UNIVERSIDAD NACIONAL "SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"MODELOS POLINOMIALES Y MODELOS RADICALES DE SERIES DE TIEMPO APLICANDO TRANSFORMACIONES LINEALES"

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Bach. Javier David, Melgarejo Garcilazo.

HUARAZ

2019

NO REGISTRO: T008

DEDICATORIA

A mi familia

AGRADECIMENTO

Agradezco, en primer lugar a la vida y a la humanidad; por su bondad y misericordia, a mi famila; por su apoyo y amor incondiconal, a mi asesor Msc. VLADIMIR RODRÍGUEZ Sabino por su valiosa guía a lo largo de este trabajo y por todo lo que me ha enseñado en esta tarea tan hermosa de la matemática y mis amigos matemáticos de la Universidad Nacional SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO; por todas sus sugerencias y críticas.

RESUMEN

Este trabajo de tesis investigativa estudia el método algebraico en el modelado de series de tiempo. Se introduce los métodos de uso de las transformaciones lineales para construir modelos polinomiales y modelos radicales de series de tiempo. Se verificó que una serie de tiempo posee un modelo lineal, si la matriz asociada a este es diagonalizable a la izquierda. En particular, una serie de tiempo tiene modelos lineales cuando M_S es de rango completo. También se proporciona un método de construcción de modelos lineales para ciertas series de tiempo que no son diagonalizables a la izquierda. Lo mismo en caso de que no existan modelos lineales, se da un método para construir modelos radicales; de los cuáles todos los componentes son combinaciones lineales de los r-ésimo radicales de ciertos polinomios homogéneos con el grado uniforme r, estos modelos son lineales con respecto al grado total, finalmente se proporciona ejemplos para ilustrar estos procesos.

Palabras clave: Series de tiempo, modelos polinomiales, modelos lineales, modelos radicales y transformaciones lineales.

ABSTRACT

This research thesis paper studies the algebraic method in time series modeling. The methods of using linear transformations to construct polynomial models and radical time series models are introduced. It was verified that a time series has a linear model, if the matrix associated with it is diagonalizable to the left. In particular, a time series has linear models when M_S is full range. A method of constructing linear models is also provided for certain time series that are not diagonalizable to the left. The same in case there are no linear models, there is a method to construct radical models; of which all components are linear combinations of the r-th radicals of certain homogeneous polynomials with the uniform degree r, these models are linear with respect to the total degree, finally examples are provided to illustrate these processes.

Keywords: Time series, polynomial models, linear models, radical models and linear transformations.

Índice

INTRODUCCIÓN……...…….……..…1
1. MARCO TEÓRICO…..……...……...…….4
1.1 ANTECEDENTES……...…….4
1.2 EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$…..……...……...……6
1.2.1 Definición ……6
1.2.2 Definición ……7
1.2.3 Funciones vectoriales de una variable real ……..8
1.2.4 Funciones reales de varias variables ……...9
1.2.5 Función vectorial de varias variables ……..9
1.3 MATRICES……...……..10
1.3.1 Definición ……..10
1.4 INTRODUCCIÓN A LAS SERIES DE TIEMPO……..12
1.4.1 Definición ……..12
1.4.2 Definición ……..13
1.4.3 Representaciones matemáticas frecuentes de series de tiempo …….14
1.5 ANILLOS…...…….18
1.5.1 Definición ……..18
1.5.2 Anillo conmutativo ……19
1.5.3 Anillo con unitario ……19
1.5.4 Unidad en un anillo ……...19
1.5.5 Anillo con división ……20
1.5.6 Campo ……..….20
1.5.7 Monomio ……...20
1.5.8 Polinomio ……..20
1.6 TRANSFORMACIONES LINEALES……...……22
1.6.1 Definición ……..22
1.6.2 Transformaciones lineales inversibles …….….23
1.6.3 Representación de transformaciones lineales por matrices ……...23

1.7 INVERSA GENERALIZADA DE MATRICES……..…….24
1.7.1 Inversa generalizada de una matriz…….....23
1.7.2 Cálculo de la g-inversa de una matriz…….....39
1.8 TRANSFORMACIONES LINEALES INVERSIBLES EN SERIES DE TIEMPO……..……..46
1.8.1 Series de tiempo……46
1.8.2 Modelo de series de tiempo…….……...47
1.8.3 Modelo polinomial…….……47
1.8.4 Forma matricial de series de tiempo……..47
1.8.5 Grado de series de tiempo…….....48
1.8.6 Grado de un modelo polinomial……49
1.8.7 Las transformaciones lineales inversibles en series de tiempo……..49
2. RESULTADOS Y DISCUSIÓN…….....52
2.1 MODELOS POLINOMIALES DE SERIES DE TIEMPO…….…52
2.1.1 Modelos polinomiales de series de tiempo……..…52
2.1.2 Modelos polinomiales para ciertas series de tiempo……....56
2.2 MODELOS RADICALES DE SERIES DE TIEMPO……....64
2.2.1 Definición ……..…64
2.2.2 Modelo radical ……..…65
2.3 APLICACIONES……68
2.4 RESULTADOS ……..…79
3. CONCLUSIONES…….....81
4. RECOMENDACIONES……83
5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS……...……....84
6. ANEXOS…….……...……....87

INTRODUCCIÓN

El Análisis de series de tiempo, una de las áreas más importante de la Estadística; tiene como particularidad importante su análisis requerido para el pronóstico de eventos futuros y para el modelamiento matemático. Los datos de esta series de tiempo nos sirve para encontrar una función vectorial; así mismo para describir, predecir, interpretar y explicar su comportamiento futuro de un fenómeno.

El método algebraico desempeña actualmente un papel importante dentro de la formación de un matemático, físico, químico e ingeniero; quienes utilizan para explicar ciertos fenómenos en una rama concreta de la ciencia. Modelo matemático que incluyen justamente esto como método algebraico para la construcción de modelos polinomiales y modelos radicales.

Uno de los problemas que se presenta con mayor frecuencia a los matemáticos es construir un modelo matemático, no se puede pensar en situaciones tan distintas para construir un modelo matemático; pero para resolver este problema no siempre es sencillo hacerlo y en los casos donde no son capaces de encontrar una solución; es aquí cuando toma la importancia el presente trabajo de investigación

Consideremos un modelo polinomial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la función f satisface $f(A_i) = A_{i+1}$; es decir, envía a cada fila de datos(excepto el último) a la fila siguiente. La elección más natural de estas funciones deseadas sería, polinomiales por su simplicidad de cálculo; se centra en series de tiempo sobre anillo conmutativo X de números reales, los datos de series de tiempo no tienen filas identicas y $m \leq n$.

Es así, para realizar una mejor exposición sobre modelos polinomiales y modelos radicales de series de tiempo aplicando transformaciones lineales se ha dividido por medio de un marco teórico, resultados y discusión.

En el marco teórico, se cita las bases teóricas de carácter general como: espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, matrices, introducción a las series de tiempo, anillos, transformaciones lineales, inversa generalizada de matrices, transformaciones lineales inversibles en series de tiempo. Toda esta teoría es necesaria para el desarrollo y la comprensión de resultados y discusión.

Se introduce transformaciones lineales inversibles para simplificar el proceso de construcción de modelos polinomiales y modelos radicales. La reducción de la transformación lineal simplifica enormemente los algoritmos y permite mostrar, desde un punto de vista algebraico lineal, que muchas series de tiempo tienen modelos lineales y modelos radicales.

En el resultado y discusión, se prueba que una serie tiempo tiene modelos lineales si la forma de columna triangular reducida de la matriz asociada es diagonal, en particular, si la matriz asociada es de rango completo. Más aun se ilustra un método constructivo para construir modelos lineales para una serie de tiempo; esto después de la reducción de la columna. Se discute una clase de serie de tiempo cuya matriz asociada no es diagonalizable a la izquierda, pero la forma de columna escalonada reducida es de cierto tipo especial.

Se desarrolla métodos para construir modelos radicales, se introduce métodos de construcción de modelos lineales cuyos componentes son combinaciones lineales del r-ésimo

radical de polinomios homogéneos de grado r para algún entero positivo r. Tales modelos se obtiene por la búsqueda de modelos lineales de una serie de tiempo relevante, cuyos elementos son ciertas potencias de la matriz original.

Se cita algunas aplicaciones de los teoremas y se investiga ejemplos de series de tiempo en diversos casos.

Los objetivos específicos son:

- Analizar los fundamentos teóricos de series de tiempo
- Analizar y aplicar la teoría de polinomios
- Analizar y aplicar la teoría de radicación
- Construir la representación del modelo polinomial de series de tiempo
- Construir la representación del modelo radical de series de tiempo

Durante todo el proceso de elaboración de la tesis se ha consultado a diversas fuentes de información tales como: libros, documentos impresos, etc.; así como también a personas conocedoras del tema de nuestra Universidad y de otras Universidades; se ha hecho una investigación documental fundamentando, especificando e interpretando la información que se ha obtenido.

1. MARCO TEÓRICO

1.1 ANTECEDENTES

Jerónimo y Sabia (2007), en su artículo: "Ecuaciones Polinomiales: una aproximación algorítmica" presentada a la Universidad de Buenos Aires-Argentina, llega a las siguientes conclusiones:

- Este tipo de ecuaciones se ha resuelto mediante el método de Gauss, que consiste en triangular la matriz del sistema.
- Con el software straight-line programs se ha podido calcular el valor del polinomio en cualquier punto.

Quiñonez y Gómez (1986), en su artículo "Modelo Polinomial para Crecimiento Individual de Larvas de la Anchoveta Norteña, Engraulis Mordax", presentada a la Universidad Ciencias Marinas-México, llega a las siguientes conclusiones:

- El modelo se ajusta los datos de crecimiento diario de larvas de la anchoveta E. mordax mantenidas en diferentes combinaciones de alimentación en condiciones controladas de laboratorio.
- Cuando se presenta un periodo crítico, éste se inicia alrededor del cuarto día y termina durante el sexto día, posterior a la eclosión para iniciar el crecimiento acelerado. En forma similar, en los casos en que no se observa evidencia de periodo crítico, es a partir del sexto día en que la larva esta en condiciones de aprovechar el alimento disponible e iniciar el crecimiento vigoroso.

Li (2005), en su artículo “Un Enfoque Algebraico para la construcción de Polinomios interpolantes” presentada a la Universidad Montclair-USA, llega a las siguientes conclusiones:

- La construcción de polinomios de interpolación (multivariables), se utiliza las técnicas de base de Grobner. El conocido algoritmo Buchberger-Moller se aplica en el cálculo. Además, este método algebraico se puede utilizar para construir todos los modelos polinomiales de una serie de tiempo discreta, utilizando repetidamente el mismo algoritmo o aquellos con grados totales pequeños.

1.2 EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$

1.2.1 **Definición.-** Según Lages (2004), sea "n" un número natural. El espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de "n" factores iguales a $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$. Por lo tanto sus elementos; por lo tanto, son las secuencias (o listas) de "n" términos reales x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Para cada i = $1, 2, ..., n$, el término x_i se llama la i-ésima coordenada de x. Si x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e y = $(y_1, y_2, ..., y_n)$, tenemos x = y si, y solo si, $x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$. Por lo tanto; toda igualdad entre dos elementos de $\mathbb{R}^n$ es igual a n igualdades entre números reales. $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$ es el conjunto de números reales, $\mathbb{R}^2$ es el modelo de plano numérico y $\mathbb{R}^3$ es el modelo de espacio euclidiano tridimensional. Para simplificar, adoptaremos el hábito de escribir z = (x, y) en lugar de x = (x_1, x_2) y w = (x, y, z) en lugar de x = (x_1, x_2, x_3). Los elementos de $\mathbb{R}^n$ a veces se denomina puntos y a veces vectores. Este segundo nombre se aplica principalmente al considerar entre ellos las operaciones, que definiremos mas adelante. El vector **0** = (0, 0, ..., 0), cuyas coordenadas son todas nulas, se denomina el origen de $\mathbb{R}^n$. Para todo x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$, el vector $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ se llama opuesto o x simétrico. Los vectores $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ... $e_n = (0, ..., 1)$, que tienen un solo las coordenadas distintas de cero, igual a 1, constituyen la base canónica de $\mathbb{R}^n$. La igualdad x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$ significa que x = $x_1.e_1 + ... + x_n.e_n$

1.2.2 **Definición.-** Sean $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(y_1, y_2, ..., y_n)$ dos elementos de $\mathbb{R}^n$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la suma y el producto por escalares en $\mathbb{R}^n$ de la forma siguiente:

$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,

$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.

