UNIVERSIDAD NACIONAL
SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO
FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EVALUACIÓN DE METODOLOGÍAS DE SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE REDES DE TRANSPORTE

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR
Bach. MATÍAS ADÁN, Luis

ASESOR
MSc. GARRIDO ANGULO, Henrry Ángel

Huaraz – Perú
2018

N° Registro: T002

JURADO CALIFICADOR

MSc. MARIO NINAQUISPE CASTILLO

(PRESIDENTE)

Dr. MAXIMILIANO EPIFANIO ASÍS LÓPEZ

(SECRETARIO)

Dra. PILAR SARA NÚÑEZ BLAS

(VOCAL)

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, a Dios por darme salud, por ser la fuente de toda sabiduría y por abrir a la humanidad las puertas del conocimiento que él mismo escribió con el lenguaje de las matemáticas**.**

Al asesor por su valioso e indesmayable apoyo como docente, y por su constante orientación en el desarrollo de la tesis.

A la universidad Santiago Antúnez de Mayolo, por brindarme el espacio y contribuir a mi formación profesional.

.

Luis

DEDICATORIA

A mis padres, hermanos y familiares quiénes supieron darme amor, cariño y comprensión en los momentos más difíciles de mi vida y sobre todo apoyo incondicional para ser profesional.

Luis

RESUMEN

El uso de la teoría de redes de transporte constituye una herramienta básica e importante en la modelización matemática y por ende en la solución de una parte de problemas reales y concretos. Se utilizan dos metodologías de solución: el algoritmo de red de flujo máximo y algoritmo de red de flujo de coste mínimo para resolver el problema de red de transporte a un caso práctico sobre el transporte urbano de vehículos – zona centro de la ciudad de Huaraz lo cual permite interpretar y evaluar las metodologías y sus resultados.

Palabras clave: *Red de transporte, algoritmo de flujo máximo, algoritmo de flujo de coste mínimo*

ABSTRACT

The use of network theory in transport is a basic and important tool in the mathematical modelling and then of a part in solution in real and concrete problems. Two solution methodologies are used: maximum flow algorithm and minimum cost flow algorithm to solve the transport network problem and allows us to solve a practical case about vehicular transport problem - center zone in the city of Huaraz and this helping to interpret and evaluate the methodologies and their results.

Keywords: Transport network, maximum flow algorithm, minimum cost flow algorithm

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación aplicada se enmarca en la teoría de grafos, comprende a la teoría de redes, y se hace uso específicamente de la teoría de redes de transporte, y los problemas clásicos de redes de flujos. Se realiza una evaluación de dos importantes metodologías de solución a los problemas de flujos de redes de transporte, estos son: el algoritmo de red de flujo máximo y el algoritmo de red de flujo de coste mínimo a través de la aplicación de un caso de estudio práctico – modo piloto - sobre el problema de transporte vehicular en la ciudad de Huaraz; observando su relación entre ellas, ventajas y desventajas, según los resultados obtenidos. Asimismo, se realiza una adecuación o implementación computacional de la solución del problema de redes de flujos en redes de transporte mediante el programa Xpress Ive 2018.

La teoría de redes, mantiene su vigencia e importancia, como herramienta de ayuda en la solución de una parte de problemas reales y concretos.

Una particularidad importante en la mayoría de ciudades, es el problema del transporte vehicular, la no planificación o diseño de cómo deben ser dados las rutas de transporte de vehículos conlleva, por ejemplo, a tremendos cuellos de botella de vehículos, y esto a su vez genera, en un aspecto de medidas, demoras de tiempo y elevado costo; no obstante estos problemas, una alternativa de solución parcial recomendada es el uso de herramientas matemáticas y programas computacionales que existiendo aún, y con el conocimiento de que el problema del transporte vehicular es en extremo complejo, no existe una solución en su totalidad satisfecha; esto por tanto ocasiona serios problemas a los decisores encargados de esta problemática, toda vez que se relaciona con otros factores como son, la cantidad de población en la ciudad, tipos de vehículos que circulan tanto a nivel público como particular, modelos de vehículos, horarios de trabajo, capacidad del parque automotor, entre otras peculiaridades.

Por ello, la teoría de redes de transporte sigue siendo una de las teorías aún muy necesarias e influyentes en la organización y gestión de una ciudad. La responsabilidad de los gestores y decisores en el desarrollo de las ciudades, conlleva a tener un conocimiento general, y especializado sobre teorías científicas que pueden ayudar a entender y resolver los problemas de redes de transporte de vehículos.

Es evidente que la problemática del transporte vehicular en las ciudades del país es súper compleja; el tráfico vehicular se vuelve cada día más angustiante, por ejemplo basta observar la problemática del transporte de vehículos en la ciudad de Huaraz en horas punta, como parece ser que no existe una planificación y control debida por parte de las autoridades responsables, sumada al desorden imperante, el tamaño pequeño de la ciudad, y actividades imprevistas, estas son claras señales permanentes que contribuyen al caos del transporte vehicular, no obstante existen organismos responsables de esta problemática, como es el Ministerio de Transporte y Comunicaciones, y también el Gobierno Regional y el Gobierno Local, que son los que deben velar en el día a día por la mejora del transporte vehicular. Por tales razones, resulta importante contribuir con la puesta de información, conocimiento científico mínimo y difusión a las autoridades y usuarios; es decir, hacerles saber que existen herramientas a través de las teorías matemáticas que permitan contribuir, en al menos algunas soluciones básicas para esta notable problemática cotidiana.

La metodología algoritmo de red de flujo máximo, resuelve el problema de red de transporte de flujo máximo, es decir, cuando se dispone de una red con un ingreso o una fuente y una salida o un sumidero únicamente, y a través de los cuales transcurre una número de vehículos o capacidad entre intersecciones de calles denominados nodo y nodo, y por medio de los cuales se debe generar un flujo máximo o de carga vehicular, buscando de ese modo la mejor alternativa de recorrido en la red, tal como fue tomado el caso práctico del tránsito de los vehículos en la ciudad de Huaraz.

Del mismo modo, la metodología algoritmo de red de flujo de coste mínimo, resuelve el problema de red de transporte de flujo de coste mínimo, es decir, cuando se dispone de una red con una entrada o fuente y una salida o sumidero únicamente, y a través de los cuales existe un coste y una capacidad entre intersecciones de calles o de nodo y nodo, y por medio de los cuales se debe generar un flujo de coste mínimo, buscando de ese modo la mejor alternativa de recorrido en la red, tal como fue tomado el caso práctico sobre el coste que ocasionan los vehículos en la ciudad de Huaraz.

En base a la información recogida en el estudio y revisión de referencias académica- científica y, consciente del nivel de complejidad con que se quiera abordar y encarar estos problemas de redes de flujo de transporte que se presentan, se ordenan algunos conceptos básicos para el desarrollo de estas dos metodologías, señalando algunos temas matemáticos preliminares y fundamentales mediante una breve introducción a los espacios métricos, una introducción a los espacios normados, la teoría de grafos, la teoría de redes de transporte y las metodologías de solución algoritmos de red de flujo máximo y de flujo de coste mínimo, y finalmente la aplicación a un caso de estudio práctico – modo piloto - sobre la red de transporte de vehículos en la ciudad de Huaraz.

El problema de la investigación se formula de la siguiente manera:

¿De qué manera se pueden evaluar las metodologías Algoritmo de red de flujo máximo y el Algoritmo de red de flujo de coste mínimo como herramientas de solución al problema de la red de flujos de transporte?

OBJETIVOS DE ESTUDIO

Objetivo General

Evaluar las metodologías, Algoritmo de red de flujo máximo y Algoritmo de red de flujo de coste mínimo como métodos de solución del problema de redes de flujos de transporte.

Objetivo Específicos

- ✓ Desarrollar modelos matemáticos de redes de flujos de transporte basados en el Algoritmo de flujo máximo y Algoritmo de flujo de coste mínimo como solución de los problemas de redes.
- ✓ Aplicar las metodologías, Algoritmo de red de flujo máximo y Algoritmo de red de flujo de coste mínimo para resolver el problema de redes de flujo de transporte en un caso de estudio práctico.
- ✓ Utilizar un programa computacional como herramienta de ayuda para la solución de los problemas de redes de flujo de transporte para las metodologías, Algoritmo de red de flujo máximo y Algoritmo de red de flujo de coste mínimo.
- ✓ Comparar las metodologías, Algoritmo de red de flujo máximo y Algoritmo de red de flujo de coste mínimo en relación a sus ventajas y desventajas en la solución del problema de redes de flujo de transporte.

HIPÓTESIS

Es posible realizar una evaluación de las metodologías de solución: Algoritmo de red de flujo máximo y Algoritmo de red de flujo de coste mínimo, del problema de redes de transporte.

VARIABLES DE ESTUDIO

Las variables que comprende la investigación, se enmarca en la siguiente identificación:

- ➢ El Algoritmo de red de flujo máximo
- ➢ El Algoritmo de red de flujo de coste mínimo

II. MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES

En la actividad del transporte, y en especial el transporte de vehículos en la ciudad de Huaraz se plantean complejas situaciones problemáticas, y algunas de ellas están relacionadas exclusivamente al problema de redes de flujos de transporte vehicular. Por ello, resulta oportuno, imperativo y necesario contribuir o dar a conocer la existencia teorías de la ciencia matemática que ayudan básicamente a entender y resolver estos tipos de problemas, esta es, la teoría de redes de transporte, que a través de sus metodologías de solución o propiamente algoritmos resuelven estos problemas, no en su amplia complejidad como sucede en el contexto enteramente real y concreto, pero si, bajo ciertas sujeciones o condiciones, que constituye principalmente un primer paso para abordar más adelante problemas cada vez más complejos.

Las investigaciones realizadas sobre redes de flujos de transporte cuentan con un buen número y con diversos enfoques de análisis, según el contexto de la problemática de la investigación; se puede citar a Antonio Mayorquin Gutiérrez, en su tesis titulada: *Algoritmo primal para resolver el problema de flujo a costo mínimo*, realizada en la Universidad Tecnológica de la Mixteca en México (2004), contribuyó al desarrollo de una plataforma Linux para resolver el problema así como también analizó la relación existente entre el algoritmo de Ford y Fulkerson, y el algoritmo de Floyd y Warshall; Ricardo García Rodenas, en su tesis doctoral titulada: *Metodología para el diseño de redes de transporte y para la elaboración de algoritmos en programación matemática convexa diferenciable*, realizado en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, España (2001), contribuyó a confeccionar modelos de equilibrio con nodos combinados, analizó la combinación convexa de una clase de convergencia de los algoritmos utilizados; José Pedrosa Montero, en su tesis de Pregrado en su tesis titulada: *El modelo del problema de transporte.*

Aplicación práctica a una red logística, realizada en la Universidad de la Rioja (2017), permitió analizar los modelos de transporte y las aplicaciones que estos tienen en el diseño de estructuras logísticas, los que constituyen decisiones de gran importancia dentro del seno organizativo de las empresas.

El problema de red de transporte, vista en su problemática general no ha terminado, por ello la existencia y creación de nuevos Centros o Institutos de Investigación en diversos países continua, motivo por el cual se realizan frecuentemente conferencias, foros lo que a su vez generan redes académicas de investigación, un caso es la existencia del Centro de Investigación del Transporte TransyT creada en el 2002 por la Universidad Politécnica de Madrid, dedicada exclusivamente a investigar la problemática del transporte.

En ese horizonte, se ha generado un creciente número de aplicaciones con una variedad amplia de casos, originando el planteo de diversos métodos de solución para los problemas de redes de flujo de transporte.

A pesar de existir ya una importante literatura científica sobre el problema de redes de transporte, las herramientas y los métodos, muchos de ellos permanecen aún poco utilizados por los técnicos y los directivos de las organizaciones competentes en el área del transporte en nuestro país.

Dado el incremento de problemas que se generan día a día en las organizaciones, en contraposición a éstas circunstancias, precisamente es donde se reflejan las mayores deficiencias en cuanto a la interpretación de la solución de los problemas planteados.

2.2 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación está sujeta a las siguientes limitaciones:

- Se hace uso solo de redes planas, es decir redes cuyos arcos solo pueden ser cruzados planarmente.

- Se cumple el teorema de Kuratowski, es decir, cuando la red no es homeomorfo de los grafos llamados $K_5, K_{3,3}$.
- Solo se han elegido dos metodologías de solución al problema de red de transporte: Algoritmo de red de flujo máximo y Algoritmo de red de flujo de coste mínimo.
- Para el caso del transporte vehicular en la ciudad de Huaraz, se ha elegido a modo piloto la zona centro de la ciudad para la aplicación de los algoritmos de red de flujo máximo y de flujo de coste mínimo.
- Se eligió el programa computacional Xpress Ive, versión 8.5.3 2018.

