UNIVERSIDAD NACIONAL
“SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO”

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE POISSON CON CONDICIÓN DE FRONTERA DE ROBIN

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR: Bach. JACI SANDY TORRES TORRES

ASESOR: M.Sc. PERPETUA MARÍA ALAYO MEREGILDO

Huaraz - Perú

2021

Nº Registro: T011

FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN DE TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN, CONDUCENTES A OPTAR TÍTULOS PROFESIONALES Y GRADOS ACADÉMICOS EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

1. Datos del autor:

Apellidos y Nombres: Torres Torres Jaci Sandy

Código de alumno: 151.0505.475 Teléfono: 945010501

E-mail: jtorrest@unasam.edu.pe D.N.I. n°: 73897217

(En caso haya más autores, llenar un formulario por autor)

2. Tipo de trabajo de investigación:

- (●) Tesis
- ( ) Trabajo de Suficiencia Profesional
- ( ) Trabajo Académico
- ( ) Trabajo de Investigación
- ( ) Tesinas (presentadas antes de la publicación de la Nueva Ley Universitaria 30220 – 2014)

3. Para optar el Título Profesional de:

Licenciada en Matemática

4. Título del trabajo de investigación:

Existencia y unicidad de la solución débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin

5. Facultad de: Ciencias

6. Escuela o Carrera: Matemática

7. Línea de Investigación(*):

8. Sub-línea de Investigación(*):

(*)Según resolución de aprobación del proyecto de tesis

9. Asesor:

Apellidos y nombres Alayo Meregildo Perpetua María D.N.I n°: 31674688

E-mail: palayom@unasam.edu.pe ID ORCID: 0000-0002-7277-1782

10. Referencia bibliográfica: Tesis en formato APA

11. Tipo de acceso al Documento:

- (●) Acceso público* al contenido completo.
- ( ) Acceso restringido** al contenido completo

Si el autor eligió el tipo de acceso abierto o público, otorga a la Universidad Santiago Antúnez de Mayolo una licencia no exclusiva, para que se pueda hacer arreglos de forma en la obra y difundirlo en el Repositorio Institucional, respetando siempre los Derechos de Autor y Propiedad Intelectual de acuerdo y en el Marco de la Ley 822.

En caso de que el autor elija la segunda opción, es necesario y obligatorio que indique el sustento correspondiente:

12. Originalidad del archivo digital

Por el presente dejo constancia que el archivo digital que entrego a la Universidad, como parte del proceso conducente a obtener el título profesional o grado académico, es la versión final del trabajo de investigación sustentado y aprobado por el Jurado.

Firma del autor

13. Otorgamiento de una licencia *CREATIVE COMMONS*

Para las investigaciones que son de acceso abierto se les otorgó una licencia Creative Commons, con la finalidad de que cualquier usuario pueda acceder a la obra, bajo los términos que dicha licencia implica.

BY NC SA

El autor, por medio de este documento, autoriza a la Universidad, publicar su trabajo de investigación en formato digital en el Repositorio Institucional, al cual se podrá acceder, preservar y difundir de forma libre y gratuita, de manera íntegra a todo el documento.

Según el inciso 12.2, del artículo 12º del Reglamento del Registro Nacional de Trabajos de Investigación para optar grados académicos y títulos profesionales - RENATI "Las universidades, instituciones y escuelas de educación superior tienen como obligación registrar todos los trabajos de investigación y proyectos, incluyendo los metadatos en sus repositorios institucionales precisando si son de acceso abierto o restringido, los cuales serán posteriormente recolectados por el Recolector Digital RENATI, a través del Repositorio ALICIA".

………

14. Para ser verificado por la Dirección del Repositorio Institucional

Seleccione la
Fecha de Acto de sustentación:

Huaraz, 25/10/2021

Firma:

UNIVERSIDAD NACIONAL SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO – REPOSITORIO INSTITUCIONAL – UNASAM

Varillas Wiliam Eduardo
Asistente en Informática y Sistemas
- UNASAM -

***Acceso abierto**: uso lícito que confiere un titular de derechos de propiedad intelectual a cualquier persona, para que pueda acceder de manera inmediata y gratuita a una obra, datos procesados o estadísticas de monitoreo, sin necesidad de registro, suscripción, ni pago, estando autorizada a leerla, descargarla, reproducirla, distribuirla, imprimirla, buscarla y enlazar textos completos (Reglamento de la Ley No 30035).

**** Acceso restringido:** el documento no se visualizará en el Repositorio.

ACTA DIGITAL DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 002

Los Miembros del Jurado de la Revisión y Sustentación de Tesis de la Escuela Académico Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias, designados mediante Resolución de Consejo de Facultad N°040-2021-UNASAM-FC, se reunieron el día lunes 25 de octubre de 2021, a horas 04:00 p.m. en el Auditorio virtual de la Facultad de Ciencias en acto público para evaluar la Sustentación de Tesis, presentado por la

Bachiller : **Jaci Sandy TORRES TORRES**

Tesis Titulada : **"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE POISSON CON CONDICIÓN DE FRONTERA DE ROBIN".**

Después de la Sustentación y las respuestas a las preguntas, el Jurado lo declara **APTO** para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, con el calificativo de **APROBADO por UNANIMIDAD**, con la nota de **Quince (15)**

En señal de conformidad y para constancia, firmamos la presente ACTA, siendo las 04:50 p.m. del mismo día y año.

Huaraz, 25 de octubre de 2021.

Dr. Pacheco Castillo, Alexander
PRESIDENTE

MSc. Leiva Gonzales, Jorge Wilson
SECRETARIO

MSc. Zavaleta Medina, Merlyng Isaías
VOCAL

MSc. Perpetua María ALAYO MEREGILDO
ASESORA

Dedicatoria

A mi madre,

por animarme a

estudiar Matemática.

Agradecimientos

Agradezco al Autor de la vida y Dueño del conocimiento, porque sin Su poder y misericordia jamás hubiera llegado hasta donde estoy y por darme el privilegio de trabajar en la Matemática.

A mis padres, porque con sus historias de vida me impulsaron a salir adelante. Por haber apoyado cada una de mis metas y por ser el soporte de mis hazañas.

A mi hermana, por siempre desafiarme a superarme a mí misma y por haber hecho este tiempo de investigación más ligero.

A mi asesora, M.Sc. Perpetua Alayo Meregildo, por depositar su confianza en mí y permitirme trabajar con ella. Por todo el respaldo y apoyo que siempre me dio a lo largo de esta investigación y por haber compartido sus conocimientos conmigo.

A todos los docentes que me brindaron su ayuda en mi tiempo de estudiante y también a los que hasta ahora me motivan a seguir en la Matemática.

A la Universidad Santiago Antúnez de Mayolo, por haber sido la Casa Superior donde nacieron mis primeras experiencias con la ciencia.

Muchas gracias a todos mis familiares y amigos, cuyos nombres hacen parte de una lista muy extensa; sin sus oraciones, esto no hubiera sido posible.

Jurado Calificador

Dr. PACHECO CASTILLO Alexander

(PRESIDENTE)

M.Sc. LEIVA GONZÁLES Jorge Wilson

(SECRETARIO)

M.Sc. ZAVALETA MEDINA Merlyng Isaías

(VOCAL)

Resumen

En la presente investigación se determinó la existencia y unicidad de la solución débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin. Para tal propósito se definió la teoría de distribuciones para emplear una función test o de prueba para debilitar la ecuación de Poisson. Luego, se describió el proceso de obtención de la formulación variacional de dicha ecuación; y de esta manera se verificó si las nuevas condiciones de la forma débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin cumple con las afirmaciones del teorema de Lax-Milgram en un espacio adecuado de Sobolev. Finalmente, se llegó a la conclusión que existe una solución débil única para la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin.

Palabras clave: Ecuación de Poisson, condición de frontera, formulación variacional, función test, espacio de Sobolev.

Abstract

In this research, it was determined the existence and uniqueness of the weak solution of the Poisson's equation with the Robin boundary condition. For that, it was defined the distribution theory in order to use a test function to weaken the Poisson's equation. Then, it was described the process to obtain the weak formulation of such equation, so it was verified if the new conditions of the weak form of the Poisson's equation with the Robin boundary value holds with the statements of the Lax-Milgram theorem on an adequate Sobolev space. Finally, the conclusion reached was that exists a unique weak solution for the Poisson's equation with the Robin boundary condition.

Keywords: Poisson's equation, boundary condition, weak formulation, test function, Sobolev space.

Índice general

Dedicatoria **II**

Agradecimientos **III**

Resumen **V**

Abstract **VI**

I. INTRODUCCIÓN 9

1.1. Justificación 38

1.2. Planteamiento del problema 38

1.2.1. Formulación de problemas 38

1.2.2. Delimitación del problema 41

1.3. Objetivo general 41

1.3.1. Objetivos específicos 41

II. MATERIALES Y MÉTODOS 42

2.1. Materiales y equipos 42

2.2. Métodos 42

2.2.1. Instrumentos de recolección de datos 42

III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 44
3.1. Tipo de estudio 44
3.2. El diseño de investigación 44
3.3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos 45
IV. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN 46
4.1. Descripción del trabajo de campo 46
4.1.1. Teorema de Lax-Milgram 46
4.1.2. Teoría de distribuciones 50
4.1.3. Espacios de Sobolev 66
4.2. Presentación del resultado 78
4.2.1. Ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin homogénea 78
4.2.2. Ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin no homogénea 84
4.3. Discusión de resultados 91
V. CONCLUSIONES 93
VI. RECOMENDACIONES 94
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 95

I. INTRODUCCIÓN

Desde su nacimiento en el siglo XVIII, las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) han tenido un rol muy importante dentro de la ciencia, tanto en la física como en la matemática. Esto es porque muchos problemas de la física matemática se reducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La mayoría de fenómenos físicos pueden ser modelados con ecuaciones diferenciales parciales y, de esa manera, se utiliza la herramienta matemática para su desarrollo, análisis y solución. Por tal razón, matemáticos de renombre como Euler, D'Alembert, Lagrange y Laplace —quienes fueron los pioneros en su estudio— expandieron esta teoría y actualmente siguen siendo un foco de investigación. Dentro de la matemática, una ecuación diferencial parcial también tiene trascendencia, como por ejemplo, en la geometría diferencial y su estrecha relación con el análisis funcional.

Así como surgió el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales también se dio una búsqueda exhaustiva de soluciones de las mismas. Debido a esto, diferentes matemáticos crearon métodos para resolverlas, como por ejemplo, el método de separación de variables, superposición de variables y más. Sin embargo, resolver una EDP requiere de una solución que satisfaga dos condiciones importantes para que sea un problema bien definido. Estas dos condiciones son que la solución encontrada sea única y que dependa de los datos del problema. Con estas condiciones, la solución de una EDP se llama solución clásica, porque no requiere de cambios ni de variaciones en el espacio donde se trabaja. Puesto que se continuó con la investigación, muchas EDPs no podían ser resueltas sin más, sino que requerían de unas condiciones de frontera, las cuales delimitaban dónde se debían trabajar para posteriormente hallar su solución. Entonces, encontrar una solución clásica de una EDP con condiciones de frontera se convirtió en un desafío, ya que los métodos ya mencionados obstaculizaban el descubrimiento de soluciones porque exigían demasiada regularidad y en dimensiones superiores, el dominio también debe satisfacer ciertas condiciones de regularidad. A pesar del gran problema que esto representaba para los matemáticos de la época, fue el punto de inicio para más pesquisas y desarrollo de nuevas teorías en otros campos de la matemática, como el análisis funcional a mediados del siglo XX. Fue así como, el matemático David Hilbert, en el año 1920, planteó la idea de la formulación variacional —también llamada formulación débil— mediante su teoría de ecuaciones integrales, las cuales proporcionaban una mejor aproximación a las ecuaciones diferenciales parciales. Por otro lado, en 1930, el matemático ruso, Sergei Sobolev, presentó la idea de espacios generalizados o más conocidos como espacios de Sobolev; y se convirtió en el instrumento esencial que añadió fuerza al trabajo de Hilbert.

Todo esto significó un gran avance en el estudio de las EDPs y asimismo creó ideas diferentes de solución. En este caso, el método de la formulación variacional provee una solución débil de una EDP, a diferencia de los métodos anteriores con los cuales se obtenían soluciones clásicas. Entonces, una EDP en su forma débil facilita su estudio y la obtención de su solución.

Unos pocos años después, en 1954, los matemáticos Peter Lax y Arthur Milgram presentaron el teorema de Lax-Milgram en su trabajo titulado *Parabolic Equations* [14], el cual es conocido como una generalización del teorema de representación de Riesz-Fréchet, el cual tiene gran relevancia dentro de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, sobre todo en las EDPs elípticas, ya que garantiza la existencia y unicidad de sus soluciones débiles. En el caso de las EDPs elípticas —las cuales modelan distintos procesos estacionarios de distinta naturaleza física (oscilaciones, conducción del calor, difusión y otros)—, la obtención de una solución débil fue mucho más sencilla de encontrar.

Debido a las investigaciones anteriores, se encontró satisfactoriamente la solución débil para las ecuaciones diferenciales parciales con distintos tipos de condiciones de frontera, como las condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y mixtas. Así se tiene en el año 2015, Karina Aguilera y César Santisteban, autores del trabajo de tesis de licenciatura titulado *La Formulación Variacional del Problema de Newmann-Dirichlet en los espacios de Sobolev* [2], desarrollaron la formulación variacional de la ecuación de Poisson con condición de frontera Newmann-Dirichlet homogónea y no homogénea. En ese mismo año, Guillermo Sucasaire, en su trabajo de tesis, *Generalización del teorema de Lax-Milgram y un problema de condiciones de frontera elípticos* [18], concluyó que a pesar de que el teorema de Lax-Milgram es un teorema que proviene del Análisis funcional, su aplicación es de gran utilidad para encontrar una única solución para ecuaciones diferenciales parciales elípticas en el sentido débil. Así mismo, en su trabajo de tesis de maestría en el año 2017, titulada *Weak Solutions of Linear Partial Diferential Equations* [7], Abd Dood realizó un estudio de la existencia y unicidad de las soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales elípticas con condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann.

