

**UNIVERSIDAD NACIONAL
“SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO”**



**FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

TÍTULO DE LA TESIS

Superficies Regladas con Curvatura Gaussiana Nula

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

AUTOR: Castillejo Morales, Nacho Eduar

ASESOR: Dr. Valderrama Arteaga, Jonhson Diomedes

HUARAZ – PERÚ

2022

Agradecimiento

Agradezco a los docentes de la escuela de matemática de la Universidad nacional “ Santiago Antúnez de Mayolo”, en especial a mi asesor de tesis, Dr. Valderrama Arteaga, Jonhson Diomedes, por guiar esta investigación y formar parte de otro objetivo alcanzado.

DEDICATORIA

El presente trabajo está dedicado a mi familia, por confiar en mí, apoyarme y motivarme en este duro y bonito camino de las matemáticas.

RESUMEN

En esta investigación, se realiza un estudio sobre las superficies regladas, vale decir, en las que por todo punto pasa al menos una recta contenida en la superficie, en un contexto de las superficies regulares.

estudiaremos las superficies regladas con curvatura de Gauss nula y clasificaremos las superficies completas con curvatura gaussiana nula, de echo iremos construyendo un atractivo tejido teórico, que nos permitirá observar como aparecen las rectas, para luego concluir , que necesariamente han de ser superficies regladas.

Abstract

In this research, a study of ruled surfaces, that is, surfaces in which at least one straight line contained in the surface passes through every point, is carried out in the context of regular surfaces.

We will study the ruled surfaces with null Gaussian curvature and classify the complete surfaces with null Gaussian curvature, in fact we will build an attractive theoretical fabric, which will allow us to observe how the straight lines appear, and then conclude that they must necessarily be ruled surfaces.

Keywords: Ruler surfaces, null Gaussian curvature.



ÍNDICE	
Jurado calificador	i
Agradecimiento	ii
DEDICATORIA.....	iii
RESUMEN.....	iv
Abstract.....	v
ÍNDICE.....	vi
I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 JUSTIFICACIÓN	1
1.2 Planteamiento del Problema	2
1.2.1 Delimitación del problema	2
1.2.2 Formulación del Problema.....	2
1.3 Objetivos.....	2
1.3.1 Objetivo general	2
1.3.2 Objetivos específicos.....	2
1.4 HIPÓTESIS	3
II. MARCO TEÓRICO	3
2.1 Antecedentes del problema.....	3
2.2 BASES TEÓRICAS	4
2.2.1 Curvas parametrizadas.....	5
2.2.2 Superficies regulares.....	9
2.2.3 Plano tangente	11
2.2.4 Primera forma fundamental.....	13
2.2.5 La segunda forma fundamental	16
2.2.6 Expresión local de la segunda forma fundamental, la curvatura de Gauss y la curvatura media	18
2.2.7 Superficies regladas.....	21

2.2.8	Superficies regladas desarrollables.....	29
2.2.9	Superficies con curvatura Gaussiana Nula.	32
2.2.10	Clasificación de superficies regulares planas y completas.....	33
III.	METOTOLOGIA	47
3.1.	Tipo de investigación.....	47
3.2.	Diseño de investigación	47
IV.	RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	48
V.	CONCLUSIONES.....	52
VI.	RECOMENDACIONES	53
VII.	REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA.....	55
VIII.	ANEXOS	56
a.	Matriz de consistencia	63



I. INTRODUCCIÓN

1.1 JUSTIFICACIÓN

Estudiaremos las superficies regladas dentro del contexto de las superficies regulares. Esto nos permite imaginar las superficies regladas como la traza resultante de desplazar una recta mediante un movimiento rígido en el espacio. Así mismo introduciremos las superficies desarrollables, que intuitivamente, se pueden aplanar sin deformarlas ni distorsionálas.

las Superficies regladas de revolución se reducen a uniones de planos y cilindros, conos e hiperboloides de una hoja. Con esto acudiremos a la noción de curvatura de Gauss nosotros tendremos como objetivo general, determinar superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula.