Luego para simplificar escribiremos $(x_1, x_2, ..., x_n) = x$ e $(y_1, y_2, ..., y_n) = y$. Los elementos del espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ se llaman vectores, y los del cuerpo $\mathbb{R}$ se llama escalares.

propiedades

Se verifican las siguientes propiedades:

1) La suma en $\mathbb{R}^n$ es conmutativa: $x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

2) La suma en $\mathbb{R}^n$ es asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

3) La n-upla $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ es el elemento neutro para la suma:

   $x + \mathbf{0} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \ y\ \ 0 \in \mathbb{R}^n$

4) Para todo elemento de $\mathbb{R}^n$, no nulo, tiene un elemento opuesto: $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists - x \in \mathbb{R}^n / x + (-x) = \mathbf{0}$

5) El producto por escalares en $\mathbb{R}^n$ es seudoasociativo: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

6) El producto por escalares en $\mathbb{R}^n$ es distributivo respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

7) El producto por escalares en $\mathbb{R}^n$ es distributivo respecto de la suma en

$\mathbb{R}^n$: $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

1.2.3 Funciones vectoriales de una variable real

Según Haaser, La Salle y Sullivan (1995) antes de discutir las funciones vectoriales, se repasa brevemente la noción básica de la función. Una función f es una correspondencia de un conjunto A en un conjunto B tal que a cada elemento de A corresponde un y sólo un elemento de B. En las funciones discutidas en la primera parte del cálculo, A y B son conjuntos de números reales; tales funciones se llaman funciones reales de una variable real. Sin embargo, la noción básica de la función no establece restricción alguna sobre el carácter de los objetos que comprenden los conjuntos A y B. En este capítulo nos ocuparemos de las funciones en que A es un conjunto de los números reales y B es un conjunto de vectores o puntos.

El conjunto A se llama el dominio de la función y el conjunto de elementos de B que se corresponden con elemento de A se llama el rango de la función. Si la función se denota por f; entonces su dominio y su rango se denota por D_f y R_f respectivamente. Además, f(x) denota el elemento de R_f que corresponde al elemento x de D_f; a $f(x)$ se llama valor de f en x. En general, una función se especifica dando su dominio y una regla de correspondencia; es decir, una descripción para determinar f(x) para cada $x \in D_f$.

Una función vectorial de una variable real es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores o puntos

de $\mathbb{R}^n$. Denotamos tales funciones por letras **f**, **g**, etc.

1.2.4 Funciones reales de varias variables

Según Haaser, La Salle y Sullivan (1995) una función real de **f** de un vector es una correspondencia de un conjunto A de vectores a un conjunto B de números reales; tal que, para cada a∈A existe un y sólo un elemento **f**(a)∈B que denominamos su correspondiente.

A sí pues, un tal función puede considerarse como una transformación del conjunto A en $\mathbb{R}^n$ sobre un conjunto de números reales. Sugiere esto una terminología conveniente para estas funciones: funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

1.2.5 Función vectorial de varias variables

Según Haaser, La Salle y Sullivan (1995) una función vectorial **f** de un vector es una correspondencia desde un conjunto A de vectores a un conjunto B de vectores tal que para cada vector a∈A hay un y solo un vector correspondiente f(a)∈B; es decir, es una transformación del conjunto A en el conjunto B. Si A es un conjunto en $\mathbb{R}^n$ y B es un conjunto en $\mathbb{R}^m$, entonces decimos que **f** es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

En general, si **f** es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces escribimos

f $= (f_1, f_2, ..., f_m)$ donde la función componente $f_k(k = 1, 2, ..., m)$ es la función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ con dominio D_f y regla de correspondencia: $f_k(x)$ es la k-ésimo componente del vector **f(x)**. Vemos que, como en el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, el cálculo de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ puede expresarse en términos

de las funciones componentes que en este caso son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

1.3 MATRICES

1.3.1 **Definición.-** Según Arce, Castillo y Gonzáles (2003) sean m y n enteros positivos. Una matriz es un arreglo rectangular en m filas y n columnas de números reales:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se llama matriz de orden (o tamaño) $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

En forma abreviada se escribe $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ donde a_{ij} denota la entrada de A en la fila i y la columna j. El conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con entradas reales se denota con M(m, n, $\mathbb{R}$). En el caso de matrices cuadradas; es decir, con igual número de filas y columnas, se usa la notación M(n, $\mathbb{R}$) y se dice que son de orden n.

1.3.2 **Definición.-** Sea $A \in \mathbb{R}$ una matriz cuyas filas son $f_1, f_2, \cdots, f_n$. Se llama transformación elemental por fila a tres tipos de operaciones que denotamos por $f_{ij},\ f_i(\lambda)$ y $f_j^i(\lambda)$ para significar.

1) $f_{ij}A$: Intercambio de dos filas de A

2) $f_i(\lambda)A$: La multiplicación de una fila i de A por un escalar $\lambda \neq 0$

3) $f_j^i(\lambda)A$: La multiplicación de la fila j de A por un escalar $\lambda \neq 0$ y sumando luego la fila f_i. Esta operación se representa por el vector fila $\lambda f_j + f_i$

1.3.3 **Definición.-** Según Hoffman y Kunze (1971) una matriz $m \times n$ de A se denomina matriz escalonada reducida en filas si:

1) A se reduce en filas

2) Cada fila de A que tiene todo sus entradas 0 aparece debajo de cada fila que tiene una entrada distinta de cero

3) Si las filas $1, 2, ..., r$ son las filas distintas de cero de A, y si la entrada principal distinta de cero de la fila i aparece en la columna k_i, $i = 1, 2, ..., r$, entonces $k_1 < k_2 < ... < k_r$

También se puede describir una matriz de escalón reducida de filas de $m \times n$ de A de la siguiente manera. O cada entrada en A es 0, o existe un entero positivo r, $1 \leq r \leq m$ y r un entero positivo $k_1, k_2, ..., k_r$ con $1 \leq k_i \leq n$ y

1) $A_{ij} = 0$ para $i > r$, y $A_{ij} = 0$ si $j < k_i$

2) $A_{iki} = \delta_{ij}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$

3) $k_1 < k_2 < ... < k_r$

Ejemplo 1

La matriz escalonada reducida por columna

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.4 **Definición.-** El rango $r(A)$ de una matriz A se define como el número máximo de filas $\neq 0$ que contiene esta matriz llevada a su forma escalonada.

Notación

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, denotamos $r(A) = \rho$, para indicar el rango de la matriz A

propiedades

1) $0 < r(A) \leq min(m, n)$

2) $r(A^t) = r(A)$

3) Si $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ entonces $r(A) < n \Leftrightarrow \mid A \mid = 0$

4) Si A es una matriz cuadrada, no nula, de orden $m \times n$, entonces: $0 < r(A) \leq n$

1.4 INTRODUCCIÓN A LAS SERIES DE TIEMPO

1.4.1 **Definición.-** Según Gonzáles (2009) una serie de tiempo es la representación de un sistema, justamente, a través del tiempo; que consiste en hacer una medición del sistema en cierto momento y retomarlo después para volverlo a medir y ver como cambia.

1.4.2 **Definición.-** Según García (2005) una serie de tiempo es una secuencia de m observaciones(datos) ordenados y equidistantes cronológicamente sobre una característica(serie univariante o escalar) o sobre varias características(serie multivariante o vectorial) de una unidad observable en los diferentes momentos. El propósito de una serie de tiempo es:

1. Elaborar un modelo estadístico que describa adecuadamente la procedencia de dicha serie; de manera que, las implicaciones teóricas del modelo que resulten compatibles con las pautas muestrales observadas en la serie de tiempo. Después a partir de la serie de tiempo considerada puede utilizarse para:

   a) **Describir** la evolución observada de dicha serie, así como las relaciones contemporáneas y dinámicas entre sus componentes(en el caso de las series multivariantes).

   b) **Prever** la evolución futura de dicha serie.

   c) **Contrastar** (presentar evidencias empíricas en favor o en contra de) alguna teoría sobre las características o variables a las que se refieren los componentes de dicha serie.

2. Su análisis para hacer pronóstico y el conocimiento de su patrón de comportamiento, para prever la evolución futura, siempre, bajo el supuesto de que las condiciones no cambiarán respecto a las actuales y pasados.

Ejemplo 1

1) Económica(ventas de una empresa, consumo de cierto producto, evolución de los tipos de interés, etc.)

2) Física(evolución del caudal de un río, de la temperatura de una región, etc.)

3) Social(número de habitantes de un país, número de alumnos matriculados en ciertos estudios, votos a un partido, etc.)

1.4.3 Representaciones matemáticas frecuentes de series de tiempo univariantes

Sean $y_1, y_2, ..., y_m$; $(y_t)_{t=1}^m$; $(y_t : t = 1, 2, ..., m)$, donde y_t es la observación de la serie y m es el número de observaciones de que consta la serie completa (el tamaño o la longitud de la serie). Las m observaciones $y_1, y_2, ..., y_m$ pueden recogerse en un vector columna.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

1.4.4 Representaciones matemáticas frecuentes de series de tiempo multivariantes

Sean $y_1, y_2, ..., y_m$;$(y_t)_{t=1}^m$; $(y_t : t = 1, 2, ..., m)$, donde $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$ es la

observación de la serie y m es el número de observaciones de que consta la serie completa. La m observaciones $y_1, y_2, ..., y_m$ pueden recogerse en una matriz

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^{'} \\ y_2^{'} \\ \vdots \\ y_m^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

donde y_{tj} es la observación sobre la característica o variable, donde $1 \leq j \leq n$.

1.4.5 Descomposición (análisis clásico)

1.4.5.1 Tendencia secular(T_t)

Definición.- Es la componente general de la serie y puede considerarse como el movimiento global de la serie a largo plazo. Suele obtenerse o describirse mediante ajuste a una función matemática o por medios móviles o alisamiento exponencial.

1.4.5.2 Variaciones estacionales(S_t)

Definición.- Representa un movimiento periódico que se producen en forma similar cada año por la misma época, en correlación con los meses o con las estaciones de año y a un con determinadas fechas. Si los sucesos no se repiten en el año, los datos deben recolectarse trimestral, mensual o

anualmente.

1.4.5.3 Variaciones clásicas(C_t)

Definición.- Son las oscilaciones periódicas que se producen con una frecuencia superior a un año suelen deberse a la alternancia de etapas de prosperidad económica(crestas) con etapas de depresión(valles)

1.4.5.4 Variaciones erráticas(E_t)

Definición.- Irregularidad o residual que recogería la variabilidad en el comportamiento de la serie que se debe a pequeños causas impredecibles.

1.4.6 Métodos de suavecimiento y pronóstico

1.4.6.1 Ajuste analítico o matemático(método de mínimos cuadrados)

1.4.6.1.1 Recta de mínimos cuadrados

Definición.- Consiste en trazar una recta, donde la suma de las diferencias al cuadrado de los puntos respecto a la recta es mínima. La recta sería una expresión:

$$y = a + bx$$

donde se deben determinar los coeficientes de a y b.

Consiste en crear y resolver el siguiente sistema de ecuación:

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \end{bmatrix}$$

Entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$na + \Sigma x_i.b = \Sigma y_i \tag{1}$$

$$\Sigma x_i.a + \Sigma x_i^2.b = \Sigma x_i y_i \tag{2}$$

1.4.6.1.2 **Parábola de mínimos cuadrados**

Definición.-Consiste en trazar una parábola, donde la suma de las diferencias al cuadrado de los puntos respecto a la función es mínima. La parábola será una expresión

$$y = a + bx + cx^2$$

Hay que determinar los coeficientes de a, b y c.

Consiste en crear y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$n.a + \Sigma x_i.b + \Sigma x_i^2.c = \Sigma y_i \tag{3}$$

$$\Sigma x_i.a + \Sigma x_i^2.b + \Sigma x_i^3.c = \Sigma x_i y_i \tag{4}$$

$$\Sigma x_i^2.a + \Sigma x_3.b + \Sigma x_i^4.c = \Sigma x_i^2 y_i \tag{5}$$

1.4.6.2 **Medias móviles**

Definición.- Se basa en la suavización de la serie mediante el cálculo de sucesivas medias de un grupo de valores. Se denomina media móvil de longitud $p+q+1$ a la media aritmética de los p valores anteriores, el valor del periodo considerado y los q valores posteriores de las observaciones

de la serie

$$y_t^{(p+q+1)} = \sum_{j=1-q}^{1+p} \frac{y_j}{p+q+1}$$

1.4.6.3 **Alisamiento exponencial**

Definición.- En este caso se parte de un modelo que supone que los valores de la serie pueden "predecirse" en función de los valores (reales) anteriores de forma que, para cualquier periodo.