Ahora, dentro de las EDPs elípticas, la que tiene mayor renombre es la ecuación de Laplace dada de la forma $\Delta u = 0$; y su versión no homogénea: $\Delta u = f$, es llamada ecuación de Poisson, la cual es relevante en el campo de la física. Gracias a que los investigadores obtuvieron una solución débil de esta ecuación con las condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann, se plantea la cuestión de si es que existirá una solución débil única para la misma ecuación pero con la condición de frontera de Robin, la cual es una combinación lineal de las condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann.

La condición de frontera de Robin, también llamada tercera condición de frontera, no es una condición de frontera mixta, como se podría pensar; por lo que, a simple vista, se puede notar que tanto en el sentido físico es difícil de describir, entonces en la matemática, su comportamiento será igual de denso.

Es por eso que el presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal determinar la existencia y unicidad de la solución débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin, mediante el estudio de los espacios de Sobolev, la introducción de la teoría de distribuciones y la descripción de la obtención de la formulación variación de nuestro problema y la aplicación del teorema de Lax-Milgram para obtener lo propuesto.

En el capítulo I se exponen las bases teóricas que permitirán conocer el tema desde sus raíces, empezando desde los espacios métricos hasta llegar a los espacios de Hilbert, con teoremas y definiciones útiles para la presente tesis.

En el capítulo II y III se presenta los materiales, métodos y la metodología utilizada.

En el capítulo IV se describe y se presenta los resultados de la presente investigación, el cual empieza describiendo el campo donde se obtendrán los resultados, continuando con la presentación del resultado y se finaliza con la discusión de los resultados obtenidos previamente.

En el capítulo V se dan las conclusiones a las que se llegó después de este estudio.

En el capítulo VI se sugieren algunas ideas para póstumas investigaciones. Finalmente, se mencionan las referencias bibliográficas empleadas para la ejecución del presente trabajo de investigación.

Bases teóricas

Los conocimientos previos que se requieren para el desarrollo del tema de investigación, empezarán desde los espacios métricos, espacios normados, espacios de Banach, espacios de Lebesgue, y finalmente, espacios de Hilbert.

1. **Espacios métricos**

   La noción geométrica más fundamental en un espacio es la idea de distancia entre dos puntos en dicho espacio. Es por ello que la definición de un espacio métrico es útil para abstraer en conjuntos generales las propiedades básicas del concepto de distancia.

   Definición 1.0.1. [9] *Sea X un conjunto no vacío y d una función de valor real definida sobre $X \times X$, es decir:*

$$\begin{aligned} d: \quad X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

   La función d es una métrica sobre X si para todo $x, y, z \in X$ se satisfacen:

   M1) $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

   M2) $d(x, y) = d(y, x)$

   M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

   Un espacio métrico es un par (X, d) formado por el conjunto X y una métrica d sobre X.

   Definición 1.0.2 (Convergencia de una sucesión)**.** [9] *Una sucesión (x_n) en un* *espacio métrico* (X, d) *se dice que converge a* $x_0 \in X$*, si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_0) < \varepsilon$*, siempre que* $n \geq N$*.*

Definición 1.0.3 (Sucesión de Cauchy)**.** [9] *Una sucesión* (x_n) *en un espacio métrico* (X, d) *es llamada una sucesión de Cauchy si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *siempre que* $n, m \geq N$*.*

Definición 1.0.4 (Espacios métricos completos)**.** [9] *Un espacio métrico* (X, d) *es completo si cada sucesión de Cauchy en el espacio converge a algún punto del espacio.*

Teorema 1.0.1 (Conjunto cerrado)**.** [12] *Un subconjunto* M *de un espacio métrico es cerrado si y solamente si dada cualquier sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* M*, con* $x_n \to x$*, entonces* $x \in M$*.*

Teorema 1.0.2 (Subespacio completo)**.** [20] *Un subespacio* M *de un espacio métrico completo* X*, es completo si y solamente si* M *es cerrado en* X*.*

2. **Espacios Normados. Espacios de Banach**

Un espacio normado es un espacio vectorial con una norma definida en él. Puesto que tales espacios ya son espacios métricos, la teoría desarrollada para espacios métricos se aplica para los espacios normados.

Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.0.5 (Espacio normado)**.** [12] *Una norma en* X *es una función real, cuyo valor en* x *es denotada por* $\|x\|$*, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

Para todo $x, y \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$*:*

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Desigualdad Triangular)*

Un espacio normado es un par $(X, ||\cdot||)$, donde X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $||\cdot||$ es una norma definida sobre X.

Todo espacio normado es un espacio métrico, con la métrica definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Ejemplo 1. *El espacio* $\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ $(p \geq 1)$, *es un espacio normado con la norma:* $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$.

Ejemplo 2. *Sea el espacio* $\ell^{\infty} = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ acotada } \right\}$, *es un espacio normado con la norma* $\|x\| = \sup_n |x_n|$.

Como se había mencionado anteriormente, la teoría de espacios métricos se aplica en los espacios normados; así que si cada sucesión de Cauchy (x_n) converge en un espacio normado X, entonces X es llamado un espacio normado completo. Este tipo de espacios poseen distintas propiedades y los estudiaremos a continuación.

Definición 1.0.6 (Espacios de Banach)**.** [5] *Un espacio normado X es de Banach si es un espacio normado completo con respecto a la métrica inducida por la norma.*

Ejemplo 3. *Sea el espacio* $L^p(X, \sum, \mu)$ *es un espacio de Banach con la norma:*

$$\|[f]\|_p = \left(\int |f|^p du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ejemplo 4. *El espacio l^2 también es un espacio de Banach.*

Definición 1.0.7 (Subespacio de un espacio de Banach)**.** [5] *Un subespacio M de un espacio de Banach X es completo si y solamente si M es cerrado en X.*

Lema 1. [5] *Si $B = \{x_1, \cdots, x_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio normado X. Entonces existe $c > 0$, que depende del conjunto B, tal que*

$$\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \cdots |a_n|)$$

Para escalares cualesquiera $a_1, \cdots, a_n$.

Dentro del análisis funcional, se considera como principal objeto de estudio a espacios generales, tales como a los espacios métricos y espacios normados, y aplicaciones en estos espacios.

En el caso de los espacios normados, una aplicación es llamada operador.

Definición 1.0.8 (Operador lineal)**.** [5] *Sea X un espacio normado y $T : X \longrightarrow X$ un operador. T es lineal es un operador lineal si cumple lo siguiente:*

- $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in X$
- $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall \alpha \in \mathbb{K}$ *y cualquier* $x \in X$

Los espacios normados tienen una estructura algebraica de espacio vectorial la cual está asociada a las transformaciones lineales, y una estructura de espacio métrico la cual está asociada a las aplicaciones continuas. De modo que, los morfismos entre espacios normados son funciones que son lineales y continuas al mismo tiempo. Tales funciones son llamadas operadores lineales continuos.

Definición 1.0.9 (Operadores lineales continuos)**.** [5] *Sean* X*,* Y *espacios normados y* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal. El operador* T *es continuo si* $\forall x_0 \in X$ *y* $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que* $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ *siempre que* $x \in X$ *y* $\|x - x_0\| < \delta$*.*

El conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en Y será denotado por $\mathcal{L}(X, Y)$. Además, $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)
Si Y fuese el campo de los escalares $\mathbb{K}$, en lugar de escribir $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, escribiremos X^*, el cual es llamado espacio dual de X, y decimos que sus elementos son funcionales lineales continuos.

Definición 1.0.10 (Operadores lineales acotados)**.** [12] *Sean* X*,* Y *espacios normados y* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal. El operador* T *es acotado si* $\exists c \in \mathbb{R}, c > 0$*, tal que* $\forall x \in X$

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

De lo anterior se puede apreciar lo siguiente,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \quad x \neq 0.$$

Definición 1.0.11. [12] *La norma de un operador lineal acotado* T *se define como*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Esta norma definida satisface las condiciones de la definición 1.0.5.

Demostración: Ver [12], página 93.

Observemos ahora el siguiente teorema, el cual nos asegura que un operador lineal continuo es un operador lineal acotado.

Teorema 1.0.3. [5] *Sea $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde X y Y son espacios normados. Entonces:*

(a) T es continua sí y solo sí T es acotada.

(b) Si T es continuo en un único punto, entonces T es continua.

Demostración: Ver [12], página 97.

Teorema 1.0.4. [5] *Si X y Y son espacios de Banach, entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es también un espacio de Banach.*

Demostración:

$\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial, consideremos $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X, Y)$; es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\|T_m - T_n\| < \varepsilon, \forall m, n > N(\varepsilon)$$

Como $\sup\limits_{x\in X} \|T_m - T_n\| < \varepsilon$, se tiene que

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \sup_{x\in X} \|T_m(x) - T_n(x)\| < \varepsilon \qquad \cdots (*)$$

Entonces $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y, para cada x en X, pero como Y es un espacio de Banach, entonces $T_n(x) \longrightarrow y$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Definamos, $T : X \longrightarrow Y$, donde $T(x) = y = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$

i) T es una transformación lineal:

$$\begin{aligned} T(\alpha x + z) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + z) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n(x) + T_n(z)) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(z) \\ &= \alpha T(x) + T(z). \end{aligned}$$

ii) T está acotada:

$$\begin{aligned} T &= T_n - (T_n - T) \\ \|T(x)\| &= \|T_n(x) - (T_n(x) - T(x))\| \\ &\leq \|T_n(x)\| + \|T_n(x) - T(x)\| \end{aligned}$$

Pasando límite en $(*)$:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in X} \|T_m(x) - T_n(x)\| &< \varepsilon \\ \Longrightarrow \|T_m - T\| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Un funcional es un operador cuyo rango pertenece al campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

El análisis funcional centra su estudio en funcionales. Denotamos a estos funcionales con letras minúsculas f, g, h, $\cdots$, el dominio de f por $\mathscr{D}(f)$ y el rango por $\mathscr{R}(f)$.

Debido a que los funcionales son operadores, se aplican las definiciones previas. Sin embargo, necesitaremos dos definiciones en particular.

Definición 1.0.12 (Funcional lineal)**.** [12] *Un funcional lineal f es un operador lineal con dominio en el espacio vectorial X y rango en el campo $\mathbb{K}$ de X; así,*

$$f : \mathscr{D}(f) \longrightarrow \mathbb{K}$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si X es real y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si X es complejo.

Definición 1.0.13 (Funcional lineal acotado)**.** [12] *Un funcional lineal acotado f es un operador lineal acotado con dominio que está en el espacio normado X y rango en el campo $\mathbb{K}$ de X. Así existe un número real $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathscr{D}(f)$, $|f(x)| \leq c\|x\|$.*

Más aún, la norma de f es:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

o también

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

De previas definiciones se llega a lo siguiente:

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

Teorema 1.0.5. [12] *Un funcional lineal f con dominio $\mathscr{D}(f)$ en un espacio normado es continuo sí y solo sí está acotado.*

3. **Espacios de Lebesgue**

Los espacios de Lebesgue también son conocidos como espacios L^p, son espacios normados completos; por tanto, estos espacios también son espacios de Banach.

[4] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible en el sentido de Lebesgue. Para una función f, integrable en el sentido de Lebesgue, se denota la integral de f por alguna de las siguientes expresiones:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f dx = \int_\Omega f(x) dx$$

y la medida de Lebesgue de un conjunto medible Ω la denotaremos por $\mu(\Omega)$. Para $1 \leq p < +\infty$ se define

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } / \int_\Omega |f|^p < +\infty \right\}.$$

Las funciones de $L^p(\Omega)$ se entienden definidas salvo conjuntos de medida nula, es decir, dos funciones que son iguales salvo en un conjunto de medida nula son consideradas como la misma función, luego en realidad no son funciones sino clases de funciones. Los espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach con las normas

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}, \forall f \in L^p(\Omega)$$

Se define $L^\infty(\Omega)$ como el espacio formado por las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles tales que

$$\text{supes}_\Omega |f| < +\infty$$

donde " supes " es el supremo esencial de $|f|$ en Ω.

[4] Si $f \in L^\infty$ y $N \in \Omega$ con $\mu(N) = 0$, se define

$$S(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}$$

y

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{S(N) : N \in \Omega, \mu(N) = 0\}.$$

Un elemento de L^∞ es llamado función esencialmente acotada.

Obsérvese que este valor no depende del representante de la función f escogido. El espacio $L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} \overset{\text{def.}}{=} \text{supes}_\Omega |f|.$$

Teorema 1.0.6 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** [4] *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones integrables la cual converge en casi todo punto a una función medible* f*. Si existe una función integrable* g *tal que* $|f_n| \geq g, \forall n$*, entonces* f *es integrable y*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Definición 1.0.14 (Desigualdad de Hölder)**.** [9] *Sean* $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$*, con* $p > 1$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Entonces* $f \cdot g$ *pertenece a* $L^1(\Omega)$ *y se verifica*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lo anterior se escribe también como:

$$\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q\right)^{1/q}.$$

Definición 1.0.15 (Desigualdad de Minkowski)**.** [9] *Si* $f, g \in L^p(\Omega), p \geq 1$*, entonces* $f + g$ *pertenece a* $L^p(\Omega)$ *y*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Definición 1.0.16 (Desigualdad de Cauchy - Bunyakovsky - Schwartz)**.** [5] *Sean* $f, g \in L^2(\Omega)$*, entonces* $f \cdot g$ *pertenece a* $L^2(\Omega)$ *y se verifica*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

4. **Espacios de Hilbert**

Definición 1.0.17 (Espacio con producto interno)**.** [5] *Sea* X *un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$*, sea* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*.Un producto interno en* X *es una aplicación:*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tal que para cualesquier $x, y, z \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$*, se tienen:*

(1) $\langle x, y \rangle \geq 0$ *;* $\langle x, x \rangle = 0$ *sí y solo sí* $x = 0$

(2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(3) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(4) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

El par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es llamado espacio con producto interno. En este caso decimos que la función:

$$\begin{array}{rccl} \|,\|: & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

es una norma inducida por el producto interno $\langle,\rangle$.