1.2 Planteamiento del Problema

1.2.1 Delimitación del problema

Estudiaremos las superficies tratadas en el contexto de las superficies convencionales, donde realizaremos un estudio de las propiedades características básicas de las superficies regladas. Será necesario imponer ciertas condiciones para obtener los resultados habituales de la teoría, concretamente, exigiremos que las generatrices no sean constantes en ningún abierto, lo que denominaremos una superficie no cilíndrica. De este modo, cuando los ceros de la derivada de la dirección de las generatrices sean aislados, bastará fragmentar la superficie y aplicar el estudio a cada fragmento.

Este trabajo de investigación estará limitado en el caso en que los ceros se acumulen.

1.2.2 Formulación del Problema

¿Cómo obtenemos superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Determinar superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula

1.3.2 Objetivos específicos

- ✓ caracterizar una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s) = \gamma(t) + s\omega(t)$, Sobre cada generatriz con $\lambda \neq 0$. (λ : parámetro de distribución)
- ✓ Caracterizar las superficies desarrollables como las superficies regladas con curvatura de Gauss nula.
- ✓ Determinar que toda superficie reglada con curvatura de Gauss nula es, necesariamente, una unión de fragmentos de cilindros, conos y superficies tangentes a curvas
- ✓ Reconocer que toda superficie regular llana completa es necesariamente un plano o un cilindro, ambas superficies regladas.

1.4 HIPÓTESIS

HG: será posible obtener superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula.

H1: Si, es posible obtener superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula. Tras las superficies regladas de revolución acudiremos a la noción de curvatura de Gauss, induciremos las superficies desarrollables que naturalmente son isométricos localmente al plano.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del problema

Antecedentes internacionales

Lucas, (2017), Trabajo Fin de Grado, titulado “Superficies regladas”, grado en matemáticas, realizada en la Universidad de Murcia, Facultad de Matemáticas, España. En este trabajo se ha pretendido estudiar las superficies regladas dentro del contexto de las superficies regulares. Esto nos permite imaginar las superficies regladas como la traza resultante de desplazar una recta mediante un movimiento rígido en el espacio. En ocasiones éstas presentarán autointersecciones o puntos donde no exista el plano tangente, lo que llamaremos puntos singulares. Una de las tareas que realizaremos será analizar dónde pueden localizarse tales puntos en las superficies regladas. Concluyó, que las superficies desarrollables, son superficies regladas que, intuitivamente, se puede aplanar sin deformarlas, es decir son localmente isométricas al plano.

Hernández and Ruiz, (2018), “caracterización de superficies isoparamétricas en el espacio. Formas a través de superficies mínimas”. En esta investigación dan a conocer una caracterización de superficies isoparamétricas en tres dimensiones, el espacio se forma con la ayuda de superficies mínimas con la propiedad ; de que por cada punto de la superficie pasan tres curvas tales que superficie ortogonal reglada, determinada por cada uno de ellos es minimal .Se prueba que necesariamente la superficie inicial es isoparamétricas ,también se muestra que

las curvas necesariamente son geodésicas, para cada punto, que son hélices del ambiente, tiene un operador de forma paralela.

Terrón (2018). En su trabajo de grado “Invariantes de superficies regladas no desarrollables”. (Trabajo Fin de Grado Inédito). Universidad de Sevilla, Sevilla. En este trabajo, realiza un análisis de las familias más estudiadas en geometría de superficies, las superficies regladas, es decir, superficies en las que por todo punto pasa al menos una recta contenida en la superficie. Dentro de estas superficies encontramos las superficies desarrollables y no desarrollables. Centramos nuestro estudio en las no desarrollables, definiendo nociones, fórmulas, así como las llamadas funciones estructurales, que nos permitirán dar una clasificación de las mismas.

Antecedentes nacionales

ysique (2016), Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática con el título “Dinámica de las líneas de curvatura”, realizada en la PUCP. Se estudian las líneas de curvatura de superficies compactas, orientables y conexas del espacio euclidiano. La estrategia consiste en usar las ideas de la Estabilidad Estructural y dar condiciones suficientes para la estabilidad de las líneas de curvatura cuando la superficie se perturba en la topología. Para tal efecto se estudia los puntos umbílico Darbouxiano y sus separatrices, al igual que los ciclos hiperbólicos. La estructura de las líneas principales cerca de estos puntos será establecida, reduciendo su análisis a los puntos hiperbólicos singulares de los campos de Línea en el plano. Con esto se busca crear condiciones para que el conjunto de superficies compactas sea estructuralmente estable y abierto en el sentido .

