = \min_{t\in[0,1]} |f(t)|$

¿Será un espacio de Hilbert?

Solución:

Se $f(t) = t + 1, \quad \|f\|_{\mathrm{C}[0,1]} = 2$

$f(t) = t - 1, \quad \|g\|_{\mathrm{C}[0,1]} = 1$

$(f + g)(t) = 2t, \quad \|f + g\|_{\mathrm{C}[0,1]} = 2$

$$(f-g)(t)=2, \qquad \|f-g\|_{C[0,1]}=2$$

Reemplazamos en la ley del paralelogramo

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2$$

$$2^2+2^2=2.2^2+2.1^2$$

$$4\neq 10$$

$\therefore$ No es un espacio de Hilbert..

2.2.7.7. Lema.- Sea$(X,\|\,.\,\|)$ es un espacio normado que satisface la ley del paralelogramo definimos.

$\varphi: XxX \to \mathbb{C}$ mediante:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-$$

$$-i\|x-iy\|^2], \qquad \forall x,y\in X$$

Entonces:

(i) $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}, \qquad \forall x,y\in X, \quad \varphi(x,y)\geq 0$

$\varphi(x,0)=0 \quad \forall x\in X \qquad \varphi(x,x)=0 \leftrightarrow x=0$

(ii) $\|x+y+z\|^2-\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2=$

$$\|x+y\|^2+\|x+z\|^2+\|y+z\|^2,$$

$$\forall\ x,y,z\ \in X$$

Demostración:

(i) $\overline{\varphi(y,x)} =$

$= \frac{1}{4}\overline{[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - \imath\|y+\imath x\|^2 + \imath\|y-\imath x\|^2]}$

$= \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-yi\|^2 + i\|x+yi\|^2]$

$\overline{\varphi(y,x)} = \varphi(x,y)$

Observación:

- $i\|y+ix\|^2 = i\left\|i(\frac{y}{i}+x)\right\|^2 = i\left\|i(\frac{yi}{i^2}+x)\right\|^2 =$

  $i\|i(x-yi)\|^2 = i|i|^2\|x-yi\|^2 = -i\|x-yi\|^2$

- $i\|y-ix\|^2 = i\left\|i(\frac{y}{i}-x)\right\|^2 = i\left\|i(\frac{yi}{i^2}-x)\right\|^2 =$

  $i\|i(-x-yi)\|^2 = i|i|^2\|x+yi\|^2 = -i\|x+yi\|^2$

$\varphi(x,x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0$

$\varphi(x,0) = 0, \quad \forall x \in X$

$\varphi(x,x) = \|x\|^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$

(ii)$\|x+y+z+z\|^2 + \|x+y+z-z\|^2 =$

$2\|x+y+z\|^2 + 2\|z\|^2 \qquad (*)$

$\|x+z+y+z\|^2 + \|x+z-(y+z)\|^2 =$

$2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 \qquad (**)$

(*) - (**)

$\|x+y\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\boldsymbol{2}} = 2\|x+y+z\|^2$

$$+2\|z\|^2 - 2\|x+z\|^2 - 2\|y+z\|^2$$

Además:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 - \{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2\} =$$

$$2\|x+y+z\|^2 + 2\|z\|^2 - 2\|x+z\|^2 - 2\|y+z\|^2$$

Entonces:

$$2\|x+y\|^2 + 2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 = 2\|x+y+z\|^2$$

$$+2\|z\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Corolario.- Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores entonces:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

2.2.7.8. Teorema (Desigualdad de Bessel).- Sea $(x, <,> = 0)$ un espacio producto interno y $\{e_1, \dots \dots, e_n\}$ un conjunto ortonormal de vectores de X. entonces para cualquier $x \in X$ se tiene:

$$\|x_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2$$

Demostración:

Sea

$$y = x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$$

Observación:

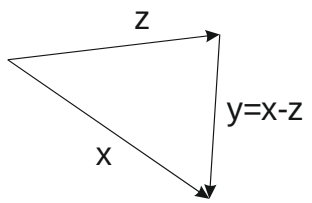
Sea $z \in \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Entonces

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

$$< z, e_j > = < z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + \cdots + z_n e_n, e_j > = \lambda_k$$

$$z = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$$



Entonces:

$$< y, e_k > = < x, e_\ell > - << x, e_1 > \ e_1 + \cdots + < x, e_1 > , e_\ell >$$

$$< y, e_k > = < x, e_\ell > - < x, e_\ell > < e_\ell, e_\ell >$$

$$< y, e_k > = < x, e_\ell > - < x, e_\ell >. (1)$$

$$< y, e_k > = 0$$

Entonces $\quad y \perp e_\ell \quad \forall \ell \in \{1,2, \dots, n\}$

$\{y, < x, e_1 > e_1, \dots, < x, e_n > e_n\}$ Es un conjunto ortogonal

$$\left\| y + \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\|^2 = \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \| < x, e_k > e_k \|^2$$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2$$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2$$

Corolario: Si $\{, e_1, , e_2, \dots, , e_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores entonces

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2 \leftrightarrow x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$$

Demostración:

→)

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2$$

Basta tomar y=0 entonces:

$$x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$$

←)

$$< x, x >= \|x\|^2 = \ < \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \, , \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k >$$

$$< x, x >= \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > \overline{< x, e_k >}$$

$$< x, x >= \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2$$

2.2.8. Operadores Lineales y Continuos

Sea X, Y dos espacios normados sobre un mismo campo de escalares. Decimos que $\boldsymbol{F:(X,\|.\|_1)\rightarrow(Y,\|.\|_2)}$ es continuo en $\boldsymbol{x_0 \in X}$ y si, dado $\varepsilon > \mathbf{0}$, $\exists\delta(\boldsymbol{x_0},\varepsilon) > \mathbf{0}$ tal que:

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}\|_1 < \delta \;\rightarrow\; \|\boldsymbol{F(x)}-\boldsymbol{F(x_0)}\|_2 < \varepsilon$.

2.2.8.1. Teorema 01.- Un operador lineal A: X→Y, dado sobre todo el X y continuo en el punto $0 \in X$ es continuo en cualquier punto $x_o \in X$.

Un operador lineal A: X→Y con $D(A) = X$ se llama continuo si es continuo en el punto $0 \in X$. Un operador lineal A: X→Y con $D(A) = X$ se llama acotado si existe $c \in \mathbb{R}$, $c>0$ tal que para cualquier $x \in \bar{S}_1(0) = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ es válida la desigualdad $\|Ax\| \leqslant c$.

2.2.8.2. Teorema 02.- Un operador lineal A: X→Y con

$D(A) = X$ es acotado si, y solo si para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, $c > 0$

2.2.8.3. Teorema 03 Un operador lineal A: X→Y con

$D(A) = X$ es continua si y solo si, es acotado.

Un número $\mathrm{Sup}_{x\in X\,,\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$ se denomina norma del operador lineal acotado A: X→Y con $D(A) = X$.

2.2.8.4. Continuidad

Sean (X,d_1), (Y,d_2) espacios métricos; un operador $F:X\to Y$; es llamado continuo en $x_0\in X$, si dado $\varepsilon>0$ existe $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$ tal que $d_2(F(x),F(x_0))<\varepsilon$, para todo $x\in X$ para los cuales $d_1(x,x_0)<\delta$.

El operador F es llamado continuo, si es continuo en cada punto $x\in X$.