Ejemplo 5. *Sea $X = l^2$, si se define $\langle,\rangle$ sobre l^2 mediante:*

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot,\cdot\rangle: & l^2 \times l^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \end{array}$$

es claro que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en l^2.

Ejemplo 6. *Sea $X = L^2$, la expresión:*

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$$

define un producto interno en L^2.

Proposición 1.0.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** [5] *Sea X un espacio vectorial con producto interno. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in X.$$

Además de eso, la igualdad ocurre sí, y solamente si, los vectores x, y son linealmente dependientes.

Corolario 1.0.7. [5] *Sea X un espacio con producto interno. La función:*

$$\begin{aligned} \|.\| : \quad X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

es una norma en X.

Definición 1.0.18 (Espacio de Hilbert)**.** [5] *Un espacio con producto interno que es completo en la norma inducida por el producto interno es llamado espacio de Hilbert. En particular, un espacio de Hilbert es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interno.*

Ejemplo 7. *El espacio L^2 con la norma:*

$$\|x\|_{L^2} = \left(\int_X |x|^2 \, d\mu\right)^{\dfrac{1}{2}}$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración:

La norma de L_2 está inducida por el producto interno del ejemplo 6:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \int_X x\overline{x} \, \mathrm{d}\mu$$

Por otro lado, el espacio L_2 es un caso particular del espacio L^p, cuando $p = 2$, el cual es un espacio de Banach. Por tanto, la norma de L_2 es una norma completa inducida por un producto interno. De esta manera, $(L_2, \|\cdot\|_{L^2})$ es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 8. *El espacio* l^2 *con la norma:*

$$\|x\|_{l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\dfrac{1}{2}}$$

es un espacio de Hilbert.

Proposición 1.0.2 (Ley del paralelogramo)**.** [5] *Sea* X *un espacio vectorial con producto interno. Entonces, para cualesquiera* $x, y \in X$*, se cumple que:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Lema 2. [6] *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado que satisface la ley del paralelogramo. Definamos* $\varphi : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ *mediante:*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + \imath y\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

para todo x, y *en* X*, entonces:*

a) $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$*, para todo* x, y *en* X*;* $(x, x) \geq 0, \varphi(x, 0) = 0$ *para todo* $x \in X$ *y* $\varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

b) $\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2$.

Teorema 1.0.8 (Jordan-Von Neuman)**.** [6] *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Si la norma* $\|\cdot\|$*satisface la ley del paralelogramo, entonces existe un producto interno*

$\langle , \rangle$ en X tal que $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$ para todo $x \in X$.

Demostración:

Definamos $\varphi : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ como en el lema 2.

i) $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ para todo x, y, z en x. En efecto:

Sea $b = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2$, usando b) del lema 2 se obtiene:

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 - b$$

$$\|x + y - z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 - b$$

Entonces:

$$\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 = \left(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2\right) + \left(\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2\right)$$

Similarmente:

$$\iota\|x+y+\iota z\|^2 - \iota\|x+y-\iota z\|^2 = (i\|x+iz\|^2 - i\|x-iz\|^2) + (i\|y+iz\|^2 - i\|y-iz\|^2$$

Luego:

$$\begin{aligned} \varphi(x + y, z) &= \tfrac{1}{4}\left[\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 + i\|x + y + iz\|^2 - i\|x + y - iz\|^2\right] \\ &= \varphi(x, z) + \varphi(y, z). \end{aligned}$$

ii) $\varphi(ax, y) = a\varphi(x, y)$, para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo x, y en X.

En efecto:

$$\varphi(kx, y) = k\varphi(x, y), \quad \forall k \in N \cup \{0\}.$$

Además, $\varphi(0, y) = \varphi(x + (-x), y) = \varphi(x, y) + \varphi(-x, y)$, entonces $\varphi(-x, y) = -\varphi(x, y)$; y por tanto:

$$\varphi(kx, y) = k\varphi(x, y) \quad \forall k \in Z, \forall x, y \in X.$$

Ahora, como $\varphi(x, y) = \varepsilon\left(m\left(\frac{1}{m}x\right), y\right) = m\varphi\left(\frac{x}{m}, y\right)$ se tiene:

$$\varphi\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{1}{m}\varphi(x, y)$$

lo cual implica que $\varphi(qx, y) = q\varphi(x, y)$ para todo $q \in Q$.

Pero la continuidad de $\|\cdot\|$ implica la continuidad de φ. Por tanto:

$$\varphi(ax, y) = a\varphi(x, y), \forall a \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x, y \in X.$$

iii) Fácilmente se verifica que $\varphi(\iota x, y) = i\varphi(x, y)$ y por tanto:

$$\varphi(cx, y) = c\varphi(x, y), \quad \forall c \in \mathbb{C} \text{ y } \forall x, y \in X.$$

Como $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$, se tiene que φ es un producto interno en X.

Finalmente $\varphi(x, x) = \|x\|^2$ y por tanto:

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}.$$

Definición 1.0.19 (Ortogonalidad)**.** [12] *Un elemento x de un espacio con producto interno X se dice que es ortogonal a un elemento $y \in X$ si*

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

También decimos que x y y son ortogonales y denotamos $x \perp y$.

Teorema 1.0.9 (Proyección ortogonal)**.** [5] *Sea X un espacio con producto interno y sea M un subespacio completo de X, para todo $x \in X$ existe un único $p \in M$ tal que:*

$$\|x - p\| = dist(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

Sean X un espacio con producto interno y A un subconjunto de X. Consideremos al subconjunto

$$A^{\perp} = \{y \in X : \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in A\}$$

Es fácil de probar que $A^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X.

Nuestro principal objetivo es representar a un espacio de Hilbert como una suma directa, esto será de gran utilidad para resultados posteriores. Veamos la definición de suma directa.

Definición 1.0.20 (Suma directa)**.** [12] *Se dice que un espacio vectorial X es la suma directa de dos subespacios Y y Z de X,*

$$X = Y \oplus Z$$

si cada $x \in X$ tiene una única representación

$$x = y + z \quad y \in Y, z \in Z.$$

Teorema 1.0.10. [12] *Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H. Entonces,*

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Esto es, cada $x \in H$ admite una única representación de la forma

$$x = y + z, z \in M^{\perp}.$$

El vector y es llamado la proyección ortogonal de x en Y.

La ecuación (1) define una aplicación

$$\begin{array}{rccl} P: & H & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = Px \end{array}$$

P es llamado operador proyección de H sobre Y.

Teorema de Representación de Riesz

Anteriormente se ha hablado sobre funcionales lineales acotados en espacios normados, pero en esta sección abordaremos los funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert.

En 1909, los matemáticos Frigyes Riesz y Maurice Fréchet obtuvieron un resultado importante dentro del estudio de los espacios de Hilbert.

El teorema que veremos más adelante, es conocido como el teorema de representación de Riesz para espacios de Hilbert, pero también es conocido como el teorema de Riesz-Fréchet. Este teorema es uno de los más importantes dentro del Análisis Funcional y genera toda la teoría de los espacios de Hilbert.

Teorema 1.0.11 (Teorema de representación de Riesz)**.** [5] *Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo, entonces existe un único $y_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle$ para cada x en H y $\|\varphi\| = \|y_0\|$.*

Demostración:

El teorema se cumple cuando el funcional φ es nulo.

Veamos cuando el funcional $\varphi \neq 0, y_0 = 0$

Si $\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle = 0$, es decir,

$$x \in H, \varphi(x) = 0 \Longrightarrow x \in M = ker(\varphi)$$

ya que

$$\begin{aligned} \langle x, y_0 \rangle &= 0 \\ y_0 \perp x &\Longrightarrow y_0 \perp M \\ &\Longrightarrow y_0 \perp M^{\perp} \end{aligned}$$

Dado que M es un subespacio vectorial cerrado de H y como $\varphi \neq 0$, entonces $M \neq H \Longrightarrow M^{\perp} \neq \{0\}$.

Sea $x_0 \in M^{\perp}, x_0 \neq 0$. Consideremos cualquier $v \in H$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
v &= \varphi(x)x_0 - \varphi(x_0)x, \quad x \in H \\
\varphi(v) &= \varphi(\varphi(x)x_0) - \varphi(\varphi(x_0)x) \\
\varphi(v) &= \varphi(x)\varphi(x_0) - \varphi(x_0)\varphi(x)
\end{aligned}$$

$$\varphi(v) = 0 \Longrightarrow v \in M.$$

Pero $x_0 \neq 0 \in M$, tenemos: $\langle v, x_0 \rangle = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle v, x_0 \rangle = \langle \varphi(x)x_0 - \varphi(x_0)x, x_0 \rangle \\
&= \langle \varphi(x)x_0 \rangle - \langle \varphi(x_0)x, x_0 \rangle \\
&= \varphi(x)\langle x_0, x_0 \rangle - \varphi(x_0)\langle x, x_0 \rangle \\
\varphi(x_0)\langle x, x_0 \rangle &= \varphi(x)\langle x_0, x_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x_0)}{\langle x_0, x_0 \rangle} \cdot \langle x, x_0 \rangle.$$

Si escogemos $y_0 = \overline{\dfrac{\varphi(x_0)}{\langle x_0, x_0 \rangle}} \cdot x_0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle x, y_0 \rangle &= \langle x, \overline{\frac{\varphi(x_0)}{\langle x_0, x_0 \rangle}} \cdot x_0 \rangle, \quad \forall x \in H \\
&= \tfrac{\varphi(x_0)}{\langle x_0, x_0 \rangle} \cdot \langle x, x_0 \rangle \\
&= \varphi(x), \quad \forall x \in H \\
\Longrightarrow \varphi(x) &= \langle x, y_0 \rangle, \forall x \in H.
\end{aligned}$$

Ahora se probará que y_0 es único.

Supongamos que para todo $x \in H, \exists y_1, y_2$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \langle x, y_1\rangle &= \langle x, y_2\rangle, \quad \forall x \in H \\
\Longrightarrow \langle x, y_1 - y_2\rangle &= 0 \\
\Longleftrightarrow x &= y_1 - y_2.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2\rangle &= 0 \\
\|y_1 - y_2\|^2 &= 0 \\
\Longleftrightarrow y_1 - y_2 &= 0 \\
\Longrightarrow y_1 = y_2.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \exists! y_0 \in H \text{ tal que } \varphi(x) = \langle x, y_0\rangle$$

Ahora demostraremos que $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Si $\varphi = 0$, entonces se cumple que $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Sea $\varphi(x) \neq 0 \Longrightarrow y_0 \neq 0$.

De resultados anteriores, se tiene que $\varphi(x) = \langle x, y_0\rangle$, reemplazamos x por y_0, entonces:

$$\|y_0\|^2 = \langle y_0, y_0\rangle = \varphi(y_0)$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \|\varphi(y_0)\| &\leq \|\varphi\|\|y_0\| \\
\|y_0\|^2 &\leq \|\varphi\|\|y_0\| \\
\|y_0\| &\leq \|\varphi\| \quad \cdots(\alpha)
\end{aligned}$$

Considere $|\varphi(x)| = |\langle x, y_0\rangle|$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$|\varphi(x)| \leq \|x\|\|y_0\|$$

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| &= \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|y_0\|\|x\| \\
\|\varphi\| &\leq \|y_0\| \quad \cdots(\beta)
\end{aligned}$$

De (α) y (β) se obtiene:

$$\|y_0\| \leq \|\varphi\| \leq \|y_0\|$$

$$\|\varphi\| = \|y_0\|.$$

■

Definición 1.0.21 (Forma sesquilineal)**.** [12] *Sean X e Y espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Entonces una forma sesquilineal (o funcional sesquilineal) h sobre $X \times Y$ es una aplicación*

$$h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que para todo $x, x_1, x_2 \in X$ e $y, y_1, y_2 \in Y$ y para todos los escalares α, β, se tienen:

a) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

b) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

c) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

d) $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$.

Así, h es lineal en el primer argumento y lineal conjugado en el segundo argumento.

Si X e Y son reales ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), entonces (d) *es simplemente*

$$h(x, \beta y) = \beta h(x, y)$$

y h es llamado biblineal ya que es lineal en ambos argumentos.

Si X y Y son espacios normados y si existe un número c tal que para todo x, y

$$|h(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|,$$

entonces decimos que h es acotado, y el número

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)|$$

es llamado norma de h.

Definición 1.0.22 (Forma bilineal)**.** [5] *Sean X e Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una forma bilineal $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ es*

a) coerciva si $X = Y, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ y existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$h(x, x) \geq \beta \|x\|^2, \quad \forall x \in X.$$

b) simétrica si $X = Y$ y $h(x, y) = h(y, x)$ para cualquier $x, y \in X$.

c) no degenerada si el único vector $x \in X$ tal que $h(x, y) = 0, \forall y \in Y$ para el vector $x = 0$; y, análogamente, el único vector $y \in F$ tal que

$h(x,y)=0, \forall x \in X$ el vector $y=0$.

d) continua si existe una constante M tal que

$$|h(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Teorema 1.0.12. [12] *Sean H_1y H_2 espacios de Hilbert y*

$$h : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

una forma sesquilineal acotada. Entonces h tiene una representación

$$h(x,y) = \langle Sx, y\rangle$$

donde $S : H_1 \longrightarrow H_2$ es una operador lineal acotado. S es únicamente determinado por h y tiene norma $\|S\| = \|h\|$.