2.3. BASES TEÓRICAS

2.3.1 ESPACIO MÉTRICO

Definición1.- Sea un conjunto $X \neq \varnothing$ y una métrica sobre X dado por la aplicación $d: XxX \to R$, que cumplen las siguientes propiedades:

- Positividad: para cada $x, y \in X$, se tiene que $d(x,y) \geq 0$.
- Identidad: dado $x, y \in X$, $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- Simetría: si $x, y \in X$, se tiene que $d(x,y) = d(y,x)$.
- Desigualdad triangular: para cada $x, y, z \in X$, se tiene que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

La expresión $d(x,y)$ se lee como distancia de x a y, y el par (X,d) se denomina espacio métrico.

Métricas usuales equivalentes

En particular, sobre $\mathbb{R}^n$ se define la métrica producto inducido por la recta, sean los puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathrm{R}^n$:

- La métrica del máximo $D_1 = d_{max}: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definida por:

$$d_{max}(x, y) = max\{|x_i - y_i|: 1 \leq i \leq n\}$$

- La métrica de la suma $D_2 = d_{suma}: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definida por:

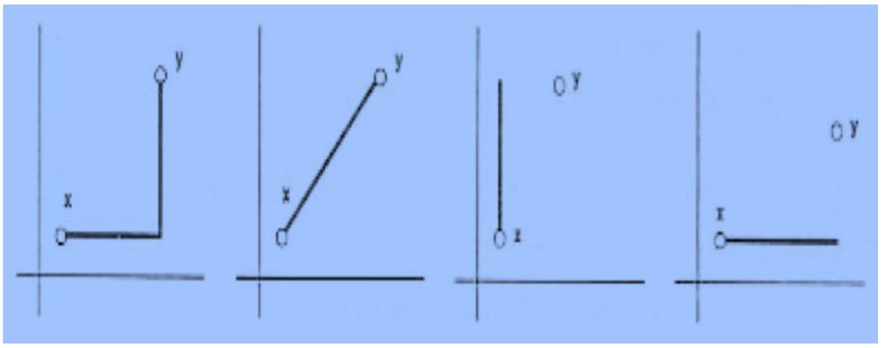
  $d_{suma}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

- La distancia euclidiana $D_3 = d_u: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es definida por:

  $d_u(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$.

  El par $\left(d_u, \mathrm{R}^n\right)$ se le llama espacio de dimensión n .

A continuación, se muestra una representación gráfica de las métricas definidas en el plano:



$d_{suma}(x, y)$

$d_u(x, y)$ $d_{max}(x, y)$

Figura 1. Métricas usuales en el plano

Proposición 1.- sean (X,d), un espacio métrico y x,y,z,w en X, entonces $|d(x,z)-d(y,w)| \le d(x,y)+d(z,w)$.

En particular, se cumple $|d(x,z)-d(y,z)| \le d(x,y)$.

Demostración

Aplicando dos veces consecutivas la desigualdad triangular, se tiene que

$d(x,z) \le d(x,y)+d(y,w)+d(z,w)$,

Luego, $d(x,z)-d(y,w) \le d(x,y)+d(z,w)$

Del mismo modo, $d(y,w) \le d(y,x)+d(x,z)+d(w,z)$

Finalmente, se tiene $d(y,w)-d(x,z) \le d(y,x)+d(w,z)$

2.3.2 ESPACIO NORMADO

Definición 2.- Una norma en un espacio vectorial V es una función real dado por: $|\ |: V \to R_0^+$ tal que

$$x \in V \ \to \ \|x\| \in \mathrm{R}_0^+$$

y sean $x, y \in V$ y para todo $\lambda \in R$ se cumple que:

- $\|x\| \geq 0$ (positividad)
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogeneidad)
- $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$ (separación)

El número $\|x\|$ se llama norma del vector x en X .

Definición 3.- Un espacio normado es un par $(V, \|\,.\,\|)$, donde V es un espacio vectorial y $\|\,.\,\|$ es una norma en V .

Ejemplo de un Espacio normado usual:

Si en el espacio vectorial real R^n , cuyos elementos son

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

y si se toma la norma:

$$\| x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

se verifican todos los axiomas de la norma, que es equivalente a la métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 4.- Sea X un espacio de normado. Una funcional lineal continua en X es una función lineal $f : X \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ que es continua.

2.3.3 TEORIA DE GRAFOS

El hombre siempre ha mostrado por naturaleza propia ante el planteo de situaciones problemáticas, como una inmediata alternativa para resolver el problema la ayuda de formas gráficas, el uso de esquemas gráficos, en el que los puntos (o círculos) podrían representar sus actividades o etapas de una tarea, trabajo, de un proyecto o de un proceso, o a individuos, localidades entre otros, y su relación entre ellos, unidos por medio de líneas o trazos. Estas ideas, puestas ya en el siglo XVIII, con el problema de los puentes de Konigsberg el cual consistía en encontrar un camino que uniera los siete puentes del río Pregel del lugar, de modo que se recorriera todos ellos solo pasando una vez junto al trabajo de Leonhard Euler referido al problema *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* en 1736 constituyó el primer resultado de la teoría de grafos. En 1847, Gustav Kirchhoff utilizó gráficas para el análisis de redes eléctricas. En 1852, Francis Guthrie formuló el problema de los cuatro colores que consiste en utilizar cuatro colores para colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color, Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976 resolvieron el problema, definiendo y por tanto formulando los primeros conceptos teóricos fundamentales para la teoría de grafos. En 1857, Arthur Cayley resolvió el problema de enumeración de los isómeros, compuestos químicos con idéntica composición pero diferente estructura molecular haciendo uso de un grafo especial, llamado árbol. Edward Frankland y Alexander Crum Brown en 1884 utilizaron por primera vez la expresión grafo. Esto permitió más adelante, en el siglo XX, al matemático alemán D. König, fuera el primero en proponer en un trabajo publicado en 1936, que tales diagramas recibieran el nombre de grafos o simplemente gráficas; posteriormente se realizó la tarea de la formalización matemática mediante un estudio sistemático de sus propiedades.

Los grafos son estructuras discretas compuestas por puntos (llamados vértices) y líneas (llamadas aristas) que conectan algunos pares de esos puntos. Los grafos son comúnmente utilizados como representaciones abstractas para escenarios complejos y sirve para modelar diversas situaciones reales como por ejemplo: sistemas de transporte y distribución de mercancías y sistemas organizacionales; redes de computadoras, redes telefónicas o eléctricas, circuitos eléctricos. Un grafo es un sistema matemático abstracto, y ha sido probado como un efectivo modo de representar objetos (Eshera y Fu, 1986).

La teoría de grafos ha proporcionado muchos modelos y técnicas de solución eficiente para una gran variedad de problemas que han surgido en muy diferentes contextos.

2.3.3.1 Grafos

Definición 5.- Un grafo $G=(V,E)$ consiste en un conjunto finito V cuyos elementos se llaman vértices y una familia finita E en VxV de pares no ordenados de vértices a cuyos elementos llamaremos aristas y denotaremos por (u,v), donde u y v están en V.

Representación gráfica

En un grafo se distinguen básicamente dos elementos: los vértices y las aristas, que conectan un vértice con otro. Por ejemplo, la Figura 2.1 representa algunos vértices (v_i) en cuadrículas, y la conexión entre ellas como son las aristas. Los vértices en el grafo representan en ciertos casos a los servicios, mientras que las aristas representan un modo de asignación o compromiso entre los entes. Las aristas tienen un valor que representa el costo de conectar un ente con otro.

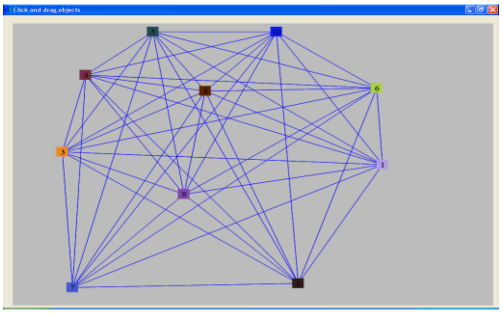


Figura 2.1. Ejemplo de un grafo no orientado

Definición 6.- El orden de un grafo G, denotado por $|V|$, es la cardinalidad del conjunto V. Por lo general se utiliza n para denotar el orden de G.

Definición 7.- La dimensión o tamaño del grafo G, denotado por $|e|$, es la cardinalidad del conjunto E. Por lo general se utiliza m para denotar el tamaño de G.

Definición 8.- Dado un grafo $G=(V,E)$, entonces se dice:

a) Lazo o bucle a toda arista de la forma (v,v)

b) Aristas múltiples a las aristas que aparecen repetidas en E

c) Dos vértices son adyacentes si están unidos por una arista.

d) Dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común.

e) Una arista y un vértice son incidentes si el vértice es extremo de la arista.

f) Un vértice es aislado si no es adyacente a ningún otro vértice.

g) Un grafo es simple si no tiene bucles ni aristas múltiples.

Definición 9.- Dado un grafo $G=(V,E)$, se llama grado de un vértice al número de aristas incidentes en él, contando los bucles como dos aristas. Se denota por $\deg(v)$ al grado del vértice v.

Si $\deg(v)=0$ entonces v es un vértice aislado, y se clasifica al vértice como par ó impar dependiendo del grado de éste.

Además, el grado de un vértice es el cardinal de $N_G(v)$ y de denota por $d(v)$ al mínimo grado y $\Delta(G)$ al máximo grado.

Proposición 2.- Dado un grafo $G=(V,E)$, se cumple que $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$

Demostración

Cada arista contribuye en 1 al grado de cada uno de los vértices en los cuales es incidente. Por lo tanto, si G tiene m aristas, debe tenerse:

$$2m=d(v_1)+...+d(v_n)$$

Corolario 1.- El número de vértices de grado impar en un $G=(V,E)$ es par.

Demostración

Consideremos el conjunto de vértices V en dos subconjuntos, los que tienen grado par $\{x_1,x_2,...,x_m\}$ y grado impar $\{y_1,y_2,...,y_n\}$.

Sean $S=d(x_1)+...+d(x_m)$ y $T=d(y_1)+...+d(y_n)$ en cada subconjunto, luego $S+T$ es par.

Pero S es suma de números pares, entonces es par; y es T suma de números impares. Por lo tanto, el número de vértices de grado impar es par.

Definición 10.- Un grafo $G=(V,E)$ es simple si a lo sumo una arista de E une dos vértices cualesquiera de V.

Grafo Completo

Definición 11.- Un grafo $G=(V,E)$ es completo, si para cada par de vértices de V en el grafo G, siempre existe la unión de ellos mediante una arista.

Un grafo completo de n vértices tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Camino

Definición 12.- Sea $G=(V,E)$ un grafo no vacío. Un camino es un subgrafo, si $P=(V_P,E_P)$ de G tal que $V_P=\{v_0,v_1,...,v_k\}$ y $E_P=\{v_0v_1,v_1v_2,...,v_{k-1}v_k\}$ donde los v_i son diferentes. Los vértices v_0 y v_k asociados al camino P se llaman extremos de P.

Un camino en G es una sucesión donde se alternan vértices y aristas, comenzando y terminando con vértices y en el que cada arista es incidente con los dos vértices que la preceden y la siguen.

Grafo Conexo

Definición 13- Un grafo $G=(V,E)$ es conexo, si cada par de vértices está conectado por un camino. Es decir, si para cualquier par de vértices (u,v) existe al menos un camino posible desde u a v.

Un grafo es fuertemente conexo si cada par de vértices está conectado por al menos dos caminos disjuntos. Es decir, es conexo y no existe un vértice tal que al eliminarlo el grafo resultante es disconexo.

Grafo Orientado

Definición 14.- Un dígrafo o grafo orientado $D=(V,E)$, consiste de un conjunto finito no vacío V cuyos elementos se llaman vértices y una familia finita E de pares ordenados de vértices a cuyos elementos llamaremos aristas.

Al par (u,v) en E lo denotaremos por uv y diremos que u es el extremo inicial y que v es el extremo final.

Definición 15.- Dado un dígrafo $D=(V,E)$, se llama grado de entrada de un vértice al número de aristas que lo tienen por extremo final y se llama grado de salida de un vértice al número de aristas que lo tienen por extremo inicial.

Definición 16.- Dado un grafo $G=(V,E)$. Si $P=v_0v_1...v_{k-1}$ es un camino en el grafo G para $k\geq 3$, entonces el grafo C definido por $C=P+v_{k-1}v_0$ es un ciclo. Se denota por C_n al ciclo de n vértices.

Observación 2: Un circuito C es un camino cerrado en el que no se repiten aristas, es decir, una trayectoria cerrada donde el nodo inicial y el final de la trayectoria coinciden.