$\overline{y}_{t+1} = y_t + \alpha(y_t - \overline{y}_t)$, y: valores reales, $\overline{y}$: valores de predicción

De esta forma pre estableciendo una primera predicción para el primer periodo $\overline{y}_1$ tendremos: $\overline{y}_1 = \overline{y}_1$

$\overline{y}_2 = y_1 + \alpha(y_1 - \overline{y}_1) = \alpha y_1(1-\alpha)\overline{y}_1$

$\overline{y}_3 = \alpha y_2 + \alpha(1-\alpha)\overline{y}_1 + (1-\alpha)\overline{y}_1$

$\vdots \qquad \vdots$

$\overline{y}_t = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)\overline{y}_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \cdots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}\overline{y}_1 + (1-\alpha)^t\overline{y}_1$

Este método implica dos problemas; la elección de que puede resolver por tanteo, eligiendo el valor que minimice los errores de previsión y la elección de la primera previsión $\overline{y}_1$.

1.5 ANILLOS

1.5.1 **Definición.-** Según Fraleigh (1982) un anillo X es un conjunto no vacío en donde están definidas un par de operaciones llamadas suma y producto, las cuáles denotamos por $+$ y $\cdot$ respectivamente.

Estas operaciones satisfacen cada una de las propiedades siguientes:

1) $\forall$ a, b$\in$X, se tiene que $a+b$ y $a \cdot b$ están en X

2) $\forall$ a, b y c$\in$X, se tiene que $a+(b+c)$=$(a+b)+c$ están en X

3) $\exists$! un elemento 0 en X, el cual llamaremos cero, tal que $a+0=0+a=a$, $\forall a \in$X

4) $\forall$ a en X, $\exists$! otro elemento en X, no nulo, denotado por $-a$, el cuál llamamos el opuesto de a y que verifica $a+(-a)=-a+a=0$

5) $\forall$ a, b en X se tiene $a+b=b+a$

6) $\forall$ a, b y c en X se satisface $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$

7) $\forall$ a, b y c en X se satisface $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ y $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$.

1.5.2 Anillo conmutativo

Definición.- Sea X un anillo. Si $\forall a$ y b en X se tiene $a \cdot b=b \cdot a$ entonces se dice que X es un anillo conmutativo.

1.5.3 Anillo con unitario

Definición.- Un anillo X, se dice que es un anillo con unitario si X contiene al elemento identidad multiplicativo, es decir :

$1 \cdot a=a \cdot 1=a \; \forall a \in$X

1.5.4 Unidad en un anillo

Definición.- Sea X un anillo con unitario, un elemento $u \in$X es una unidad en X si tiene inverso multiplicativo en el anillo X, es decir:

$u \cdot u^{-1}=1=u^{-1} \cdot u$

1.5.5 Anillo con división

Definición.- Un anillo X, se dice que es con división, si todos sus elementos diferentes o no nulos son unidades.

1.5.6 Campo

Definición.- Sea X un anillo conmutativo y con división. Un anillo X conmutativo donde todos sus elementos diferentes de cero son unidades entonces se dice que es un campo.

1.5.7 Monomio

Definición.- Un monomio en $\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$ es un producto $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_r^{\alpha_r}$ para un vector $a = (a_1, a_2, ..., a_r) \in \mathbb{Z}^+$

1.5.8 Polinomios en una indeterminada

Definición.- Sea X un anillo. Un polinomio f(x) con coeficientes en $\mathbb{R}$ es una suma formal infinita

$$\Sigma_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_i = 0 \ \forall$, excepto un número finito de valores de i.

Las a_i son los coeficientes de f(x). Si para algún $i > 0$ es cierto que $a_i \neq 0$, el mayor de dichos valores de i es el grado de f(x). De no existir dicha $i \neq 0$, entonces f(x) es de grado cero.

1.5.9 Operaciones de polinomios

1.5.9.1 **Definición.-** La suma y multiplicación de los polinomios con coeficientes

en un anillo X están definidas de la manera siguiente:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + ...$

entonces para el polinomio suma, tenemos

$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ...$

donde $c_n = a_n + b_n$

para el polinomio multiplicación, tenemos

$f(x)g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + ... + d_nx^n + ...$

donde $d_n = \Sigma_{i=0}^{n} a_i b_{n-1}$.

1.5.9.2 **Teorema**

El conjunto X[x] de todos los polinomios en una indeterminada x con coeficientes en un anillo X, es un anillo bajo la suma y multiplicación polinomial. Si X es conmutativo, entonces lo es, X[x] y si X tiene unitario 1; entonces también es un unitario en X[x].

1.5.10 Anillos de polinomios

Definición.- Sea $\mathbb{F}$ un campo. Se llama anillo de polinomios sobre $\mathbb{F}$ en la indeterminada x, y representaremos por $\mathbb{F}[x]$, al conjunto de todos los símbolos $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, donde n puede ser cualquier entero no negativo y donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ están todos en $\mathbb{F}$. Para un anillo debemos ser capaces de reconocer cuando dos de sus elementos son iguales y saber como sumarlos y multiplicarlos de la forma que los axiomas definitorios

de un anillo se verifiquen en $\mathbb{F}[x]$.

1.5.11 Anillos de polinomios sobre anillos conmutativos

Definición.- Sea X un anillo conmutativo con elemento unitario. Por el anillo de polinomios en x sobre X, X[x], se entiende el conjunto de todos los símbolos formales $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ están en $\mathbb{R}$, y donde la igualdad, la adición y la multiplicación se define en X[x], es un anillo conmutativo con elemento unitario. Definimos ahora el anillo de polinomios en las n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ sobre X, $X[x_1, x_2, ..., x_n]$, como sigue: Sea $X_1 = X[x_1]$, $X_2 = X_1[x_2]$, el anillo de polinomios en x_2 sobre $X_1, ..., X_n = X_{n-1}[x_n]$. A X_n se le llama anillo de polinomios en $x_1, x_2, ..., x_n$ sobre X. Sus elementos son de la forma $\Sigma a_{i_1 i_2 ... i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} .... x_n^{i_n}$, con la igualdad y la adición definidas por los coeficientes y la multiplicación por el uso de la ley distributiva y la regla de exponentes $(x_1^{i_1} x_2^{i_2} .... x_n^{i_n})(x_1^{j_1} x_2^{i_2} ... x_n^{j_n}) = x_1^{i_1+j_1} x_2^{i_2+j_2} .... x_n^{i_n+j_n}$.

1.6 TRANSFORMACIONES LINEALES

1.6.1 **Definición.-** Según Hoffman y Kunze (1971) sean V y W espacios vectoriales sobre el campo F. Una transformación lineal de V a W es una función T de V a W tal que:

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

Para todo α y β en V y todo los escalares c en F

1.6.2 Transformaciones lineales inversibles

Definición.- Según Arce, Castillo y Gonzáles (2003) sea T∈L(V, W). T se llama invertible, si existe una transformación lineal T^{-1}:W→V tal que $T \cdot T^{-1} = I_W$ y $T^{-1} \cdot T = I_v$, donde I_V e I_W son las identidades de V y W respectivamente.

1.6.3 Representación de transformaciones lineales por matrices

Definición.- Según Hoffman y Kunze (1971) sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre el campo F y sea W un espacio vectorial m-dimensional sobre F. Sea $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ una base ordenada para V y $\beta^{'} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ una base ordenada para W. Si T es cualquier transformación lineal de V a W; entonces T está determinada por su acción sobre los vectores α_j. Cada uno de los n-vectores Tα_j es expresable de forma única como una combinación lineal.

$$\mathrm{T}\alpha_j \Sigma_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_j$$

de los β_i los escalares $A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{mj}$ siendo las coordenadas $T\alpha_j$ en la base ordenada $\beta^{'}$. En consecuencia, la transformación T está determinada por los mn escalares A_{ij} a través de las formulas. La matriz A de $m \times n$ definida por $A(i, j) = A_{ij}$ se llama matriz de T en relación con el par de bases ordenadas de β en $\beta^{'}$. La tarea inmediata es comprender explícitamente cómo la matriz A determina la transformación lineal T.

Si $\alpha = x_1\alpha_1, x_2\alpha_2, ..., x_n\alpha_n$ es un vector en V, entonces

$$T\alpha = T(\Sigma_{j=1}^{n} x_j \alpha_j)$$

$$= \Sigma_{j=1}^{n} x_j (T\alpha_j)$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} x_j \Sigma_{i=1}^{m} x_j A_{ij} \beta_i$$

$$= \Sigma_{i=1}^{m} x_j (\Sigma_{j=1}^{n} x_j A_{ij} x_j) \beta_i$$

si X es la matriz de coordenadas de α en la base ordenada β, entonces el cálculo anterior muestra que AX es la matriz de coordenadas del vector $T\alpha$ en la base ordenada $\beta^{'}$, por que el escalar

$$\Sigma_{j=1}^{n} A_{ij} x_j)$$

es la entrada en la i-ésima fila de la matriz de columnas AX. Observemos también que si A es cualquier matriz $m \times n$ sobre el campo F, entonces

$$T(\Sigma_{j=1}^{n} x_j \alpha_j) = \Sigma_{i=1}^{m} (\Sigma_{j=1}^{n} A_{ij} x_j) \beta_{ij}$$

define una transformación lineal T de V en W, cuya matriz es A, en relación con β, $\beta^{'}$

1.7 INVERSA GENERALIZADA DE MATRICES

1.7.1 Inversa generalizada de una matriz

Según Marmolejo y Villegas (2001) la inversa generalizada de una matriz es una herramienta de gran utilidad en los cursos de modelos lineales.

Antes de dar la definición de inversa generalizada de una matriz, sean los teoremas siguientes.

1.7.1.1 **Teorema**

Si A es una matriz $m \times n$ de rango $r > 0$, entonces existen matrices invertibles P y Q tales que PAQ es igual a:

1. $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ si $r < n$ y $r < m$.

2. $\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$ si $r = n < m$.

3. $\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$ si $r = m < n$.

4. I_r si $r = m = n$.

DEMOSTRACIÓN

Se demuestra únicamente (1). Si R es la forma escalonada reducida de A, entonces $R = PA$, P es un producto de matrices elementales. Las últimas $m - r$ filas de R son nulas y R tiene la estructura siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{1k} & \cdots & 0 & a_{1k'} & \cdots & a_{1k''} & 0 & a_{1k'''} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{2k'} & \cdots & a_{2k''} & 0 & a_{2k'''} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{3k'''} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Ahora bien, efectuando las operaciones elementales sobre las columnas de la matriz R podemos obtener

$$F = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así que $F = RQ$, donde Q es un producto de matrices elementales(por columnas). Por lo tanto; $F = RQ = PAQ$, donde P y Q son matrices invertibles.

Ejemplo 1

Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

claramente las dos primeras filas son linealmente independientes, y la tercera es un múltiplo escalar de la primera fila de A. Por lo tanto, el número máximo de filas linealmente independientes de A es 2; o sea, A tiene rango 2. Por el teorema anterior existen matrices invertibles P y Q tales que

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se procede ahora a calcular las matrices invertibles P y Q siguiendo las pautas de la demostración del teorema anterior.

PASO I: Se encuentra una matriz invertible P tal que $PA = R$, donde R es la forma escalonada reducida de A.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R & P \end{array}\right]$$

PASO II: Se encuentra una matriz invertible Q tal que $RQ = F$, donde

$$F = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} R & I_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} F & Q \end{array}\right]$$

Luego las matrices invertibles

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son tales que:

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.7.1.2 **Teorema**

Si A es una matriz de $m \times n$ de rango $r > 0$, entonces existen matrices $B_{m\times r}$ y $C_{r\times n}$, tales que $A = B.C$.

DEMOSTRACION

Se considera distintas posibilidades para rango de la matriz A, $\rho(A) = r$.

1. Si $r = m$, entonces $A = B.C$, donde $B = I_r$ y $C = A$

2. Si $r = n$, entonces $A = B.C$, donde $B = A$ y $C = I_r$

3. Si $r < n$ y $r < m$, entonces por el teorema teorem 1.7.1.1(1) existen matrices invertibles P y Q tales que:

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí que:

$$\begin{aligned} A &= P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= BC, \end{aligned}$$

Donde $B \in M_{m\times r}$ y $C \in M_{r\times n}$ son las matrices de rango r, dadas por

$$B = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

El teorema queda entonces demostrado.

Una forma de calcular las matrices B y C que aparecen en el teorema anterior, en el caso en que $r < n$ y $r < m$, tal como aparece en la demostración, es calculando primero las matrices invertibles P y Q tales que:

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Después calcular las matrices P^{-1} y Q^{-1}, y por último obtener:

$$B = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Para el caso en que la matriz A no sea de rango fila completo, existe una demostración alternativa, la cual presentamos a continuación. Esta demostración nos facilitará un algoritmo mas económico para calcular matrices B y C adecuadas.