$\blacksquare$

1.1. Justificación

A diferencia del estudio de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Dirichlet o de Neumann, las EDPs, de manera general, con condición de frontera de Robin son poco conocidas, tratadas y desarrolladas. Por lo que este trabajo se justifica en brindar información y conocimientos del tema.

Por otro lado, la teoría de ecuaciones diferenciales parciales y el análisis funcional son áreas de la matemática que parecen ser distantes y separadas, pero en realidad, están fuertemente relacionadas. Por tal motivo, este trabajo de investigación tiene el fin de dar a conocer la conexión que existe entre estas dos ramas de la matemática. Mediante este trabajo de investigación, se llegará a entender dicha relación y para llegar a ello se hará uso de teorías, tales como: la teoría de distribuciones, espacios de Sóbolev, método variacional; que en los cursos regulares de pregrado no se llegan a tratar, por lo que este trabajo servirá de material introductorio para futuros estudios de postgrado de los estudiantes de Matemática. Además, los resultados y conclusiones obtenidos en el presente serán útiles para investigaciones posteriores de estudiantes y docentes de nuestra Facultad de Ciencias.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Formulación de problemas

El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) comenzó en el siglo XVIII con el trabajo de matemáticos como Euler, D'Alembert, Lagrange y Laplace. Este estudio surgió como herramienta central en la descripción de la mecánica y más generalmente, como el principal modo de estudio analítico de modelos en la ciencia física.

Pero tiempo después, las EDPs también se convirtieron en una herramienta esencial en otras ramas de la matemática, tales como la geometría diferencial y en el análisis funcional.

Así como surgió el estudio de las EDPs, también se dio inicio a la búsqueda de soluciones de las mismas.

Resolver una EDP en el sentido clásico, significa que la solución clásica satisface dos condiciones de un problema bien definido. Es decir, que existe una solución, la solución hallada es única y solo depende de los datos dados en el problema.

La curiosidad de los matemáticos de la época los llevó a encontrar las soluciones en sentido clásico. Para ello desarrollaron un gran número de métodos importantes, entre estos métodos están: separación de variables, superposición de soluciones de ecuaciones lineales, presentados por D'Alembert en el año 1747 y Euler en 1748.
Estos métodos sirvieron para dar solución a la ecuación de la onda. Ideas similares fueron utilizadas por Laplace y Legendre en 1782 para la ecuación de Laplace y por Fourier para la ecuación de calor.

Lastimosamente, estos métodos proporcionados presentaban ciertos inconvenientes, puesto que exigían demasiada regularidad de la solución de modo que no se llegaba a satisfacer a la ecuación diferencial parcial de manera adecuada.

De manera general, no se puede esperar que todas las ecuaciones diferenciales parciales tengan una solución clásica. Para la existencia de una solución clásica, todos los parámetros deben ser lo suficientemente suaves. En dimensiones superiores, también el dominio debe satisfacer ciertas condiciones de regularidad. Así que, la necesidad de un tratamiento riguroso de las soluciones de EDPs y problemas de condición de frontera, fue una fuerte motivación en el desarrollo de herramientas básicas del análisis funcional desde principios del siglo XX.

En el año 1920, el matemático David Hilbert, creó la idea de la formulación variacional o formulación débil mediante su teoría de ecuaciones integrales, las cuales proveían una moderna aproximación a las ecuaciones diferenciales parciales.

Cuando el matemático Serguei Sobolev introdujo la idea de espacios generalizadas (o de Sobolev), en 1930, fue una pieza imprescindible que complementó el trabajo de Hilbert. Esto implicó que las EDPs podrían ser mejor manejadas y así se facilitaba la obtención de una solución para las EDPs en sentido débil.

Gracias a los antecedentes anteriores se encontraron resultados favorables para la búsqueda de soluciones débiles de problemas elípticos con condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann. Dado que cada uno de ellos posee una solución débil, uno se atrevería a decir que es factible encontrar una solución de una EDP elíptica, en este caso, la ecuación de Poisson, con condición de frontera de Robin. Esta condición de frontera es una combinación lineal de los tipos de frontera de Dirichlet y Neumann.

Por eso se planteará la siguiente pregunta de investigación:

¿Existirá solución débil y única de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin?

1.2.2. Delimitación del problema

En el presente trabajo de investigación nos limitaremos a estudiar la existencia y unicidad de una solución, en sentido débil, de la ecuación de Poisson, $-\Delta u = f$, un tipo de ecuación diferencial parcial elíptica. En términos específicos, la EDP con condición de frontera a estudiar es:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ \partial_\eta u + hu = g \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega), h > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ es abierto y acotado.

1.3. Objetivo general

Determinar la existencia y unicidad de la solución débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin.

1.3.1. Objetivos específicos

- Definir la teoría de distribuciones.
- Explicar los espacios de Sobolev.
- Describir el proceso de obtención de la formulación variacional de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin.
- Aplicar el teorema de Lax-Milgram para obtener una única solución débil del problema.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. Materiales y equipos

- Bibliografía básica y especializada.
- Revistas y artículos científicos relacionados al tema de estudio.
- Una laptop.
- Una impresora.
- Una memoria USB de 32GB.

2.2. Métodos

2.2.1. Instrumentos de recolección de datos

- Se inició con la lectura de libros concernientes a la teoría de los espacios de Hilbert, los funcionales lineales acotados en estos espacios y teoremas importantes.
- Se hizo un estudio introductorio de la teoría de distribuciones.
- Se estudió la teoría de espacios de Sobolev.
- Se hizo un breve repaso sobre ecuaciones diferenciales parciales elípticas.
- Se dio inicio al estudio de la formulación variacional de la ecuación de Poisson.
- Después, se dio la búsqueda de artículos, revistas y más información sobre la comprensión y demostración del teorema de Lax-Milgram.

- Se prosiguió con el análisis y estudio exhaustivo de todos los datos recopilados sobre el objeto de estudio.
- Con el respaldo teórico, se inició el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de la formulación variacional de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin.
- Se discutió todos los resultados obtenidos.
- Se presentó las conclusiones de la investigación.

III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de estudio

a) **De acuerdo a la orientación:**

- **Investigación básica:** El presente trabajo de investigación es de tipo básica ya que está orientada a lograr un nuevo conocimiento, de manera sistemática y metódica, con el único objetivo de ampliar el conocimiento.

b) **De acuerdo a la técnica de contrastación:**

- **Investigación descriptiva:** La investigación de este trabajo es de tipo descriptiva ya que el investigador no se apoya bajo ninguna hipótesis. Mas bien, describe y analiza el tema de estudio para la obtención de información.

3.2. El diseño de investigación

- **Diseño no experimental:**

  Los autores de [10], Hernández, Fernández y Baptista (2014), definen a la investigación no experimental como aquella que utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o mostrar nuevas interrogantes en el proceso de explicación. Por ello, este presente trabajo de investigación es de diseño no experimental.

3.3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

- Se inició con la lectura de libros concernientes a la teoría de los espacios de Hilbert, los funcionales lineales acotados en estos espacios y teoremas importantes.
- Se hizo un estudio introductorio de la teoría de distribuciones.
- Se estudió la teoría de espacios de Sobolev.
- Se hizo un breve repaso sobre ecuaciones diferenciales parciales elípticas.
- Se dio inicio al estudio de la formulación variacional de la ecuación de Poisson.
- Después, se dio la búsqueda de artículos, revistas y más información sobre la comprensión y demostración del teorema de Lax-Milgram.
- Se prosiguió con el análisis y estudio exhaustivo de todos los datos recopilados sobre el objeto de estudio.
- Con el respaldo teórico, se inició el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de la formulación variacional de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin.
- Se discutió todos los resultados obtenidos.
- Se presentó las conclusiones de la investigación.

IV. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Descripción del trabajo de campo

Aquí veremos el estudio de los temas que se precisan conocer para obtener los resultados de la presente investigación.

4.1.1. Teorema de Lax-Milgram

Sea H un espacio de Hilbert real y $T : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva.

Entonces, para todo $\varphi \in H^*$ funcional lineal continuo, $\exists! x_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = T(x, x_0), \forall x \in H$.

Demostración:

Debemos probar que $\forall \varphi \in H^*$, $\exists! x_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = T(x, x_0), \forall x \in H \cdots (\beta)$

Se tienelo siguiente como datos:

- T es bilineal continua y coerciva.
- H es un espacio de Hilbert.

Para cada $x \in H$ fijo, por la continuidad de T, la aplicación $y \mapsto T(x, y)$ es acotada en $H \Longrightarrow T \in H^*$

Por el teorema de representación de Riesz,

$$T(x, y) = \langle Ax, y \rangle, \forall y \in H$$

donde $A : H \longrightarrow H$ es un operador lineal acotado.

Por otro lado, $\varphi \in H^*$ por el teorema de representación de Riesz,

$$\exists! z \in H / \varphi(y) = \langle z, y \rangle, \forall y \in H$$

Reformulando (β),

$$\langle z, y \rangle = \varphi(y) = T(x, y) = \langle Ax, y \rangle, \forall y \in H$$

$$\langle z, y \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

Esto es equivalente a encontrar un único x tal que $Ax = z$

Se debe probar que A debe ser lineal, continuo, inyectivo y sobreyectivo.

1. **¿A será lineal?** Por el teorema de representación de Riesz, se tiene que $(A[u], v) = a(u, v)$. Sean $u_1, u_2, v \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(A[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2], v) &= a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) \\
&= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v) \\
&= \lambda_1 (A[u_1], v) + \lambda_2 (A[u_2], v) \\
&= (\lambda_1 A[u_1] + \lambda_2 A[u_2], v) \\
\Rightarrow A[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2] &= \lambda_1 A[u_1] + \lambda_2 A[u_2].
\end{aligned}$$

$\therefore$ A es lineal.

2. **¿A será continuo?**

   Sea $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = T(x, Ax)$

Como T es acotado, entonces:

$$\begin{aligned} \exists M/|T(x,Ax)| &\leq M\|x\|\|Ax\|, \quad \forall x \in H \\ \|Ax\|^2 &\leq M\|x\|\|Ax\|, \quad \forall x \in H \\ \Rightarrow \|Ax\| &\leq M\|x\|, \quad \forall x \in H. \end{aligned}$$

$\therefore$ A es continuo.

3. **¿A será inyectivo?**

Esto es equivalente a demostrar que $KerA = 0$, es decir $Ax = 0, x = 0$, entonces por la coercitividad de T, existe $c > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} c\|x\|^2 &\leq T(x,x) &\leq Ax,x\rangle \\ c\|x\|^2 &\leq \langle Ax,x\rangle &\leq \|Ax\|\|x\| \end{aligned}$$

De los extremos:

$$\begin{aligned} c\|x\| &\leq \|Ax\| \\ \|x\| &\leq \tfrac{1}{c}\|Ax\| \quad \cdots(\varepsilon) \end{aligned}$$

Puesto que $Ax = 0$, entonces de (ε) se tiene que $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

De esta manera, $kerA = 0$.

$\therefore A$ es inyectivo.

4. **¿A será sobreyectivo?**

Esto es equivalente a demostrar $R(A) = H$.

Primero se probará que $R(A)$ es un subespacio cerrado de H.

Sea una sucesión de Cauchy $Y_n \subset R(A), Y_n \longrightarrow y \in H$.

Tenemos que demostrar que $y \in R(A)$.

En efecto:

$$Y_n \in R(A), \exists X_n \in H / A(X_n) = Y_n$$

De (ε) se tiene que:

$$\|X_m - X_n\| \leq \frac{1}{c}\|A(X_m - X_n)\|.$$

Entonces X_n es una sucesión de Cauchy.

Como H es un espacio de Hilbert, $X_n \to x \in H$.

Por otro lado,

$$A(X_n) = Y_n \to A(x) \in R(A)$$

Pero, $Y_n \to y$ entonces $Ax = y \in R(A)$.

Se tiene que $R(A)$ es subespacio cerrado.

Ahora se probará que $R(A) = H$.

Supongamos que $R(A) \neq H$, por el teorema de la proyección ortogonal:

$$H = R(A) \oplus R(A)^{\perp}$$

Existe $z \in R(A)^{\perp}, z \neq 0$ tal que $\langle z, y\rangle = 0, \quad \forall y \in R(A)$

$$\begin{aligned} \langle z, Ax\rangle &= 0 \\ T(z, x) &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos $x = z$, entonces $T(z, z) = 0$.

Por la coercitividad de T, se tiene que:

$$\exists c > 0/c\|z\|^2 \leq T(z,z) = 0$$

Así, $\|z\|^2 = 0$, implicaría que $z = 0 \quad (\rightarrow\leftarrow)$

De esa manera, $R(A) = H$.

$$\therefore A \text{ es sobreyectivo.}$$

De los resultados anteriores, se tiene que existe un único $x_0 \in H$ tal que $Ax = z$

Esto es:

$$\exists! x_0 \in H \text{ tal que } \varphi(x) = T(x, x_0), \forall x \in H$$

■

4.1.2. Teoría de distribuciones

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible en sentido de Lebesgue.

Definición 4.1.1 (Soporte de una función)**.** *Dada una función continua $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se define el soporte μ, denotado por "* $\operatorname{sopt}(\mu)$*" como el conjunto:*

$$\operatorname{sopt}(\mu) = \overline{\{x \in \Omega/\mu(x) \neq 0\}} \cap \Omega$$

Proposición 4.1.1. *Sean $\mu, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces:*

1. $\operatorname{sopt}(\mu + v) \subset \operatorname{sopt} \mu \cup \operatorname{sopt} v$

2. $\operatorname{sopt}(\mu \cdot v) \subset \operatorname{sopt} \mu \cap \operatorname{sopt} v$

3. *Para* $\lambda \neq 0, \operatorname{sopt}(\lambda\mu) = \operatorname{sopt}(\mu)$.