Función de Coste

Definición 17.- Sea $G=(V,E)$ un grafo, a la correspondencia dado por $f:A\rightarrow R$ en G, tal que a cada arista e del grafo G se le asigna un único valor $f(e)>0$, se le llama función de coste.

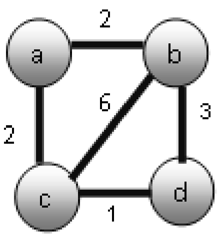
Grafo ponderado

Definición 18.- Se dice que un grafo G está ponderado si sus aristas tienen asignado un valor mediante una función de coste. Si cada arista a tiene un valor numérico no negativo $u(a)$, llamado peso o longitud de a, se dice que G tiene peso. En este caso, cada camino P de G tendrá asociado un peso o longitud que será la suma de las aristas que forman el camino P.

Matriz de ponderaciones

Definición 19.- Se dice una matriz de ponderaciones para un grafo G ponderado a aquella que se determina por los valores correspondientes de cada una de las aristas según la relación de vértice a vértice a través de una tabla de doble entrada.

La Figura 2.2 ilustra un grafo y su matriz de ponderaciones.



	a	b	c	d
a	0	2	2	0
b	2	0	6	3
c	2	6	0	1
d	0	3	1	0

Figura 2.2. Un grafo con ponderaciones y una matriz de ponderaciones

Subgrafo

Definición 20.- Un grafo $H=(V_H,E_H)$ es un subgrafo de un grafo $G=(V,E)$, si y sólo si $V_H\subseteq V$ y $E_H\subseteq E$.

Definición 21.- Dados los grafo $G(V,A)$ y $G'(V',A')$, se denomina subgrafo de G, si $V^{'} \neq \Phi$, $V^{'} \subseteq V$ y $A^{'} \subseteq A$, donde cada arista de $A^{'}$ es incidente con vértices de $V^{'}$. En la figura 2.3 se muestra que G_1 y G_2 son subgrafos de G.

Observación 1: Particularmente los subgrafos importantes son aquellos que se obtienen de un grafo, suprimiendo uno o varios vértices y las aristas incidentes en estos vértices.

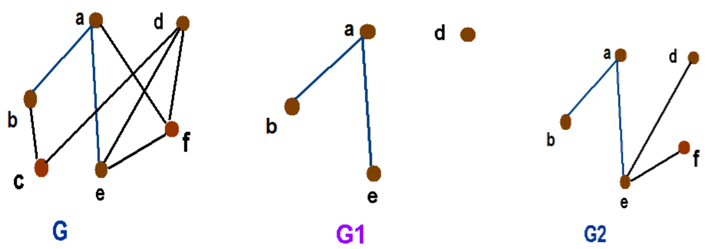


Figura 2.3. Ejemplos de subgrafos

Grafo simple

Definición 22.- Un grafo simple es un par $G(V,A)$, donde V es un conjunto finito, no ordenado y no vacío y A es un conjunto finito de pares no ordenados de vértices distintos de V, es decir, en G no debe haber ni aristas múltiples ni bucles.

2.3.4 TEORÍA DE REDES DE TRANSPORTE

El problema de redes en general, y específicamente las redes de transporte se han convertido en los últimos años en una destacada área de estudio, existiendo en gran número de importantes aplicaciones prácticas, que incluyen el transporte de mercancías desde las fábricas hasta los almacenes ó mercados. También en el campo de la planeación, la ingeniería, la educación, entre otros; donde se manifiestan innumerables situaciones que pueden ser formulados como modelos matemáticos de redes. Además, se tiene a los sistemas de producción y de distribución, tráfico vehicular, comunicación, redes eléctricas, inventarios, flujo de dinero, tuberías, asignación de recursos, etc.

El problema de transporte constituye un tipo especial de problema de redes, más específicamente el problema de flujos de redes tienen una significancia muy especial en el ámbito aplicativo que pueden ser formulados como un problema de red de flujo máximo o el problema de red de flujo de coste mínimo. Estos problemas considerados clásicos en la teoría de redes de transporte, modelan diversas situaciones problemáticas reales y concretas, lo que resulta imperativo entonces siempre tenerlos a disposición de la comunidad académica científica, así como de los entes relacionados al problema del transporte.

Una característica básica para el problema de redes, se debe tener en cuenta la existencia de nodos fuente y nodos sumideros, aparte de los nodos intermedios, así como la necesidad de un flujo y una capacidad en cada uno de los arcos representados en la red. Es claro, que la necesidad ya sea a nivel de flujo tiene la significancia de ser el máximo o a nivel coste el mínimo. Por ello, en los problemas de redes usualmente renombran nuevos elementos, tales como el nodo fuente, inicio de la red, nodos intermedios y nodos sumideros, aquellos que finalizan de la red. Asimismo, se considera otro elemento importante llamado capacidad o el elemento llamado flujo, el cual transita a través de cada uno de sus arcos.

Por otro lado, la existencia de diversas metodologías o algoritmos de solución garantizan la cierta tranquilidad de los problemas de redes de transporte, se cuenta con el algoritmo de red de flujo máximo y el algoritmo de red de flujo del coste mínimo, cuál de ellos puede resultar ser el mejor y bajo qué circunstancias previamente definidas actúan para obtener la solución al problema de redes. Existe la conjetura que, con la evaluación de estas metodologías, se pueda discernir y saber aplicar apropiadamente los algoritmos de solución al problema de redes de transporte.

Adicionalmente, una adecuación para su implementación computacional en la aplicación de casos prácticos de situaciones reales y concretas resulta ser necesario.

2.3.4.1 Red de transporte

Definición 23.- Una red orientada $N = [V, E]$, es un conjunto no vacío V finito de elementos llamados nodos y un conjunto de pares ordenados E de elementos distintos llamados arcos.

Red de transporte capacitada

Definición 24.- Sea N una red capacitada, a cada arco le corresponde un valor real $c_{ij} \geq 0$ llamado capacidad.

Flujo de una red de transporte

Definición 25.- Un flujo x_{ij} en una red N capacitada y orientada es una asignación de un valor real tal que $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$. Asimismo un flujo se conceptúa como una función $f : VxV \rightarrow R$ que satisface:

- La restricción de la capacidad: $\forall u, v \in V : f(u,v) \leq c(u,v)$
- Anti simetría: $\forall u, v \in V : f(u,v) = -f(v,u)$
- Conservación del flujo: $\forall u \in V : V - \{s,t\}$ $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$

Definición 26.- Sea N una red capacitada y orientada con flujo dado. Si $v_j \in V$, entonces el flujo de ingreso a la red en el nodo v_j denotado por $\varphi(v_j)$ está dado por: $\varphi(v_j) = \sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji}$.

Si $\varphi(v_j) < 0$ entonces v_j es llamada una fuente.

Si $\varphi(v_j) > 0$ entonces v_j es llamado un sumidero.

Si $\varphi(v_j) = 0$ entonces v_j es llamado un nodo intermedio.

Proposición 3.- (Conservación de flujo) Cualquier flujo en una red capacitada y orientada $N = (V, E)$ satisface $\sum_j \varphi(v_j) = 0$.

Demostración

De $\sum_j \varphi(v_j) = \sum_j \left(\sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} \right) = \sum_j \sum_i x_{ij} - \sum_j \sum_i x_{ji} = 0$

El Problema de red de Flujo de Máximo

El modelo matemático del problema de red de transporte para el problema de flujo máximo se plantea de modo siguiente:

Sea una red orientada y capacitada con una única fuente y un único sumidero, sin arcos dentro de la fuente ni arcos fuera del sumidero, se pide encontrar el flujo máximo a través de la red:

$$Max.\left(f(x) = \sum_i x_{id} \right)$$

$$\text{s.a: } \varphi(v_j) = \sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} = 0 \quad \forall v_j \in V,\ j \neq s, d$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall i, j$$

Donde:

- $x = (x_1, x_2, ..., x_n,)$ son las variables de decisión
- x_{ij} es el flujo de la red
- c_{ij} es la capacidad de la red

Este problema se representa a través de un grafo completo, regular y conexo. La solución del problema se logra aplicando el algoritmo del flujo máximo.

Además, el problema de red de flujo máximo se resuelve aplicando el teorema del mínimo corte – flujo máximo.

Definición 27.- Sea N una red capacitada y orientada con una única fuente fija y un único sumidero fijo, sin arcos dentro de la fuente ni arcos fuera del sumidero. Un corte $C=(V_1,V_2)$ en N es una partición de todos los elementos de V en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 tal que $v_s \in V_1$ y $v_d \in V_2$. El conjunto-corte del corte $C=(V_1,V_2)$ es el conjunto $\{(v_i,v_j)\in E / v_i \in V_1 y v_j \in V_2\}$.

La capacidad del corte $C=(V_1,V_2)$ denotado por $c(V_1,V_2)$ se establece mediante la relación $c(V_1,V_2)=\sum_{v_i\in V_1, v_j\in V_2} c_{ij}$.

Proposición 4.- (Mínimo corte-máximo flujo) Sea N una red capacitada y orientada con una única fuente fija y un único sumidero fijo, sin arcos dentro de la fuente ni arcos fuera del sumidero. Entonces el valor del flujo máximo desde v_s a v_d es igual a la capacidad de corte mínimo en N.

Demostración

Para la prueba de la proposición será suficiente probar que el valor del flujo máximo es menor o igual a la capacidad del mínimo corte, y que existe un corte cuya capacidad es igual al valor del flujo máximo.

Parte 1. Consideremos cualquier flujo factible en N con x_{ij} como el número de flujos y el valor de flujo f y sea $C=(V_1,V_2)$ cualquier corte en N, luego

$$f=\left(\sum_{v_j\in V_2, j\neq d} 0\right)+f$$

$$f = \sum_{v_j \in V_2, j \neq d} \left(\sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} \right) + \sum_i x_{id}$$

$$f = \sum_{v_j \in V_2, j \neq d} \left(\sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} \right) + \sum_i x_{id} - \sum_i x_{di}$$

$$f = \sum_{v_j \in V_2} \left(\sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} \right)$$

$$f = \sum_{v_j \in V_2} \left[\left(\sum_{v_i \in V_1} x_{ij} + \sum_{v_i \in V_2} x_{ij} \right) - \left(\sum_{v_i \in V_1} x_{ji} + \sum_{v_i \in V_2} x_{ji} \right) \right]$$

$$f = \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ij} + \sum_{v_i \in V_2, v_j \in V_2} x_{ij} - \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ji} - \sum_{v_i \in V_2, v_j \in V_2} x_{ji}$$

$$f = \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ij} - \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ji} + \sum_{v_i \in V_2, v_j \in V_2} x_{ij} - \sum_{v_i \in V_2, v_j \in V_2} x_{ji}$$

$$f = \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ij} - \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ji}$$

Finalmente, $f = \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ij} - \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ji} \leq \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ij}$

$$f = \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ij} - \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ji} \leq \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} x_{ij} \leq \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} c_{ij} = c(V_1, V_2),$$

Es decir, $f \leq c(V_1, V_2)$.

Dado que el valor del flujo factible f y el corte $C = (V_1, V_2)$ son arbitrarios, se tiene que $\max . f \leq \min . c(V_1, V_2)$.

Parte 2. Dado que el problema de red de flujo máximo nunca es no factible o no acotado, existe un flujo maximal.

Sea $f^{'}$ el valor de este flujo maximal correspondiente a los números de flujos $x^{'}_{ij}$. Ahora construyamos dos conjuntos disjuntos $V_1^{'}$ y $V_2^{'}$ de V de la siguiente forma:

Construyamos $V_1^{'}$ al v_s agregar en $V_1^{'}$ y luego agregar v_j en $V_1^{'}$ sí solo si

i) $v_i \in V_1^{'}, \left(v_i, v_j\right) \in E$ y $x_{ij}^{'} < c_{ij}$ o

ii) $v_i \in V_1^{'}, \left(v_j, v_i\right) \in E$ y $x_{ij}^{'} > 0$

Luego, $V_1^{'}$ ha sido construido, hacer $V_2^{'} = V - V_1^{'}$

Se desea mostrar que es un corte en $\left(V_1^{'}, V_2^{'}\right)$ es un corte en N. Para ello es suficiente mostrar que $v_d \in V_2^{'}$. Asumamos, por contradicción, que $v_d \notin V_2^{'}$, es decir $v_d \in V_1^{'}$. Entonces v_d está en $V_1^{'}$ en virtud de la secuencia de pasos i) y ii). En otras palabras, existe un $\alpha - paso$ P en N de v_s a v_d tal que para cada arco hacia adelante $\left(v_i, v_j\right)$ de P, se tiene

i) $c_{ij} - x_{ij}^{'} > 0$ y , para cada arco hacia atrás $\left(v_i, v_j\right)$ de P, se tiene

ii) $x_{ij}^{'} > 0$

Se define, $$q = \min\left\{ \min_{\left(v_i, v_j\right)\uparrow}\left\{c_{ij} - x_{ij}^{'}\right\}, \min_{\left(v_i, v_j\right)\downarrow} x_{ji}^{'} \right\} > 0$$

Se define un nuevo flujo en N al agregar q al número de flujos sobre todos los arcos hacia delante de P en N y al sustraer q al número de flujos de todos los arcos hacia atrás de P en N. Este nuevo flujo tiene un valor de $f^{'} + q$, lo que contradice al maximal de $f^{'}$. De aquí $v_d \in V_2^{'}$ cuyo $\left(V_1^{'}, V_2^{'}\right)$ es un corte en N.