2.2 BASES TEÓRICAS

En este capítulo abordaremos las definiciones básicas y los resultados más importantes que nos permitirán introducir en el contexto en que se sitúa el tema de investigación: las superficies regladas. Las referencias principales son: Do Carmo (2016), Cifre y González (2010), Toponogov (2006).

2.2.1 Curvas parametrizadas.

Definición 2.2.1.1 Una curva parametrizada diferenciable en \mathbb{R}^n es una aplicación $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, de clase C^∞ , es decir, admite derivadas continuas de todos los órdenes.

Ejemplo 2.2.1.1. La aplicación $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

Donde $a^2 + b^2 \neq 0$, es una curva parametrizada diferenciable cuya traza es una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y es paralelo al vector (a, b) (ver la figura 1)

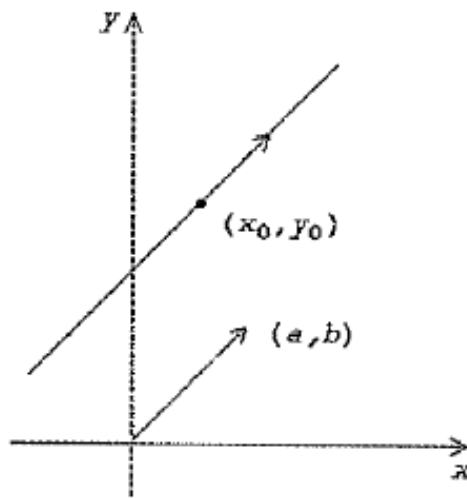


Figura 1: Traza de la recta

Ejemplo 2.2.1.2 La aplicación $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

es una curva parametrizada diferenciable cuya traza es una circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio 1 (ver figura 2)

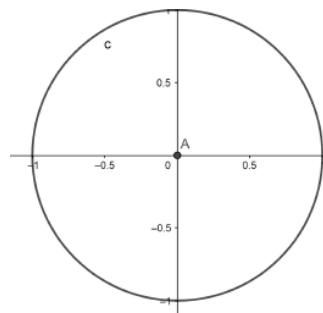


Figura 2: Traza de la circunferencia

Definición 2.2.1.2 Se dice una curva parametrizada diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$, para

Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha'(t) \neq 0$, podemos considerar la recta tangente a α en el punto $\alpha(t)$, es decir, la recta pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector dirección a $\alpha'(t)$ (aquí es esencial que la curva sea regular).

Nota. Si $t_0 \in I$ es tal que $\alpha'(t_0) = 0$, se dice entonces que α presenta un punto singular en t_0 .

Definición.2.2.1.3 Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada, se denomina cambio de parámetro a cualquier difeomorfismo $h: J \rightarrow I$, donde J es un intervalo abierto de \mathbb{R} la curva $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama reparametrización de α .

Claramente, como $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, si α entonces cualquier reparametrización de α también lo es, pues $h'(t) \neq 0$ siempre. Además, la conexión de I se tiene que, o bien $h'(t) > 0$ para todo $t \in J$, o bien $h'(t) < 0$ para todo $t \in J$.

Diremos entonces el cambio de parámetro h conserva la orientación si $h'(t) > 0$ y que invierte la orientación si $h'(t) < 0$.

corolario. 2.2.1.1 La longitud de una curva parametrizada es independiente de su parametrización.

Definición 2.2.1.4 Se dice que una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por longitud de arco (p.l.a) si $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Definición 2.2.1.5 Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva (p.l.a), de modo que el vector tangente $t(s) = \alpha'(s)$ es unitario.

Ahora veamos, de nuevo, esto permite construir una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Dado que $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$, se tiene que $\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$. Luego $t'(s)$ es ortogonal al vector tangente a la curva, y mide como varía ésta. Se define entonces la curvatura de α en $\alpha(s)$ como

$$k(s) = |t'(s)| = |\alpha''(s)|$$

El concepto de curvatura de una curva en \mathbb{R}^3 no depende de la orientación.