OTRA PRUEBA DEL TEOREMA ANTERIOR PARA $r < m$. Suponga que A es una matriz de rango $r < m$. Sea P una matriz invertible de orden m tal que $PA = R$, donde R es la forma escalonada reducida de A. Puesto que $r < m$, R tiene la estructura siguiente:

$$R = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix},$$

Donde C es una matriz $r \times n$ de rango r . Ahora, se escribe P^{-1} particionada adecuadamente

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix},$$

donde B es una matriz $m \times r$ de rango r y además,

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}R \\ &= \begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= BC \end{aligned}$$

Se presenta a continuación, un método basado en esta demostración para calcular matrices B y C, de rango r, tales que $A = BC$.

Algoritmo. Considere una matriz A de tamaño $m \times n$

PASO I

Forme la matriz $\begin{bmatrix} A_{m\times n} & | & I_m \end{bmatrix}$.

PASO II

Efectúe operaciones elementales en las filas de A hasta obtener su forma escalonada reducida, y en las columnas de I_m, siguiendo las siguientes pautas:

a) Si se intercambian las filas i y j de A; entonces intercambie las columnas i y j de I_m.

b) Si se multiplica la i-ésima fila de A por el número $\alpha \neq 0$, entonces se multiplica la i-ésima columna de I_m por el número α^{-1}.

c) Si a la j-ésima fila de A se le suma α veces la i-ésima fila de $A(\alpha \neq 0)$, entonces a la i-ésima columna de I_m se le suma $(-\alpha)$ veces la j-ésima columna de I_m.

Al final de este paso se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} R & | & P^{-1} \end{bmatrix}$

PASO III

B=[Primeras r columnas de P^{-1}]

C=[Primeras r filas de R]

Ejemplo 1. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

tiene rango 2. Por lo tanto existe, por lo tanto matrices $B_{3\times 2}$ y $C_{2\times 4}$ de rango 2 tales que $A = BC$. Se calcula matrices B y C siguiendo los paso indicados anteriormente.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & | & I_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R & | & P^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, tomando las primeras 2 columnas de R y las 2 primeras filas de P^{-1} obtenemos respectivamente las matrices

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

las cuales tienen rango 2 y son tales que:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

1.7.1.3 **Definición (Inverza generalizada o pseudoinversa)**

Sea $A_{m\times n}$ una matriz. Si $M_{n\times m}$ es una matriz tal que:

1. AM es una matriz simétrica

2. MA es una matriz simétrica

3. $AMA = A$

4. $MAM = M$

entonces se dice que M es una inversa generalizada(pseudoinversa) de A, o simplemente que M es una g-inversa de A.

Ejemplo 1. Se verifica que la matriz $M = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ es una g-inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. En efecto,

1. $AM = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = I_2$ es una matriz simétrica

2. $MA = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica

3. $AMA = I_2A = A$.

4. $MAM = \dfrac{1}{11^2}\begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = M$

Observación

1. Si A es invertible, entonces la matriz A^{-1} es una g-inversa de A.

2. Si $A = 0_{m\times n}$, entonces la matriz $M = 0_{n\times m}$ es una g-inversa de A

1.7.1.4 **Teorema (existencia de g-inversa)**

Toda matriz A de $m \times n$ tiene una inversa generalizada.

DEMOSTRACIÓN.

De acuerdo con la observación anterior, la demostración es trivial en el caso en que $A = 0$. Supongamos ahora que $A \neq 0$ tiene rango $r > 0$. Por el teorema 1.7.1.2, existen matrices B de tamaño $m \times r$ y C de tamaño $r \times n$, ambas de rango r tales que $A = BC$.

Puesto que B y C tiene rango r, las matrices $B^T B$ y CC^T son invertibles. Se considera ahora la matriz

$$M = C^T(CC^T)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T$$

y se verifica que M es una g-inversa de A. Es decir, verifiquemos que las condiciones de la definición de inversa generalizada o pseudoinversa se satisfacen. En efecto:

Las matrices AM y MA son simétricas puesto que

$$AM = BCC^T(CC^T)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T = B(B^T B)^{-1}B^T$$

y

$$MA = C^T(CC^T)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T BC = C^T(CC^T)^{-1}C$$

De otro lado, $AMA = B(B^T B)^{-1}B^T BC = BC = A$, y

$MAM = C^T(CC^T)^{-1}CC^T(CC^T)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T$

$= C^T(CC^T)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T = M.$

Es decir, $AMA = A$ y $MAM = A$, pot lo tanto, M es una g-inversa de A.

1.7.1.5 **Teorema (Unicidad de la $g-$inversa)**

Toda matriz A tiene una única $g-$inversa.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que M_1 y M_2 son dos $g-$inversas de una matriz A. Utilizando la definición de g-inversa de una matriz se obtiene la cadena siguiente de igualdades:

$AM_2 = (AM_1A)M_2 = (AM_1)(AM_2)$

$= (AM_1)^t(AM_2)^t = ((AM_2)(AM_1))^t$

$= ((AM_2A)M_1)^t = (AM_1)^t = AM_1$

De aquí que $AM_2 = AM_1$. En forma análoga se obtiene que $M_2A = M_1A$. Por lo tanto

$M_1 = M_1AM_1 = (M_1A)M_1 = (M_2A)M_1 = M_2(AM_1) = M_2(AM_2) = M_2AM_2 = M_2$

Observación

En lo sucesivo, la g-inversa de una matriz se denota con el signo $+$ como exponente. Por ejemplo, por A^+, B^+ denotarán respectivamente las inversas generalizadas de las matrices A y B.

1.7.1.6 **Teorema (Propiedades de la g-inversa)**

Para cualquier matriz A tiene que:

a. $(A^+)^+ = A$

b. $(\alpha A)^+ = \alpha^{-1}A^+$, para todo escalar $\alpha \neq 0$

c. $(A^T)^+ = (A^+)^T$

d. $(AA^T)^+ = (A^T)^+A^+$

e. $(A^TA)^+ = A^+(A^T)^+$

DEMOSTRACIÓN

Por el teorema anterior, toda matriz tiene una única g-inversa. Sólo resta verificar en cada caso, que se satisfacen las condiciones de la definición inversa generalizada o pseudoinversa. Se hace la demostración solo para el inciso (e), para ello, supondremos válidas las afirmaciones (a)-(d) y aplicaremos las propiedades de la definición de inversa generalizada o pseudoinversa

1. La matriz $M = A^+(A^T)^+$ satisface la igualdad $(A^TA)M = A^+A$ y por lo tanto, la matriz $(A^TA)(A^+(A^T)^+)$ es simétrica. En efecto:

$$\begin{aligned}
(A^TA)M &= (A^TA)(A^+(A^T)^+) \\
&= A^T(AA^+)(A^+)^T \\
&= A^T(AA^+)^T(A^+)^T \\
&= (A^+AA^+A^+)^T \\
&= (A^+A)^T = A^+A
\end{aligned}$$

2. La matriz $M = A^+(A^T)^+$ satisface la igualdad $M(A^TA) = A^+A$ y

por lo tanto, la matriz $(A^+(A^T)^+)(A^TA)$ es simétrica. En efecto:

$$\begin{aligned} M(A^TA) &= (A^+(A^T)^+)(A^TA) \\ &= A^+(A^+)^T(A^TA) \\ &= A^+(AA^+)^TA \\ &= A^+AA^+A = A^+A. \end{aligned}$$

3. La matriz $M = A^+(A^T)^+$ satisface la igualdad $(A^TA)M(A^TA) = A^TA$.

$$\begin{aligned} (A^TA)M(A^TA) &= (A^TA)(A^+(A^T)^+)(A^TA) \\ &= (A^+A)(A^TA) = (A^+A)^TA^TA \\ &= (A(A^+A))^TA = (AA^+A)^TA = A^TA \end{aligned}$$

4. La matriz $M = A^+(A^T)^+$ satisface la igualdad $M(A^TA)M = M$. En efecto

$$\begin{aligned} M(A^TA)M = M &= (A^+(A^T)^+)(A^TA)(A^+(A^T)^+) \\ &= (A^+A)(A^+(A^T)^+) \\ &= (A^+AA^+)^T(A^T)^+ \\ &= A^+(A^T)^+ \end{aligned}$$

Observación

No siempre es cierto que $(AB)^+ = B^+A^+$. Para mostrar este hecho se

considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo1. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

entonces $AB = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$. Por lo tanto $(AB)^+ = 1/3$. Y , $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, de donde se tiene que

$$B^+A^+ = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 \end{bmatrix} \neq \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}}_{(AB)^+} =$$

1.7.2 Cálculo de la g-inversa de una matriz

Según Marmolejo y Villegas (2001) Algunos teoremas que pueden ser utilizados para calcular la g-inversa de una matriz. Se empieza con el siguiente resultado, el cual se deduce de los teoremas 1.7.1.2, 1.7.1.4 y 1.7.1.5

1.7.2.1 Teorema

Sea A una matriz $m \times n$ de rango $r > 0$.

1. Si $r = n = m$, entonces A es invertible y $A^+ = A^{-1}$.

2. Si $r = m < n$, entonces $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.

3. Si $r = n < m$, entonces $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$.

4. Si $r < n$ y $r < m$, entonces existen matrices $B\epsilon M_{m\times r}$ y $C\epsilon M_{r\times n}$ de rango r tales que $A = BC$ y $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$.

Corolario

Sea a un vector no nulo de n componentes.

1. Si $a \epsilon M_{1\times n}$, entonces $a^+ = (aa^T)^{-1}a^T$.

2. Si $a \epsilon M_{n\times 1}$, entonces $a^+ = (a^Ta)^{-1}a^T$.

Ejemplo 1

Se ilustra el teorema 1.7.2.1 con algunas matrices sencillas.

1. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ es invertible, así que $A^+ = A^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ tiene rango 2, así que:

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{42} \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 6 & -14 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$$

3. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ tiene rango 2, así que:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 56 & -44 \\ -44 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{24} \begin{bmatrix} -32 & -8 & 16 \\ 26 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

4. La matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Del ejemplo se sabe $\rho(A) = 2$ y que las matrices

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

son tales que $A = BC$. Luego

$$A^+ = C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -2 & -20 & -4 \\ -4 & -40 & -8 \\ 9 & 55 & 18 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$$

5. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq 0$ se tiene que:

$$a^+ = (aa^T)^{-1}a^T = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$ se tiene que,

$$a^+ = (a^Ta)^{-1}a^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7.2.2 **Teorema**

Sea $A \in M_{m\times n}$ una matriz de rango $r > 0$. Entonces la g-inversa de A se puede calcular siguiendo los pasos dados a continuación:

1. Calcular $M = A^tA$

2. Hacer $C_1 = I$

3. Calcular $C_{i+1} = \frac{1}{i}Tr(C_iM)I - C_iM$, para $i = 1, 2, 3, ..., r-1$

4. Calcular $\frac{r}{Tr(C_rM)}C_rA^t$, ésta es la matriz A^+

Además, se tiene que $C_{r+1}M = 0$ y $Tr(C_rM) \neq 0$.

Ejemplo 1

Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Se calcula A^* utilizando el teorema anterior.

Para ello se calcula $M = A^t A$. Esto es

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 5 & 17 \\ 12 & 24 & 10 & 34 \\ 5 & 10 & 5 & 15 \\ 17 & 34 & 15 & 49 \end{bmatrix}$$

y se considera $C_1 = I_4$. Entonces se tiene que :

$$C_2 = Tr(C_1 M)I - C_1 M = \begin{bmatrix} 78 & -12 & -5 & -17 \\ -12 & 60 & -10 & -34 \\ -5 & -10 & 79 & -15 \\ -17 & -34 & -15 & 35 \end{bmatrix}$$

Como $C_3 M = 0$, entonces $\rho(A) = 2$, y además

$$A^+ = \frac{2}{Tr(C_2 M)} C_2 A^t = \frac{2}{140} \begin{bmatrix} -2 & -20 & -4 \\ -4 & -40 & -8 \\ 9 & 55 & 18 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema se presenta una forma alternativa para calcular la g-inversa de una matriz.