Notar que se debe necesariamente tener

i) $x_{ij}^{'} = c_{ij}, si\left(v_i, v_j\right) \in E, v_i \in V_1^{'} y\, v_j \in V_2^{'} \quad y$

ii) $x_{ji}^{'} = 0, si\left(v_j, v_i\right) \in E, v_j \in V_2^{'}, v_i \in V_1^{'}$ debido a las construcciones de $V_1^{'}$ y $V_2^{'}$. Entonces

$$f' = \sum_{v_i \in V_1', v_j \in V_2'} x_{ij}' - \sum_{v_i \in V_1', v_j \in V_2'} x_{ji}'$$

$$f' = \sum_{v_i \in V_1', v_j \in V_2'} x_{ij}' = \sum_{v_i \in V_1', v_j \in V_2'} c_{ij}$$

$$f' = c\left(V_1', V_2'\right)$$

Definición 28.- Sea N una red capacitada y orientada con una única fuente fija y un único sumidero fijo, sin arcos dentro de la fuente ni arcos fuera. Un conjunto finito no vacío P de pares ordenados de elementos de V de la forma $P = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{n-1}, v_n)\}$ es llamado un $\alpha - paso$ en N de v_0 a v_n, si:

i) los nodos $v_0, v_1, ..., v_n$ son distintos y, para cada

ii) $(v_i, v_j) \in P$ implica que $(v_i, v_j) \in E$ o $(v_j, v_i) \in E$.

Si $(v_i, v_j) \in P$ y $(v_i, v_j) \in E$ entonces (v_i, v_j) es llamado un arco hacia delante de P en N.

Si $(v_i, v_j) \in P$ y $(v_j, v_i) \in E$ entonces (v_i, v_j) es llamado un arco hacia atrás de P en N.

El Problema de red del Camino más Corto

Definición 29.- Sea N una red orientada. N es llamada ponderada si, a cada $(v_i, v_j) \in E$ le corresponde un número real w_{ij} (no necesariamente no negativo) denominado peso.

Definición 30.- Sea N una red orientada. Un conjunto finito no vacío P de arcos de E de la forma $P = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{n-1}, v_n)\}$ es denominado un paso en N de v_0 a v_n. Si $v_0 = v_n$ entonces el paso es llamado un ciclo.

Definición 31.- Sea N una red orientada y ponderada sin arcos dentro del origen ni arcos fuera del destino. Además, asumamos que no existe ciclo en N y no tiene pesos con valor negativo.

El modelo matemático del problema de red del Camino más Corto se formula de la siguiente forma:

$$Min.\left(d = \sum_{(v_i, v_j) \in E} w_{ij} x_{ij}\right)$$

$$\text{s.a:} \sum_i x_{id} = 1$$

$$\sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} = 0 \quad \forall v_j \in V,\ j \neq s, d$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j$$

Donde:

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n,)$ son las variables de decisión
- x_{ij} es el flujo de la red
- s es la fuente o entrada de la red
- d es el sumidero o salida de la red

Este problema se representa a través de una red y para obtener la solución del problema se aplica el algoritmo de Dijkstra.

El Problema de red de Flujo de Coste Mínimo

El modelo matemático del problema de red de transporte para el problema de flujo de coste mínimo se plantea de modo siguiente:

Sea una red orientada y capacitada con una única fuente y un único sumidero, sin arcos dentro de la fuente ni arcos fuera del sumidero, se pide encontrar el flujo de coste mínimo a través de la red:

$$Min.\left(f(x) = \sum_i c_{ij}^{1} x_{ij} \right)$$

$$\text{s.a:} \sum_i x_{id} = F \geq 0$$

$$\sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} = 0 \quad \forall v_j \in V,\ j \neq s, d$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall i, j$$

Donde:

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n,)$ son las variables de decisión
- x_{ij} es el flujo de la red
- c_{ij} es la capacidad de la red
- F es el valor del flujo en específico
- s es la fuente o entrada de la red
- d es el sumidero o salida de la red

Este problema se representa a través de una red y para obtener la solución del problema se aplica el algoritmo del flujo de coste mínimo.

Otros métodos de solución del Problema de Red de Transporte

La existencia de varios métodos de solución al problema de red de transporte permite listar los más importantes, y son los siguientes:

- El método simplex
- El método de la Esquina Noroeste
- El método de Aproximación de Vogel
- El método de Aproximación de Russell

Herramientas informáticas de ayuda para la solución del Problema de Red de Transporte

Las herramientas informáticas de soporte más conocidas en la solución del problema de red de transporte, son las siguientes:

- WinQSB
- Modelling Network
- Grafos
- Xpress Ive

2.4 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS

El desarrollo de la investigación necesita fijar el conocimiento de algunos conceptos fundamentales relacionados al problema de red de transporte, los cuales son los siguientes:

- **Modelo matemático.-** En esencia, es una representación formal y simbólica a través de un proceso consistente en decidir cuáles son las características o aspectos de un problema o aplicación del mundo real y concreto que hay que representar mediante constantes, variables y sus relaciones o variaciones entre ellos a través de ecuaciones o inecuaciones para su estudio o análisis.

- **Algoritmo.-** Desde el punto en estricto matemático, un algoritmo no es otra cosa que una transformación entre espacios afines a la temática del problema planteado. También, un algoritmo es un mecanismo directo de solución a un problema dado, es una iteración consistente de pasos finitos y lógicamente planificados para llegar a alcanzar la solución a un problema en el menor tiempo posible.

- **Red de transporte.-** Una red de transporte, básicamente es una infraestructura necesaria para la circulación de los vehículos que transportan personas o mercancías.

Suelen estar dispuestas en el territorio conectando los núcleos de población o de actividad industrial, de tal manera que se cree una red de diferente densidad dependiendo del tráfico generado en la zona (Emilio Larrodé, Universidad de Zaragoza, 2015).

- **Complejidad de algoritmo.-** Es la cantidad de recursos (eficiencia, eficacia, tiempo de corrida, error) que necesita un algoritmo para resolver un problema (Departamento de Informática, Universidad de Valladolid, Segovia).

- **Software informático Xpress Ive.-** Es un lenguaje de programación computacional ideado por la compañía Corporación Fair Isaac, en inglés FICO, para resolver problemas de optimización simples y complejos en general. Su utilización se suele mostrar a través de tres niveles como son: versión estudiante, versión académica y versión profesional.

III. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Tipo y diseño de investigación

La investigación es de tipo cuantitativa, descriptiva y aplicativa, pues se hace un estudio y análisis de la teoría de redes de transporte, y dos de sus metodologías de solución al problema de redes de flujo de transporte.

3.2. Plan de recolección de la información

En base al tema de estudio planteado, se elaboró el siguiente plan de recolección de información:

- Revisión de libros de especialidad, en temas relacionados a la teoría de redes de transporte, y de sus diversas técnicas de solución al problema de redes de flujo de transporte.
- Revisión de los trabajos de investigación publicados en algunas revistas de investigación que desarrollan el problema de redes de flujo de transporte, en versión virtual de algunas páginas electrónicas.
- Formulación y análisis del modelo matemático del problema de redes de flujo de transporte a través de la teoría de grafos.
- Utilización de los algoritmos de solución al problema de redes de flujo de transporte en forma manual sobre el caso de estudio práctico planteado.
- Implementación y adecuación del problema de red de flujo de transporte mediante el programa Xpress IVE 8.5.3 64 bit para el problema de red de flujo de transporte.

3.3. Instrumentos de recolección de la información

Los instrumentos que permitieron obtener información son:

- Bibliografía especializada existente en la Biblioteca especializada de la Facultad de Ciencias - UNASAM, a través de libros de optimización lineal y teoría de redes.
- Repositorios institucionales de universidades nacionales y el repositorio nacional ALICIA de Concytec.
- Las páginas electrónicas de internet de acceso abierto en temas de teoría de redes.
- Consultas a algunos docentes y profesionales con conocimientos en teoría de redes de transporte.

3.4. Plan de procesamiento de la información

Una vez obtenida la información necesaria del tema, se analizó las metodologías en estudio, facilitando su comprensión a través del modelo matemático en los problemas de redes de flujo de transporte.

Se recogió la información del caso práctico del problema de redes de flujo de transporte relacionado al transporte vehicular en la ciudad de Huaraz, utilizando para su solución las metodologías planteadas.

3.5. Plan de análisis de datos

La recogida de datos, sean los nodos (intersecciones de las calles), los arcos (propiamente las calles) y su capacidad (carga de vehículos) necesarios para una red de transporte urbano vehicular en la ciudad de Huaraz, se realizó solo a modo de modelo piloto en la zona centro de la ciudad, con ayuda de un plano que permitió elegir las avenidas, jirones o calles, sus distancias aproximadas y la posible capacidad o carga vehicular por calle para permitir modelar a través de una red de transporte vehicular. Esto permitió determinar la tabla nº 01 y la tabla nº 02, así como caracterizar los tipos de nodos según tabla nº 03 y los costos de los arcos según tabla nº 04.

Para el análisis de datos fue necesario utilizar el problema y luego los algoritmos de solución para los problemas de redes de flujo de transporte: Algoritmo de red de Flujo Máximo, Algoritmo del Camino más Corto y Algoritmo de red de Flujo de Coste Mínimo.

ALGORITMO DE RED DE FLUJO MÁXIMO

(0) Dado una red orientada y capacitada $N = [V, E]$ con una única fuente y un único sumidero sin arcos dentro de la fuente ni arcos fuera del sumidero.

(1) Encontrar un flujo factible inicial en N. Sugerencia: iniciar con un flujo de cero en N, es decir $x_{ij} = 0$, para todo i y para todo j.

(2) Encontrar un α - paso P en N desde v_s hasta v_d tal que

(i) Cada arco hacia adelante (v_i, v_j) de P satisface $x_{ij} < c_{ij}$ y

(ii) Cada arco hacia atrás (v_i, v_j) de P satisface $x_{ji} > 0$.

Si no existe el α - paso, ir a (4).

(3) Calcular $q = \min\left\{ \min_{(v_i,v_j)\uparrow}\{c_{ij} - x_{ij}\}, \min_{(v_i,v_j)\downarrow} x_{ji} \right\} > 0$

Agregar q a los valores de flujo en los arcos hacia delante de P en N y sustraer q a los valores de flujo en los arcos hacia atrás de P en N. Ir a (2).

(4) PARE. El flujo actual es máximo.

ALGORITMO DEL CAMINO MÁS CORTO – DIJSKTRA 1

(0) Dado una red N orientada y ponderada sin arcos dentro del origen ni arcos fuera del destino y $w_{ij} \geq 0$ para todo i, j

Nota: l_j representa a la etiqueta que corresponde al vértice $v_j \in V$. (1) Hacer $l_s = 0$. Circule este valor. Si $j \neq s$ hacer $l_s = w_{sj}$ (si w_{sj} no existe, hacer $l_j = w_{sj} = \infty$). Hacer $P = \{v_s\}$ y $T = V - P$.

(2) Calcule $l_k = \min_{v_j \in T} .l_j$

Circule el valor mínimo. Hacer $P \leftarrow P \cup \{v_k\}$ y $T = V - P$. Si $T = \phi$, PARE; el valor de l_j es el valor del camino más corto de v_s a v_{j-} en particular, el valor de l_d es el valor deseado del camino más corto de v_s a v_d . De otra manera, continuar.

(3) $\forall v_j \in T$ hacer $l_j \leftarrow \min.\{l_j, l_k + w_{kj}\}$ (si w_{kj} no existe, hacer $w_{kj} = \infty$). Ir a (2).

ALGORITMO DEL CAMINO MÁS CORTO – DIJSKTRA 2

(0) Dado una red N orientada y ponderada sin arcos dentro del origen ni arcos fuera del destino y tal que N no tenga ningún ciclo con un valor negativo.

Nota: l_j representa a la etiqueta que corresponde al vértice $v_j \in V$. (1) Hacer $l_s = 0$. Circule este valor. Si $j \neq s$ hacer $l_s = w_{sj}$ (si w_{sj} no existe, hacer $l_j = w_{sj} = \infty$). Hacer $P = \{v_s\}$ y $T = V - P$.