Demostración:

1. Recordar que, dados dos conjuntos A y B, entonces $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

   Por eso, demostraremos que:

$$(\operatorname{sopt}(u) \cup \operatorname{sopt}(v))^c \subset \operatorname{sopt}^c(u+v)$$

   que a su vez es equivalente a probar $\operatorname{sopt}^c(u) \cap \operatorname{sopt}^c(v) \subset \operatorname{sopt}^c(u+v)$. Para esto tomemos un elemento:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{sopt}^c(u) \cap \operatorname{sopt}^c(v) &\Rightarrow x \in \operatorname{sopt}^c(u) \wedge x \in \operatorname{sopt}^c(v) \\ &\Rightarrow u(x) = 0 \text{ c.p.t en } \Omega \wedge v(x) = 0 \text{ c.p.t en } \Omega \\ &\Rightarrow u(x) + v(x) = (u+v)(x) = 0 \text{ c.p.t en } \Omega \\ &\Rightarrow x \in sopt^c(u+v). \end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{sopt}(u+v) \subset \operatorname{sopt}(u) \cup \operatorname{sopt}(v).$$

2. Recordar que, dados dos conjuntos A y B, entonces $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

   Por eso, demostraremos que:

$$(\operatorname{sopt}(u) \cap sopt(v))^c \subset \operatorname{sopt}^c(uv)$$

   que a su vez es equivalente a demostrar $\operatorname{sopt}^C(u) \cup$ $\operatorname{sopt}^c(v) \subset \operatorname{sopt}^c(uv)$.

Para esto tomemos un elemento:

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{sopt}^c(u) \cup \operatorname{sopt}^c(v) &\Rightarrow x \in \operatorname{sopt}^c(u) \vee x \in \operatorname{sopt}^c(v) \\
&\Rightarrow u(x) = 0 \text{ c.t.p en } \Omega \vee v(x) = 0 \text{ c.t.p en } \Omega \\
&\Rightarrow u(x)v(x) = (uv)(x) = 0 \text{ c.t.p en } \Omega \\
&\Rightarrow x \in \operatorname{sopt}^c(uv).
\end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{sopt}(uv) \subset \operatorname{sopt}(u) \cap \operatorname{sopt}(v).$$

3. Para $\lambda \neq 0, \operatorname{sopt}(\lambda\mu) = \operatorname{sopt}(\mu)$, obsérvese que:

$$\operatorname{sopt}(\lambda u) = \operatorname{sopt}(u) \Longleftrightarrow \operatorname{sopt}^c(\lambda u) = \operatorname{sopt}^c(u)$$

pero

$$\begin{aligned}
\operatorname{sopt}^c(\lambda u) &= \{x \in \Omega : (\lambda u)(x) = 0\} \\
&= \{x \in \Omega : \lambda u(x) = 0\} \\
&= \left\{x \in \Omega : u(x) = \frac{0}{\lambda}\right\} \\
&= \{x \in \Omega : u(x) = 0\} \\
&= \operatorname{sopt}^c(u).
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $\lambda \neq 0$ entonces $\operatorname{sopt}(\lambda u) = \operatorname{sopt}(u)$.

Definición 4.1.2. *Definimos* $C_0^\infty(\Omega)$ *como el espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables que tienen soporte compacto en* Ω. *Llamaremos funciones test a los elementos de* $C_0^\infty(\Omega)$.

Ejemplo 9. *La función* $\mu : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$*, donde* $\forall x \in (1, 2), \mu(x) \neq 0$*, no pertenece a* $C_0^{\infty}(\Omega)$ *ya que* $\operatorname{sopt}\mu = [1, 2)$ *no es compacto.*

Ejemplo 10. *La función:* $f(x) = \begin{cases} \cos(x), |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ *no es una función* C^{∞}*, porque*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx} \cos(x) = - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) = - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0.$$

Por lo tanto, no pertenece al espacio $C_0^{\infty}(\Omega)$*.*

Ejemplo 11. *La función* $\mu : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$*, dada por:*

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}} & , \|\mathbf{x}\| < 1 \\ 0 & , \|\mathbf{x}\| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece al espacio $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$*, ya que* $\mu \in C^{\infty}$*. Por otra parte;* $\operatorname{sopt}(\mu) = \overline{B(0,1)}$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^3$*. De esa manera,* $\mu \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$*.*

Teorema 4.1.1. $C_0^{\infty}(\Omega)$ *es denso en* L^p *para cada* $1 \leq p < \infty$*.*

Demostración: Véase [10], página 431.

Teorema 4.1.2. *Si* $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$*, entonces* $D^{\alpha}\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *para cualquier* α*.*

Demostración:

Dado que $D^{\alpha}\varphi$ es la derivada parcial de $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, entonces se tiene que $D^{\alpha}\varphi$ es infinitamente diferenciable.

Por otro lado, sea $x_0 \notin \operatorname{sopt}\varphi$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \cap \operatorname{sopt}\varphi = \emptyset$.

Luego, $\varphi(x) = 0, \forall x \in B(x_0, \varepsilon)$.

Consideremos $x \in B(x_0, \dfrac{\varepsilon}{2})$ y sea $h \in \mathbb{R}$; $|h| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \|x + he_1 - x_0\| &\leq \|x - x_0\| + \|he_1\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |h| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Así:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x + he_1) - \varphi(x)}{h} = 0$$

Entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) = 0, \forall x \in B(x_0, \varepsilon)$, de modo que $x \notin \operatorname{sopt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)$.

Consecuentemente:

$$x_0 \notin \operatorname{sopt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad \forall j = \overline{1, n}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sopt}^C \varphi \subset \operatorname{sopt}^C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \Longleftrightarrow \operatorname{sopt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \subset \operatorname{sopt} \varphi$$

Finalmente $\operatorname{sopt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$ es compacto.

Si se repite el mismo procedimiento para $|\alpha|$ veces, se tiene que:

$$D^\alpha \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

$\blacksquare$

Definición 4.1.3. *Sea* $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$. *Decimos que* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *en* $C_0^\infty(\Omega)$ *si:*

1. $\exists K$ *compacto contenido en* Ω *tal que*

$$\operatorname{sopt}\varphi_n \subset K \wedge \operatorname{sopt}\varphi \subset K.$$

2. *Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *la sucesión* $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ *uniformemente en* K, *es decir:*

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Teorema 4.1.3. *Sea* $K = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \mu(x)dx$, *siendo* μ *la función definida en el ejemplo* 11. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *considere la función* $\mu_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\mu_n(x) = \left(\frac{n^N}{k}\right)\mu(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Para cada n, μ_n *es una función test en* $\mathbb{R}^n$, *con las siguientes propiedades:*

(1) $0 \leq \mu_n(x) \leq \dfrac{n^N}{ke}$.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_n(x)dx = \int_{\|x\|\leq\frac{1}{n}} \mu_n(x)dx = 1.$

(3) $\operatorname{sopt}\mu_n = \{x \in \mathbb{R}^N / \|x\| \leq \frac{1}{n}\}$.

Demostración:

1.

$$\mu(nx) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|nx\|^2-1}} & , \|nx\| < 1 \\ 0 & , \|nx\| \geq 1 \end{cases}$$

Se sabe que $\|nx\| < 1$, entonces:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \leq & \|nx\|^2 & < & 1 \\
-1 & \leq & \|nx\|^2 - 1 & < & 0 \\
-\infty & < & \dfrac{1}{\|nx\|^2} & \leq & -1 \\
e^{-\infty} & < & e^{\frac{1}{\|nx\|^2}} & \leq & e^{-1} \\
0 & < & e^{\frac{1}{\|nx\|^2}} & \leq & \dfrac{1}{e} \\
0 & < & \dfrac{n^N}{k} e^{\frac{1}{\|nx\|^2}} & \leq & \dfrac{n^N}{ke} \\
0 & < & \mu_n(x) & \leq & \dfrac{n^N}{ke}
\end{array}$$

Si $\|nx\| \geq 1 \Longrightarrow \mu(nx) = 0$, entonces:

$$0 \leq \mu(x) \leq \frac{n^N}{ke}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \mu_n(x)\, dx &= \int_{\overline{B}(0,1/n)} \mu_n(x)\, dx + \cancelto{0}{\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,1/n)} \mu_n(x)\, dx} \\
&= \int_{\|x-0\|<1/n} \mu_n(x)\, dx \\
&= \int_{\|x\|<1/n} \mu_n(x)\, dx
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{n^N}{k} \mu(nx)\, dx.$$

Sea $z = nx = (nx_1, nx_2, nx_3, \ldots, nx_N) \Longrightarrow dz = |n^N| dx$, entonces dx= $\dfrac{dz}{n^N}$.

De esta manera

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \mu_n(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\cancel{n^N}}{k}\mu(z)\,\frac{dz}{\cancel{n^N}} \\
&= \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N} \mu_(z)\,dz \\
&= \frac{1}{\cancel{k}}\cdot \cancel{k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3.

$$\mu(nx) = \frac{n^N}{k}\mu(nx) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|nx\|^2-1}} & , \|nx\| < 1 \\ \\ 0 & , \|nx\| \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sopt}\mu_n(x) &= \overline{\{x \in \mathbb{R}^N / \mu_n(x) \neq 0\}} \cap \mathbb{R}^N \\
&= \overline{\{x \in \mathbb{R}^N / \mu_n(x) \neq 0\}} \\
&= \overline{B\left(0, \frac{1}{n}\right)} \\
&= \overline{B}\left(0, \frac{1}{n}\right) \\
&= \{x \in \mathbb{R}^N / \|x\| \leq \frac{1}{n}\}.
\end{aligned}$$

■

Definición 4.1.4 (Sucesiones Regularizantes)**.** *Una sucesión* μ_n *de funciones test en* $\mathbb{R}^N$ *con las propiedades* $(1), (2)$ *y* (3) *del teorema anterior, es denominada sucesión regularizante (o familia mollifiers).*

Definición 4.1.5 (Convolución)**.** *Sean* f, g *funciones de valor real definidos en* $\mathbb{R}^N$*. Definimos la convolución* $f * g$ *por:*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x - y)g(y)dy$$

Propiedades: Sean $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces:

i) $f * g = g * f$

ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$

iii) $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Puesto que el conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ está dado de la siguiente manera:

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}/f \in C^\infty \text{ y } \operatorname{sopt} f \text{ es compacto en } \Omega\}$$

Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega), \varphi_n \to \varphi$ en $C_0^\infty(\Omega)$ si:

(1) $\exists K$, compacto, $K \subset \Omega$ tal que $\operatorname{sopt} \varphi_n, \operatorname{sopt} \varphi \subset K$

(2) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en K para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$, i.e.

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_n(x) \to D^\alpha \varphi(x)| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Denominaremos "c" a las condiciones (1) y (2).

Notación: $\mathcal{D}(\Omega)$ denota al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con la notación de convergencia "c".

$$\mathcal{D}(\Omega): \text{ Espacio de las funciones prueba o funciones test }.$$

Definición 4.1.6 (Distribución)**.** *Una distribución sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ es un funcional lineal dado de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} T: \ \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

que es continua según la convergencia definida en $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir:

1) $\langle T, \alpha\varphi + \psi\rangle = \alpha\langle T, \varphi\rangle + \langle T, \psi\rangle$

2) Si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *y* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *tal que* $\varphi_n \to \varphi$ *entonces* $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ *en* $\mathbb{R}$.

Nota: $\langle T_f, \varphi\rangle$ no implica producto interno, es solo una notación. Por lo tanto, si se escribe $\langle T_f, \varphi\rangle$ es igual que $T_f(\varphi)$.

Ejemplo 12 (Distribución Delta de Dirac)**.** *δ- Dirac en $x_0 \in \Omega(\delta_{x_0})$*

$$\begin{array}{rccl} \delta_{x_0}: & \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0) \end{array}$$

En efecto:

- *δ_{x_0} es una transformación lineal:*

  Sean $\alpha \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \delta_{x_0}(\alpha\varphi + \psi) &= (\alpha\varphi + \psi)(x_0) \\ &= \alpha\varphi(x_0) + \psi(x_0) \\ &= \alpha\delta_{x_0}(\varphi) + \delta_{x_0}(\psi). \end{aligned}$$

$$\therefore \delta_{x_0} \text{ es lineal }.$$

- *δ_{x_0} es continua.*

  Sean $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Queremos demostrar que $\delta_{x_0}(\varphi_n) \to \delta_{x_0}(\varphi)$

En efecto:

$$\begin{aligned} |\delta_{x_0}(\varphi_n) - \delta_{x_0}(\varphi)| &= |\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)| \\ &= |\mathcal{D}^\alpha \varphi_n(x_0) - \mathcal{D}^\alpha \varphi(x_0)| \\ &\leq \sup |\mathcal{D}^\alpha \varphi_n(x_0) - \mathcal{D}^\alpha \varphi(x_0)| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

$\therefore \delta_{x_0}$ *es continua* .

De los resultados anteriores, se concluye que δ_{x_0} *es una distribución.*

Ejemplo 13. *Sea* $\mu \in L^1_{loc}(\Omega)$. *La función:*

$$\begin{array}{rccl} T_\mu : & \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \langle T_\mu, \varphi \rangle = \displaystyle\int_\Omega \mu(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

es una distribución.

Demostración:

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/f \text{ es medible } \wedge \int_K |f|dx < +\infty, \forall K \text{ compacto contenido en } \Omega\}$$

- ¿ T_μ estará bien definida?

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \operatorname{sopt}\varphi = K \subset \Omega \Longrightarrow \mu \in L^1_{loc}(K)$

$$
\begin{aligned}
T_\mu(\varphi) &= |\int_\Omega \mu(x)\varphi(x)dx| \\
&\leq \int_K |\mu(x)||\varphi(x)|dx + \cancelto{0}{\int_{\Omega\setminus K} |\mu(x)||\varphi(x)|dx} \\
&\leq \int_K \sup_{x\in K} |\varphi(x)||\mu(x)|dx \\
&= \|\varphi\|_\infty \underbrace{\int_K |\mu(x)|dx}_{<+\infty} < +\infty.
\end{aligned}
$$

$$\therefore T \text{ sí está bien definida.}$$

Dado que T está bien definida, procederemos con revisar si es lineal y continua.