1.7.2.3 **Teorema**

Sea $A\epsilon M_{m\times n}$ una matriz de rango $r > 0$. La g-inversa de A se puede calcular mediante los siguientes pasos:

1. Forme la matriz $\left[\begin{array}{c|c} A & I_m \end{array}\right]$.

2. Efectúe operaciones elementales en las filas de la matriz anterior hasta conseguir la forma escalonada reducida de A. Al final de este paso se obtiene una matriz que podemos describir por bloques así:

$$\left[\begin{array}{c|c} E_{r\times n} & P_{r\times m} \\ 0_{m-r\times n} & P_{m-r\times n} \end{array}\right] \quad \text{si} \quad r < m$$

ó

$$\left[\begin{array}{c|c} E_{m\times n} & P_{m\times m} \end{array}\right] \quad \text{si } r = m$$

(Si $r = m = n$, entonces A es invertible, $E = I$ y $P = A^{-1} = A^{+}$).

3. Forme la matriz:

$$\left[\begin{array}{c|c} E_{r\times n}A^T & E_{r\times n} \\ P_{m-r\times m} & 0_{m-r\times m} \end{array}\right] \quad \text{si} \quad r < m$$

ó

$$\left[\begin{array}{c|c} E_{m\times n}A^T & E_{m\times n} \end{array}\right] \quad \text{si } r = m$$

4. Efectúe operaciones elementales en las filas de la matriz anterior hasta conseguir la forma escalonada reducida. Al final de este paso se obtiene la matriz

$$\left[\begin{array}{c|c} I_m & (A^{+})^T \end{array}\right]$$

Ejemplo 1

Se considera la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Con el objeto de calcular A^+ se utiliza el teorema anterior, formemos la matriz $\begin{bmatrix} A & | & I_3 \end{bmatrix}$ y se aplica operaciones elementales en las filas hasta encontrar la forma escalonada reducida de A

$$\begin{bmatrix} A & | & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_{2\times 4} & | & P_{2\times 3} \\ 0_{1\times 3} & | & P_{1\times 3} \end{bmatrix}$$

Se construye ahora la matriz de la forma $\begin{bmatrix} E_{2\times4}A^T & | & E_{2\times4} \\ P_{1\times3} & | & 0_{1\times4} \end{bmatrix}$ y se aplica de nuevo operaciones elementales en las filas, hasta obtener la matriz identidad I_3 en el lado izquierdo de este arreglo.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} E_{2\times4}A^T & | & E_{2\times4} \\ P_{1\times3} & | & 0_{1\times4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 11 & -9 & 22 & | & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 8 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{35} & -\frac{2}{35} & \frac{9}{70} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{11}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{35} & -\frac{4}{35} & \frac{9}{35} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_3 & | & (A^+)^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Así que

$$A^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{35} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{35} \\ -\frac{2}{35} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{35} \\ \frac{9}{70} & \frac{11}{14} & \frac{9}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} -2 & -20 & -4 \\ -4 & -40 & -8 \\ 9 & 55 & 18 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

1.8 TRANSFORMACIONES LINEALES INVERSIBLES EN SERIES DE TIEMPO

1.8.1 Series de tiempo

Definición.- Según Li y Pen (2004) una serie de tiempo S (sobre un anillo

conmutativo X) con n estados y m+1 pasos de tiempo es un conjunto de m+1 vectores fila distintas en $\mathbb{R}^n$, es decir $S = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_{m+1}\}$.

1.8.2 Modelo de series de tiempo

Definición.- Según Li y Pen (2004) un modelo de las series de tiempo S es una función f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde se representa $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ tal que $f(A_i) = A_{i+1}$ para i=1,2,3,...,m.

1.8.3 Modelo polinomial

Definición.- Según Li y Pen (2004) si todas las funciones coordenadas o funciones reales de varias variables $f_j = f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_j(A_i) = a_{(i+1)j}$ son funciones polinomiales entonces a la función vectorial de varias variables f se llama modelo polinomial.

1.8.4 Forma matricial de series de tiempo

Definición.- Según Li y Pen (2004) se denota una serie de tiempo S por la siguiente matriz.

$$S = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \\ \hline A_{m+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \hline a_{(m+1)1} & a_{(m+1)2} & \cdots & a_{(m+1)n} \end{array}\right]$$

Luego se tiene los siguiente:

- M_S :se llama la matriz asociada a S

$$M_S = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $\overline{M}_S$:se llama la matriz destinno de S

$$\overline{M}_S = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m+1)1} & a_{(m+2)2} & \cdots & a_{(m+1)n} \end{bmatrix}$$

Además, cualquier función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ induce una función; es decir:

$\overline{g} : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definida por:

$$M_S \to \overline{g}(M_S) = \begin{bmatrix} g(A_1) \\ g(A_2) \\ \vdots \\ g(A_m) \end{bmatrix}$$

Con esta definición de modelos de series de tiempo se puede representar en forma matriz; es decir, g es un modelo de S $\leftrightarrow \overline{g}(M_S) = \overline{M}_S$

1.8.5 Grado de series de tiempo

Definición.- Según Li y Pen (2004) sea S una serie de tiempo y $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ es un modelo polinomial de S. El grado de S, denotado por $U(S)$, respectivamente como sigue:

$$U(S) = min\,\{grad(f)/f \in P(S)\}$$

1.8.6 Grado de un modelo polinomial

Definición.- Según Li y Pen (2004) sea S una serie de tiempo y $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ es un modelo polinomial de S. El grado de f denotado por $grad(f)$ respectivamente como sigue:

$$grad(f) = max\,\{grado\ total\ de\ f_j/j = 1, 2, ..., n\}$$

1.8.7 Las transformaciones lineales inversibles en series de tiempo

Definición.- Según Li y Pen (2004) sea $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal inversible. En virtud de la base estándar, $\mathbf{T}$ está representada por una matriz inversible de orden $n \times n$, $T = [t_{ij}]$ con $t_{ij} \in \mathbb{R}$.

Sea serie de tiempo $S = A_1, A_2, ..., A_{m+1}$, introduciendo transformación lineal inversible obtenemos una nueva serie de tiempo S', es decir:

$$S' = \{\mathbf{T}(A_1), \mathbf{T}(A_2), ..., \mathbf{T}(A_{m+1})\} = \{A_1T, A_2T, \cdots, A_{m+1}T\}$$

Notación de una nueva serie de tiempo S' en forma matricial:

$$S' = \left[\begin{array}{c} A_1T \\ A_2T \\ \vdots \\ A_mT \\ \hline A_{m+1}T \end{array}\right]$$

$$S' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ a_{(m+1)1} & a_{(m+1)2} & \cdots & a_{(m+1)n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)1} & t_{(n-1)2} & \cdots & t_{(n-1)n} \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Luego se tiene los siguientes:

- $M_{S'} = M_S T$: se llama la nueva matriz asociada a S'

$$M_{S'} = \begin{bmatrix} A_1 T \\ A_2 T \\ \vdots \\ A_m T \end{bmatrix}$$

$$M_{S'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)1} & t_{(n-1)2} & \cdots & t_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

- $\overline{M}_{S'} = \overline{M}_S T$: se llama la nueva matriz destino de S'

$$\overline{M}_{S'} = \begin{bmatrix} A_2 T \\ A_3 T \\ \vdots \\ A_{m+1} T \end{bmatrix}$$

$$\overline{M}_{S'} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m+1)1} & a_{(m+1)2} & \cdots & a_{(m+1)n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Además si $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathbb{R}[\overline{x}]^n \to \mathbb{R}[\overline{x}]^n$ es una n-tupla de polinomios en $\mathbb{R}[\overline{x}]$, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ entonces.

$\mathbf{T} \cdot f \cdot \mathbf{T}^{-1} : \mathbb{R}[\overline{x}]^n \to \mathbb{R}[\overline{x}]^n$ es también un n-tupla de polinomios en $\mathbb{R}[\overline{x}]$, definido por $\mathbf{T} \cdot f \cdot \mathbf{T}^{-1}(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}T^{-1}), f_2(\overline{x}T^{-1}), ..., f_n(\overline{x}T^{-1}))T$

En particular, se tiene el siguiente teorema 2.1.1.1

2. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

2.1 MODELOS POLINOMIALES DE SERIES DE TIEMPO

2.1.1 Modelos polinomiales de series de tiempo

Según Li y Pen (2004) la matriz asociada M_s es diagonalizable a la izquierda; entonces S tiene modelos lineales; es decir, $U(S) = 1$. En particular, S tiene modelos lineales cuando M_s es de rango completo.

2.1.1.1 Teorema

Sea una serie tiempo S, una transformación lineal invertible **T** y una nueva serie tiempo $S^{'}$. A continuación, la transformación lineal inversible **T** induce una correspondencia de uno a uno entre el conjunto $P(S)$ y $P(S^{'})$ de modelos polinomiales que conserva grados. Por otra parte, si f es un modelo polinomial de los series de tiempo S, entonces $g = \mathbf{T} \cdot f \cdot \mathbf{T}^{-1}$ es un modelo polinomial de los series de tiempo $S^{'}$ con $grad(f) = grad(g)$. En particular, $U(S) = U(S^{'})$.

Demostración.

Para cada $f \in P(S)$, $f(M_S) = \overline{M}_S \rightarrow g(M_{S'}) = g(M_S T) = (\mathbf{T} \cdot f \cdot \mathbf{T}^{-1})(M_S T) = \mathbf{T}(f(M_S T T^{-1})) = (f(M_S))T = \overline{M}_S T = \overline{M}_{S'}$.

Esto muestra que $g \in P(S^{'})$, tenga en cuenta que todas las operaciones son lineales y T es una matriz inversible sobre $\mathbb{R}$, por lo que $grad(g) \leq grad(f)$ para $g = \mathbf{T} \cdot f \cdot \mathbf{T}^{-1}$. Por otra parte, $grad(f) \leq grad(g)$ para $f = \mathbf{T}^{-1} \cdot g \cdot \mathbf{T}$. Por lo tanto, $grad(f) = grad(g)$ y $U(S) = U(S^{'})$.

Observación

Se recuerda que sobre un campo de cualquier matriz M puede ser transformado a una forma escalonada reducida por columnas multiplicando M por una matriz invertible a la derecha.

La importancia de este teorema es que la búsqueda de modelos de una serie de tiempo asociado con una matriz dada, se puede reducir a la búsqueda de modelos(con los mismos grados) de una serie de tiempo con la matriz asociada en su forma escalonada reducida por columna, lo que es mucho más simple. Esto lleva al siguiente corolario inmediato.

2.1.1.2 **Colorario**

Sobre un campo, para calcular modelos polinomiales de una serie de tiempo, es suficiente suponer que matriz de orden $m \times n (m \leq n)$ asociada a la serie de tiempo es la forma escalonada reducida por columna.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.1.3 **Colorario**

Suponga que la M_S es la $(m \times n)$ no nulo de la matriz asociada a una serie de tiempo S(con puntos distintos) y su forma de columna triangular

reducida está $[B\ \Theta]$, donde B es una matriz diagonal cuadrada, entonces el rango de M_S es al menos $m-1$.

Demostración.

Esto es una consecuencia inmediata del corolario 2.1.1.2, tenga en cuenta que todas las filas en B deben ser distintos, por lo que B tiene a lo más un cero elemento diagonal.

Si la serie de tiempo en consideración es desde una aplicación de mundo real, entonces el número de columnas de la matriz M_S (es decir, el número de muestras) es mucho mas grande que el número de filas (es decir, el número de experimentos), debido a los costos de realización de los experimentos. En la inmensa mayoría de los casos en la práctica la matriz M_S será de rango completo. El siguiente teorema muestra que una serie de tiempo S cuenta con modelos lineales siempre la matriz asociada M_S es de rango completo. La prueba se utiliza mucho el método de transformación lineal indicado en el teorema 2.1.1.1 y genera de forma constructiva un modelo lineal.

2.1.1.4 **Teorema**

Suponga que una serie de tiempo S tiene más de dos puntos. Si la forma de la columna triangular reducida de la matriz asociada M_S es diagonal; entonces S tiene modelos lineales, es decir $U(S) = 1$. En particular, S dispone con modelos lineales cuando M_S tiene rango completo.

Demostración.