(2) Calcule $l_k = \min_{v_j \in T} .l_j$

Circule el valor mínimo. Hacer $P \leftarrow P \cup \{v_k\}$ y $T = V - P$. Si $T = \phi$, PARE; el valor de l_j es el valor del camino más corto de v_s a v_{j-} en particular, el valor de l_d es el valor deseado del camino más corto de v_s a v_d . De otra manera, continuar.

(3) $\forall v_j \in T$ hacer $l_j \leftarrow \min.\{l_j, l_k + w_{kj}\}$ (si w_{kj} no existe, hacer $w_{kj} = \infty$). Por cada l_j que cambia durante este proceso, hacer $P \leftarrow P - \{v_j\}$ y $T = V - P$. Ir a (2).

ALGORITMO DE RED DE FLUJO DE COSTE MÍNIMO

(0) Dado una red orientada y capacitada $N = [V, E]$ con una única fuente y un único sumidero sin arcos dentro de la fuente ni arcos fuera del sumidero, tal que a cada arco $(v_i, v_j) \in E$, le corresponde un valor real $c_{ij}^{'}$.

(1) Sea $x_{ij} = 0$ para todo i y para todo j .

(2) Si $\varphi(v_d) = \sum_i x_{id} = F$

Pare. El flujo actual es óptimo. De otro modo continuar.

(3) Formar la red orientada y ponderada $N_{\varphi(v_d)} = \left[V, E_{\varphi(v_d)}\right]$ de la siguiente manera:

(i) $(v_i, v_j) \in E_{\varphi(v_d)}$ si y solo si $x_{ij} < c_{ij}$ y hacer $w_{ij} = c_{ij}^{'}$

(ii) $(v_j, v_i) \in E_{\varphi(v_d)}$ si y solo si y hacer $w_{ji} = -c_{ij}^{'}$

(4) Aplicar el algoritmo del camino más corto a la red $N_{\varphi(v_d)}$ para encontrar el camino más corto desde v_s hasta v_d . Si no existe el camino desde v_s hasta v_d en la red, Pare. No existe ningún flujo de valor F en la red y el coste de mínimo flujo en la red es no factible. De otro modo continuar.

(5) Encontrar el α - paso de P en N correspondiente al camino más corto de (4). Calcular

$$q = \min\left\{ \min_{(v_i,v_j)\uparrow}\left\{c_{ij} - x_{ij}\right\}, \min_{(v_i,v_j)\downarrow} x_{ji}, F - \varphi\left(v_d\right) \right\}$$

Agregar q a los valores de flujo en los arcos hacia delante de P en N y sustraer q a los valores de flujo en los arcos hacia atrás de P en N. Ir a (2).

Además, se ha hecho uso del lenguaje de programación especializado en el tema de optimización denominado Xpress versión 8.5 – IVE 2018 y en particular el modelo del problema de redes de flujo de transporte.

IV. RESULTADOS

Aplicación de estudio de un caso práctico

Red de transporte urbano sobre el tráfico de vehículos en la zona centro de la ciudad de Huaraz – modo piloto.

a. Diagnóstico del transporte urbano

El transporte urbano de la ciudad de Huaraz, capital de la región de Ancash, no es en extremo caótica, pero si quizás se vuelve agobiante en ciertos días de la semana (especialmente entre los días lunes y martes) y aún en los horarios denominados horarios punta, es decir, el horario de las 07:00 hasta las 08:00 horas. El horario de las primeras horas de la tarde, como es entre las 12:30 hasta las 13 horas, y el horario de tarde entre las 18:30 hasta las 19.00 horas. Las razones que justifican esta problemática de transporte y los horarios indicados es por diversos motivos; el trabajo de los empleados, especialmente públicos y privados, el ingreso de los estudiantes de los diferentes niveles de estudio, inicial, primario y secundario de instituciones educativas tanto públicas como privadas, así como de la Educación Superior y Universitaria. Asimismo, otra razón importante lo constituye el tamaño relativamente pequeña de la ciudad de Huaraz, por ende la falta de espacio para disponer de más calles o avenidas que descongestionen el tránsito vehicular, y también el acceso abierto sin restricción de vehículos que aumenta el tamaño del parque automotor. Asimismo, las actividades aún previstas sobre festividades propias de diversas organizaciones e instituciones de la región que ocupan las calles, y la falta de criterio de muchos de los conductores de vehículos para afrontar y resolver situaciones imprevistas de transporte de manera inmediata y práctica. No es racional y desde luego inteligente que se pueda perder tiempo de los días en el tráfico de vehículos en la ciudad de Huaraz.

b. Estudio de un caso práctico de transporte urbano – modo piloto

Se ha seleccionado el sector propiamente de la zona centro de la ciudad de Huaraz, para elegir seis (06) lugares, que se indica en la tabla n° 01 que a continuación se muestra, la cual resulta ser solo representativa en la problemática del transporte urbano de la ciudad de Huaraz.

Tabla N° 01 Elección y caracterización de los nodos para el caso de transporte urbano vehicular en la ciudad de Huaraz

LUGAR	**NODO O LUGAR**	**DIRECCIÓN**	**TIPO DE NODO**
1	0	Av. Toribio de Luzuriaga, A. Antonio Raymondi y Av. Fitzcarrald	FUENTE O ENTRADA
2	1	Av. Antonio Raymondi y Av. Confraternidad Oeste	INTERMEDIO
3	2	Av. Antonio Raymondi y Av Agustín Gamarra	INTERMEDIO
4	3	Av. Confraternidad Oeste y Jr. 28 de Julio	INTERMEDIO
5	4	Av Agustín Gamarra y Jr. 28 de Julio	INTERMEDIO
6	5	Av. Toribio de Luzuriaga y Jr. 28 de Julio	SUMIDERO O SALIDA

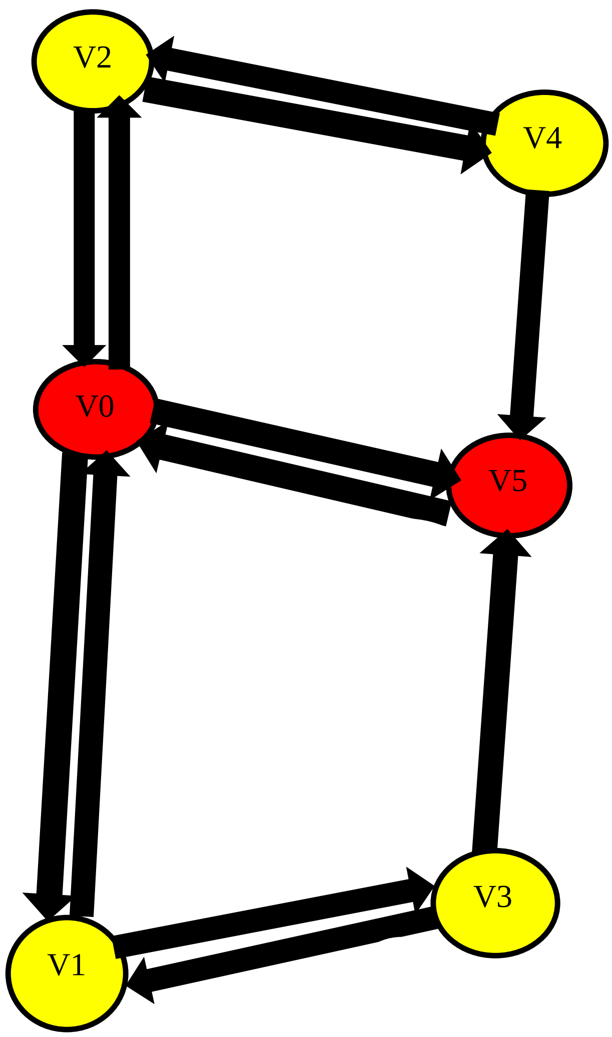
Asimismo, se hace necesario bajo suposiciones propias de la investigación dar una valoración que represente a la capacidad de cada arco (está en relación al número aproximado de vehículos, autos de un tamaño usual, que recorren en cada cuadra de la ciudad).

Tabla N° 02 Elección de arcos y su capacidad para el caso de transporte urbano vehicular en la ciudad de Huaraz

NÚMERO DE ARCOS	ARCOS O CALLES	MEDIDA (metros)	CAPACIDAD DE LOS ARCOS	DIRECCIONES DE LOS ARCOS
1	0 – 1	550	157	DOBLE VÍA
2	0 – 2	250	71	DOBLE VÍA
3	0 – 5	580	165	DOBLE VÍA
4	1 – 3	400	114	DOBLE VÍA
5	2 – 4	550	157	DOBLE VÍA
6	3 – 5	250	71	UNA VÍA
7	4 – 5	250	71	UNA VÍA

Los valores numéricos indicados en la tabla N° 02 está en consideración a que en promedio cada vehículo de tamaño usual tiene una medida de 03 metros y medio, y las cuadras (aunque de diferentes medidas) midan aproximadamente 100 metros. Resulta ser muy necesario fijar estas condiciones para facilitar el desarrollo de la investigación y la aplicación de las metodologías de redes de transporte.

c. Diseño gráfico del caso práctico en una red de transporte



d. Construcción del modelo matemático

$$Max.\left(f(x) = \sum_{i=1}^{6} x_{id} \right)$$

$$\text{s.a: } \varphi\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{6} x_{ij} - \sum_{i=1}^{6} x_{ji} = 0 \quad \forall v_j \in V,\ j \neq s, d$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall i, j$$

Donde:

- $x = \left(x_1, x_2, ..., x_6,\right)$ son las variables de decisión
- x_{ij} es el flujo de la red

- c_{ij} es la capacidad de la red

e. Aplicaciones de los Algoritmos de Red de Transporte:

ALGORITMO DEL FLUJO MÁXIMO

(0) Para disponer de una red de transporte orientada y capacidad, se tiene que asumir que la orientación de la red, no obstante se reconocen calles de una vía y otras de doble vía, la red a disponer es en una sola orientación debido, en especial de aquellas que son de doble vía, que las que se muestra en doble vía lo hacen a través de la misma calle. En el caso de los nodos de la red, se hace el distingo del tipo de nodo; para el nodo de inicio (nodo fuente) el flujo de ingreso a la red en el nodo fuente debe tener un valor negativo, para el nodo de término (nodo sumidero) el flujo de ingreso a la red en el nodo sumidero debe tener un valor positivo, y para los nodos intermedios el flujo de red correspondiente debe tener un valor de cero 0.

Tabla N°03 Tipos de nodos

NÚMERO DE NODOS	VALOR DE INGRESO A LA RED	TIPO DE NODOS
1	-900	FUENTE
2	0	INTERMEDIO
3	0	INTERMEDIO
4	0	INTERMEDIO
5	0	INTERMEDIO
6	0	INTERMEDIO
7	400	SUMIDERO

Construcción del Modelo Matemático

$$Min.\left(f(x) = \sum_{i=1}^{6} c_{ij}^{1} x_{ij} \right)$$

$$\text{s.a:} \sum_{i} x_{id} = F \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} - \sum_{i}^{6} x_{ji} = 0 \quad \forall v_j \in V,\ j \neq s, d$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall i, j$$

Donde:

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$ son las variables de decisión
- x_{ij} es el flujo de la red
- c_{ij} es la capacidad de la red
- F es el valor del flujo en específico

Finalmente, se dispone de una red de transporte para la aplicación del flujo máximo.

(1) Iniciamos con la asignación, en cada uno de los arcos de la red, de un valor de cero (flujo inicial factible).

(2) Elegimos un – paso desde el nodo fuente al nodo sumidero, es decir, tenemos $P = \{(v_0, v_5)\}$ o también $P : v_0 \to v_5$

(3) Dado que no existen arcos hacia atrás en el –paso, utilizamos la relación siguiente:

$$q = \min\left\{\min_{(v_i, v_j)\uparrow}\{c_{ij} - x_{ij}\}\right\}$$

Es decir, $q = \min\left\{\min\{580 - 0\}\right\} = 580$

De aquí, agregamos el valor de 580 al flujo x_{05} (arco hacia adelante). Luego, ir a (2):

Elegimos un –paso desde el nodo fuente al nodo sumidero, es decir, tenemos $P = \{(v_0, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_5)\}$ o también $P : v_0 \to v_2 \to v_4 \to v_5$

(3) Dado que no existen arcos hacia atrás en el – paso, utilizamos la relación siguiente: $q = \min\left\{\min_{(v_i, v_j)\uparrow}\{c_{ij} - x_{ij}\}\right\}$

Es decir, $q = \min\left\{\min\{250 - 0, 550 - 0, 250 - 0\}\right\} = 250$

De aquí, agregamos el valor de 250 a los flujos x_{02}, x_{24}, x_{45} respectivamente (arcos hacia adelante). Luego, ir a (2):

Elegimos un –paso desde el nodo fuente al nodo sumidero, es decir, tenemos $P = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_5)\}$ o también $P : v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_5$

(3) Dado que no existen arcos hacia atrás en el –paso, utilizamos la relación siguiente: $q = \min\left\{ \min_{(v_i,v_j)\uparrow}\left\{ c_{ij} - x_{ij} \right\} \right\}$

Es decir, $q = \min\left\{ \min\left\{ 550-0, 400-0, 250-0 \right\} \right\} = 250$

De aquí, agregamos el valor de 250 a los flujos x_{01}, x_{13}, x_{35} respectivamente (arcos hacia adelante). Luego, ir a (2). Como ya no existen – paso, ir a (4).