Proposición 2.2.1.1 Se verifican los siguientes resultados

- La curvatura de una curva es nula si y solo si es una recta
- La curvatura de una circunferencia es constante. Si, además, la curva es plana y de curvatura constante, entonces es una circunferencia.

Definición 2.2.1.6 Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular (p.l.a) para todo $s \in I$ tal que $k(s) \neq 0$, se define el vector normal(unitario) a α en $\alpha(s)$ como

$$n(s) = \frac{t'(s)}{k(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$$

Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular p.l.a. tal que $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, se denomina plano osculador en $\alpha(s)$ al plano determinado por los vectores $t(s)$ y $n(s)$.

Definición 2.2.1.7 Dados $\{t(s), n(s)\}$ relativos a una curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (p.l.a.) se define el vector binormal (asociado a α) como

$$b(s) = t(s) \wedge n(s) = \alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}.$$

el vector binormal es, por definición, ortogonal al plano osculador. Además, es unitario, pues

$$|b(s)| = |t(s)||n(s)| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Por tanto, para todo $s \in I$ con $k(s) > 0$, el conjunto $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 positivamente orientada (esto es, su determinante es positivo), denominada triedro de Frenet .

De nuevo estamos interesados en saber cómo varían los vectores tangente , normal y binormal a una curva .Claramente, por la propia noción de vector normal, se tiene que $t'(s) = k(s)n(s)$.Por otro lado ,si derivamos la expresión

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

que define el vector binormal, la relación anterior implica que

$$b'(s) = t(s) \wedge n'(s)$$

de donde se deduce que $b'(s)$ es ortogonal a $t(s)$.Además, al ser $b(s)$ unitario, también se obtiene que $b'(s)$ y $b(s)$ son ortogonales .En consecuencia , $b'(s)$ y $n(s)$ deben ser colineales ,lo que nos permite escribir

$$b'(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle n(s) = \langle t(s) \wedge n'(s), n(s) \rangle n(s)$$

Por tanto, el factor que aparece en la fórmula anterior nos lleva a dar la siguiente definición.

Definición 2.2.1.8 Se llama torsión de una curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, p.l.a., con curvatura $k(s) \neq 0$, a la función

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$\tau(s) := \langle t(s) \wedge n'(s), n(s) \rangle = \langle b'(s), n(s) \rangle$$

Por tanto, $b'(s) = \tau(s)n(s)$. Ahora calculemos la derivada del vector normal a α para ello, expresando $n'(s)$ en función de la base $\{t(s), n(s), b(s)\}$, esto es,

$$n'(s) = \langle n'(s), t(s) \rangle t(s) + \langle n'(s), n(s) \rangle n(s) + \langle n'(s), b(s) \rangle b(s), \text{ y dado que}$$

- ❖ $\langle n'(s), n(s) \rangle = 0$ (derivando la relación $\langle n(s), n(s) \rangle = 1$)
- ❖ $\langle n'(s), t(s) \rangle = -\langle n(s), t'(s) \rangle = -k(s)$ (derivando $\langle n(s), t(s) \rangle = 0$) y
- ❖ $\langle n'(s), b(s) \rangle = -\langle n(s), b'(s) \rangle = -\tau(s)$ (derivando $\langle n(s), b(s) \rangle = 0$),

Se tiene finalmente que $n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s)$. En definitiva, hemos obtenido

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases}$$

Estas ecuaciones toman el nombre de fórmulas de Frenet para una curva en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

Proposición 2.2.1.2. Una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $k(s) \neq 0$ es plana si, y solo si, su torsión es nula.

Demostración. Supongamos que α es plana y sea Π el plano que la contiene. Entonces los vectores $t(s)$ y $n(s)$ están contenidos en Π , para todo $s \in I$, por lo que $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ es constante, en consecuencia $b'(s) \equiv 0$, lo que demuestra, $\tau(s) \equiv 0$.