2.3. Definición de términos

- **(T-convergente)** Una sucesión $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$ se denomina T-convergente hacia un elemento $x \in X$ (se denota $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $n \longrightarrow \infty$) si, $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Si $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ para $n \longrightarrow \infty$, se dice que $\bar{x}_n$ aproxima a x.
- **Operadores de contracción** $T_n x = (x(t_k^{(n)}))_{k=1}^{n}$ donde $\left\{t_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{n}$ es una partición del intervalo $[0, \ell]$.
- **Espacio reticular** $\bar{X}_n = c^n$.
- **(Grado de aproximación)** Si para cierto k natural es válida la desigualdad y se dice que $\bar{x}_n$ aproxima x con grado k

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leq \frac{C(x)}{n^k}$$

- **Condición de estabilidad**

  Si existe una constante $\gamma > 0$ tal, que para cualesquiera $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$ se cumple la desigualdad $\|\bar{A}_n \bar{x}_n\|_{\bar{Y}_n} \geq \gamma \|\bar{x}_n\|_{\bar{X}_n}$, se dice que el esquema aproximado $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ es estable o se cumple la condición de estabilidad.
- **Norma cubo**

$$\|\bar{x}_n\|_{cub} = \operatorname*{Máx}_{1 \leq k \leq n} \left| x_k^{(n)} \right|$$

- **Norma esfera**

$$\|\bar{x}_n\|_{esf} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| x_k^n \right|^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}$$

III. METODOLOGÍA

Como toda investigación en Matemática, se inicia con el estudio detallado de definiciones, a partir de las cuales aplicando técnicas de razonamiento (inductivas y deductivas) propias en la matemática se han estudiado algunos resultados (lemas, teoremas, corolarios) como las sucesiones T-Convergentes en espacios de Banach, estabilidad, normas regulares y normas concordadas y el grado de aproximación de un elemento $x \in X$ y el grado de aproximación de un esquema. Además a continuación se proporciona ejemplos que conllevan al logro de los objetivos.

3.1. Tipo y Diseño de Investigación

El tipo de investigación es descriptiva y exploratoria.

IV. RESULTADOS

4.1. Aproximaciones Discretas de Ecuaciones Operatorias

Definición 1. (T-convergente)

Una sucesión $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$ se denomina T-convergente hacia un elemento $x \in X$ (se denota $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $n \longrightarrow \infty$) si, $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Si $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ para $n \longrightarrow \infty$, se dice que $\bar{x}_n$ aproxima a x. De modo análogo se define la T-convergencia de la sucesión $\bar{y}_n \in \bar{Y}_n$ hacia un elemento $y \in Y$.

Ejemplo 1. Sean x(t) una función suficientemente suave sobre $[0, \ell]$. Sean los operadores de contracción $T_n x = (x(t_k^{(n)}))_{k=1}^{n}$ donde $\left\{t_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{n}$ es una partición del intervalo $[0, \ell]$. En calidad de $\bar{X}_n$ tomemos un espacio reticular (un espacio lineal de funciones dados solamente sobre lo real) con la siguiente norma:

Si $\bar{x}_n = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{n} \in \bar{X}_n$, $\|\bar{x}_n\|_{cub} = \underset{1 \le k \le n}{\text{Máx}} \left|x_k^{(n)}\right|$, así $\bar{X}_n = c^n$.

Luego si $t_i^{(n)} = \frac{i\ell}{n}$, $i = 0,1, \dots, n$ y

$\bar{x}_n = \left\{\frac{1}{2}\left(x\left(t_i^{(n)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\right\}_{i=1}^{n}$ Entonces la sucesión $\bar{x}_n$ es T-convergente hacia x.

Solución:

Tenemos: $\bar{x}_n = \left\{\frac{1}{2}\left(x\left(t_i^{(n)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)\right\}_{i=1}^{n}$

$\bar{x}_n = (x(t_k^n))_{k=1}^{n}$, como $\|\bar{x}_n\|_{cub} = \underset{1\leq k\leq n}{\text{Máx}} \left|x_k^{(n)}\right|$,

$t_i^{(n)} = \frac{i\ell}{n}, \qquad i = 0,1,\dots,n$

Entonces $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \underset{1\leq k\leq n}{\text{Máx}} \left|x\left(t_k^{(n)}\right) - x_k^{(n)}\right|$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \underset{1\leq k\leq n}{\text{Máx}} \left|x\left(t_k^{(n)}\right) - \frac{1}{2}x\left(t_k^{(n)}\right) - \frac{1}{2}\left(x\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right|$$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \frac{1}{2}\underset{1\leq k\leq m}{\text{Máx}} \left|x\left(t_k^{(n)}\right) - x\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|$$

Utilizamos el dato $t_i^{(n)} = \frac{i\ell}{n}, \quad i = 0,1,\dots,n$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \frac{1}{2}\underset{1\leq k\leq m}{\text{Máx}} \left|x\left(\frac{k\ell}{n}\right) - x\left(\frac{(k-1)\ell}{n}\right)\right|$$

$x(t)$ es una función diferenciable en $[0,\ell]$, aplicando el teorema del valor medio para derivadas $x\left(\frac{k\ell}{n}\right) - x\left(\frac{(k-1)\ell}{n}\right) = \left(\frac{k\ell}{n} - \frac{(k-1)\ell}{n}\right) \mathrm{x}'(\varepsilon)$

donde **:**

$\frac{(k-1)\ell}{n} < \varepsilon < \frac{k\ell}{n}$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \frac{1}{2}\underset{1\leq k\leq m}{\text{Máx}} \left|\left(\frac{k\ell}{n} - \frac{(k-1)\ell}{n}\right) \mathrm{x}'(\varepsilon)\right|$$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \frac{\ell}{2n}\underset{1\leq k\leq m}{\text{Máx}} |\,\mathrm{x}'(\varepsilon)\,|\,, \quad \frac{(k-1)\ell}{n} < \varepsilon < \frac{k\ell}{n}$$

Además $x(t)$ es una función suave tenemos (por decir de clase $C^1[0,\ell]$) entonces existe M>0 tal que $|x'(t)| \leq M$, $\forall t \in [0,\ell]$, entonces, esto es la relación anterior se obtiene.

$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} \leq \left(\frac{M\ell}{2}\right)\frac{1}{n}$, Cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos que

$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} \longrightarrow 0.$

Así $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$

Ejemplo 2. Sean x(t) una función suficientemente suave sobre $[0,\ell]$.

Sean los operadores de contracción $T_n x = (x(t_k^{(n)}))_{k=1}^{n}$ donde $\left\{t_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{n}$ es una partición del intervalo $[0,\ell]$. En calidad de $\bar{X}_n$ tomemos un espacio reticular (un espacio lineal de funciones dados solamente sobre lo real) con la siguiente norma:

Si $\bar{x}_n = \left(x_{k=1}^{(n)}\right)_{k=1}^{n} \in \bar{X}_n$, $\|\bar{x}_n\|_{cub} = \underset{1\leq k\leq n}{\text{Máx}}\left|x_k^{(n)}\right|$, así $\bar{X}_n = c^n$.

Luego si $t_i = \frac{i\ell}{n}$, $i = 0,1,\dots,n$ y

$$\bar{x}_n = \left(x_{k=1}^{(n)}\right)_{k=1}^{n} = \left\{\frac{1}{t_i - t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} x(s)ds\right\}_{i=1}^{n}$$

Entonces la sucesión $\bar{x}_n$ es T-convergente hacia x.

Solución:

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \underset{1\leq k\leq n}{\text{Máx}}\left|x\left(t_k^{(n)}\right) - \left(x_{k=1}^{(n)}\right)\right|$$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \underset{1\leq k\leq n}{\text{Máx}}\left|x\left(\frac{k\ell}{n}\right) - \frac{1}{\frac{k\ell}{n} - \frac{(k-1)\ell}{n}}\int_{\frac{(k-1)\ell}{n}}^{\frac{k\ell}{n}} x(s)ds\right|$$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \underset{1\le k\le n}{\text{Máx}} \left| x\left(\frac{k\ell}{n}\right) - \frac{1}{\frac{\ell}{n}} \int_{\frac{(k-1)\ell}{n}}^{\frac{k\ell}{n}} x(s)ds \right|$$

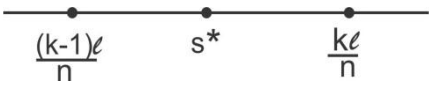
Por el teorema del valor medio para integrales tenemos:

Para algún $s^* \in \langle \frac{(k-1)\ell}{n}, \frac{k\ell}{n} \rangle$

Tenemos:

$$\left| x\left(\frac{k\ell}{n}\right) - \frac{n}{\ell} x(s^*) \left(\frac{k\ell}{n} - \frac{(k-1)\ell}{n}\right) \right| = \left| x\left(\frac{k}{\ell}\right) - \frac{n}{\ell} x(s^*) \frac{\ell}{n} \right|$$

$$= \left| x\left(\frac{k\ell}{n}\right) - x(s^*) \right|$$



Por el teorema del valor medio para derivadas tenemos

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \underset{1\le k\le n}{\text{Máx}} \left| x\left(\frac{k\ell}{n}\right) - x\left(\frac{k\ell}{n} - \frac{k\ell}{n}\right) \right|$$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{cub} = \underset{1\le k\le m}{\text{Máx}} |x'(\varepsilon)| \frac{\lambda\ell}{n} \le \frac{M\ell}{n}, \text{ donde } |x'(t)| \le M ,$$

$\forall t \in [0, \ell]$.