(4) PARE. El flujo máximo se ha encontrado. Es decir, utilizamos la relación $Max.\left(f(x) = \sum_i x_{id} \right)$. Luego, $Max.\left(\sum_i x_{id} \right) = x_{35} + x_{45} = 250 + 250 = 500$

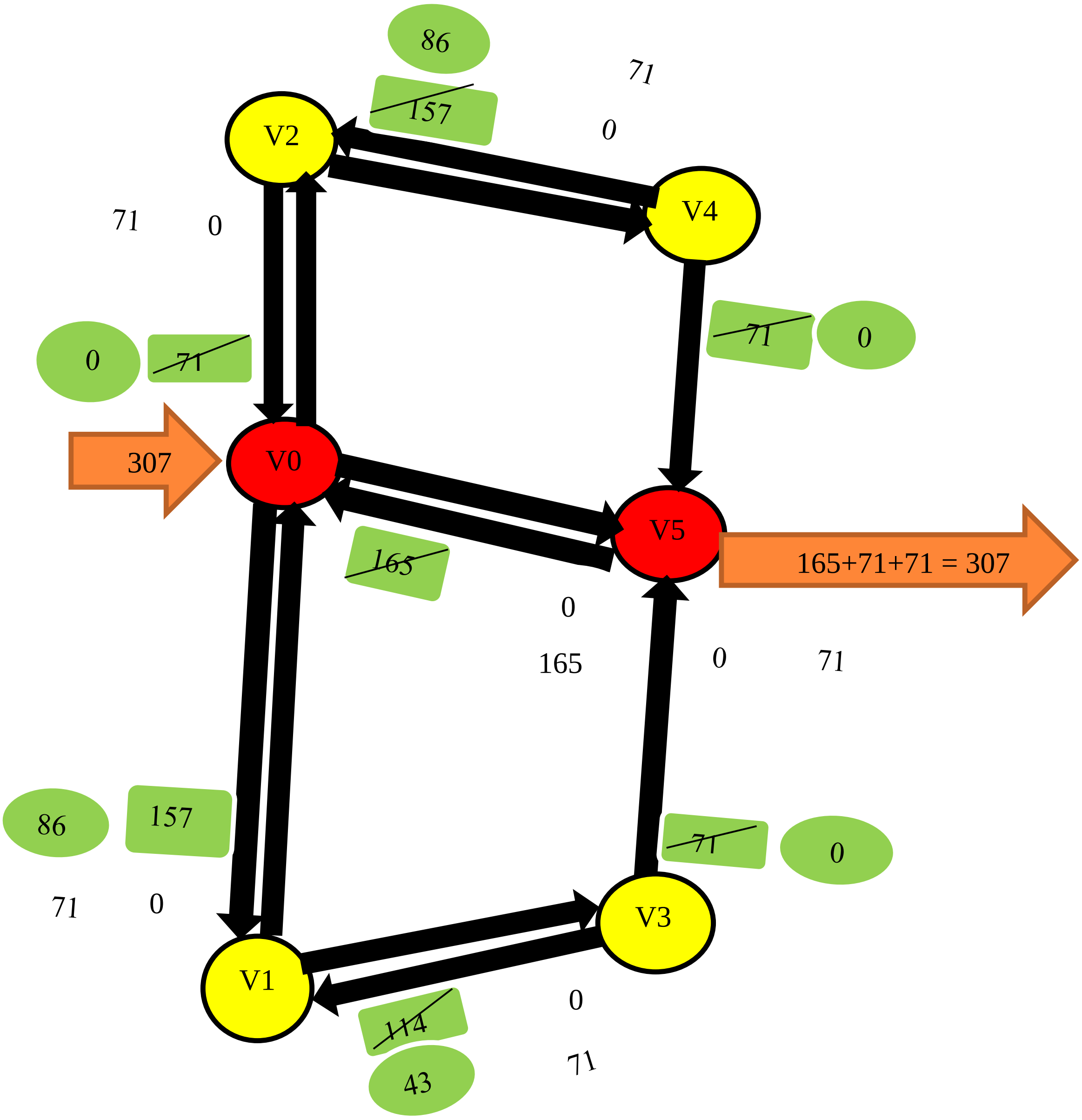
Esto a su vez, determinado aproximadamente en relación al número de vehículos que deben salir por el nodo sumidero corresponde a 143 vehículos.

RESULTADOS DEL ALGORITMO DEL FLUJO MÁXIMO

$\min\{165\} = 165$

$\min\{71, 157, 71\} = 71$

$\min\{157, 114, 71\} = 71$



ALGORITMO DEL FLUJO DE COSTE MÍNIMO

(0) Para disponer de una red de transporte orientada y capacitada, se asumió una sola orientación a la red, no obstante se reconocen dos calles de una vía y otras cinco de doble vía, ya que las calles de doble vía lo hacen a través de la misma calle y no resulta necesario hacer una diferencia. Aparte de la capacidad de la red (número de vehículos que soporta cada uno de los arcos de la red), se necesita ahora también que cada uno de los arcos se le asigne un costo $c_{ij}^{'}$ según se muestra en la tabla N°04. El criterio tomado está en relación directa a las calles que ingresan con una mayor o menor congestión de vehículos. Además, el valor asignado al flujo específico es $F = 130$.

Tabla N°04 Costo de los arcos de la red de transporte urbano de vehículos

NÚMERO DE ARCOS	CAPACIDAD DE LOS ARCOS DE LA RED	COSTO DE LOS ARCOS DE LA RED (S/.)
1	157	40
2	71	20
3	165	50
4	114	30
5	157	40
6	71	20
7	71	20

Observación: El costo en soles de cada vehículo en el arco de la red de flujo de transporte urbano vehicular en su máxima capacidad equivale al costo de un servicio de taxi (que es de S/. 3.00 soles en la zona centro de la ciudad de Huaraz) más un costo de S/. 0.60 soles aproximadamente por demora de permanencia en el arco de la red.

Finalmente, se dispone de una red de transporte para la aplicación del flujo de mínimo costo.

(1) Asignamos en cada uno de los arcos de la red, el valor de cero (flujo inicial factible).

(2) Si $\phi(v_d) = 0 \neq 130 = F$. Se debe continuar.

(3) Se forma la red de transporte orientada y ponderada $N_{\phi(v_d)} = \left[V, E_{\phi(v_d)}\right]$, es decir $N_{\phi(v_d)} = N_0$. Puesto que todos los flujos de los arcos son iniciales, se hace de la siguiente relación: $(v_i, v_j) \in E_{\varphi(v_d)}$ si y solo si $x_{ij} < c_{ij}$ y hacer $w_{ij} = c_{ij}^{'}$ y se obtiene N_0.

(4) Se aplica el algoritmo del Camino más Corto (Dijkstra - 1) para encontrar el camino más corto desde v_0 a v_5. Es decir, $P = \{(v_0, v_5)\}$ es el camino determinado o también $P: v_0 \rightarrow v_5$

(5) Determinamos el –paso N en correspondiente al camino más corto de (4) y se calcula mediante la relación $q = \min\left\{\min\limits_{(v_i,v_j)\uparrow}\{c_{ij} - x_{ij}\}, F - \varphi(v_d)\right\}$, dado que todos de los arcos del camino son hacia adelante.

Es decir, $q = \min\left\{\min\{165 - 0\}, 130 - 0\right\} = 130$

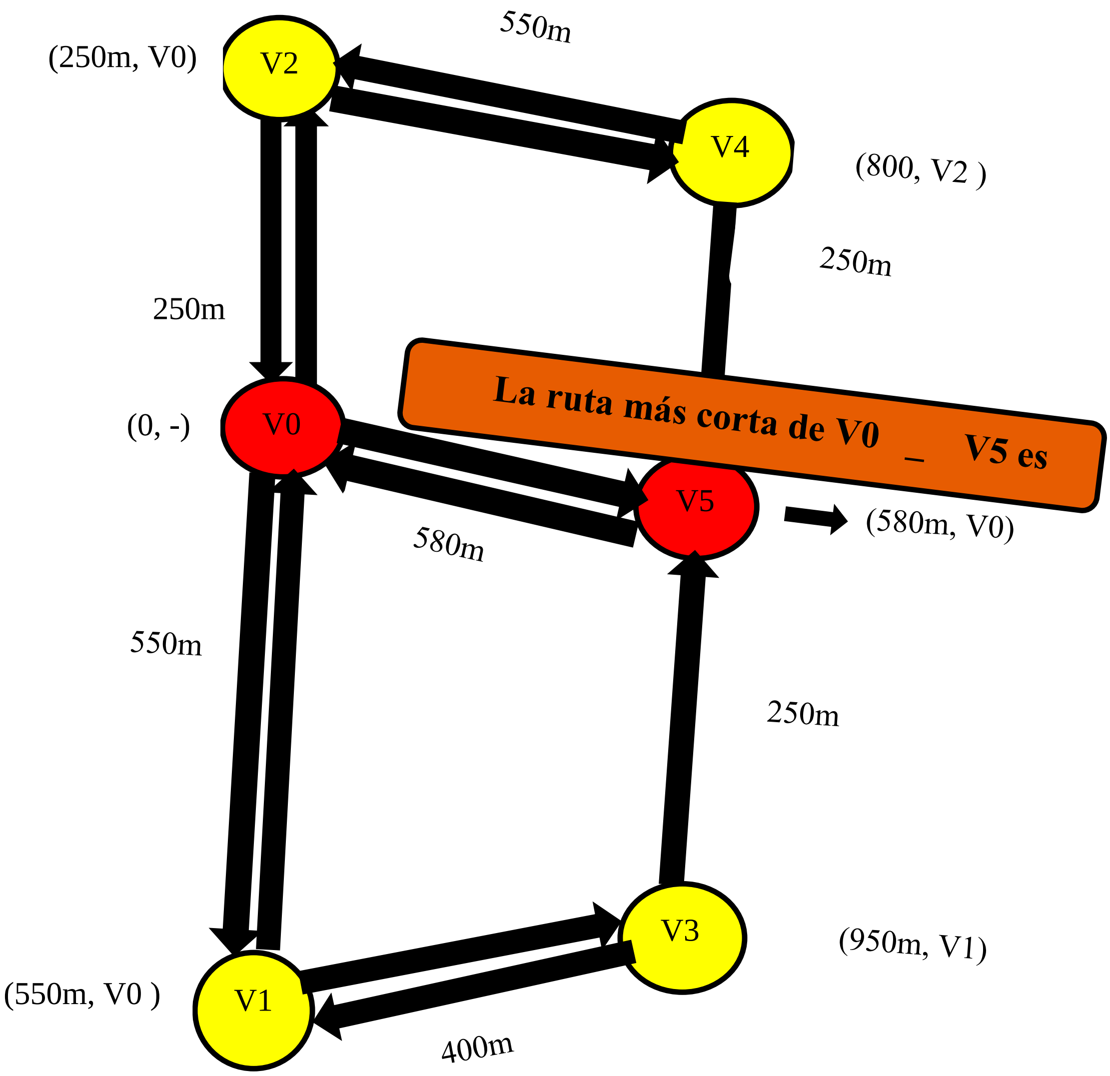
De aquí, se agrega el valor de 130 al único arco hacia delante de P en N . Luego, ir a (2):

Como $\phi(v_d) = 130 = F$. PARE. El flujo actual es óptimo.

Es decir, utilizamos la relación $Min.\left(C = \sum\limits_{(v_i,v_j)\in E} c_{ij}^{'} x_{ij}\right)$.

Luego, $Min.\left(\sum\limits_{(v_i,v_j)\in E} c_{ij}^{'} x_{ij}\right) = c_{s5}^{'} x_{s5} = (50)(130) = 6500$

RESULTADO DEL ALGORITMO DEL CAMINO MÁS CORTO – DIJSKTRA



V. DISCUSIÓN

En la ciudad de Huaraz se manifiestan muchos modelos de redes de transporte, llámese de vehículos, de redes eléctricas, de telecomunicaciones, de agua y alcantarillado, entre otras. En particular, el tráfico de los vehículos en el transporte urbano en su ámbito general y en particular en la ciudad de Huaraz no es ajeno a los problemas de red de transporte. Optimizar una red, aunque idealmente, consiste en realizar una planificación de las rutas ideales para la eficiencia de una red de transporte que conectan los nodos fuentes o entradas con los nodos sumideros o salidas.