Recíprocamente: Si $\tau(s) \equiv 0$, entonces $b'(s) = \tau(s)n(s) \equiv 0$, esto quiere decir que $b(s)$ es constante, esto implica que la curva α está contenido en el plano. En efecto, definíamos

$$f(s) = \langle \alpha(s), b \rangle$$

Se tiene que $f'(s) = \langle t(s), b \rangle = 0$ luego $f(s) \equiv c$ (constante)

Sea $b = (b_1, b_2, b_3)$ y $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, la condición anterior, equivale a que $\alpha(s)$ verifique $x(s)b_1 + y(s)b_2 + z(s)b_3 = c$ (plano) \square

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular con parámetro t y consideremos $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ su parametrización por longitud de arco. Se definen la curvatura y la torsión de α , respectivamente, de su reparametrización por la longitud de arco:

$$k_\alpha(t) := k_\beta(g(t)) \text{ y } \tau_\alpha(t) := \tau_\beta(g(t))$$

Donde, como ya es usual, representamos por $g = h^{-1}$, buscamos entonces las expresiones adecuadas para cada $k_\alpha(t)$ y $\tau_\alpha(t)$ que involucren la propia curva de α

Proposición 2.2.1.3 Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Entonces

$$k_\alpha(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \quad \text{y} \quad \tau_\alpha(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}$$

2.2.2 Superficies regulares

Definición 2.2.2.1. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para todo punto $p \in S$ existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno V de p en S y una aplicación $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tales que

I. $X(U) = V$ y $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable en el sentido ordinario.

Es decir la aplicación $X: U \rightarrow V$ es diferenciable, significa que si escribimos $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, las funciones $x, y, z: U \rightarrow \mathbb{R}$ son derivables continuas de todos los órdenes.

II. $X: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo (es decir, la inversa $X^{-1}: V \rightarrow U$ es continua).

Esto significa que si V es un entorno de p en el subconjunto S , entonces, existe un abierto W de \mathbb{R}^3 tal que $V = W \cap S$.

III. Para todo $q \in U$, la diferencial $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Esto es esencial para asegurar la existencia del plano tangente en todos los puntos de S .

Proposición 2.2.2.1. Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Entonces el conjunto formado por $G(f) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}$, es una superficie regular de \mathbb{R}^3 .

Es decir, cualquier grafo de una función diferenciable es una superficie regular.

Definición 2.2.2.2. Sea $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un abierto V de \mathbb{R}^3 . Se dice que $p \in V$ es un punto crítico de f si df_p no es sobreyectiva, es decir, si $df_p \equiv 0$. La imagen $f(p)$ de un punto crítico se denomina valor crítico de f . Si $a \in \mathbb{R}$ no es un valor crítico, se dice que es un valor regular.

El siguiente resultado, cubre un gran número de situaciones; por ejemplo, todas las superficies cuádricas.

Proposición 2.2.2.2 Sean $f:V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y a un valor regular de f (es decir, df_p es sobreyectiva, es para todo $p \in f^{-1}(a)$). Entonces $S=f^{-1}(a)$ es una superficie regular de \mathbb{R}^3 , denominada superficie de nivel.

Ejemplo 2.2.2.1 Demostrar que el paraboloides de dos hojas $-x^2-y^2+z^2=1$ es una superficie regular

Demostración. Para realizar la demostración de este ejercicio haremos uso de la proposición anterior. Entonces, considere la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 1 - z^2$$

Los puntos críticos de f son los puntos tales que

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y,z) &= 2y = 0 \\ f_z(x,y,z) &= -2z = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el único punto crítico es $(0,0,0)$, y consecuentemente, el conjunto de los valores críticos es

$$\begin{aligned} V.C &= \{c \in \mathbb{R}: f(0,0,0) = c\} \\ V.C &= \{c \in \mathbb{R}: 1 = c\} \\ V.C &= \{1\} \end{aligned}$$

Así mismo, el conjunto de los valores regulares de f es:

$$V.C = \mathbb{R} - \{1\}$$

Tomando como caso particular, $0 \in V.C$ y

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: f(x,y,z) = 0\} \\ f^{-1}(0) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 1 - z^2 = 0\} \\ f^{-1}(0) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 1 = z^2\} \end{aligned}$$

Por tanto, haciendo el uso de la proposición 2.2.2.2, se tiene que el hiperboloide de dos hojas es una superficie regular. \square

Proposición 2.2.2.3. Sean S una superficie regular y $p \in S$. Entonces existe un entorno $V(p) \subset S$ que es el grafo de una función diferenciable de alguno de los tipos $z=f(x,y)$, $x=g(y,z)$ o $y=h(x,z)$ es decir, es una función definida sobre un abierto contenido en alguno de los planos coordenados.

proposición 2.2.2.4. Sean S una superficie regular y $p \in S$ un punto arbitrario. Supongamos que $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, U abierto, es una aplicación que cumple las condiciones (1) y (3) de la definición de superficie regular. Entonces, si X es inyectiva, se tiene que X^{-1} es continua (por tanto, X es un homeomorfismo y, finalmente, una parametrización de S).