Suponga que la última fila de la matriz de destino $\overline{M}_S$ es

$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, es decir, $\overline{M}_S$ tiene la forma

$$\left[\begin{array}{cccccccc} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n \end{array}\right]$$

Del corolario 2.1.1.3, el $r(M_S) = m$ ó $r(M_S) = m - 1$. Si $r(M_s) = m$(rango completo), a continuación, a partir del corolario 2.1.1.3, podemos suponer M_S tiene la forma $M_S = [I_m \ \Theta]$ donde I_m representa matriz identidad de orden $m \times n$. Obviamente $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ es un modelo lineal de S, donde:

$$g_i = \begin{cases} c_j x_m & Si \quad j = 1 \ \vee \ j > m \\ \\ x_{j-1} + c_j x_m & Si \quad 1 < j \leq m \end{cases}$$

Según el teorema 2.1.1.1 la serie de tiempo original, entonces tiene un modelo lineal. Si $r(M_S) = m - 1$, sin pérdida de generalidad que pode-

mos asumir cada $b_i = 0 \vee b_i = 1$. También, B tiene exactamente una fila cero. Sea que la fila de orden k sea la fila cero. Tenemos los dos casos siguientes:

<u>Caso 1</u>: $k < m$. Un modelo lineal $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ es la siguiente

$$g_i = \begin{cases} c_j x_m & Si \quad j = 1, k \ \vee \ j > m \\ \\ (1 - \Sigma_{i=1}^{m} x_i) + c_j x_m & Si \quad j = k+1 \\ \\ x_{j-1} + c_j x_m & Si \quad 1 < j \leq m\,, \ \ i \neq k, k+1 \end{cases}$$

<u>Caso 2:</u> $k = m$. Un modelo lineal $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ es la siguiente

$$g_i = \begin{cases} c_j(1 - \Sigma_{i=1}^{m} x_m) & Si \quad j = 1 \ \vee \ j \geq m \\ \\ x_{j-1} + c_j(1 - \Sigma_{i=1}^{m} x_m) & Si \quad 1 < j < m \end{cases}$$

Se puede comprobar que en ambos casos $g(M_S) = \overline{M}_S$

2.1.2 Modelos polinomiales para ciertas series de tiempo

Según Pan, Liao y Li (2006) una clase de series de tiempo, cuya matriz asociada no es diagonalizable a la izquierda, pero la forma de columna escalonada reducida es de cierto tipo especial. Se construyen modelos lineales para las series de tiempo representadas por los siguientes tipos de matrices.

2.1.2.1 **Lema**

Suponga que una serie temporal S está representada por la matriz S.

1. Si S tiene el siguiente formulario(la primera fila es una fila cero):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0_{m\times m} & \cdots & 0_{m\times n} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{m-1} & c_m & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Entonces un modelo de S está dado por $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$, donde

$$g_i = \begin{cases} c_i x_{m-1} + \left(1 - \Sigma_{j=1}^{m} x_j\right) & Si \quad i = 1 \\ x_{i-1} + c_i x_{m-1} & Si \quad 2 \leq i \leq m-1 \\ c_i x_{m-1} & Si \quad m \leq i \leq n \end{cases}$$

2. Si S tiene a siguiente forma(la fila cero es la k-esima fila, $2 \leq k \leq m-1$)

$S =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0_{(k-1)} \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0_k \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0_{(k+1)} \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0_{m\times m} & \cdots & 0 \\ c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{m-1} & c_m & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Entonces se puede construir un modelo $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ para S;

$$g_i = \begin{cases} c_k x_{m-1} + \left(1 - \Sigma_{j=1}^{m} x_j\right) & Si \quad i = k \\ \\ x_{i-1} + c_i x_{m-1} & Si \quad 2 \leq i \leq m-1 \quad , \quad i \neq k \\ \\ c_i x_{m-1} & Si \quad i = 1 \quad \vee \quad m \leq i \leq n \end{cases}$$

Demostración del lema 2.1.2.1(1)

Se tiene una serie de tiempo escalonada reducida por columnas y con la primera fila ceros.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0_{m\times m} & \cdots & 0_{m\times n} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{m-1} & c_m & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Según definición de forma matricial de series de tiempo tenemos que:

$g(M_S) = \overline{M}_S$

$g(0,0,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0) = (1,0,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0)$

$g(1,0,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0) = (0,1,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0)$

$g(0,1,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0) = (0,0,1,0,\cdots,0,0,\cdots,0)$

$\vdots$

$g(0,0,0,0,\cdots,1,0,\cdots,0) = (c_1,c_2,c_3,c_4,\cdots,c_{m-1},c_m,\cdots,c_n)$

donde: $g = (g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n)$

El modelo lineal es de la forma

i=1; $g_1 = c_1 x_{m-1} + 1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_m$

i=2; $g_2 = x_1 + c_2 x_{m-1}$

i=3; $g_3 = x_2 + c_3 x_{m-1}$

$\vdots$

i=m-1; $g_{m-1} = x_{m-2} + c_{m-1} x_{m-1}$

i=m; $g_m = c_m x_{m-1}$

i=m+1; $g_{m+1} = c_{m+1} x_{m-1}$

$\vdots$

i=n; $g_n = c_n x_{m-1}$

Luego se tiene

$$g_i = \begin{cases} c_i x_{m-1} + \left(1 - \Sigma_{j=1}^{m} x_j\right) & Si \quad i = 1 \\ x_{i-1} + c_i x_{m-1} & Si \quad 2 \leq i \leq m-1 \\ c_i x_{m-1} & Si \quad m \leq i \leq n \end{cases}$$

Demostración del lema 2.1.2.1(2)

Se tiene una serie de tiempo escalonada reducida por columnas y con la k-ésima fila ceros.

$S =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0_{(k-1)} \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0_k \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0_{(k+1)} \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0_{m\times m} & \cdots & 0 \\ c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{m-1} & c_m & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Según definición de forma matricial de series de tiempo tenemos que:

$g(M_S) = \overline{M}_S$

$g(1, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0) = (0, 1, \cdots, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$

$g(0, 1, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0) = (0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$

$\vdots$

$g(0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0) = (0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$

$g(0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0) = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$

$\vdots$

$g(0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) = (c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}, c_k, c_{k+1}, \cdots,$

$c_{m-1}, c_m, \cdots, c_n)$

donde: $g = (g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n)$

El modelo lineal es de la forma

i=1; $g_1 = c_1 x_{m-1}$

i=2; $g_2 = x_1 + c_2 x_{m-1}$

i=3; $g_3 = x_2 + c_3 x_{m-1}$

$\vdots$

i=k-1; $g_{k-1} = x_{k-2} + c_{k-1} x_{m-1}$

i=k; $g_k = c_k x_{m-1} + 1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_m$

i=k+1; $g_{k+1} = x_k + c_{k+1} x_{m-1}$

$\vdots$

i=m-1; $g_{m-1} = x_{m-2} + c_{m-1} x_{m-1}$

i=m; $g_m = c_m x_{m-1}$

i=m+1; $g_{m+1} = c_{m+1} x_{m-1}$

$\vdots$

i=n; $g_n = c_n x_{m-1}$

Luego se tiene

$$g_i = \begin{cases} c_k x_{m-1} + \left(1 - \Sigma_{j=1}^{m} x_j\right) & Si \quad i = k \\ \\ x_{i-1} + c_i x_{m-1} & Si \quad 2 \leq i \leq m-1 \quad , \quad i \neq k \\ \\ c_i x_{m-1} & Si \quad i = 1 \quad \vee \quad m \leq i \leq n \end{cases}$$

2.1.2.2 **Teorema**

Si la forma de columna-escalón de una serie temporal tiene una de las formas anteriores, entonces tiene modelos lineales.

Demostración

Del lema 2.1.2.1 se tiene las series de tiempo en su forma escalonada reducida por columnas:

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0_{m\times m} & \cdots & 0_{m\times n} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{m-1} & c_m & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

y

$S' =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0_{(k-1)} \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0_k \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0_{(k+1)} \times (k+1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0_{m\times m} & \cdots & 0 \\ c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{m-1} & c_m & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Por el teorema 2.1.1.1 se tiene una serie de tiempo S, transformación

lineal invertible **T** y una nueva serie tiempo S'. La transformación lineal inversible **T** induce una correspondencia de uno a uno entre el conjunto $P(S)$ y $P(S')$ de modelos polinomiales. Por otra parte, si f es un modelo polinomial de los series de tiempo S, entonces $g = \mathbf{T} \cdot f \cdot \mathbf{T}^{-1}$ es un modelo polinomial de los series de tiempo S'

2.2 MODELOS RADICALES DE SERIES DE TIEMPO

Según Pan, Liao y Li (2006) los métodos para construir modelos radicales es cuando no existen modelos lineales, podemos proporcionar recursos para obtener modelos "lineales"(en relación con el grado)

2.2.1 **Definición.-** Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$ una matriz $(m \times n)$ sobre $\mathbb{R}$, donde $m \leq n$.

1. Se puede decir que A es positivo(negativo, no positivo o no negativo) si todos sus elementos son positivos(negativos, no positivos o no negativos).
2. A es izquierda diagonal si la matriz $m\times n$ cuadrada izquierda es diagonal. A es diagonalizable a la izquierda si su forma escalonada de columna reducida es de diagonal izquierda, es decir, A puede reducirse a una matriz de diagonal izquierda por infinidad de operaciones de columna.
3. Para un entero positivo r, definimos $A^{(r)} = (a_{ij}^r)$.

Se considera una serie de tiempo S con la matriz asociada M_s. Como se ha definido anteriormente, para un número entero positivo r, $S^{(r)}$ se refiere a la serie de tiempo resultante en las que cada entrada de la matriz toma respectivamente la r-ésima potencia ordinaria de la entrada original. Obviamente,

$M_s^{(r)}$ es la matriz asociada de $S^{(r)}$.

2.2.2 Modelo radical

Definición.- Según Pan, Liao y Li (2006) Sea $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ un modelo de una serie de tiempo S sobre un campo $\mathbb{R}$. Si cada componente de f es una combinación lineal del r-ésimo radical de un polinomio homogéneo de grado r, llamamos a un modelo radical de grado r. Obsérvese que si f es tal modelo, cada f_i es una combinación lineal de radicales en forma de $\sqrt[r]{a_{j1}x_1^r + \cdots + a_{jn}x_n^r}$. Abajo, se discute la existencia de modelos radicales en varios casos.

2.2.2.1 Teorema

Sea S una serie de tiempo con la matriz asociada M_s y fijo un entero positivo r. Supongamos que S^r tiene un modelo lineal. Afirmamos que

1. Si r es impar, entonces S tiene un modelo radical de grado r.
2. Si r es par, entonces S tiene un modelo radical de grado r bajo la condición de que M_s pueda ser transformada por infinidad de operaciones de la columna en una matriz en la que cada columna sea no positiva o no negativa.

Demostración

Suponga que $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es un modelo lineal de $S^{(r)}$, donde

$f_j = k_{j1}x_1 + \cdots + k_{jn}x_n \; ; \quad j = 1, 2, \cdots, n$

Si r es impar, construimos una nueva función $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ de

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ por

$$h_j = \sqrt[r]{k_{j1}x_1^r + \cdots + k_{jn}x_n^r}$$

Cuando r es impar, esta función h es un modelo de S porque

$$f\left(P_i^{(r)}\right) = P_{i+1}^{(r)} \Longrightarrow h(P_i) = P_{i+1}$$

Para todo $i = 1, 2, \cdots, m$. Tenga en cuenta que para cada i, j

$$h_j\left(P_i\right) = \sqrt[r]{k_{j1}a_{i1}^r + \cdots + k_{jn}a_{in}^r} = \sqrt[r]{\left(a_{(i+1)j}\right)^r} = a_{(i+1)j}$$

Si r es impar.

Cuando r es par, sin perdida de generalidad, asumimos que cada columna de M_s es no positiva o no negativa. Aplicamos el mismo procedimiento que el anterior para obtener la nueva función $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$. Esta vez, $h_j(P_i) = |a_{(i+1)j}|$. Como la j-ésima columna de M_s es no negativa o no positiva, podemos hacer los siguientes ajustes sobre la función h

$$f(x) = \begin{cases} h_j, & \text{Si el j-esima columna es no negativa} \\ \\ -h_j, & \text{Si el j-esima columna es no positiva} \end{cases}$$

Obviamente esta nueva función $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ es un modelo radical de grado r para S. La forma de escala de columna de $M_s^{(r)}$ puede ser vista como la matriz asociada de una serie de tiempo $S^{(r)}$. Podemos aplicar las técnicas dadas por la definición de modelos polinomiales de series de tiemp de 2.1.1 para encontrar un modelo lineal para $S^{(r)}$ y luego

usarlo para construir un modelo radical para S. Los modelos radicales obtenidos de esta manera puede tener más de un término radical para algún componente; Sin embargo, todos los componentes serán combinaciones lineales de radicales simples.

2.2.2.2 **Corolario**

Sea S una serie de tiempo con la matriz asociada M_s

1. Si M_s es diagonalizable a la izquierda, entonces para cada entero positivo r, S tiene un modelo radical de grado r.
2. Si $M_s^{(r)}$ es diagonalizable a la izquierda para un entero impar r; entonces S tiene un modelo radical de grado r.

Demostración.

Por los resultados de modelos polinomiales de series de tiempo de 2.1.1, existen modelos lineales para series de tiempo con matrices asociadas a la izquierda diagonalizable. Entonces la declaración anterior se sigue directamente del teorema 2.2.2.1(1).