Definición 2. (Grado de aproximación)

Si para cierto k natural es válida la desigualdad

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \le \frac{C(x)}{n^k}$$

Se dice que $\bar{x}_n$ aproxima x con grado k . El grado de aproximación de un elemento $y \in Y$ se define análogamente por la sucesión $\bar{y}_n \in \bar{Y}_n$.

Ejemplo 3.

Del ejemplo anterior observamos que la aproximación se da con grado k=1

Definición 3.

Se dice que la condición de aproximación se cumple, contando con la solución x^* de una ecuación inicial dada.

Si $T_n x^* \in D(\bar{A}_n)$ y cuando $n \longrightarrow \infty$.

$$\|\bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} \longrightarrow 0$$

En este caso se dice también que la ecuación dada se aproxima sobre x^* por el esquema aproximado. Si, además, existen una constante $c > 0$ y un k natural tales, que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad.

$$\|\bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} \leq \frac{c}{n^k}$$

Entonces se dice que el esquema aproxima a la ecuación inicial con grado k.

Ejemplo 4. El ejemplo anterior con $t_i = \frac{i\ell}{n^k}$, k fijo mayor igual a 2, para obtener que $\bar{x}_n$ aproxima x con grado k=1.

Definición 4.

Si existe una constante $\gamma > 0$ tal, que para cualesquiera $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$ se cumple la desigualdad $\|\bar{A}_n \bar{x}_n\|_{\bar{Y}_n} \geq \gamma \|\bar{x}_n\|_{\bar{X}_n}$, se dice que el esquema

aproximado $\bar{A}_n\bar{x}_n = \bar{y}_n$ es estable o se cumple la condición de estabilidad.

Ejemplo 5. ver ejemplo 1

Definición 5.

Supongamos que la ecuación Ax=y es unívocamente resoluble, y x^* es una solución; la soluciones aproximadas $\bar{A}_n\bar{x}_n = \bar{y}_n$ para todos los n son unívocamente resolubles y $\bar{x}^*$ son soluciones. $\bar{x}_n^* \xrightarrow{T} x^*$.

Cuando $n \longrightarrow \infty$ se dice que el esquema aproximado converge. Si además existe una constante $c > 0$ y un L natural tales, que sea válida la desigualdad.

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}^* - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^*\|_{\bar{X}_n} \leq \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{L}}}$$

Entonces se dice que el esquema aproximado converge con grado L, o que el grado de exactitud del esquema aproximado es igual a L.

Teorema 1.

Sean las ecuaciones aproximadas y exactas unívocamente resolubles. Si se cumplen las condiciones de aproximación y estabilidad, el esquema aproximado converge y es válida la desigualdad.

$$\|\bar{x}_n^* - T_n x^*\|_{\bar{X}_n} \leq \gamma^{-1}\|\bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n}$$

Demostración:

De los datos del problema.

i) $\bar{A}_n\bar{x}_n^* = \bar{y}_n$ **,** es la solución aproximada.

ii) $\|\bar{A}_n\bar{x}_n\|_{\bar{Y}_n} \geq \gamma\|\bar{x}_n\|_{\bar{X}_n}$ **,** $\forall\ \bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$ **Def. 4**

iii) $\lim_{n\to\infty}\|\bar{A}_nT_nx^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} = 0$, si $T_nx^* \in D(\bar{A}_n)$ **Def. 5**

De iii) dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 > \mathbb{N}$ tal que: $\|\bar{A}_nT_nx^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N_0$

$$\varepsilon > \|\bar{A}_nT_nx^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} = \|\bar{A}_nT_nx^* - \bar{A}_n\bar{x}_n^*\|_{\bar{Y}_n} = \|\bar{A}_n(T_nx^* - \bar{x}_n^*)\|_{\bar{Y}_n}$$

$$\|\bar{A}_n(T_nx^* - \bar{x}_n^*)\|_{\bar{Y}_n} < \varepsilon \ \ldots(*)$$

Utilizando la condición de estabilidad

$$\varepsilon > \|\bar{A}_n(T_nx^* - \bar{x}_n^*)\|_{\bar{Y}_n} \geq \gamma\|T_nx^* - \bar{x}_n^*\|_{\bar{X}_n} \quad , \quad \forall\, n \geq N_0 \quad \ldots(**)$$

Luego $\|T_nx^* - \bar{x}_n^*)\|_{\bar{X}_n} < \frac{\varepsilon}{\gamma}$, $\forall\, n \geq N_0$

Lo cual implica que $\bar{x}_n^* \xrightarrow{T} x^*$, así el esquema aproximado converge y de (**) es válido la desigualdad

$$\|\bar{x}_n^* - T_nx^*\|_{\bar{X}_n} \leq \gamma^{-1}\|\bar{A}_nT_nx^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n}$$

Proposición 1.

Sean $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $\bar{y}_n \xrightarrow{T} y$, cuando $n \longrightarrow \infty$ entonces para cualquier escalar α y β . $\alpha\bar{x}_n + \beta\bar{y}_n \xrightarrow{T} \alpha x + \beta y$

Demostración:

(i) Dado $\frac{\varepsilon}{2} > \mathbf{0}$ existe $\mathbf{N_0} > \mathbb{N}$ tal que:

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} < \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \forall\, n \geq N_0$$

(ii) Dado $\frac{\varepsilon}{2} > \mathbf{0}$ existe $\mathbf{N_1} > \mathbb{N}$ tal que:

$$\|\bar{y}_n - T_n y\|_{\bar{X}_n} < \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \forall\, n \geq N_1$$

Si $\mathbf{N} = \mathbf{Máx}\{\mathbf{N_0}\ ,\mathbf{N_1}\}$, tenemos

$$\|\alpha\bar{x}_n + \beta\bar{y}_n - T(\alpha x + \beta y)\|_{\bar{X}_n} \leq |\alpha|\|\bar{x}_n - Tx\|_{\bar{X}_n} + |\beta|\|\bar{y}_n - Ty\|_{\bar{X}_n}$$

$$\|\alpha\bar{x}_n + \beta\bar{y}_n - T(\alpha x + \beta y)\|_{\bar{X}_n} < |\alpha|\frac{\varepsilon}{2} + |\beta|\frac{\varepsilon}{2}\quad ,\forall\, n \geq N$$

Luego $\quad \alpha\bar{x}_n + \beta\bar{y}_n \xrightarrow{T} \alpha x + \beta y$

Definición 6.

Si $\|T_n x\|_{\bar{X}_n} \longrightarrow \|x\|_X,\ \ \forall\, x \in X$ cuando $n \longrightarrow \infty$, las normas en $\bar{X}_n$ se llaman concordadas con la norma en X.

Teorema 2.

Si las normas en $\bar{X}_n$ están concordadas con la norma en X, entonces el T-límite es único.

Demostración:

(i) Dado $\varepsilon > \mathbf{0}$ existe $\mathbf{N_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\|T_n x\|_{\bar{X}_n} - \|x\|_X\right| < \varepsilon\ ,\forall\, \mathbf{n} \geq N_0 \quad y \quad \forall\, x \in X.$$

(ii) Supóngase que $\bar{x}_n \xrightarrow{T} \boldsymbol{x}$, $\bar{x}_n \xrightarrow{T} \mathbf{z}$, donde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{X}$

Luego tenemos:

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\bar{X}_n} < \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{2}} \ , \quad \forall\, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{z}\|_{\bar{X}_n} < \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{2}} \ , \ \forall\, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$$

Así tenemos:

$$\|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})\|_{\bar{X}_n} = \|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{z}\|_{\bar{X}_n} = \|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} + \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{z})\|_{\bar{X}_n}$$

$$\|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})\|_{\bar{X}_n} < \|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\bar{X}_n} + \|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\bar{X}_n} < \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})\|_{\bar{X}_n} < \boldsymbol{\varepsilon}\,, \quad \forall\, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

De (iii) y (i) tenemos:

$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| < \mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \forall\, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$ y $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$

Por lo tanto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$

Definición 7.