2.2.3 Plano tangente

Intuitivamente una superficie, por el hecho de “estar” en el espacio, posee en cada uno de sus puntos un plano tangente, como ya es habitual, el hecho de admitir una interpretación directa y sencilla contrasta con la complejidad de expresar formalmente esta situación.

El modo de definir el plano tangente a una superficie en un punto determinado consiste en considerar todas las curvas que pasan por dicho punto. Estas curvas, al pasar por el punto, tienen una velocidad que es un vector tangente a la curva. Dado que la curva está dentro de la superficie, entonces, tal vector velocidad será tangente a la superficie. Finalmente, el plano tangente se determina a partir de todos estos vectores velocidad. Después, dicho plano se dota de estructura del plano vectorial gracias a las parametrizaciones, y se precisan unas bases destacadas en términos de cada parametrización. Ahora procedemos a formalizar.

Definición. 2.2.3.1. Una curva diferenciable en una superficie regular S es una aplicación diferenciable $\alpha:I \rightarrow S$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Sean (U,X) una parametrización, $V=X(U)$, y supongamos que $\alpha(I) \cap V \neq \emptyset$. Si definimos $J = \{t \in I : \alpha(t) \in V\}$, entonces la aplicación $\alpha : J \rightarrow U$ dada por $\alpha = X^{-1}(\alpha(t) = (u(t), v(t)))$ Es la expresión en coordenadas de la curva α . Observemos que dicha aplicación es una curva en \mathbb{R}^2 que, en los puntos de J , cumple $\alpha = X \circ \alpha$

Definición 2.2.3.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. Diremos que $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente a S en p , si existe una curva $\alpha: \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \rightarrow S$ diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$

Observación. 2.2.3.1 El hecho de tomar $t = 0$ no es restrictivo; se considera así por comodidad. Observemos que, si $\alpha: I \rightarrow S$ es diferenciable con $v = \alpha'(t_0)$ tangente a S en $p = \alpha(t_0)$, basta tomar $\beta(s) = \alpha(t_0 + s)$ y entonces $\beta'(s) = \alpha'(t_0 + s)$. De esta manera, se tiene que $\beta(0) = \alpha(t_0) = p$ y $\beta'(0) = \alpha'(t_0) = v$. Así, siempre podemos tomar una curva tal y como se precisa en la definición.

Representaremos por $T_p S$ al conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto p . Así:

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha: \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = v\}$$

Lema 2.2.3.1 Sean S una superficie regular y $p \in S$. Sea (U, X) una parametrización con $X(q) = p$ y $q \in U$. Entonces, se tiene que

$$T_p S = dX_{(q)}(\mathbb{R}^2)$$

De este modo, es claro que $T_p S$ es un plano vectorial en \mathbb{R}^3 que llamaremos plano tangente a S en p .

Ejemplo 2.2.3.1. Demostrar que la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) de una superficie regular dada por $f(x, y, z) = 0$, donde 0 es un valor regular de f , es

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Demostración. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva sobre la superficie que pasa por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Ya que $\alpha(t)$ está sobre la superficie, se debe cumplir

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Diferenciando ambos miembros

$$f_x x'(t) + f_y y'(t) + f_z z'(t) = 0$$

Se observa que la expresión anterior es el desarrollo del siguiente producto interno

$$\langle (f_x, f_y, f_z), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle = 0$$

Así mismo, $(f_x, f_y, f_z) = \nabla f(x, y, z)$ y $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, esto significa que el vector tangente $\alpha'(t)$ es ortogonal al vector normal a la superficie (dado por el vector gradiente) para cualquier valor de t .