El gobierno provincial de la ciudad de Huaraz emite normas y ordenanzas para regular el tránsito vehicular, evidente consciente de que cada día si no se pone coto a la situación del transporte, puede llevar a circunstancias nada favorables a las gestiones municipales. La idea es buscar consensos entre los diferentes actores que tienen injerencia en transporte de la ciudad de Huaraz. La competencia principal comprende la integridad del territorio y los servicios de transporte que se prestan dentro de este. En ese sentido, quedan incluidos los operadores y transportistas, además de los prestamistas de los servicios complementarios que se realizan en el lugar.

Relativamente se entiende se presentan propuestas tras propuestas con el fin de menguar la situación del transporte vehicular, quizás el tamaño de la ciudad no puede hacerlo incontrolable, pero al respecto se deben tomar medidas apropiadas, como medir la carga vehicular en la ciudad, los tipos de vehículos que deben transitar, entre otras situaciones paliativas al problema.

En la Escuela Profesional de Matemática de la UNASAM, se conocen herramientas propias de la matemática que se relacionan con la problemática del transporte. Por ejemplo, la teoría de redes, en particular el de la red de transportes tiene metodologías de solución al problema de red de transporte, seguro no refleja la enorme complejidad que acarrea esta problemática, pero nos acerca y motiva que un profesional en matemática puede involucrarse en este tipo de problemas y aportar con herramientas de solución en trabajos interdisciplinarios.

La existencia de algoritmos, tales como el algoritmo de red de flujo máximo y el algoritmo de red de flujo de coste mínimo estudiados constituyen una ayuda al menos de una parte del problema harto complejo como es en la actividad del transporte.

Es posible trabajar al detalle en sectores de la ciudad de Huaraz, especialmente donde se observa caos vehicular, y hacer un análisis real del problema de congestión.

Se ha utilizado solo un sector - modo piloto, en especial en la parte centro de la ciudad de Huaraz, entre el entorno de las Avenidas Confraternidad Internacional Oeste, la Avenida Gamarra, La Avenida Raimondi y el Jirón 28 de Julio; se ha realizado un desarrollo manual en la aplicación de las metodologías de solución al problema diseñado, con la consideración de ciertos supuestos y restricciones, así como la ayuda del programa informático Xpress Ive 2018.

La complejidad evidentemente lleva a limitaciones de desarrollo manual, y esto hace importante al manejo de determinados programas informáticos como ayuda importancia al abordar problemas de tamaño grande. En las últimas décadas el uso del ordenador para resolverlos y las metodologías a través de los algoritmos propuestos son de vital importancia para obtener rápidos y buenos resultados. Esto justifica la dedicación de la comunidad científica al estudio de estos algoritmos y que ayuden a resolver problemas.

En el caso de la aplicación del algoritmo de red de flujo máximo, observamos la necesidad de adecuar el problema real y concreto, y la necesidad de disponer de información en relación a la capacidad de los arcos de la red, los resultados logrados son racionales y pertinentes al caso real evaluado.

La aplicación del algoritmo de red de flujo de coste mínimo, lleva a tomar consideración de los costos que deben ocurrir en cada de los arcos de la red, así como de suponer un valor de flujo específico al problema dado. Los resultados también permiten entender que resultan ser apropiados al caso práctico planteado.

Complejidad algorítmica del Algoritmo: Flujo Máximo

```
(!*******************************************************
  Maxflow.mos
  *******************************************************!)
model "Red flujo máximo"
uses "mmxprs", "mmsvg"
declarations
  NODES: range                        ! Set of nodes
  SOURCE = 0; SINK = 5              ! Source and sink nodes
  ARC: dynamic array (NODES,NODES) of integer  ! 1 if arc defined, 0 otherwise
  flow: dynamic array(NODES,NODES) of mpvar   ! 1 if flow on arc, 0 otherwise
 end-declarations
 initializations from 'maxflow.dat'
  ARC
 end-initializations
 forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) and n<m ) ARC(m,n):= ARC (n,m)
 forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) )  create(flow(n,m))
! Objective: number of disjunctive paths
 Paths:= sum(n in NODES) flow(SOURCE,n)
! Flow conservation and capacities
 forall(n in NODES | n<>SOURCE and n<>SINK) do
```

```
 Balance(n):= sum(m in NODES) flow(m,n) = sum(m in NODES) flow(n,m)
 Capacity(n):= sum(m in NODES) flow(n,m) <= 1
end-do
! No return to SOURCE node
NoReturn:= sum(n in NODES) flow(n,SOURCE) = 0
forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) )  flow(n,m) is_binary
! Solve the problem
maximize(Paths)
! Solution printing
writeln("Total number of paths: ", getobjval)
forall(n in NODES | n<>SOURCE and n<>SINK)
 if(getsol(flow(SOURCE,n))>0) then
  write (SOURCE, " - ",n)
  nnext:=n
  while (nnext<>SINK) do
   nnext:=round(getsol(sum(m in NODES) m*flow(nnext,m)))
   write (" - ", nnext)
  end-do
  writeln
 end-if
! Solution drawing
declarations
 X,Y: array(NODES) of integer       ! x-y-coordinates of nodes
end-declarations
 initializations from 'maxflow.dat'
```

```
 [X,Y] as 'POS'
end-initializations
svgsetgraphviewbox(0,0,max(n in NODES)X(n)+10, max(n in NODES)Y(n)+10)
svgsetgraphscale(2)
svgaddgroup("Arcs", "Network", SVG_GREY)
forall(n in NODES| n<>SOURCE and n<>SINK) do
 svgaddpoint(X(n), Y(n))
 svgaddtext(X(n), Y(n)+1, text(n))
end-do
forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) and n<m )
 svgaddline(X(n), Y(n), X(m), Y(m))
svgaddgroup("Flow", "Disjunctive Paths", SVG_RED)
forall(n in {SOURCE,SINK}) do
 svgaddpoint(X(n), Y(n))
 svgaddtext(X(n), Y(n)+1, string(n))
end-do
forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) and getsol(flow(n,m))>0)
  svgaddline(X(n), Y(n), X(m), Y(m))
svgsave("maxflow.svg")
svgrefresh
svgwaitclose("Close browser window to terminate model execution.", 1)
end-model
```

Complejidad algorítmica del Algoritmo: Flujo de Coste Mínimo

```
(!****************************************************
Mincostflow.mos
Type:        Minimum cost flow problem
****************************************************!)
model "Costo de flujo mínimo"
 uses "mmxprs", "mmsvg"
 declarations
  NODES: set of string                ! conjunto de nodos
  MINQ: integer                       ! total cantidad de transporte
  A: array (ARCS:range, 1..2) of string   ! arcos
  COST: array(ARCS) of integer         ! costo de transporte en los arcos
  MINCAP,MAXCAP: array(ARCS) of integer !capacidad máxima y  mínima de los
  arcos
 end-declarations
 initializations from 'mincostflow.dat'
  A MINQ MINCAP MAXCAP COST
 end-initializations
 finalize(ARCS)
! Calculate the set of nodes
 NODES:=union(a in ARCS) {A(a,1),A(a,2)}
 declarations
  flow: array(ARCS) of mpvar           ! flujo de arcos
 end-declarations
```

```
! Objective: costo total de transporte
 Cost:= sum(a in ARCS) COST(a)*flow(a)
! Flow balance: inflow equals outflow
 forall(n in NODES | n<>"SOURCE" and n<>"SINK")
  Balance(n):=
   sum(a in ARCS | A(a,2)=n) flow(a) = sum(a in ARCS | A(a,1)=n) flow(a)
  Min and max flow capacities
 forall(a in ARCS | MAXCAP(a) > 0) do
  flow(a) >= MINCAP(a)
  flow(a) <= MAXCAP(a)
 end-do
  ! Minimum total quantity to transport
 MinQuant:= sum(a in ARCS | A(a,1)="SOURCE" ) flow(a) >= MINQ
! Solve the problem
 minimize(Cost)
 ! Solution printing
 writeln("Total cost: ", getobjval)
 forall(a in ARCS)
  write( if(getsol(flow(a))>0,
         A(a,1) + " -> "+ A(a,2) + ": "+ getsol(flow(a))+"\n", ""))
! Solution drawing
 declarations
  X,Y: array(NODES) of integer        ! x-y-coordinates of nodes
 end-declarations
  initializations from 'mincostflow.dat'
```

```
 [X,Y] as 'POS'
end-initializations
svgsetgraphviewbox(0,10,max(n in NODES)X(n)+15, max(n in NODES)Y(n)+15)
svgsetgraphscale(2)
svgaddgroup("Arcs", "Network")
forall(n in NODES) do
 svgaddpoint(X(n), Y(n))
 svgaddtext(X(n), if(Y(n)>60, Y(n)+2, Y(n)-5), n)
end-do
svgaddgroup("Flow", "Used routes")
forall(a in ARCS)
 if(getsol(flow(a))>0) then
  svgaddarrow(X(A(a,1)), Y(A(a,1)), X(A(a,2)), Y(A(a,2)))
  svgaddtext((X(A(a,1))+X(A(a,2)))/2, (Y(A(a,1))+Y(A(a,2)))/2-3,
              text(getsol(flow(a))))
 else
  svgaddline("Arcs", X(A(a,1)), Y(A(a,1)), X(A(a,2)), Y(A(a,2)))
 end-if
svgsave("mincostflow.svg")
svgrefresh
svgwaitclose("Close browser window to terminate model execution.", 1)
end-model
```

VI. CONCLUSIONES

- Se desarrolló el modelo matemático de red de flujo de transporte, obedeciendo al problema real y concreto elegido, esto es en modo piloto, al problema de transporte urbano vehicular en la ciudad de Huaraz.
- Se formuló los modelos matemáticos de los algoritmos de red de flujo de transporte: flujo máximo y flujo de coste mínimo.
- Se aplicó las metodologías de solución al problema de red de transporte mediante el uso del algoritmo de red de flujo máximo para el problema real y concreto elegido, esto es en modo piloto, al problema de transporte vehicular en la ciudad de Huaraz teniendo como resultado.

  Asimismo, se ha aplicado el algoritmo de red de flujo de coste mínimo, para el problema real y concreto elegido, esto es en modo piloto, al problema de transporte vehicular en la ciudad de Huaraz teniendo como resultado.
- Se utilizó el programa computacional Xpress Ive 2018 como herramienta informática de ayuda a cada uno de las metodologías aplicadas, con los siguientes resultados:

  Algoritmo de red de flujo máximo, es de 500 vehículos.

  Algoritmo de red de flujo de coste mínimo, es de 6500 soles.
- La evaluación realizada a ambas metodologías aplicadas en la solución del problema de red de transporte a través de una comparación entre ellas permite diferenciar sus ventajas y desventajas en relación a los modelos matemáticos, que se manifiesta a través de dos metodologías complementarias y necesarias.