Si de la relación $\|T_n x\|_{\bar{X}_n} \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, se desprende que x=0, entonces las normas en $\bar{X}_n$ se llaman regulares.

Teorema 3.

El T-limite es único si y solo si las normas en $\bar{X}_n$ son regulares.

Demostración:

$\Longrightarrow$) Supóngase que las normas es $\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}$ son regulares y sea que $\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{n}} \xrightarrow{\mathbf{T}} \boldsymbol{x}$, $\overline{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{n}} \xrightarrow{\mathbf{T}} \boldsymbol{z}$, donde $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \overline{\mathbf{X}}$.

Entonces tenemos: $\|\boldsymbol{T_n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} < \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \forall\, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$, esto equivale a decir:

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\boldsymbol{T_n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} = \mathbf{0}$$

Como las normas en $\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}$ son regulares tenemos que: $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$, luego el T-limite es único.

$\Longleftarrow$) Supongamos que

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} = \mathbf{0}$$

no implica que x=0

Sea $\{\boldsymbol{x_n}\}_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ una secuencia en $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}}$ tal que

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\boldsymbol{x_n}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} = \mathbf{0}$$

Luego

$$\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} \leq \|\boldsymbol{x_n}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} + \|\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}}$$

$$\mathbf{0} \leq \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} \leq \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \left(\|\boldsymbol{x_n}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} + \|\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}}\right) = \mathbf{0}$$

Luego $\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{n}} \xrightarrow{\mathbf{T}} \mathbf{x}$

Además $\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{n}} \xrightarrow{\mathbf{T}} \mathbf{0}$, pues

$$\mathbf{0} \leq \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n}\mathbf{0}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} \leq \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\boldsymbol{x_n}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}} = \mathbf{0}$$

Así la T-convergencia no es única, lo cual es una contradicción.

Ejemplo 6. Del ejemplo 8 obtenemos la relación

$\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{cub}} = \underset{\mathbf{1}\leq \boldsymbol{k}\leq \boldsymbol{n}}{\mathbf{Máx}}\left|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}^{(\boldsymbol{n})}\right|$ y se demostró que si

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$$

, dado $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{n}} = \underset{\mathbf{1}\leq \boldsymbol{i}\leq \boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{Máx}}\left|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}}^{(\boldsymbol{n})} - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})}\right|$, entonces:

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty}\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{cub}} = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty}\underset{\mathbf{1}\leq \boldsymbol{k}\leq \boldsymbol{n}}{\mathbf{Máx}}\left|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}^{(\boldsymbol{n})}\right| = \underset{\mathbf{1}\leq \boldsymbol{k}\leq \boldsymbol{n}}{\mathbf{Máx}}\left|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}^{(\boldsymbol{n})}\right| = \underset{\boldsymbol{t}\in[\mathbf{0},\boldsymbol{\ell}]}{\mathbf{Máx}}|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})|$$

entonces

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty}\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{cub}} = \|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{X}}$$

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty}\|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}} = \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}$$

Por lo tanto las normas en $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{n}}$ están concordadas con la norma dada en $\boldsymbol{X}$.

Ejemplo 7. Sean $X = \ell_2, X = \ell_2^n$. Definamos los operadores de contracción T_n del modo siguiente: para todo $x = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ hacemos $T_n\, x = (\varepsilon_{k+1})_{k=1}^{n}$ Sea $x_0 = (\varepsilon_k^{(0)})_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Demostraremos que la sucesión. $\overline{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{n}} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}^{(\mathbf{0})})_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}$ Tiene un número infinito de T-limites (que atestigua sobre la mala aproximación del espacio $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{2}}$ por los espacios $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{2}}^{\boldsymbol{n}}$ con la ayuda de operadores de contracción $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}$).

Solución:

$$|\bar{x}_n - T_n x| = \left\| \left(\varepsilon_{k+1}^0\right)_{k=1}^n - \left(\varepsilon_{k+1}\right)_{k=1}^n \right\|_{\ell_2^n}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left|\varepsilon_{k+1}^0 - \varepsilon_{k+1}\right|^2 \quad \ldots\ldots..(*)$$

Tomando $(\varepsilon_{k+1})_{k=1}^n = \left(\varepsilon_2^0,\ \varepsilon_3^0,\ \varepsilon_4^0, \ldots, \varepsilon_n^0,\ \varepsilon_{\frac{n+1}{n^2}}^0\right)$ tenemos en (*)

$$\left\| (\varepsilon_{k+1}^0)_{k=1}^n - (\varepsilon_{k+1}^{n^2})_{k=1}^n \right\|_{\ell_2^n}^2 = \left| \varepsilon_{n+1}^0 - \varepsilon_{\frac{n+1}{n^2}}^0 \right|^2 \longrightarrow 0$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$

Ejemplo 8. Sean x(t) una función suficientemente suave sobre $[0, \ell]$. Sean los operadores de contracción $T_n x = (x(t_k^{(n)}))_{k=1}^n$ donde $\left\{t_k^{(n)}\right\}_{k=1}^n$ es una partición del intervalo $[0, \ell]$. En calidad de $\bar{X}_n$ tomemos un espacio reticular (un espacio lineal de funciones dados solamente sobre lo real) con la siguiente norma: si

$\bar{x}_n = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^n \in \bar{X}_n$, $\|\bar{x}_n\|_{cub} = \underset{1 \le k \le n}{\text{Máx}} \left|x_k^{(n)}\right|$, así $\bar{X}_n = c^n$. Luego si $t_i = \frac{i\ell}{n}$, $i = 0,1, \ldots, n$

$$\|\bar{x}_n\|_{esf} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|x_k^n\right|^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}$$

y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$=0 donde $\lambda_n = \underset{1 \le i \le n-1}{\text{Máx}} \left|t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right|$, entonces

Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|_{esf} = \left[\int_0^\ell |x(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$

Demostración:

Probaremos que:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n-1} |x(t_k^n)| = \max_{t\in[0,\ell]} |x(t)|$$

Cuando

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

, donde $\lambda_n = \underset{1\leq i\leq n-1}{\text{Máx}} \left| t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} \right|$

Como X es continuo en $[0,\ell]$, siendo $[0,\ell]$ un conjunto compacto, existe $t^* \in [0,\ell]$ tal que

$$|x(t_k^n)| \leq |x(t^*)| = \max_{t\in[0,\ell]} |x(t)|$$

$$\lim_{n\to\infty} |x(t_k^n)| \leq |x(t^*)| = \max_{t\in[0,\ell]} |x(t)| \qquad \ldots \ (i)$$

Además como:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0;$$

Dado $\delta > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$\lambda_n < \delta, \ \ \forall n \geq N_0$ es decir $\left| t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} \right| < \delta, \ \ \forall n \geq N_0$ y $\forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$

Luego existe $i_0 \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ tal que $t^* \in \left[t_{i_0+1}^{(n)}, t_{i_0}^{(n)} \right]$, así por la continuidad de la función x, tenemos:

Dado $\varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, tal que:

$$\left| t_{i_0}^{(n)} - t^* \right| < \delta \ \ entonces \ \left| x(t^*) - x(t_{i_0}^n) \right| < \varepsilon,$$

$$\forall n \geq N_0 \ldots (ii)$$

De la relación (ii) tenemos:

$$|x(t^*)| < \varepsilon + \left|\left(t_{i_0}^{(n)}\right)\right|, \qquad \forall n \geq N_0$$

$$|x(t^*)| < \varepsilon + \max_{1\leq i\leq n-1}\left|x(t_i^{(n)})\right|, \qquad \forall n \geq N_0 \quad y \quad \varepsilon > 0$$

$$|x(t^*)| \leq \max_{1\leq i\leq n-1}\left|x(t_i^{(n)})\right|, \qquad \forall n \geq N_0$$

$$|x(t^*)| \leq \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n-1}\left|x\left(t_i^{(n)}\right)\right| \qquad \ldots (iii)$$