Ahora se adopta los procedimientos de construcción de modelos lineales dados por 2.1.1, para construir modelos radicales de ciertos grados. El método puede aplicar las transformaciones lineales invertibles para simplificar el cálculo. Se describe brevemente el proceso a continuación.

2.2.2.3 **Pasos de la construcción de modelos radicales de series de tiempo(SBRM)**

Según Pan, Liao y Li (2006) sea r un entero impar positivo. Supongamos

que M_s es la matriz asociada para una serie temporal S y $M_s^{(r)}$ es diagonalizable a la izquierda.

1. Realizar la forma columna escalonada en $M_s^{(r)}$ para obtener la matriz diagonal izquierda $M_{s'}^{(r)}$, vista como la matriz asociada para la nueva serie temporal resultante $(S')^{(r)}$. Registrar la matriz invertible T para la transformación lineal.
2. Construir un modelo lineal g para $(S')^{(r)}$. Una opción para este proceso es utilizar las fórmulas dadas de modelos polinomiales de series de tiempo de 2.1.1
3. Encontrar un modelo lineal para $S^{(r)}$ invirtiendo el proceso; es decir, calcular $f = \mathbf{T}^{-1} \cdot g \cdot \mathbf{T}$.
4. Construir un modelo radical de grado r para S basado en el teorema 2.2.2.1(1).

Observación

El proceso anterior puede modificarse fácilmente para obtener modelos de radical de grado r cuando r es par y cada columna de M_s es no negativa o no positiva, tal como se describe en la demostración del teorema 2.2.2.1(2).

2.3 APLICACIONES

2.3.1 Aplicación

Una serie de tiempo S consta de 4 puntos: $P_1 = [1, 1, 0, -1, 1]$; $P_2 = [2, -1, 0, 3, 2]$;

$P_3 = [0, 1, 3, 2, 1]$ y $P_4 = [23, -1, -11, 14, 8]$. Se demuestra que $U(S) = 1$ mediante la búsqueda de un modelo lineal para S.

La forma de la matriz de S es:

$$S = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 23 & -1 & -11 & 14 & 8 \end{array}\right] \quad \text{con} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz asociada M_S tiene rango completo. Mediante la aplicación de una transformación lineal T, representado por una matriz invertible T, obtenemos una nueva S' series temporales cuya matriz asociada se encuentra en su forma de columna triangular reducida. Aquí

$$S' = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right] \quad \text{y}$$

$$T = \frac{1}{202} \begin{bmatrix} 28 & -27 & 38 & 57 & -12 \\ 18 & -39 & 10 & 15 & 50 \\ 12 & -26 & 74 & 10 & -34 \\ -70 & 17 & 6 & 9 & 30 \\ 86 & 83 & -42 & -63 & -8 \end{bmatrix}$$

Por el teorema 2.1.1.4 se puede construir fácilmente un modelo lineal g de S', que muestra a continuación.

$g = [x_3, x_1 + 3x_3, x_2 - x_3, 4x_3, 2x_3]$

A continuación, utilizamos los métodos proporcionados por el teorema 2.1.1.1 para obtener un modelo lineal f de S: $f = T^{-1} \cdot g \cdot T = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$. Donde

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{465}{101}x_1 + \frac{133}{101}x_2 + \frac{863}{101}x_3 - \frac{1}{101}x_4 - \frac{397}{101}x_5 \\
f_2 &= -\frac{93}{202}x_1 - \frac{67}{202}x_2 + \frac{56}{101}x_3 + \frac{81}{202}x_4 + \frac{39}{202}x_5 \\
f_3 &= -\frac{499}{202}x_1 - \frac{227}{202}x_2 - \frac{446}{101}x_3 - \frac{15}{202}x_4 + \frac{711}{202}x_5 \\
f_4 &= \frac{281}{101}x_1 + \frac{58}{101}x_2 + \frac{510}{101}x_3 - \frac{46}{101}x_4 - \frac{82}{101}x_5 \\
f_5 &= \frac{333}{202}x_1 + \frac{77}{202}x_2 + \frac{295}{101}x_3 - \frac{75}{202}x_4 - \frac{81}{202}x_5
\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que $f(P_i) = P_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3$

2.3.2 Aplicación

La primera fila es la fila cero. Una serie de tiempo S que consta de 5 puntos: $P_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$; $P_2 = [1, 10, 3, -5, -2, -1]$; $P_3 = [10, 10, -6, -14, -2, -10]$; $P_4 = [-22, -22, 15, 38, 17, 13]$ y $P_5 = [-14, 4, 30, -2, 28, 32]$. Construimos un modelo lineal para $S(U(S) = 1)$. La forma matriz es:

$$S = \left[\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 10 & 3 & -5 & -2 & -1 \\
10 & 10 & -6 & -14 & -2 & -10 \\
-22 & -22 & 15 & 38 & 17 & 13 \\
\hline
-14 & 4 & 30 & -2 & 28 & 32
\end{array}\right]$$

Aplicando una transformación lineal T, representada por una matriz invertible T, se obtiene una nueva serie temporal S', cuya matriz asociada está en su forma escalonada de columna reducida.

$$S' = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

y

$$T = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por el lema 2.1.2.1(1) se puede construir fácilmente un modelo lineal g para S':

$$g = (1 - x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, x_1 - x_3, x_2 + 4x_3, 2x_3, 5x_3, x_3)$$

A continuación, se utiliza los métodos proporcionados por el teorema 2.1.1.1 para obtener un modelo lineal f para S:

$$f = T^{-1} \cdot g \cdot T = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$$

Donde

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 1 - \frac{1}{18}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{11}{6}x_3 - \frac{77}{18}x_5 + \frac{5}{3}x_6 \\
f_2 &= 10 - \frac{23}{9}x_1 - \frac{7}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 - 2x_4 - \frac{43}{9}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \\
f_3 &= 3 - \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{25}{6}x_5 - \frac{3}{2}x_6 \\
f_4 &= -5 + \frac{41}{18}x_1 + \frac{5}{3}x_2 - \frac{19}{6}x_3 + 2x_4 + \frac{97}{18}x_5 - \frac{7}{3}x_6 \\
f_5 &= -2 - \frac{7}{18}x_1 + \frac{7}{6}x_2 - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{50}{9}x_5 - \frac{5}{6}x_6 \\
f_6 &= -1 - \frac{13}{9}x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{95}{18}x_5 - \frac{7}{6}x_6
\end{aligned}
$$

2.3.3 **Aplicación**

La tercera fila es la fila cero. Una serie de tiempo S que consta de 5 puntos: $P_1 = [1, 1, -1, 2, 2, 3]$; $P_2 = [2, 1, 0, 1, -1, 0]$; $P_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$; $P_4 = [1, -1, 0, -1, 2, 1]$ y $P_5 = [-1, -12, -1, 2, 14, 7]$. Se construye un modelo lineal para S.

La forma matricial de S y la reducción son las siguientes:

$$
S = \left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\
2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\
\hline
-1 & -12 & -1 & 2 & 14 & 7
\end{array}\right] \rightarrow S' = \left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & -3 & 2 & -2 & -1 & 4
\end{array}\right]
$$

y la transformación lineal T para la reducción biene dada por:

$$T = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 & -5 & -2 & -1 \\ 10 & 10 & -6 & -14 & -2 & -10 \\ -22 & -22 & 15 & 38 & 17 & 13 \\ 6 & 6 & -9 & -12 & -3 & 3 \\ 18 & 18 & -9 & -36 & -9 & -9 \\ -21 & -30 & 18 & 51 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

Por el lema lema 2.1.2.1(2) se puede construir fácilmente un modelo lineal g para S':

$$g = (x_3, x_1 - 3x_3, 1 - x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -2x_3, -x_3, 4x_3)$$

A continuación, se utiliza los métodos proporcionados por el teorema 2.1.1.1 para obtener un modelo lineal f para S:

$$f = T^{-1} \cdot g \cdot T = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$$

Donde

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1 - \frac{2}{9}x_1 + \frac{7}{9}x_2 - \frac{19}{9}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + 2x_5 - \frac{7}{3}x_6 \\
f_2 &= -1 - \frac{13}{9}x_1 + \frac{41}{9}x_2 - \frac{193}{18}x_3 + \frac{35}{6}x_4 + \frac{13}{2}x_5 - \frac{73}{6}x_6 \\
f_3 &= -\frac{5}{6}x_1 + \frac{5}{3}x_2 - \frac{25}{6}x_3 + \frac{5}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_5 - 5x_6 \\
f_4 &= -1 + \frac{19}{18}x_1 - \frac{4}{9}x_2 + \frac{16}{19}x_3 - \frac{5}{3}x_4 - x_5 + \frac{17}{6}x_6 \\
f_5 &= 2 + \frac{7}{9}x_1 - \frac{38}{9}x_2 + \frac{169}{18}x_3 - \frac{29}{6}x_4 - \frac{11}{2}x_5 + \frac{61}{6}x_6 \\
f_6 &= 1 + x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 4x_4 - 4x_5 + 8x_6
\end{aligned}$$

2.3.4 **Aplicación**

Una serie de tiempo S consta de 4 puntos: $P_1 = [1, -1, 0, 1, 2]$; $P_2 = [0, 2, 2, 2, 2]$; $P_3 = [1, -2, -1, 0, 1]$ y $P_4 = [-1, 2, -2, 1, 0]$

$$S = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

con

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que M_s no es diagonalizable a la izquierda, pero $M^{(3)}$ es así

$$M_s^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es la matriz asociada para la nueva serie temporal $S^{(3)}$, donde

$$S^{(3)} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & -8 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 8 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Aplicando una transformación lineal T, representada por una matriz invertible T, se obtiene una nueva serie temporal $S'^{(3)}$ cuya matriz asociada está en la forma escalonada de columna reducida:

$$S'^{(3)} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & -\frac{21}{16} & -\frac{5}{2} & 10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\text{y } T = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{48} & -\frac{1}{6} & -1 & -9 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{48} & -\frac{1}{6} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{48} & \frac{1}{6} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando las técnicas de modelos polinomiales de series de tiempo de 2.1.1 (teorema 2.1.1.4), se puede construir fácilmente un modelo lineal g, para $S'^{(3)}$, que se muestra a continuación:

$$g = \left(\frac{3}{2}x_1, x_1 - \frac{21}{16}x_3, x_2 - \frac{5}{2}x_3, x_3 + 10x_4, x_4 + x_5\right)$$

Entonces se puede obtener un modelo lineal utilizando el teorema 2.1.1.1

$$f = T^{-1} \cdot g \cdot T = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \text{ para } S^{(3)}, \text{ donde:}$$

$$f_1 = \frac{7}{48}x_1 + \frac{7}{48}x_2 - \frac{1}{48}x_3$$
$$f_2 = \frac{49}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{7}{6}x_3$$
$$f_3 = \frac{171}{16}x_1 + \frac{43}{16}x_2 - \frac{45}{16}x_3$$
$$f_4 = \frac{55}{6}x_1 + \frac{7}{6}x_2 - \frac{7}{6}x_3$$
$$f_5 = \frac{149}{16}x_1 + \frac{21}{16}x_2 - \frac{19}{16}x_3$$

Luego Usando el teorema 2.2.2.1(1), construimos un modelo radical

$h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ de grado 3 para S, donde

$$\begin{aligned}
h_1 &= \sqrt[3]{\frac{7}{48}x_1^3 + \frac{7}{48}x_2^3 - \frac{1}{48}x_3^3} \\
h_2 &= \sqrt[3]{\frac{49}{6}x_1^3 + \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{7}{6}x_3^3} \\
h_3 &= \sqrt[3]{\frac{171}{16}x_1^3 + \frac{43}{16}x_2^3 - \frac{45}{16}x_3^3} \\
h_4 &= \sqrt[3]{\frac{55}{6}x_1^3 + \frac{7}{6}x_2^3 - \frac{7}{6}x_3^3} \\
h_5 &= \sqrt[3]{\frac{149}{16}x_1^3 + \frac{21}{16}x_2^3 - \frac{19}{16}x_3^3}
\end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que $h(P_i) = P_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3$,

2.3.5 Aplicación

Considere la serie de tiempo que consta de 4 puntos. $P_1 = [1, -1, 3, 0, -1]$; $P_2 = [2, -4, 4, -2, -4]$; $P_3 = [2, -5, 3, -3, -5]$ y $P_4 = [1, 0, 4, 1, 0]$. La matriz es la siguiente

$$S = \left[\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\
2 & -4 & 4 & -2 & -4 \\
2 & -5 & 3 & -3 & -5 \\
\hline
1 & 0 & 4 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

con

$$M_s \begin{bmatrix}
1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\
2 & -4 & 4 & -2 & -4 \\
2 & -5 & 3 & -3 & -5
\end{bmatrix}$$

Aquí las columnas de S no son todas negativas o todas positivas. Aplicando una transformación lineal T, representada por una matriz invertible T, obtenemos una nueva serie temporal S cuya matriz asociada es positiva:

$$S' = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

con

$$M_{s'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Es fácil que $M_{s'}$ no es diagonalizable a la izquierda, pero $M_{s'}$ es así, que es la matriz asociada para $S'^{(2)}$:

$$M_{s'}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 4 & 4 & 16 & 36 & 64 \\ 4 & 1 & 9 & 25 & 49 \end{bmatrix}$$

Así se puede construir fácilmente un modelo lineal para $S^{(2)}$. Entonces se utiliza las técnicas descritas en el teorema 2.2.2.1(2) para obtener un modelo radical de grado 2 para $M_{s'}^{(2)}$. Por último, necesitamos invertir el proceso de transformación lineal para obtener un modelo radical de grado 2 para S.