VII. RECOMENDACIONES

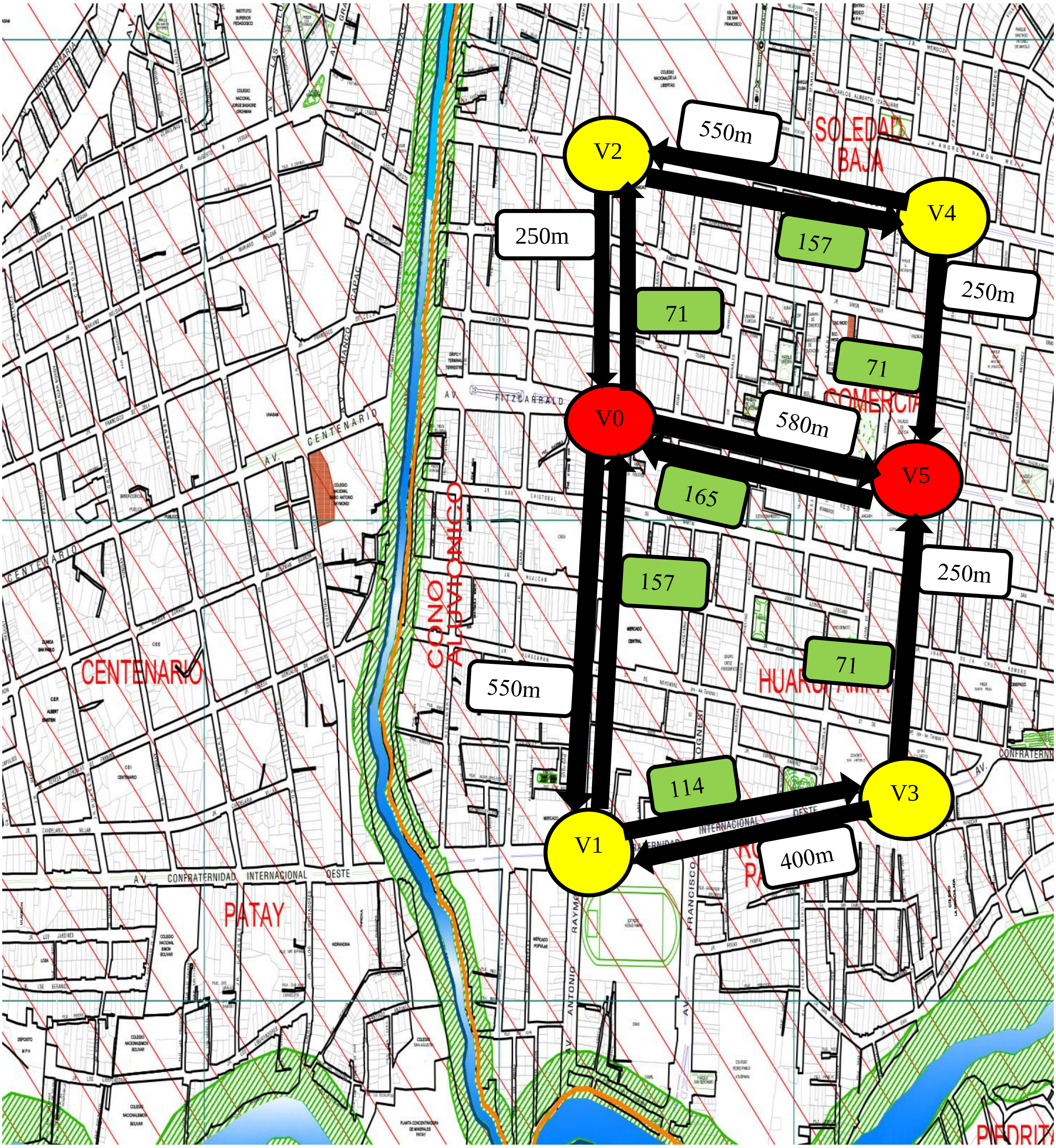
- Estudiar la teoría de redes, y en especial el de flujo de transportes la cual conlleva a afrontar investigaciones más puntuales y complejas, por ello se sugiere explorar otras metodologías de solución existentes al problema de redes de flujos de transporte.
- El estudio es pertinente para las organizaciones gubernamentales dedicadas a las actividades del transporte desde diferentes aspectos siendo un matemático el profesional referente y competente para abordar este tipo de problemas.
- Extender y profundizar otras metodologías de solución al problema de redes de transporte.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. García Rodenas, Ricardo (2001). **Metodología para el diseño de redes de transporte y para la elaboración de algoritmos en programación matemática convexa diferenciable**. Edit. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, España.
2. Johnsonbaugh, Richard (1998) **Matemáticas Discretas.** 1ª Edición. Ed. Iberoamérica, México.
3. Kolman, Bernard (1995) **Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación**. 3ª Edición. Ed. Prentice Hall, México.
4. Kamlesh, Mathur (1996) **Investigación de Operaciones**. 1ª Edición. Ed. Prentice Hall, México.
5. Mayorquin Gutiérrez, Antonio (2004) **Algoritmo primal para resolver el problema de flujo a costo mínimo**. Edit. Universidad Tecnológica de la Mixteca, México.
6. Merayo, Félix G. (2005) **Matemática Discreta**. 2ª Edición. Ed. Thompson, España.
7. Pedrosa Montero, José (2017). **El modelo del problema de transporte. Aplicación práctica a una red logística**. Edit. Universidad de la Rioja.
8. Ralpy, Grimaldi (1997) **Matemática Discreta y Combinatoria**. Ed. Addison-Wesley.
9. Scheinerman, Edward R**. Matemática Discreta**. Ed. Thompson Learning.
10. Strayer, James (2004) **Linear Programming and its Applications.** Ed. Springer Verlag, Heildelberg, Alemania.
11. Taha, Hamdy A.(2004) **Investigación de Operaciones**. 7ª Edición. Ed.Prentice Hall, México.
12. Wayne, L. Winston (2004) **Investigación de Operaciones**. 4ª Edición Ed. Tompson Learning, México.

ANEXO

Mapa de la ciudad de Huaraz



A. Programa del Algoritmo de Flujo máximo del problema y solución de transporte

```
(!******************************************************
 Xpress Problems
 =====================
file maxflow.mos
Tipo:        Maximum flow with unitary capacities
Caracterìsticas:     MIP problem, encoding of arcs, `range', `exists', `create',
algorithm for printing paths, `forall-do', `while-do',
`round', graphical representation of results
 Descripciòn:  We wish to test the reliability of transport
 network that consists of eleven sites connected by
bidirectional lines for data transmission. The specifications
require that the two sites (nodes) 10 and 11 of the network
 remain able to communicate even if any three other sites of
 the network are destroyed.
******************************************************!)
model "Network reliability"
 uses "mmxprs", "mmsvg"
declarations
 NODES: range                        ! Set of nodes
 SOURCE = 10; SINK = 11              ! Source and sink nodes
ARC: array(NODES,NODES) of integer  ! 1 if arc defined, 0 otherwise
 flow: array(NODES,NODES) of mpvar   ! 1 if flow on arc, 0 otherwise
end-declarations
initializations from 'maxflow.dat'
 ARC
```

```
 end-initializations
 forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) and n<m ) ARC(m,n):=

ARC(n,m)
 forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) )  create(flow(n,m))
! Objective: number of disjunctive paths
 Paths:= sum(n in NODES) flow(SOURCE,n)
! Flow conservation and capacities
 forall(n in NODES | n<>SOURCE and n<>SINK) do
  Balance(n):= sum(m in NODES) flow(m,n) = sum(m in NODES) flow(n,m)
  Capacity(n):= sum(m in NODES) flow(n,m) <= 1
 end-do
! No return to SOURCE node
 NoReturn:= sum(n in NODES) flow(n,SOURCE) = 0
 forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) )  flow(n,m) is_binary
! Solve the problem
 Maximize (Paths)
 ! Solution printing
 writeln("Total number of paths: ", getobjval)
 forall(n in NODES | n<>SOURCE and n<>SINK)
  if(getsol(flow(SOURCE,n))>0) then
   write(SOURCE, " - ",n)
   nnext:=n
   while (nnext<>SINK) do
    nnext:=round(getsol(sum(m in NODES) m*flow(nnext,m)))
    write(" - ", nnext)
   end-do
   writeln
```

```
 end-if

! Solution drawing
 declarations
  X,Y: array(NODES) of integer        ! x-y-coordinates of nodes
 end-declarations
  initializations from 'maxflow.dat'
  [X,Y] as 'POS'
 end-initializations
 svgsetgraphviewbox(0,0,max(n in NODES)X(n)+10, max(n in NODES)Y(n)+10)
 svgsetgraphscale(2)
 svgaddgroup("Arcs", "Network", SVG_GREY)
 forall(n in NODES| n<>SOURCE and n<>SINK) do
  svgaddpoint(X(n), Y(n))
  svgaddtext(X(n), Y(n)+1, text(n))
end-do

 forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) and n<m )
   svgaddline(X(n), Y(n), X(m), Y(m))
   svgaddgroup("Flow", "Disjunctive Paths", SVG_RED)
   forall(n in {SOURCE,SINK}) do
    svgaddpoint(X(n), Y(n))
    svgaddtext(X(n), Y(n)+1, string(n))

end-do
   forall(n,m in NODES | exists(ARC(n,m)) and getsol(flow(n,m))>0)
   svgaddline(X(n), Y(n), X(m), Y(m))
    svgsave("maxflow.svg")
    svgrefresh
```

svgwaitclose

end-model

file mincostflow.mos

``````````````````

Tipo: Minimum cost flow problem

Caracterìsticas: MIP problem, formulation with extra nodes for modes of

transport; encoding of arcs, `finalize', union of sets,

nodes labeled with strings, graphical solution representation

Descripción: A company needs to transport 180 tonnes of chemical products

*****************************************************!)

```
model "Minimum cost flow"
uses "mmxprs", "mmsvg"
declarations
NODES: set of string                 ! Set of nodes
MINQ : integer                       ! Total quantity to transport
A: array(ARCS:range,1..2) of string  ! Arcs
COST: array(ARCS) of integer         ! Transport cost on arcs
MINCAP, MAXCAP: array(ARCS) of integer ! Minimum and maximum arc capacities
end-declarations
initializations from 'mincostflow.dat'
A MINQ MINCAP MAXCAP COST
end-initializations

finalize (ARCS)
! Calculate the set of nodes
NODES:=union(a in ARCS) {A(a,1),A(a,2)}
```
```

```
declarations
 flow: array(ARCS) of mpvar            ! Flow on arcs
end-declarations
! Objective: total transport cost
Cost:= sum(a in ARCS) COST(a)*flow(a)
! Flow balance: inflow equals outflow
forall(n in NODES | n<>"SOURCE" and n<>"SINK")
 Balance(n):=
  sum(a in ARCS | A(a,2)=n) flow(a) = sum(a in ARCS | A(a,1)=n) flow(a)

! Min and max flow capacities
forall(a in ARCS | MAXCAP(a) > 0) do
 flow(a) >= MINCAP(a)
 flow(a) <= MAXCAP(a)
end-do
 ! Minimum total quantity to transport
MinQuant:= sum(a in ARCS | A(a,1)="SOURCE" ) flow(a) >= MINQ
! Solve the problem
minimize(Cost)
 ! Solution printing
writeln("Total cost: ", getobjval)
forall(a in ARCS)
 write( if(getsol(flow(a))>0,
        A(a,1) + " -> "+ A(a,2) + ": "+ getsol(flow(a))+"\n", ""))
! Solution drawing
```

```
declarations
 X,Y: array(NODES) of integer       ! x-y-coordinates of nodes
end-declarations
initializations from 'mincostflow.dat'
 [X,Y] as 'POS'
end-initializations
svgsetgraphviewbox(0,10,max(n in NODES)X(n)+15, max(n in NODES)Y(n)+15)
svgsetgraphscale(2)
svgaddgroup("Arcs", "Network")
forall(n in NODES) do
 svgaddpoint(X(n), Y(n))
 svgaddtext(X(n), if(Y(n)>60, Y(n)+2, Y(n)-5), n)
end-do
svgaddgroup("Flow", "Used routes")
forall(a in ARCS)
 if(getsol(flow(a))>0) then
  svgaddarrow(X(A(a,1)), Y(A(a,1)), X(A(a,2)), Y(A(a,2)))
  svgaddtext((X(A(a,1))+X(A(a,2)))/2, (Y(A(a,1))+Y(A(a,2)))/2-3,
             text(getsol(flow(a))))
 else
  svgaddline("Arcs", X(A(a,1)), Y(A(a,1)), X(A(a,2)), Y(A(a,2)))
 end-if
svgsave("mincostflow.svg")
svgrefresh
svgwaitclose
```

end-model

**1. Datos del Autor:**

Apellidos y Nombres: MATIAS ADAN Luis

Código de alumno: 03-0498.8.AO Teléfono: 938878228

Correo electrónico: matias_mat_29 @hotmail.com DNI: 80010913

**2. Modalidad de trabajo de investigación:**

( ) Trabajo de Investigación ( ) Trabajo académico

( ) Trabajo de suficiencia personal (X) Tesis

**3. Título profesional o grado académico**

( ) Bachiller (X) Titulo ( ) Segunda especialidad

( ) Licenciado ( ) Magister ( ) Doctor

**4. Título del trabajo de investigación**

**"EVALUACIÓN DE METODOLOGÍAS DE SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE REDES DE TRANSPORTE"**

**5. Facultad de Ciencias**

**6. Escuela, Carrera o programa: Escuela Académica Profesional de Matemática.**

**7. Asesor:**

Apellidos y Nombres: MSc. GARRIDO ANGULO Henrry Àngel

Teléfono: 943691437

Correo electrónico: gaha1379@gmail.com DNI: 32800493

A través de este medio autorizo a la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, publicar el trabajo de investigación en formato digital en el Repositorio Institucional Digital, Repositorio Nacional Digital de Acceso Libre (ALICIA) y el Registro Nacional de Trabajos de Investigación (RENATI).

Asimismo, por la presente dejo constancia que los documentos entregados a la UNASAM, versión impresión y digital, son las versiones finales del trabajo sustentado y aprobado por el jurado y son de autoría del suscrito en estricto respeto a la legislación en materia de propiedad intelectual

FIRMA.....................................

DNI: 80010913

08 de enero de 2019