De las relaciones (i) y (iii) tenemos lo pedido, luego

$$\|\mathrm{T_n x}\|_{\mathrm{esf}} = \left\|x\left(t_k^{(n)}\right)_{k=1}^{n-1}\right\|_{\mathrm{esf}} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(x\left(\boldsymbol{t_k^n}\right)\right)^{\boldsymbol{2}} (\boldsymbol{t_{k+1}^{(n)}} - \boldsymbol{t_k^{(n)}})}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\|\mathrm{T_n x}\|_{\mathrm{esf}} = \sqrt{\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(x\left(\boldsymbol{t_k^n}\right)\right)^{\boldsymbol{2}} (\boldsymbol{t_{k+1}^{(n)}} - \boldsymbol{t_k^{(n)}})}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\|\mathrm{T_n x}\|_{\mathrm{esf}} = \left[\int_0^{\ell} |x(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

Lema 1.

$$\sqrt{\frac{\ell}{n}}\|\bar{x}_n\|_{cub} \leq \|\bar{x}_n\|_{esf} \leq \sqrt{\ell}\|\bar{x}_n\|_{cub}$$

Demostración:

$$\|\boldsymbol{\bar{x}_n}\|_{\boldsymbol{cub}} = \underset{\boldsymbol{1\leq k\leq n}}{\mathbf{Máx}}\left|\boldsymbol{x_k^{(n)}}\right|, \quad \boldsymbol{\bar{x}_n} = (\boldsymbol{x_1^n},\ \boldsymbol{x_2^n},\ \boldsymbol{x_3^n}, \ldots, \boldsymbol{x_n^n})$$

Como $\left|\boldsymbol{x_k^{(n)}}\right| \leq \|\boldsymbol{\bar{x}_n}\|_{\boldsymbol{cub}}$, elevamos al cuadrado m.a.m

$$\left|\boldsymbol{x_k^{(n)}}\right|^{\boldsymbol{2}} \leq \|\boldsymbol{\bar{x}_n}\|_{\boldsymbol{cub}}^{\boldsymbol{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(*)$$

$$\left\|x_k^{(n)}\right\|_{\text{esf}}^2 = \sum_{k=1}^{n}\left|x_k^{(n)}\right|^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$$

$$\left\|x_k^{(n)}\right\|_{\text{esf}}^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\|\bar{x}_n\|_{cub}^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$$

$$\left\|x_k^{(n)}\right\|_{\text{esf}}^2 \leq \|\bar{x}_n\|_{cub}^2 \sum_{k=1}^{n}(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$$

$$\left\|x_k^{(n)}\right\|_{\text{esf}}^2 \leq \|\bar{x}_n\|_{cub}^2 \left[\left(t_0^{(n)} - t_1^{(n)}\right) + \left(t_2^{(n)} - t_1^{(n)}\right) + \cdots + (t_{n+1}^{(n)} - t_n^{(n)})\right]$$

$$\left\|x_k^{(n)}\right\|_{\text{esf}}^2 \leq \|\bar{x}_n\|_{cub}^2 . \ell$$

$$\|\bar{x}_n\|_{esf} \leq \sqrt{\ell}\|\bar{x}_n\|_{cub} \quad \ldots(1)$$

Así mismo: $\|\bar{x}_n\|_{esf}^2 \geq \left|x_{k_0}^{(n)}\right|^2 (t_{k_0+1}^{(n)} - t_{k_0}^{(n)})$ … (**)

Donde

$$\|\bar{x}_n\|_{cub} = \left|x_{k_0}^{(n)}\right| \leq \max_{1\leq i\leq n-1}\left|x_k^{(n)}\right|$$

De (**)

$$\|\bar{x}_n\|_{esf}^2 \geq \|\bar{x}_n\|_{cub}^2 (t_{k_0+1}^{(n)} - t_{k_0}^{(n)})$$

$$\sum_{k_0=1}^{n}\|\bar{x}_n\|_{esf}^2 \geq \sum_{k_0=1}^{n}\|\bar{x}_n\|_{cub}^2 (t_{k_0+1}^{(n)} - t_{k_0}^{(n)})$$

$$\|\bar{x}_n\|_{esf}^2 . n \geq \|\bar{x}_n\|_{cub}^2 \sum_{k_0=1}^{n}(t_{k_0+1}^{(n)} - t_{k_0}^{(n)})$$

$$\|\bar{x}_n\|_{esf}^2 . n \geq \left\|x_{k_0}^{(n)}\right\|_{cub}^2 \ell$$

$$\|\bar{x}_n\|_{esf} \geq \left\|x_{k_0}^{(n)}\right\|_{cub}\sqrt{\frac{\ell}{n}} \quad \ldots(2)$$

De (1) y (2)

$$\sqrt{\frac{\boldsymbol{\ell}}{\boldsymbol{n}}}\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{cub}} \leq \|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{esf}} \leq \sqrt{\boldsymbol{\ell}}\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{cub}}$$

Definición 8.

Una sucesión $\{\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\}_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \subset \overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{n}}$ se denomina T-convergente hacia el elemento $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$:

(a) En Media si $\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{esf}} \longrightarrow \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$

(b) Uniformemente, si $\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{cub}} \longrightarrow \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty.$

Proposición 2.

Demuestre que la T-convergencia uniforme se deduce la T-convergencia en promedio, pero la afirmación contraria no es válida.

Demostración: Usando el lema 1. Tenemos:

$$\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{cub}} \longrightarrow \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty.$$

Luego $\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{esf}} \leq \sqrt{\boldsymbol{\ell}}\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{cub}}$

Así es claro que $\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{esf}} \longrightarrow \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$

Definición 9.

Si $\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$, se dice que $\overline{x}_n \xrightarrow{\mathbf{T}} \boldsymbol{x}$ con la velocidad $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}$. Si $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{n}} > \boldsymbol{0}$ y $\|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}\|_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{n}}} \leq \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}), \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$, se dice que $\overline{x}_n \xrightarrow{\mathbf{T}} \boldsymbol{x}$ con velocidad $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}})$.

Proposición 3.

(a) Si $\bar{x}_n \xrightarrow{T} \boldsymbol{x}$ uniformemente con velocidad $\boldsymbol{\varphi_n}$, entonces $\bar{x}_n \xrightarrow{T} \boldsymbol{x}$, en promedio con la misma velocidad.

(b) Si $\bar{x}_n \xrightarrow{T} \boldsymbol{x}$ en promedio con una velocidad $\boldsymbol{\varphi_n = O(\frac{1}{\sqrt{n}})}$, entonces $\bar{x}_n \xrightarrow{T} \boldsymbol{x}$, en uniformemente. Con una velocidad $\sqrt{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\varphi_n}$.

Demostración:

Usando el lema (1) $\sqrt{\frac{\boldsymbol{\ell}}{\boldsymbol{n}}}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{cub}} \leq \|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{esf}} \leq \sqrt{\boldsymbol{\ell}}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}}\|_{\boldsymbol{cub}}$

Tenemos del lema (1)

(a) $\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n x}\|_{\boldsymbol{cub}} \leq \boldsymbol{\varphi_n} \longrightarrow \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$

Por lo tanto:

$\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n x}\|_{\boldsymbol{esf}} \leq \sqrt{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{\varphi_n} \longrightarrow \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty.$

(b) $\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n x}\|_{\boldsymbol{esf}} \leq \boldsymbol{O}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right), \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \infty.$

Tenemos del **Lema 1.**

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n x}\|_{\boldsymbol{cub}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{\ell}}{\boldsymbol{n}}} \leq \|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n x}\|_{\boldsymbol{esf}} \leq \boldsymbol{O}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right) = \boldsymbol{\varphi_n}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T_n x}\|_{\boldsymbol{cub}} \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{\ell}}}\sqrt{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\varphi_n}$$

Ejemplo 9. Sean Q un rectángulo $(0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq t \leq \theta)$, C(Q) un espacio de funciones continuas sobre Q con la norma.

$$\|\boldsymbol{u}\| = \underset{(x,t)\in Q}{\text{Máx}} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})|$$

Realicemos la partición de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ en $\boldsymbol{n}$ partes iguales con los puntos

$\boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots\boldsymbol{n}$ y el segmento $[\mathbf{0},\boldsymbol{\theta}]$ en m partes iguales con los puntos $\boldsymbol{t_j} = \frac{\boldsymbol{j\theta}}{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{j} = \mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots\boldsymbol{m}$.