- T_μ es lineal:

  Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
T_\mu(\alpha\varphi + \psi) &= \int_\Omega \mu(x)[\alpha\varphi + \psi](x)dx \\
&= \int_\Omega [\alpha\mu(x)\varphi(x) + \mu(x)\psi(x)]dx \\
&= \alpha \int_\Omega \alpha\mu(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \mu(x)\psi(x)dx \\
&= \alpha T_\mu(\varphi) + T_\mu(\psi).
\end{aligned}
$$

  Usando la otra notación: $\langle T_\mu, \alpha\varphi + \psi\rangle = \alpha\langle T_\mu, \varphi\rangle + \langle T_\mu, \psi\rangle$.

- T_μ es continua:

  Sea $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, $\exists \overline{K} \subset \Omega$ compacto tal que $\operatorname{sopt}(\varphi_n) \wedge \operatorname{sopt}(\varphi) \subset \overline{K}$

  y $\sup_{x\in\overline{K}} |D^\alpha\varphi_n(x) \to D^\alpha\varphi(x)| \to 0,$ cuando $n \to \infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

  Queremos demostrar que: $T_\mu(\varphi_n) \to T_\mu(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
|T_\mu(\varphi_n) - T_\mu(\varphi)| &= |\int_\Omega \mu(x)\varphi_n(x)dx - \int_\Omega \mu(x)\varphi(x)dx| \\
&= |\int_\Omega \mu(x)[\varphi_n(x) - \varphi(x)]dx| \\
&\leq \int_{\overline{K}} |\mu(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \\
&\leq \int_{\overline{K}} |\mu(x)|\|\varphi_n - \varphi\|_\infty dx
\end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$; $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0$ y $\int_{\overline{K}} |\mu(x)|dx = C < +\infty$.

Lo cual demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} |T_\mu(\varphi_n) - T_\mu(\varphi)| = 0.$$

$$\therefore T_\mu \text{ es continua.}$$

Hasta ahora se ha visto el espacio de las funciones test $\mathcal{D}(\Omega)$, al espacio vectorial de las formas lineales continuas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, se le denota $\mathcal{D}'(\Omega)$ y se le denomina el espacio de las distribuciones sobre Ω.

Al conjunto de todas las distribuciones sobre Ω se le denota $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}/T \text{ es una distribución}\}.$$

A partir de ahora, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, usaremos de manera indistinta las notaciones $T(\varphi)$ y $\langle T, \varphi\rangle$.

Proposición 4.1.2. *Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ denotemos por T_u la aplicación definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ con valores en $\mathbb{R}$, dada por:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Entonces $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, y la aplicación $u \in L^1_{loc}(\Omega) \to T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es lineal e inyectiva.

Nota: A partir de ahora, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ identificamos u con la distribución sobre Ω, es decir:

$$\begin{aligned} T_\mu(\varphi) &= \langle T_\mu, \varphi \rangle \\ &= \langle \mu, \varphi \rangle \\ &= \mu(\varphi) \\ &= \int_\Omega \mu(x)\varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

Con esta identificación, teniendo en cuenta la proposición precedente, resulta que $L^1_{loc}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 4.1.7 (Derivada de una distribución)**.** *Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para cualquier multiindice α se define $D^\alpha T$, la derivada α de T, como el elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ determinado de manera unívoca por la igualdad,*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nota :

a) $D^\alpha T$ es una distribución.

b) Es también fácil comprobar que la derivación es una operación lineal secuencialmente continua en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, para todo multiindice de derivación α la aplicación

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \to D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

es lineal y tal que $T_n \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, implica que

$$D^\alpha T_n \to D^\alpha T \quad \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

c) Se tiene la independencia del orden en la derivación, es decir, para todo par α y β de multinatices de derivación y toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se tiene que

$$D^\alpha \left(D^\beta T\right) = D^\beta \left(D^\alpha T\right) = D^{\alpha+\beta} T.$$

d) Dada una función $\mu \in L^1_{loc}(\Omega)$, no se puede afirmar que $D^\alpha \mu \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Ejemplo 14. *Dada una función* $\mu(x) = |x|$. *Hallar* $\mu'(x)$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega), \Omega = (-1, 1)$

Solución:

Como $\mu \in L^1_{loc}(\Omega) \Longrightarrow T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Entonces

$$\begin{aligned} \langle D^1 T_\mu, \varphi \rangle &= (-1)^1 \langle T_\mu, \partial^1 \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &= -\int_{-1}^{1} \mu(x) \varphi'(x)\, dx \\ &= -\left\{ \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)\, dx + \int_0^1 x\varphi'(x)\, dx \right\} \end{aligned}$$

Tenemos que $\langle \mu', \varphi \rangle = -\left\{ \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)\, dx + \int_0^1 x\varphi'(x)\, dx \right\}$

Integrando por partes:

$$\mu = x \quad \to \quad d\mu = dx$$

$$dv = \varphi'(x) \quad \to \quad v = \varphi(x)$$

Entonces:

$$\int_{-1}^{0} \mu(x)\varphi'(x)\,dx = x\varphi(x)|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx$$

Volviendo a la ecuación:

$$\begin{aligned}
\langle \mu', \varphi \rangle &= \int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{-1} x\varphi'(x)\,dx \\
&= x\varphi(x)|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx - \left\{ x\varphi(x)|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)\,dx \right\} \\
&= \varphi(-1) - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx - \left\{ \varphi(1) + \int_{0}^{1} \varphi(x)\,dx \right\} \\
&= \cancelto{0}{\varphi(-1)} - \cancelto{0}{\varphi(1)} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

De modo que:

$$\langle \mu', \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_f, \varphi \rangle$$

Por lo tanto $\mu' = f$, donde:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x < 0 \\ 1 & , 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 15. *Calcular la derivada distribucional de la siguiente función:*

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , -1 \leq x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde $\Omega = [-1, 1]$

Solución:

Dado que $\mu \in L^1_{loc}(\Omega) \Longrightarrow T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mu', \varphi \rangle &= -\int_{-1}^{1} \mu(x)\varphi'(x)\, dx \\
&= -\left[\int_{-1}^{0} \mu(x)\varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} \mu(x)\varphi'(x)\, dx\right] \\
&= -\int_{0}^{1} \varphi'(x)\, dx \\
&= -\varphi(x)|_0^1 \\
&= -\varphi(1) + \varphi(0) \\
&= \varphi(0) \\
&= \delta_0(\varphi).
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que:

$$\langle \mu', \varphi \rangle = \delta_0(\varphi) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

$$\therefore \mu' = \delta_0.$$

■

4.1.3. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev constituyen una de las partes más relevantes de las herramientas funcionales para el tratamiento de problemas de condición de frontera.

Estos espacios están definidos sobre un dominio arbitario $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y son subespacios vectoriales de diversos espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Definición 4.1.8 (Normas de Sobolev). *Se define un funcional* $\|\cdot\|_{m,p}$ *, donde* m *es un entero positivo y* $1 \leq p \leq \infty$*, como sigue:*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \qquad si \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \tag{2}$$

Definición 4.1.9 (Espacio de Sobolev). *Para cualquier* m *entero positivo y* $1 \leq p \leq \infty$*, consideramos tres espacios vectoriales en los cuales* $\|\cdot\|_{m,p}$ *es una norma:*

(a) $H^{m,p}(\Omega) \equiv$ *la completitud de* $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ *con respecto a la norma* $\|\cdot\|_{m,p}$*,*

(b) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| m\}$*, donde* $D^\alpha u$ *es la derivada débil (o distribucional) parcial, y*

(c) $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv$ *la clausura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *en el espacio* $W^{m,p}(\Omega)$*.*

Equipados con la norma apropiada (1) *o* (2)*, estos espacios son llamados espacios de Sobolev sobre* Ω*.*

Claramente, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ *y si* $1 \leq p < \infty, W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$*, porque* C_0^∞ *es denso en* $L^p(\Omega)$*. Para cualquier* m*, se tiene la siguiente cadena de encajes*

$$W_0^{0,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Teorema 4.1.4. *Defínase*

$$W = \{v \in H : Lv \in Z\}$$

y

$$\langle u, v\rangle_W = \langle u, v\rangle_H + \langle Lu, Lv\rangle_Z. \qquad (1)$$

Entonces W es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por (1)*. El encaje de W en H es continuo y la restricción de L en W es continua desde W a Z.*

Demostración:

Está claro que (1) cumple con las condiciones de un espacio interno, con la norma inducida

$$\|u\|_W = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Lu\|_Z^2}.$$

De esta manera, W es un espacio con producto interno.

Para la completitud de este espacio, tomemos $\{v_k\}$ una sucesión de Cauchy en W. Debemos demostrar que existe $v \in M$ tal que $v_k \to v$ en H y $Lv_k \to Lv$ en Z.

Obsérvese que $\{v_k\}$ y $\{Lv_k\}$ son sucesiones de Cauchy en H y Z, respectivamente. De modo que, existe $v \in H$ y $z \in Z$ tal que $v_k \to v \quad \text{en} \quad H \quad \text{y} \quad Lv_k \to Lv \quad \text{en} \quad Z.$

La continuidad de L y (1) dan como resultado:

$$Lv_k \to Lv \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n) \text{ y } Lv_k \to z \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Dado que el límite de la sucesión en $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ es único, se infiere que$Lv = z$.

Por lo tanto:

$$Lv_k \to Lv \text{ en } Z$$

y W es un espacio de Hilbert.

De la continuidad del encaje $W \subset H$ se obtiene que

$$\|u\|_H \leq \|u\|_W$$

mientras que la continuidad de $L_{|W} : W \to Z$ proviene de

$$\|Lu\|_Z \leq \|u\|_W.$$

■

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 4.1.10. *El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \,|\, D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n :| \alpha| \leq m\} \subset L^p(\Omega)$$

Se establece también:

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

De ese modo, los espacios de Sobolev expresados por $W^{m,p}(\Omega)$ llegan a ser espacios de Hiblert.

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se define $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se escribe:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

en ocasiones con la norma equivalente $\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}$, si $1 \leq p < \infty$.

Teorema 4.1.5. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ *es un espacio normado. Donde:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \,|D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n :|\,\alpha| \leq m\} \subset L^p(\Omega)$$
$$\|f\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Demostración:

Para probar que el espacio $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ es un espacio normado, veamos primero que sea un espacio vectorial.

- $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial:

  Sean f y $g \in W^{m,p}(\Omega)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probaremos que $\lambda f + g \in W^{m,p}(\Omega)$.

  Para ello, será suficiente demostrar que $\lambda f + g \in L^p(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda f + g) \in L^p(\Omega)$.

  Dado que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial, se verifica que $\lambda f + g \in L^p(\Omega)$.

  Veamos si $D^\alpha(\lambda f + g) \in L^p(\Omega)$.

  En efecto;

Para $f, g \in L^p(\Omega)$ entonces $D^\alpha f, D^\alpha g \in L^p(\Omega)$ luego:

$$\begin{aligned}
D^\alpha(\lambda f + g) \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega |D^\alpha(\lambda f + g)|^p \, du &= \int_\Omega |D^\alpha \lambda f + D^\alpha g|^p \, du \\
&\leq \int_\Omega |D^\alpha \lambda f|^p \, du + \int_\Omega |D^\alpha g|^p \, du \\
&= \lambda \int_\Omega |D^\alpha f|^p \, du + \int_\Omega |D^\alpha g|^p \, du \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Entonces $D^\alpha(\lambda f + g) \in L^p(\Omega)$.

$$\therefore W^{m,p}(\Omega) \text{ es un subespacio vectorial .}$$

- Veamos si $\|\cdot\|_{m,p}$ es una norma, donde:

$$\|f\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

i) $\|f\|_{m,p} \geq 0$

En efecto:

$$\|f\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \underbrace{\|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}}_{\geq 0} \right]^{1/p} \geq 0.$$

ii) $\|f\|_{m,p} = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

$\Longrightarrow]$ Si $\|f\|_{m,p,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{1/p} = 0 \Longrightarrow \|D^\alpha f\|^p_{Lp(\Omega)} = 0,$

entonces:

$$\begin{aligned}
D^\alpha f &= 0, \quad \forall |\alpha| \leq m \\
\Rightarrow f &= 0; \text{ c.t.p en } \Omega, \quad \forall |\alpha| \leq m.
\end{aligned}$$

$[\Longleftarrow$ Si $f = 0;$ c.t.p en Ω, entonces $\|f\|_{m,p,\Omega} = 0$.

iii) $\lambda\|f\|_{m,p} = |\lambda|\|f\|_{m,p}$

En efecto:

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in W^{m,p}(\Omega)$, entonces :

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{m,p} &= \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(\lambda f)\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p} \\
&= \left[\sum_{|\alpha|\leq m} |\lambda|^p \, \|D^\alpha(f)\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p} \\
&= (|\lambda|^p)^{1/p} \underbrace{\left[\sum_{|\alpha|\leq m} |\lambda| \, \|D^\alpha(f)\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p}}_{=\|f\|_{m,p,\Omega}} \\
&= |\lambda|\|f\|_{m,p}.
\end{aligned}$$

iv) $\|f+g\|_{m,p} \leq \|f\|_{m,p} + \|g\|_{m,p}$

Sean $f, g \in W^{m,p}(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{m,p} &= \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(f+g)\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p} \\
&= \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha(f+g)|^p \; du\right]^{1/p} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq m} (\|D^\alpha f\|_{L^p} + \|D^\alpha g\|_{L^p})^p
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski para sumas:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{m,p} &\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha g\|^p_{L^p}\right)^{1/p} \\
&= \|f\|_{m,p} + \|g\|_{m,p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\|f+g\|_{m,p} \leq \|f\|_{m,p} + \|g\|_{m,p}.$$

Así queda demostrado que $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ es un espacio normado.