Está dado por $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$, dónde

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 3x_1 + x_2 \\
h_2 &= -9x_1 - 3x_2 + \sqrt{\frac{2690}{24}x_1^2 + \frac{1590}{24}x_1x_2 + \frac{265}{24}x_2^2 - \frac{47}{8}x_3^2} \\
h_3 &= \sqrt{\frac{1750}{8}x_1^2 + \frac{1050}{8}x_1x_2 + \frac{175}{8}x_2^2 - \frac{83}{8}x_3^2} \\
h_4 &= -12x_1 - 4x_2 + \sqrt{\frac{8242}{24}x_1^2 + \frac{4998}{24}x_1x_2 + \frac{833}{24}x_2^2 - \frac{119}{8}x_3^2} \\
h_5 &= -18x_1 - 6x_2 + \sqrt{\frac{11666}{24}x_1^2 + \frac{7134}{24}x_1x_2 + \frac{1189}{24}x_2^2 - \frac{155}{8}x_3^2}
\end{aligned}
$$

Este h satisface que $h(P_i) = P_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3$

2.4 RESULTADOS

Luego de haber realizado la descripción de los teoremas y definiciones así como la contrastación de la hipótesis, se observa:

- En la aplicación 2.3.1 existe modelos polinomiales. Se considera las series de tiempo con puntos no nulos y la matriz asociada de serie de tiempo diagonalizable, con rango completo; luego la matriz asociada de series de tiempo llevado mediante transformaciones elementales por columna a matriz escalonada reducida, introducido la matriz asociada invertible de transformación lineal apropiado y mediante métodos proporcionados obtenemos modelo polinomial; este modelo obtenido podemos describir,predecir, interpretar y explicar.

- En la aplicación 2.3.2 y 3 existe modelos polinomiales. Se considera las series de tiempo con algunos puntos nulos y la matriz asociada de serie de tiempo

no son diagonalizables, pero la matriz asociada de series de tiempo llevado mediante transformaciones elementales por columna a matriz escalonada reducida es de tipo especial, en este caso también se introduce matriz asociada invertible de transformación lineal apropiado, luego se proporciona un método de construcción para obtener modelo polinomial; este modelo obtenido se puede describir, predecir, interpretar y explicar.

- En la aplicación 2.3.4 y 5 no existe modelos polinomiales, pero se proporciona los métodos algebraicos para obtener modelos polinomiales en relación con el grado. Se considera las series de tiempo con puntos no nulos y la matriz asociada de serie de tiempo no es diagonalizables, entonces la matriz asociada de series de tiempo llevado mediante transformaciones elementales por columna a matriz escalonada reducida también no es diagonalizable; pero se da un método en relación con el grado para obtener matriz escalonada reducida, luego se introduce matriz asociada invertible de transformción lineal apropiado y métodos proporcionados para obtener modelo radical, este modelo radical es importante por su predicción de tendencia incremental.

3. CONCLUSIONES

Dado el presente trabajo de investigación y tomando en cuenta el cumplimiento de objetivos planteados en el proyecto de tesis, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

1. Las series de tiempo es importante para realizar modelo matemático; junto con su gráfica tiene similar representación del gráfico polinomial; tiene capacidad de describir, predecir, interpretar y explicar el comportamiento futuro de un fenómeno.

2. El estudio y el análisis de polinomio es una alternativa para realizar modelamiento matemático, por su simplicidad de cálculo, gráfico e interpretación.

3. El estudio y el análisis de radicación es una alternativa para realizar modelamiento matemático por su gráfica de tendencia incremental.

4. El polinomio es una representación algebraica más importante en modelamiento matemático; por su facilidad de interpretación geométrica, por su precisión y por su facilidad de poder relacionarlo en otros campos. Se ha partido de las series de tiempo, luego mediante tranformación lineal obtenemos una nueva serie de tiempo, cuya matriz asociada se encuentra en su forma escalonada reducida por columna, en seguida se utiliza los teoremas dadas para construir un modelo polinomial de nueva serie de tiempo. A continuación se utiliza los métodos proporcionados por el teorema 2.1.1.1 para obtener polinomio.

5. El radical es importante por su tendencia incremental y sobre todo cuando no existe modelo lineal. Si una serie temporal S no tiene modelo lineal, la serie temporal

relacionada $S^{(r)}$ puede tener modelo lineal para algún número entero positivo r. El caso es más simple cuando el número r es impar. Cuando r es par, se necesita que la matriz sea específica; es decir, que puede ser reducido mediante operaciones de columna a una matriz con sólo columnas no negativas o no positivas. Aunque esta condición no siempre se satisface para un entero fijo $r > 0$, en muchos casos una matriz puede ser transformada en otra matriz de este tipo por operaciones de columna para algún r. Puesto que las operaciones de la columna preservan la existencia de modelo lineal, así se puede utilizar la nueva matriz para obtener radical.

4. RECOMENDACIONES

1. Se sugiere adquirir conocimientos sólidos en cursos básicos de pregrado como por ejemplo: en Series de Tiempo, Análisis real, matemática básica, Álgebra lineal y Estructura Algebraica. Estas para poder comprender y elaborar un trabajo de investigación significativo, de gran utilidad y sobre todo de gran importancia lo que es construcción de modelos polinomiales y modelos radicales.

2. Elaborar un trabajo de investigación sobre modelo polinomiales y modelos radicales de series de tiempo aplicando transformaciones lineales sobre un campo específico.

3. Elaborar un trabajo de investigación sobre modelo polinomiales y modelos radicales de series de tiempo aplicando transformaciones lineales con Bases de Grobner.

4. Presentar un problema específico como los datos de una serie de tiempo como por ejemplo en Economía, Metereología, Marketing, Demografía, Medicina, Biología, Astronomía, o en Sociología y luego llevar a una matriz para poder desarrollar mediante el software Matlab para la construcción de modelos polinomiales y modelos radicales y luego interpretarlo, predecir y pronosticar para resolver problemas reales de la población.

5. Profundizar el estudio de los grados mínimos de modelos polinomiales, fijando en los casos mas generales en los que la matriz asociada puede o no tener una matriz escalonada reducida. Así dar una estimación del grado total mínimo y demostrar con teoremas que dicha estimación es la mejor para modelos polinomiales.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arce C., Castillo W. y Gonzáles J. (2003). *Álgebra lineal*. Costa Rica. Recuperado de https://nickpgill.github.io/files/2014/07/libro-algebra-lineal.pdf

Cox D., Litle J. y ÓShea D. (1996). *Ideals, Varieties, and Algorithms*. New York: Editorial Springer Verlag. Recuperado de https://doc.lagout.org/science

Cox D., Litle J., ÓShea D. (2005). *Using Algebraic Geometry*. New York: Second Edition, Springer. Recuperado de https://doc.lagout.org/science

Fraleigh J. (1982). *Álgebra Abstracta*. E.U.A. Editoial Massachussetts.

García M. (2005). *Modelos econométricos de Series Temporales: Teoría y práctica*. España.

Gonzáles M. (2009). *Análisis de Series de Tiempo: modelos arima*. España. Recu perado de https://www.academia.edu

Gonzalves A. (2002). *Introducción al Álgebra*. Lima- Perú: Editorial IMCA

Haaser N.B., La Salle, J.P. y Sullivan, J. A. (1995). *Análisis Matemático*. México: Editorial Trillas.

Herstein I. (1980). *Álgebra Moderna*. México: Editorial Trillas

Hoffman K. y Kunze, R. (1971). *Álgebra Lineal*. Nueva Jersey: Editorial Hall.

Jeronimo G., Sabia J. (2007). Ecuaciones Polinomiales: Una Aproximación Al gorítmica. X112, 2000-2461. Recuperado de http://mate.dm.uba.ar/ jeroni mo/papers

Li A., Pen C. (2004). Linear Transformations On Polynomial Models of Time Se ries. *17*, N° 2, 229-242. Recuperado de https://www.researchgate/publication

Li A. (2005). An Algebraic Aproach to Building Interpolating Polynomials. 597-604. Reuperado de https://www.researchgate.net/publication

Lages Lima Elon. *Análisis real*. Rio de Janeiro- Brasil.

Lipschutz S. (1992). *Álgebra Lineal*. España: Editorial McGraw-Hill

Marmolejo M., Villegas M. (2001). *Tópicos en Álgebra Lineal*. Departamentos de Matemáticas, Universidad del Valle. Recuperado de https://thales.cica.es/rd/Recursos

Pan X., Liao F., Li A. (2006). Certain Linear and Radical Models of Discrete Time Series. *28*, N° 4, 487-501. Recuperado de https://ijpam.eu/contents

Pen C. (2004). Minimun Degrees of Polynomial Models on Time Series. 2005, 720-729

Quiñonez C. y Gomez V. (1986). Modelo polinomial para crecimiento individual de larvas de la anchoveta norteña, engraulis mordax. *XXVII*. Recuperado de http://calcofi.org/publications/calcofireports

Simis A. (1977). *Introducción al Álgebra*. Brazil Río de Janeiro.

Uriel E. (1985). *Análisis de Series Temporales*. Madrid: Editorial Ábaco. Recuperado de https://www.cursoelsie/aplicacionesseriesdetiempo/html/series-tiempo.pdf

Uriel E. (2001). *Análisis de Series de Tiempo: modelo ARIMA*. Valencia- España: Editorial America. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Proceso-estoC3 Alstco.

6. ANEXOS

UNIVERSIDAD NACIONAL SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO
"Una nueva Universidad para el Desarrollo"
REPOSITORIO INSTITUCIONAL UNASAM
Dirección del Instituto de Investigación

FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DE TESIS Y TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR GRADOS ACADÉMICOS Y TÍTULOS PROFESIONALES EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DIGITAL - UNASAM.

Conforme al Reglamento del Repositorio Nacional de Trabajos de Investigación - RENATI.
Resolución del Consejo Directivo de SUNEDU Nº 033-2016-SUNEDU/CD

1. **Datos del Autor:**
   Apellidos y Nombres: MELGAREJO GARCILAZO, Javier David
   Código de alumno: 05.1055.6.BO — Teléfono: 914545514
   Correo electrónico: melgarejojavier15@gmail.com — DNI: 43453269
2. **Modalidad de trabajo de investigación:**
   ( ) Trabajo de investigación — ( ) Trabajo académico
   ( ) Trabajo de suficiencia profesional — (X) Tesis
3. **Título profesional o grado académico:**
   ( ) Bachiller — (X) Título — ( ) Segunda especialidad
   ( ) Licenciado — ( ) Magister — ( ) Doctor
4. **Título de trabajo de investigación:**
   MODELOS POLINOMIALES Y MODELOS RADICALES DE SERIES DE TIEMPO APLICANDO TRANSFORMACIONES LINEALES
5. **Facultad de:** Ciencias
6. **Escuela, Carrera o Programa:** Escuela académico profesional de Matemática
7. **Asesor:**

Apellidos y Nombres: M.S.c. RODRIGUEZ SABINO, Vladimir Giovanni — Teléfono: 961082526

Correo electrónico: rodrimat@gmail.com — DNI: 40223139

A través de este medio autorizo a la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, publicar el trabajo de investigación en formato digital en el Repositorio Institucional Digital, Repositorio Nacional Digital de Acceso Libre (ALICIA) y el Registro Nacional de Trabajo de Investigación (RENATI)

Asimismo, por la presente dejo constancia que los documentos entregados a la UNASAM, versión impresa y digital, son las versiones finales del trabajo sustentado y aprobado por el jurado y son de autoría del suscrito en estricto respeto de la legislación en materia de propiedad intelectual.

Firma: .....

DNI.: 43453269

FECHA: 24 de enero del 2020