Sean $\boldsymbol{Q_{nm}} = \{(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{t_j}), \boldsymbol{i} = \mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{j} = \mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots\boldsymbol{m}\ \}$

Consideremos un espacio reticular $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q_{nm}})$ con la norma

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{nm}}\| = \underset{(x,t)\in Q_{nm}}{\text{Máx}} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})|$$

Veremos que las normas en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q_{nm}})$ están concordadas con la norma en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q})$.

Definamos $\boldsymbol{T_k}\ :\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q_{nm}})$

$$\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{T_k}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{t_j}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{t_j})$$

$|\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{t_j})| = \boldsymbol{M}\text{á}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{t_j})|$ …….(*)

Como Q es compacto y u es continua en Q, existen $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{t}^*) \in \boldsymbol{Q}$ tal que:

$$\|\boldsymbol{u}\| = |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{t}^*)|$$

$\boldsymbol{x}^* \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$, luego existe una secuencia de números racionales $\boldsymbol{r_n}$ tal $\boldsymbol{r_i} \longrightarrow \boldsymbol{x}^*$, luego existe una partición tal que $\boldsymbol{r_i} = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}$ análogamente.

$\boldsymbol{t}^* \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}]$, $\{\boldsymbol{v_i}\}$ una secuencia de números racionales tal que $\boldsymbol{v_j} \longrightarrow \boldsymbol{t}^*$, luego existe una partición tal que $\boldsymbol{v_j} = \frac{\boldsymbol{j\theta}}{\boldsymbol{m}}$. Así

$$\left|\boldsymbol{T_k u}(\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{v_j})\right| = \lim_{\substack{\mathbf{i}\to\infty \\ \mathbf{j}\to\infty}} \left|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{v_j})\right| = |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)|$$

$$\|\boldsymbol{T_k u}\| = |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)|$$

$$\lim_{\mathbf{k}\to\infty} \|\boldsymbol{T_k u}\| = \|\boldsymbol{u}\|$$

Definición 10.

Se dice que una sucesión $\bar{A}_{\mathrm{n}}$ aproxima A sobre el elemento $x \in D(A)$ si $T_n x \in D(\bar{A}_{\mathrm{n}})$, $n \in \mathbb{N}$ y, cuando $\mathrm{n} \to \infty$.

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}} \boldsymbol{T_n x} - \boldsymbol{T'_n A x}\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \to \mathbf{0}$$

Teorema 4.

Sea que $\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}$ aproxima A sobre la solución exacta $\boldsymbol{x}^*$, $\bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}}$ aproxima a y $\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{n}} \xrightarrow{\mathbf{T}'} \boldsymbol{y}$. Entonces la ecuación $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{y}$ se aproxima por el esquema aproximado $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{n}}=\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{n}}$ sobre $\boldsymbol{x}^*$.

Demostración:

De los datos del problema tenemos:

(i). $\bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}} \longrightarrow \boldsymbol{y}$ para $\boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$

(ii). que $\mathbf{T}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{D}(\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}})$ y cuando $\boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \to \mathbf{0}$$

Luego tenemos:

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}}\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} = \|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}}\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}}\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \leq \|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*\| + \|\boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}}\|$$

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}}\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \leq \|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*\| + \|\boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{n}}\|$$

Lema 2.

Sean $\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}} = \mathrm{X}$, $\bar{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n}} = \mathrm{Y}$, T_n y T'_n operadores idénticos. Entonces la condición de aproximación de un operador A por una sucesión de operadores A_n sobre un conjunto $M \subset D(A)$ significa la convergencia fuerte de A_n hacia A sobre M.

Demostración:

En la definición (10) basta tomar $\boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{I_x}$, $\boldsymbol{T'_n} = \boldsymbol{I_y}$ y tendremos que:

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{Y}} \to \mathbf{0} \text{ Para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbf{D}(\mathrm{A}).$$

Ejemplo 10.

Sean $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{C}[0,1]$, $\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}} = \bar{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n}} = C^n$, $T_n x = T'_n x = \left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=1}^{n}$,

$\mathrm{Ax} = \frac{dx}{dt}$ con $D(A) =$ {x(t) continuamente diferenciable sobre $[0,1]$ y que satisfacen la condición x(0)=0}.

Demostraremos que la sucesión de operadores:

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{n} & \mathbf{n} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{n} & \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

Aproxima el operador A sobre D(A).

Solución:

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n x} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\left(\boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n x} = \boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{x}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right), -\boldsymbol{x}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{x}\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right), \dots, -\boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right) + (\mathbf{1})\right) \dots \text{(i)}$$

Sea $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$, luego $\boldsymbol{y} \in \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{C^n}$,

$$\boldsymbol{T'_n y} = \boldsymbol{T'_n}\left(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}}^{(\boldsymbol{n})}\right)_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} = \left(\boldsymbol{y}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} = \left(\boldsymbol{x}'\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n x} - \boldsymbol{T'_n A x}\| = \underset{\mathbf{1}\le\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{n}}{\mathrm{Máx}}\left|\boldsymbol{x}'\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right) - \boldsymbol{n}\left[\boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right) - \boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)\right]\right|$$

Como $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})$ entonces por el teorema del valor medio para derivadas tenemos:

$$\frac{\boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right) - \boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)}{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}} - \frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}) \ , \quad \frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \le \boldsymbol{\varepsilon_k} \le \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}$$

Entonces

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{nx}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right) - \boldsymbol{nx}\left(\frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right) = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{\varepsilon_k})$$

Por lo tanto tenemos:

$$\|\bar{A}_{\mathrm{n}}T_n x - T'_n A x\| = \underset{1\le k\le n}{\text{Máx}} \left| x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(\varepsilon_k)\right|, \quad \frac{k-1}{n} \le \varepsilon_k \le \frac{k}{n}$$

Por tanto $\|\bar{A}_{\mathrm{n}}T_n x - T'_n A x\| < \varepsilon$, pues $\left| x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(\varepsilon_k)\right| < \varepsilon$

ya que $\left|\frac{k}{n} - \varepsilon_k\right| < \frac{1}{n}$.

Definición 11.

Se dice que la sucesión $\bar{A}_{\mathrm{n}}$ aproxima A sobre el elemento x con grado ℓ si se cumple la desigualdad

$$\|\bar{A}_{\mathrm{n}}T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \le \frac{c(x)}{n^{\ell}}$$

Ejemplo 11.

Sea que en las condiciones del problema anterior $x(t) \in \mathrm{D(A)}$ y tiene su segunda derivada acotada sobre $[0,1]$, Demostraremos que $\bar{A}_{\mathrm{n}}$ aproxima A sobre x con grado 1, además es correcta la estimación.

$$\|\bar{A}_{\mathrm{n}}T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \le \frac{\gamma_2}{n^{\ell}}$$

Donde

$$\gamma_2 = \underset{t\in\langle 0,1\rangle}{\text{Sup}} |x''(t)|$$

Del **ejemplo (10)**

$$\|\bar{A}_{\mathrm{n}}T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} = \underset{1\le k\le n}{\text{Máx}} \left| x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(\varepsilon_k)\right| \quad \text{donde}$$

$\frac{k-1}{n} \le \varepsilon_k \le \frac{k}{n}$, $k = 1, \dots, n$ como $x''(t)$ existe en $[0, 1]$ tenemos que:

$\frac{x'\left(\frac{k}{n}\right)-x'(\varepsilon_k)}{\frac{k}{n}-\varepsilon_k} = x''(\varepsilon_k^*)$, donde $\frac{k-1}{n} < \varepsilon_k < \varepsilon_k^* < \frac{k}{n}$ entonces

$$\left|x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(\varepsilon_k)\right| = \left|\frac{k}{n} - \varepsilon_k\right| |x''(\varepsilon_k^*)|$$

$$\leq \gamma_2 \left|\frac{k}{n} - \varepsilon_k\right| \leq \gamma_2 \left|\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right| = \gamma_2 \frac{1}{n}$$

Así $\|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_n} \leq \gamma_2 \frac{1}{n}$ ■

Proposición 4.