Teorema 4.1.6. $(W^{m,p}(\Omega), \| \, . \, \|_{m,p})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$, entonces dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_k\|_{m,p} < \varepsilon$, $\forall n, k \geq n_0$, esto es:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_k\|_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha (f_n - f_k)(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_k(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_k\|_{m,p}^p &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_k(x)|^p \, dx < \varepsilon^p \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_k(x)|^p \, dx < \varepsilon^p
\end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha f_n - D^\alpha f_k\|_p^p &= \int_\Omega |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_k(x)|^p \, dx < \varepsilon^p, \quad \forall |\alpha| \leq m \\
\|D^\alpha f_n - D^\alpha f_k\|_p &< \varepsilon, \quad \forall |\alpha| \leq m.
\end{aligned}$$

De esto vemos que $\{D^\alpha f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leqslant m$. Sabemos también queel espacio $L_p(\Omega)$ es un espacio de Banach, entonces $\exists f_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ tal que

$D^\alpha f_n \longrightarrow f_\alpha$, cuando $n \longrightarrow \infty$, esto es:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D^\alpha f_n = f_\alpha, \forall|\alpha| \leqslant m.$$

Además, como $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$ es Banach, entonces $\exists f \in L^p(\Omega)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ y $D^\alpha f_n \longrightarrow f_\alpha$, cuando $n \longrightarrow \infty$ en $L^p(\Omega)$.Entonces bastará demostrar que $f_\alpha = D^\alpha f$, y para esto procedemos de la siguiente manera:

- Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$ y además $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ y $f \in L_p(\Omega)$, entonces cada f_n determina una distribución $T_{f_n} \in D'(\Omega)$ y $T_f \in D'(\Omega)$.

  Luego $\forall\phi \in D(\Omega)$ tenemos:

$$\begin{array}{rccl} T_{f_n}: & D(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & T_{f_n}(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,dx. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} T_f: & D(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \longmapsto & T_f(\phi) = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx. \end{array}$$

  Entonces:

$$\begin{aligned} |T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| &= |\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx| \\ &= |\int_\Omega (f_n(x) - f(x))\varphi(x)\,dx| \\ &\leq \int_\Omega |f_n(x) - f(x)||\varphi(x)|\,dx \end{aligned}$$

  por la desigualdad de Hölder se tiene que:

$$|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| \leq \| f_n - f\|_p \parallel \varphi \parallel_q \longrightarrow 0, \text{cuando n} \longrightarrow \infty.$$

Luego, $T_{f_n}(\varphi) \longrightarrow T_f(\phi)$, para cualquier $\varphi \in D(\Omega)$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

- Similarmente, $\{D^\alpha f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f_α en $L^p(\Omega)$ y $L^p(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$, entonces cada $D^\alpha f_n$ y f_α determinan una distribución $T_{D^\alpha f_n}, T_{f_\alpha} \in D'(\Omega)$.

  Luego $\forall \phi \in D(\Omega)$ tenemos:

$$\begin{array}{rrcl} T_{D^\alpha f_n}: & D(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & T_{D^\alpha f_n}(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega D^\alpha f_n(x)\varphi(x)\,dx. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} T_{f_\alpha}: & D(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \longmapsto & T_{f_\alpha}(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f_\alpha(x)\varphi(x)\,dx. \end{array}$$

  Entonces:

$$\begin{aligned} |T_{D^\alpha f_n}(\varphi) - T_{f_\alpha}(\varphi)| &= |\int_\Omega D^\alpha f_n(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega f_\alpha(x)\varphi(x)\,dx| \\ &= |\int_\Omega (D^\alpha f_n(x) - f_\alpha(x))\varphi(x)\,dx| \\ &\leq \int_\Omega |D^\alpha f_n(x) - f_\alpha(x)||\varphi(x)|\,dx \end{aligned}$$

  Por la desigualdad de Hölder se tiene que:

$$|T_{D^\alpha f_n}(\varphi) - T_{f_\alpha}(\varphi)| \leq \| D^\alpha f_n - f_\alpha \|_p \| \varphi \|_q \longrightarrow 0, \text{cuando n} \longrightarrow \infty.$$

  Entonces $T_{D^\alpha f_n}(\varphi) \longrightarrow T_{f_\alpha}(\varphi)$, para cualquier $\varphi \in D(\Omega)$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Además:

$$
\begin{aligned}
T_{f_\alpha}(\varphi) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} T_{D^\alpha f_n}(\varphi) = \lim_{n\longrightarrow\infty} (-1)^{|\alpha|} T_{f_n}(D^\alpha\varphi) \\
&= (-1)^{|\alpha|} T_f(D^\alpha\varphi) = T_{D^\alpha f(\varphi)}, \quad \varphi \in D(\Omega).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f_\alpha = D^\alpha f$ en el sentido de distribuciones, $\forall|\alpha| \leq m$, y $f \in W^{m,p}(\Omega)$. Como $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_{m,p} = 0$, entonces $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

El espacio $H^1(\Omega)$

Es un espacio de Sobolev conformado por las funciones en $L^2(\Omega)$, cuyas primeras derivadas en el sentido de distribuciones son funciones en $L^2(\Omega)$. Para este espacio usamos el símbolo $H^1(\Omega)$. De esta manera:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$$

El producto interno de $H^1(\Omega)$ está definido por:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv\, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

y la norma de $H^1(\Omega)$ está definido por:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

que es igual a:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)}.$$

De esta manera, se obtiene una relación con la norma del espacio $L^2(\Omega)$, estudiado previamente.

Teorema 4.1.7. *Sea Ω un dominio abierto y acotado. Entonces $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$. Es decir, si $u \in H^1(\Omega)$, existe una sucesión $(u_m) \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\|u_m - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } m \to +\infty.$$

El espacio $H^1_*(\Omega)$

Es un espacio de Hilbert de funciones $H^1(\Omega)$, con una norma equivalente a la estándar en este espacio. $\|\cdot\|_{H^1_*}$

$$\|u\|^2_{H^1_*} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} u^2 \, ds.$$

La norma de $H^1_*(\Omega)$ está inducida por el siguiente producto interno:

$$(u, v)_{H^1_*} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot v \, ds.$$

Definición 4.1.11 (Fórmula de Green)**.** *Se presenta de dos maneras:*

i) Para $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$, la primera fórmula de Green está dada por:

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) \, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(s) v(s) \, ds.$$

ii) Para $u, v \in H^2(\Omega)$, la segunda fórmula de Green está dada por:

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) \, dx - \int_\Omega \Delta v(x) u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(s) v(s) \, ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta}(s) u(s) \, ds.$$

4.2. Presentación del resultado

4.2.1. Ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin homogénea

Dado $f \in L^2(\Omega)$. Determinar u definida y solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ \partial_\eta u + hu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Donde , $h > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ es dominio abierto y acotado y $\partial_\eta u$ es el vector unitario normal hacia afuera sobre $\partial\Omega$.

Para dar solución a este problema, se seguirán las siguientes etapas:

1. En este paso se debilitará a la ecuación de Poisson, para ello, se selecciona un espacio de funciones test, compatible con las condiciones de frontera del problema. Multiplicamos la ecuación diferencial por una función test e integramos sobre el dominio Ω.

2. Después, se asume que todos los datos del problema son *suaves*, para luego integrar la ecuación debilitada, utilizando las condiciones de frontera y así obtener una ecuación integral (la formulación variacional).

3. Finalmente, se interpreta la ecuación integral como un problema variacional abstracto en un adecuado espacio de Hilbert para aplicar las condiciones del teorema de Lax-Milgram.

- **Etapa 1:** Supongamos que f es suave y $u \in H^2$ es una solución suficientemente regular de (2). Seleccionamos a $C^1(\overline{\Omega})$ como el espacio de funciones test, para poder incorporar las condiciones de frontera de Robin. Por otro lado, el espacio $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en H^1, lo cual permite extender el espacio de funciones test a H^1, entonces escogemos una función test $v \in H^1$ y multiplicamos:

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \tag{3}$$

- **Etapa 2:** Integramos la ecuación (3) sobre el dominio Ω.

  Por la primera fórmula de Green, se tiene que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_{\eta} u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

  Por dato del problema, tenemos que: $\partial_{\eta} u = -hu$. Entonces,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} -huv \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{4}$$

  La ecuación (4) es la formulación variacional para el problema (2).

- **Etapa 3:** Entonces el problema variacional abstracto de (4), es:

$$\begin{cases} \text{Dado } f \in L^2(\Omega), \quad \text{determinar } u \in H^1_*(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} uv \, ds = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{5}$$

  Donde

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} uv \, ds, \quad L(v) = \int_\Omega fv \, dx.$$

Teorema 4.2.1. *El problema* (5) *tiene solución única si cumple las condiciones del teorema de Lax-Milgram.*

Demostración:

Se tiene que probar que $B(u,v)$ es una forma bilineal, continua y coerciva (o H-elíptica).

Además, que $L(v)$ es un funcional lineal y continuo.

Demostraremos que B, definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccl} B: & H^1_* \times H^1_* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & B(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} uv \, ds \end{array}$$

es bilineal, continua y coerciva (o H-elíptica).

Veamos:

- B es bilineal: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in H^1_*(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
B(\alpha u + \beta v, w) &= \int_\Omega \nabla(\alpha u + \beta v) \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} (\alpha u + \beta v) w \, ds \\
&= \int_\Omega (\alpha \nabla u + \beta \nabla v) \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} \alpha u w + \beta v w \, ds \\
&= \alpha \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx + \beta \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx \\
&+ h\alpha \int_{\partial\Omega} u w \, ds + h\beta \int_{\partial\Omega} v w \, ds \\
&= \alpha \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} u w \, ds \right) \\
&+ \beta \left(\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} v w \, ds \right) \\
&= \alpha B(u, w) + \beta B(v, w).
\end{aligned}
$$

Ahora probemos la linealidad de la otra componente:

$$
\begin{aligned}
B(u, \alpha v + \beta w) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\alpha v + \beta w) \, dx + h \int_{\partial\Omega} u(\alpha v + \beta w) \, ds \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot (\alpha \nabla v + \beta \nabla w) \, dx + h \int_{\partial\Omega} \alpha u v + \beta u w \, ds \\
&= \alpha \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \beta \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx \\
&+ h\alpha \int_{\partial\Omega} u v \, ds + h\beta \int_{\partial\Omega} u w \, ds \\
&= \alpha \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} u v \, ds \right) \\
&+ \beta \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} u w \, ds \right) \\
&= \alpha B(u, v) + \beta B(u, w).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, B es bilineal.

- B es continua:

Dado que B es una forma bilineal, por la parte $d)$ de la definición (1.0.22), B será continua si $\exists c$, tal que $|B(u, v)| \leq c\|u\|_{H^1_*}\|v\|_{H^1_*}$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &= |\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} uv \, ds| \\
&\leq \max\{1,h\} | \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, ds| \\
&\leq \max\{1,h\} | \, (u,v)_{H^1_*} \, |
\end{aligned}
$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \max\{1,h\} \|u\|_{H^1_*} \|v\|_{H^1_*} \\
&\leq c \|u\|_{H^1_*} \|v\|_{H^1_*}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, B es continua.

- B es coerciva:

  Probaremos que $\exists \gamma > 0$, tal que $B(u,u) \geq \gamma \|u\|^2_{H^1_*}$

  En efecto:

$$
\begin{aligned}
|B(u,u)| &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + h \int_{\partial\Omega} u^2 \, ds \\
&\geq \min\{1,h\} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} u^2 \, ds \right) \\
&\geq \min\{1,h\} \|u\|^2_{H^1_*} \\
&\geq \gamma \|u\|^2_{H^1_*}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, B es coerciva.

De los resultados anteriores, tenemos como resultado que B es una forma bilineal, continua y coerciva.

Ahora tenemos que demostrar que L, definido de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
L: \; H^1_*(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx
\end{aligned}
$$

es un funcional lineal y continuo.

- L es lineal:

  Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v, w \in H^1_*(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned} L(\alpha v + \beta w) &= \int_\Omega f(\alpha v + \beta w)\, dx \\ &= \alpha \int_\Omega f v\, dx + \beta \int_\Omega f w\, dx \\ &= \alpha L(v) + \beta L(w). \end{aligned}$$

  Por tanto, L es lineal.

- L es continuo:

  Demostraremos que $\exists c > 0$ tal que $|L(v)| \leq c\|v\|_{H^1_*}$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= |\int_\Omega f v\, dx| \\ &\leq \int_\Omega |f||v|\, dx \end{aligned}$$

  Por la desigualdad de Cauchy - Bunyakovsky - Schwartz, se tiene que:

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \left(\int_\Omega |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \\ &\leq \gamma\|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1_*}. \end{aligned}$$

  Si hacemos $c = \gamma\|f\|_{L^2}$, entonces $|L(v)| \leq c\|v\|_{H^1_*}$.

  De este modo, L es un funcional lineal y continuo.

Como se cumplen todas las condiciones del teorema de Lax-Milgram, se concluye que el problema (5) tiene como solución débil única a $u \in H^1_*$.

$\blacksquare$

4.2.2. Ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin no homogénea

Dado $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega)$. Determinar u definida y solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ \partial_\eta u + hu = g \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

Donde , $h > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ es dominio abierto y acotado y $\partial_\eta u$ es el vector unitario normal hacia afuera sobre $\partial\Omega$.

Para dar solución a este problema, al igual que para la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin homogénea, se seguirá la serie de etapas explicada anteriormente.

- **Etapa 1:** Supongamos que f, g son suaves y $u \in H^2$ es una solución suficientemente regular de (6). Seleccionamos a $C^1(\overline{\Omega})$ como el espacio de funciones test, para poder incorporar las condiciones de frontera de Robin. Por otro lado, el espacio $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en H^1, lo cual permite extender el espacio de funciones test a H^1, entonces escogemos una función test $v \in H^1$ y multiplicamos:

$$-\int_\Omega \Delta uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx. \tag{7}$$

- **Etapa 2:** Integramos la ecuación (7) sobre el dominio Ω.