Sean $\bar{R}_n = R(\bar{A}_n)$ subespacios en $\bar{Y}_n$ y sea que sobre $\bar{R}_n$ están definidos los operadores A_n^{-1} y $\| \bar{A}_n^{-1} \|_{\mathcal{L}(\bar{R}_n, \bar{X}_n)} \leq \gamma^{-1}$, donde γ>0 es una constante. Entonces el esquema aproximado $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ es estable y $R(\bar{A}_n)$ es cerrado.

Demostración:

(i) $\| \bar{A}_n^{-1} \bar{y} \| \leq \| \bar{A}_n^{-1} \| \|\bar{y}\| \leq \gamma^{-1} \|\bar{y}\|$, $\bar{y} \in \bar{R}_n$ Entonces:

$\gamma \| \bar{x}_n \| \leq \| \bar{A}_n \bar{x}_n \|$, $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$

(ii) Sea $\bar{x}_n \in \overline{R(\bar{A}_n)}$ entonces existe $\{\bar{y}_n\} \subset R(\bar{A}_n)$ tal que:

$$\bar{y}_m \longrightarrow \bar{y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Como $\bar{A}_n \bar{x}_m = \bar{y}_m$, $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n) \longrightarrow \bar{x}_m = A_n^{-1} \bar{y}_m$

$$\lim_{m\to\infty} \bar{x}_m = \lim_{m\to\infty} A_n^{-1} \bar{y}_m$$

como A_n^{-1} en continua tenemos:

x=$\mathbf{A_n^{-1}}\bar{y} \longrightarrow \bar{\mathbf{A}}_\mathbf{n}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, x $\in \mathbf{D}(\bar{\mathbf{A}}_n)$ Implica que y $\in \mathbf{R}(\bar{\mathbf{A}}_n)$ por lo tanto $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{A}}_n) = \overline{\mathbf{R}(\bar{\mathbf{A}}_n)}$

Teorema 5.

Sea que una sucesión $\bar{\mathbf{A}}_n$ aproxima a $\mathbf{A}$ sobre una solución exacta $\boldsymbol{x}^*$ con grado $\boldsymbol{\ell}$, y que una sucesión $\bar{\boldsymbol{y}}_n$ aproxima a $\mathbf{y}$ con grado $\mathbf{k}$. Entonces el esquema aproximado aproxima la solución exacta con grado $\mathbf{mín}(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{k})$.

Demostración:

(i) $\bar{y}_n \xrightarrow{\mathbf{T}'} \boldsymbol{y}$

(ii) $\mathbf{T}_n\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{D}(\bar{\mathbf{A}}_n)$ y cuando $\mathbf{n} \to \infty$ tenemos:

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_n\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*\|_{\bar{\boldsymbol{Y}}_n} \longrightarrow \mathbf{0} \quad \text{Ademas } A\boldsymbol{x}^* = y \quad \ldots(iii)$$

De las relaciones (i), (ii), (iii) tenemos

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_n\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_n\|_{\bar{\boldsymbol{Y}}_n} = \|\bar{\boldsymbol{A}}_n\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}_n - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*\|_{\bar{\boldsymbol{Y}}_n}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_n\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_n\|_{\bar{\boldsymbol{Y}}_n} \leq \frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{\ell}}} + \frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}} + \|\boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{y}\|_{\bar{\boldsymbol{Y}}_n}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_n\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \bar{\boldsymbol{y}}_n\|_{\bar{\boldsymbol{Y}}_n} \leq \frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{\ell}}} + \frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}} \leq \frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{min}(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k})}}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{A}}_n\boldsymbol{T_n}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{T'_n}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*\|_{\bar{\boldsymbol{Y}}_n} \leq \frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{min}(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k})}}$$

Teorema 6.

Sean x_1, x_2 soluciones exactas y que se cumple la condición de estabilidad entonces:

$$\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{T_n}(x_1 - x_2)\|_{\bar{X}_{\mathbf{n}}} \leq \|\bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_1} - T_n' A \boldsymbol{x_1}\|_{\bar{Y}_{\mathbf{n}}} + \|\bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_2} - T_n' A \boldsymbol{x_2}\|_{\bar{Y}_{\mathbf{n}}}$$

Demostración:

i. $Ax_1 = y \quad , \qquad Ax_2 = y$

ii. $\gamma\|\bar{x}_n\|_{\bar{X}_n} \leq \|\bar{A}_n \bar{x}_n\|_{\bar{Y}_n}$

De la relación ii

$$\gamma\|T_n x_1 - T_n x_2\|_{\bar{X}_n} = \gamma\|\bar{x}_{1n} - \bar{x}_{2n}\|_{\bar{X}_n} \leq \|\bar{A}_n(\bar{x}_{1n} - \bar{x}_{2n})\|_{\bar{Y}_n}$$

$$\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{T_n} x_1 - \boldsymbol{T_n} x_2\|_{\bar{X}_{\mathbf{n}}} \leq \|\bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_1} - \bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_2}\|_{\bar{Y}_{\mathbf{n}}}$$

$$\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{T_n} x_1 - \boldsymbol{T_n} x_2\|_{\bar{X}_{\mathbf{n}}} \leq \|\bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_1} - T_n' A \boldsymbol{x_1} + T_n' A \boldsymbol{x_1} - \bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_2}\|_{\bar{Y}_{\mathbf{n}}}$$

$$\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{T_n} x_1 - \boldsymbol{T_n} x_2\|_{\bar{X}_{\mathbf{n}}} \leq \|\bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_1} - T_n' A \boldsymbol{x_1}\|_{\bar{Y}_{\mathbf{n}}} + \|T_n' A \boldsymbol{x_2} - \bar{A}_{\mathbf{n}} T_n \boldsymbol{x_2}\|_{\bar{Y}_{\mathbf{n}}}$$

Proposición 5.

Sea una sucesión $\bar{A}_n$ aproxima A sobre cada solución exacta, las normas en $\bar{X}_n$ son regulares y se cumple la condición de estabilidad. Entonces la solución exacta no tiene más de una solución.

Demostración:

i. $\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{x}\| \to \mathbf{0}$, cuando $\boldsymbol{n} \to \infty$, entonces x=0 esto es por el hecho de que las normas en $\bar{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{n}}$ son regulares.

$\|\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{T_n x} - \boldsymbol{T'_n A x}\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \to \mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{n} \to \infty$, supongamos que existen $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ dos soluciones exactas por el teorema 6 y la condición de estabilidad tenemos.

$$\gamma \lim_{n\to\infty} \|T_n \mathrm{x}_1 - T_n \mathrm{x}_2\| = \lim_{n\to\infty} \gamma \|\bar{x}_{1\mathrm{n}} - \bar{x}_{2\mathrm{n}}\| = 0 \quad \textbf{...(**)}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n \mathrm{x}_1 = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_{1\mathrm{n}} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} T_n \mathrm{x}_2 = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_{2\mathrm{n}} \quad ,$$

como las normas son regulares de i y (**) tenemos: $\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 = 0$ entonces $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ entonces.

La solución es única.

Lema 3.

Si se cumple la condición de estabilidad entonces toda ecuación operatoria no tiene más de una solución.

Demostración:

i. $\|\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}}\|_{\bar{Y}_{\mathrm{n}}} \geq \gamma \|\bar{x}_{\mathrm{n}}\|_{X_{\mathrm{n}}}$, algún $\gamma > 0$.

ii. $\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}} = \bar{y}_{\mathrm{n}}$, $\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}^*_n = \mathrm{y}_{\mathrm{n}}$ son las soluciones aproximadas.