Por la primera fórmula de Green, se tiene que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\eta u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Por dato del problema, tenemos que: $\partial_\eta u = g - hu$, entonces:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (g - hu) v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} g v \, ds + h \int_{\partial\Omega} u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{8}$$

La ecuación (8) es la formulación variacional para el problema (6).

- **Etapa 3:** Entonces el problema variacional abstracto de (8), es:

$$\begin{cases} \text{Dado } f \in L^2(\Omega), \quad \text{determinar } u \in H^1_*(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{9}$$

Donde:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} u v \, ds, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds.$$

Teorema 4.2.2. *El problema* (9) *tiene solución única si cumple las condiciones del teorema de Lax-Milgram.*

Demostración:

Se tiene que probar que B es una forma bilineal, continua y coerciva (o H-elíptica).

Además, que L es un funcional lineal y continuo.

Demostraremos que B, definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} B: \ H^1_* \times H^1_* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & B(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + h \int_{\partial\Omega} uv \, ds \end{array}$$

es bilineal, continua y coerciva (o H-elíptica).

Veamos:

- B es bilineal:

  Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in H^1_*(\Omega)$

$$\begin{array}{rcl} B(\alpha u + \beta v, w) & = & \displaystyle\int_\Omega \nabla(\alpha u + \beta v) \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} (\alpha u + \beta v) w \, ds \\ & = & \displaystyle\int_\Omega (\alpha \nabla u + \beta \nabla v) \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} \alpha u w + \beta v w \, ds \\ & = & \alpha \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx + \beta \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx \\ & + & h\alpha \displaystyle\int_{\partial\Omega} uw \, ds + h\beta \int_{\partial\Omega} vw \, ds \\ & = & \alpha \left(\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} uw \, ds \right) \\ & + & \beta \left(\displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx + h \int_{\partial\Omega} vw \, ds \right) \\ & = & \alpha B(u,w) + \beta B(v,w). \end{array}$$

Ahora probemos la linealidad de la otra componente:

$$
\begin{aligned}
B(u, \alpha v + \beta w) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\alpha v + \beta w)\, dx + h \int_{\partial\Omega} u(\alpha v + \beta w)\, ds \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot (\alpha \nabla v + \beta \nabla w)\, dx + h \int_{\partial\Omega} \alpha uv + \beta uw\, ds \\
&= \alpha \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \beta \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, dx \\
&+ \quad h\alpha \int_{\partial\Omega} uv\, ds + h\beta \int_{\partial\Omega} uw\, ds \\
&= \alpha \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + h \int_{\partial\Omega} uv\, ds \right) \\
&+ \quad \beta \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, dx + h \int_{\partial\Omega} uw\, ds \right) \\
&= \alpha B(u, v) + \beta B(u, w).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, B es bilineal.

- B es continua:

  Dado que B es una forma bilineal, por la parte d) de la definición (1.0.22), B será continua si $\exists c$, tal que $|B(u, v)| \leq c\|u\|_{H^1_*}\|v\|_{H^1_*}$.

  Entonces,

$$
\begin{aligned}
|B(u, v)| &= |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + h \int_{\partial\Omega} uv\, ds| \\
&\leq \max\{1, h\}| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} uv\, ds| \\
&\leq \max\{1, h\}|\, (u, v)_{H^1_*}\, |
\end{aligned}
$$

  Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|B(u, v)| &\leq \max\{1, h\}\|u\|_{H^1_*}\|v\|_{H^1_*} \\
&\leq c\|u\|_{H^1_*}\|v\|_{H^1_*}.
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto, B es continua.

- B es coerciva:

  Probaremos que $\exists\gamma > 0$, tal que $B(u,u) \geq \gamma\|u\|^2_{H^1_*}$

  En efecto:

$$\begin{aligned}
|B(u,u)| &= \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + h\int_{\partial\Omega} u^2\,ds \\
&\geq \min\{1,h\}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} u^2\,ds\right) \\
&\geq \min\{1,h\}\|u\|^2_{H^1_*} \\
&\geq \gamma\|u\|^2_{H^1_*}.
\end{aligned}$$

  Por tanto, B es coerciva.

De los resultados anteriores, tenemos como resultado que B es una forma bilineal, continua y coerciva.

Ahora tenemos que demostrar que $L(v)$, definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L:\ H^1_*(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto L(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,ds
\end{aligned}$$

es un funcional lineal y continuo.

- L es lineal

  Sea $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $v,w \in H^1_*(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned}
L(\alpha v + \beta w) &= \int_\Omega f(\alpha v + \beta w)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(\alpha v + \beta w)\,ds \\
&= \alpha\int_\Omega fv\,dx + \beta\int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega} g(\alpha v + \beta w)\,ds \\
&= \alpha\int_\Omega fv\,dx + \beta\int_\Omega fw\,dx + \alpha\int_{\partial\Omega} gv\,ds + \beta\int_{\partial\Omega} gw\,ds \\
&= \alpha\left(\int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,ds\right) + \beta\left(\int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega} gw\,ds\right) \\
&= \alpha L(v) + \beta L(w).
\end{aligned}$$

Por tanto, L es lineal.

- L es continuo:

  Hacemos:

$$m(v) = \int_{\Omega} fv\,dx \text{ y } p(v) = \int_{\partial\Omega} gv\,ds$$

  De modo que $L(v)$ sería:

$$L(v) = m(v) + p(v).$$

  Tenemos que demostrar que $m(v)$ y $p(v)$ son continuos.

  En efecto:

$$\begin{aligned} |m(v)| &= |\int_{\Omega} fv\,dx| \\ &\leq \int_{\Omega} |f||v|\,dx \end{aligned}$$

  Por la desigualdad de Cauchy, tenemos que:

$$\begin{aligned} |m(v)| &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \\ &\leq \gamma\|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1_*} \end{aligned}$$

  Si hacemos $c = \gamma\|f\|_{L^2}$, entonces $|m(v)| \leq c\|v\|_{H^1_*}$.

Así se tiene que, m es continuo. Ahora analicemos si p es continuo.

$$\begin{aligned}
|p(v)| &= |\int_{\partial\Omega} gv\,dx| \\
&\leq \int_{\partial\Omega} |g||v|\,dx \\
&\leq \left(\int_{\partial\Omega} |g|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|g\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq \|g\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \\
&\leq \varphi\|g\|_{L^2}\|v\|_{H^1_*}.
\end{aligned}$$

Haciendo $C = \varphi\|g\|_{L^2}$, entonces $|p(v)| \leq C\|v\|_{H^1_*}$

De esta manera, p es continuo.

Ya que m y p son continuos, se tiene que L es continuo.

Como se cumplen todas las condiciones del teorema de Lax-Milgram, se concluye que el problema (9) tiene como solución débil única a $u \in H^1_*$.

■

4.3. Discusión de resultados

La ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin es un problema bien definido, es decir, existe solución y esta es única. En el caso de la presente investigación, se obtuvo que la solución pertenece al espacio $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1_*}$, esto indica que es una solución débil. Por otro lado, para llegar a ella se ha seguido una serie de procedimientos, los cuales han facilitado el uso y manejo de las variables para obtener el resultado que se esperaba.

En primer lugar, se tiene el uso de las funciones test o de prueba, las cuales posibilitan que la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin —que posee condiciones fuertes—, sea suavizada. Para esta investigación se trabajó con una función test $v \in C^1(\overline{\Omega})$, debido a que, como lo recomiendan los autores de [16], es un espacio que no interfiere con las condiciones de frontera de Robin. En cambio, si se hubiera trabajado con un espacio de funciones test diferente, se hubiese obtenido un resultado poco favorable y con menor capacidad de expandir ese espacio a un espacio adecuado de Sobolev y debido a esta interferencia no se hubiera llegado a la existencia de la solución de la ecuación de Poisson.

Otro dato a destacar es el espacio de Sobolev en cual se encuentra la solución débil de esta investigación. Pues, el espacio $H^1(\Omega)$, con su norma usual, es uno de los más conocidos dentro de la teoría de los espacios de Sobolev; sin embargo, pocos textos académicos exponen más normas dentro de este espacio y el rol importante que tienen para, como en este caso, facilitar los resultados de la investigación.

Como se ha presentado, la norma $\|\cdot\|_{H^1_*}$ tiene una característica particular en la que incluye a dos integrales, una de ellas actúa sobre Ω a la otra sobre la frontera $\partial\Omega$. Esta singularidad hace que al momento de demostrar si se cumplen o no las condiciones del teorema de Lax-Milgram, se pruebe con menor dificultad que, en efecto, la formulación variacional de la ecuación de Poisson posee solución única. Después de todo lo expuesto y con todas las teorías explicadas y desarrolladas, los objetivos planteados de este trabajo de investigación fueron logrados satisfactoriamente, y así queda justificado el propósito de la investigación.

V. CONCLUSIONES

En esta tesis se determinó la existencia y unicidad de la solución débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin, mediante la formulación variacional y la aplicación del teorema de Lax-Milgram. Tras obtener los resultados se llegó a las siguientes conclusiones:

1. Se definió la teoría de distribuciones, con la cual se pudo seleccionar una función test adecuada $v \in C^1(\overline{\Omega})$, para que sea compatible con la condición de frontera de Robin y de esa manera se suavizó la ecuación de Poisson.

2. El espacio de Sobolev H^1_* y sus propiedades son un instrumento útil para dar solución a la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin homogénea y no homogénea.

3. Para la formulación variacional de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin homogénea y no homogénea, es esencial el uso de la primera fórmula de Green, puesto que facilita el desarrollo de la ecuación integral y obtener la formulación débil del problema.

4. Para aplicar el teorema de Lax-Milgram es primordial que la formulación variacional del objeto de estudio sea reducida a una forma bilineal y a un funcional, para adecuarlo al enunciado del teorema y así obtener una única solución débil.

VI. RECOMENDACIONES

1. En esta tesis se determinó la solución débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin homogénea y no homogénea, por lo que se recomienda recuperar la solución clásica del mismo problema mediante el teorema de la traza.

2. Se sugiere emplear una técnica diferente a la de la formulación variacional para determinar la existencia y unicidad de la solución del problema de Robin.

3. Se recomienda investigar el comportamiento de la formulación débil de la ecuación de Poisson con condición de frontera de Robin; mas en un espacio de Sobolev diferente o en el espacio H^1 pero con norma distinta a $\| \cdot \|_{H^1_*}$.

4. Determinar la solución débil de la ecuación de Poisson con una condición de frontera mixta entre la condición de Robin y otra más.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R. y Fournier, J. (2003). *Sobolev Spaces, Volume 140* (2ª ed.) (pp. 59-62, 77-80). Academic Press.

[2] Aguilera, K. y Santisteban, C. (2015). *La Formulación Variacional del Problema de Newmann-Dirichlet en los espacios de Sóbolev.* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio UNPRG. https://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/485

[3] Aubin, J. (2007). *Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems* (pp. 1-5, 25-30). Dover Publications, Inc.

[4] Bartle, R. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure* (pp. 44, 52-61). John Wiley & Sons, Inc.

[5] Botelho, G., Pellegrino D. y Teixeira, E. (2015). *Fundamentos de Análise Funcional* (pp. 2, 5-6, 104-110, 126, 129). Editora SBM.

[6] Chumpitaz, M. (1991). *Análisis funcional I* (pp. 114-127). W.H Editores.

[7] Dood, A. A. A. E. (2017). *Weak Solutions of Linear Partial Differential Equations.* [Tesis de maestría, University of Gezira] . DSpace Repository. http://repo.uofg.edu.sd/handle/123456789/1875

[8] Gustafson, K., & Abe, T. (1998). The third boundary condition—was it robin's?. *The Mathematical Intelligencer*, 20(1), 63-71. https://doi.org/10.1007/bf03024402

[9] Haaser, N. & Sullivan, J. (1991). *Real Analysis* (pp. 57, 73, 158). Dover Publications, Inc.

[10] Hernández, R., Fernández C. y Baptista M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.) (pp. 152-168). McGraw-Hill/ Interamericana Editores, S.A. de C.V.

[11] Hounie, J. (1979). *Teoria elementar das distribuições* (pp. 1-12). IMPA.

[12] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications* (pp. 30, 58, 91-92, 104, 131, 146-147, 191-192). John Wiley & Sons, Inc.

[13] Lawrence, E. (2010). *Partial differential equations.* (2ª ed.) (pp. 1, 7-9, 311-313). American Mathematical Society.

[14] Lax, P. & Milgram, A. (1954). Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations. *Annals of Mathematics Studies,* 33, 167-190.

[15] Orane, J. (2010). *Sobolev spaces, Trace theorems and Green's functions.* Conferencia, Zürich.

[16] Salsa, S. (2014). *Partial differential equations in action: from modelling to theory (UNITEXT, 86).* (2ª ed.) (pp. 381-384, 503-514). Springer.

[17] Salsa, S. & Verzini, G. (2015). *Partial Differential Equations in Action: Complements and exercises (UNITEXT, 87)* (pp. 59-62, 77-80). Springer.

[18] Sucasaire, G. (2019). *Generalización del teorema de Lax-Milgram y un problema de condiciones de frontera elípticos.* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Federico Villareal]. Repositorio Institucional UNFV. http://repositorio.unfv.edu.pe/handle/UNFV/3602

[19] Tijonov, A. y Samarsky A. (1983). *Ecuaciones de la física matemática* (3ª ed.) (pp. 17-19, 297-298, 521-523). Editorial MIR.

[20] Vera, A. y Alegría P. (1997). *Un Curso de Análisis Funcional: teoría y problemas* (pp. 14). Editorial AVL.