Suponga que $\bar{z}^*_n$, $\bar{w}^*_n$ son soluciones aproximadas de la ecuación $\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}} = \bar{y}_{\mathrm{n}}$

$$\gamma \|\bar{z}^*_n - \bar{w}^*_n\| \leq \|\bar{A}_{\mathrm{n}}(\bar{z}^*_n - \bar{w}^*_n)\| = 0$$

Entonces $\bar{z}^*_n = \bar{w}^*_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Proposición 6.

Sea que para todas las soluciones aproximadas posibles de una esquema aproximada $\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}} = \bar{y}_{\mathrm{n}}$ se obtiene la estimación $\|\bar{x}_{\mathrm{n}}\| \leq \gamma^{-1}\|\bar{y}_{\mathrm{n}}\|$, donde γ es una constante positiva. Entonces se cumple la condición de estabilidad

Demostración:

$$\gamma\|\bar{x}_{\mathrm{n}}\| \leq \|\bar{y}_{\mathrm{n}}\| = \|\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}}\|$$

Proposición 7.

Sean $\bar{X}_{\mathrm{n}}$, $\bar{Y}_{\mathrm{n}}$ de dimensiones finitas iguales y que cumplen la condición de estabilidad. Entonces $N(\bar{A}_{\mathrm{n}}) = 0$.

Demostración:

Como $\gamma\|\bar{x}_{\mathrm{n}}\| \leq \|\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}}\|$, $\gamma > 0$, esto por la condición de estabilidad, tenemos que si $\bar{x}_{\mathrm{n}} \in Ker\bar{A}_{\mathrm{n}}$ entonces $\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}} = 0$ entonces $\gamma\|\bar{x}_{\mathrm{n}}\| \leq 0$ entonces $\bar{x}_{\mathrm{n}} = 0$ pues $\gamma > 0$.

Corolario 1.

Sea $\bar{Y}_{\mathrm{n}} = \bar{X}_n^*$ entonces para $\bar{A}_{\mathrm{n}}$ se cumple la condición de estabilidad, si para toda sucesión $\bar{x}_{\mathrm{n}} \in D(\bar{A}_{\mathrm{n}})$ se verifica la desigualdad $\langle \bar{x}_{\mathrm{n}}, \bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}} \rangle \geq \gamma\|\bar{x}_{\mathrm{n}}\|^2$, $\gamma > 0$ es una constante.

Demostración:

Por la desigualdad de Cauchy – Shwartz tenemos:

$$\gamma\|\bar{x}_{\mathrm{n}}\|^2 \leq \langle \bar{x}_{\mathrm{n}}, \bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}} \rangle \leq \|\bar{x}_{\mathrm{n}}\|\|\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}}\|$$

$$\gamma\|\bar{x}_{\mathrm{n}}\| \leq \|\bar{A}_{\mathrm{n}}\bar{x}_{\mathrm{n}}\|$$

Ejemplo 12.

Con las siguientes condiciones

$\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{C}[0,1]$, $\bar{X}_{\mathrm{n}} = \bar{Y}_{\mathrm{n}} = C^n$,

$\mathrm{T_n}x = T_n' x = \left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=1}^{n}$, $\quad Ax = \frac{dx}{dt}$ con D(A) compuesto de funciones x(t), continuamente diferenciables sobre $[0,1]$ y que satisfacen la condición x(0)=0 . Demostrar si cumple la condición de estabilidad, donde

$$\bar{A}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & n \end{bmatrix}$$

Aproxima al operador A sobre D(A).

Esto se demostró en el **ejemplo 10**.

Luego es fácil demostrar que:

$$\bar{A}_{\mathrm{n}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Donde $\bar{A}_{\mathrm{n}}: C^n \to C^n$, $\| \bar{A}_n^{-1} \| = \sup_{\| \bar{y}_{\mathrm{n}} \|_{C^n} = 1} \| \bar{A}_n^{-1} \bar{y}_{\mathrm{n}} \|_{C^n} \leq 1 \leq 2$

Luego $\| \bar{A}_n^{-1} \bar{y}_{\mathrm{n}} \|_{C^n} \leq 1 . \| \bar{y}_{\mathrm{n}} \|_{C^n}$, $\quad \forall\, \bar{x}_{\mathrm{n}} \in D(\bar{A}_n^{-1})$ sea $\bar{A}_n^{-1} \bar{y}_{\mathrm{n}} = \bar{x}_{\mathrm{n}}$ luego $\bar{y}_{\mathrm{n}} = \bar{A}_{\mathrm{n}} \bar{x}_{\mathrm{n}}$, por lo tanto $\| \bar{x}_{\mathrm{n}} \|_{C^n} \leq \| \bar{A}_{\mathrm{n}} \bar{x}_{\mathrm{n}} \|$, con lo cual se cumple la condición de estabilidad, y

$$\| \bar{A}_{\mathbf{n}} T_n x - T_n' A x \|_{\bar{Y}_{\mathbf{n}}} \to 0$$

V. CONCLUSIONES

- Al resolver la ecuación $Ax = y$ donde $D(A) \subset X$, $R(A) \subset Y$, con X, Y son espacios de Banach, se observa que el operador A, se puede aproximar por una sucesión de operadores $\{\bar{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y obtener soluciones aproximadas.

  Si $\overline{X}_n = X$, $\overline{Y}_n = Y$, T_n y T'_n operadores idénticos, entonces la condición de aproximación de una operador A por una sucesión de operadores A_n sobre un conjunto $M \subset D(A)$ significa que la convergencia es fuerte de A_n hacia A sobre M.

- El T-limite es único, por lo tanto la aproximación de A_n hacia A es buena.

- Si se cumple la condición de estabilidad entonces toda ecuación aproximada no tiene más de una solución.

- Sea que una sucesión $\overline{A}_n$ aproxima A sobre cada solución exacta, las normas en X_n son regulares y se cumple la condición de estabilidad, entonces la ecuación $Ax = y$, no tiene más de una solución.

  Las normas en $\overline{X}_n$ deben ser concordadas para que la aproximación de A_n aproxima A debe ser buena.

- Cuanto mayor sea el grado de aproximación la aproximación de los operadores A_n aproxima a A entonces la convergencia es rápida.

VI. RECOMENDACIONES

- Este trabajo se puede extender para resolver la ecuación $Ax = y$ con operadores no lineales por lo tanto se recomienda seguir investigando este tema.
- En esta investigación se utilizado los cursos de algebra lineal, topología, análisis funcional, etc. Se recomienda reforzar a los estudiantes de pregrado en los mencionados cursos.
- En esta investigación se ha trabajado con derivadas e integrales se puede extender buscando más aplicaciones en esta área.

Definición de Símbolos

Símbolo	**Nombre**
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números Reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números Complejos.
$\mathbb{R}^2$	Plano cartesiano.
$\lvert . \rvert$	Valor absoluto.
$\lVert . \rVert_X$	Función norma sobre un espacio vectorial X .
$C[\, a, b \,]$	Espacio de las funciones continúas en el intervalo $[\, a, b \,]$.
d	Función distancia.
$C^1[\, a, b \,]$	Espacio de las funciones con 1^{era} derivada continúa en el intervalo $[\, a, b \,]$
$\langle \, , \, \rangle$	Función producto interno.
$\perp$	Símbolo de ortogonalidad.
A	Operador (también llamado aplicación lineal), cuando su dominio es un conjunto de funciones.
A^{-1}	Operador inverso del operador A.
$\bar{\lambda}$	Conjugado de λ , $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\mathcal{L}(x, y)$	Conjunto de todas las aplicaciones lineales y continúas.
D(A)	Dominio de A
R(A)	Rango de A

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cerna Maguiña Bibiano Martín, (2008). Análisis Funcional, UNASAM.
- Charles W. Groetsch,(1968). Elements of Applicable Functional Analysis, STANFORD.
- Chumpitaz Reyna Mauro,(1984). Análisis Funcional, UNI.
- Cesar R. de Oliveira,(2010). Introducción al Análisis Funcional, Editorial Impa.
- Ortiz Fernandez Alejandro,(1986). Análisis real- funcional, UNT.
- V.A.Trenoguin, B.M.Pisarievsky, T.S.Sóbolova,(1984).Problemas y ejercicios de Análisis Funcional, Editorial Mir Moscú.
- Walter Rudin,(1980).Principios del Análisis Matemático. Macgraw-hill de México.