Luego, sea (x, y, z) un punto genérico contenido en el plano tangente en p_0 , tenemos que la ecuación del plano tangente en el punto p_0 es

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \rangle = 0$$

Desarrollando el producto interno llegamos

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

□

2.2.4 Primera forma fundamental

Hasta ahora, hemos tratado las superficies desde el punto de vista de la Diferenciabilidad. Ahora bien, ¿qué es lo que permite hacer geometría dentro del espacio euclídeo? Ciertamente, es el producto escalar euclídeo el objeto a partir del cual pueden definirse longitudes, ángulos, áreas y volúmenes. Pues bien, si el ingrediente fundamental de la Geometría Euclídea es el producto escalar, lo que haremos será “inducir” dicho producto en la superficie; esto es, usaremos el producto escalar para medir (hacer geometría) en la superficie.

Así pues, consideremos una superficie regular S y un punto $p \in S$. Sabemos que $T_p S$ es un plano vectorial contenido en el espacio vectorial \mathbb{R}^3 , luego, dados dos vectores $v, w \in T_p S$, vamos a representar por $\langle v, w \rangle_p$ el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 actuando sobre los vectores pertenecientes a $T_p S$. De esta forma, si $v, w \in T_p S$, se tiene que $\langle v, w \rangle_p = \langle v, w \rangle$. Observemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Vamos a representar por I_p la forma cuadrática asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir, la aplicación $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \langle v, v \rangle = |v|^2 \geq 0$$

Definición 2.2.4.1. La aplicación $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ se denomina la primera forma fundamental de S .

En lo que proceda, y salvo que queramos precisar con exactitud el punto sobre el que estamos trabajando, escribiremos simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en lugar de $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Sean $v \in T_p S$ y $\alpha : I \rightarrow S$ con condiciones iniciales p y v . Tomamos una parametrización (U, X) de S y consideramos $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ la expresión en coordenadas de α . Entonces $v = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q) = aX_u(q) + bX_v(q)$, donde $a; b$ son números reales y $X(q) = p$. Si ahora calculamos $I_p(v)$ obtenemos

$$I_p(v) = |aX_u(q) + bX_v(q)|^2 = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle$$

donde, por comodidad, hemos suprimido el punto q en el que se evalúan la parametrización y sus parciales. A partir de ahora, y siempre que no haya lugar a confusión, omitiremos habitualmente las variables (u,v) en las fórmulas. Denotamos por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle \quad \text{y} \quad G = \langle X_v, X_v \rangle$$

Estas tres funciones (toman sus valores en U) son claramente diferenciables y se denominan los coeficientes de la primera forma fundamental. Observemos que las funciones E , F y G expresan, de algún modo, cómo varía la manera de medir vectores conforme vamos cambiando de punto en la superficie. Por otra parte, remarcamos el hecho de que E, F y G , son objetos dependientes de la parametrización que estemos considerando, tal y como pone de manifiesto la siguiente observación.

Ejemplo 2.2.4.1 Calcular la primera forma fundamental de las siguientes superficies parametrizadas, donde estas sean regulares

1. $X(u,v) = (a \cdot \text{sen}(u) \cos(v), b \cdot \text{sen}(u) \text{sen}(v), c \cdot \cos(u))$; elipsoide
2. $X(u,v) = (a \cdot u \cdot \cos(v), b \cdot u \cdot \text{sen}(v), u^2)$; paraboloides
3. $X(u,v) = (a \cdot u \cdot \cosh(v), b \cdot u \cdot \text{senh}(u), u^2)$; paraboloides hiperbólicos
4. $X(u,v) = (a \cdot \text{senh}(u) \cos(v), b \cdot \text{senh}(u) \text{sen}(v), c \cdot \cosh(u))$; hiperboloides de dos hojas

Resolución .Sea w un vector tangente a la superficie en un punto $X(u,v)$, dado en una base $\{X_u, X_v\}$ por

$$w = AX_u + BX_v$$

Entonces de la primera fundamental de la superficie parametrizada es.

$$\begin{aligned} I(w) = |w|^2 &= \langle AX_u + BX_v, AX_u + BX_v \rangle \\ &= A^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2AB \langle X_u, X_v \rangle + B^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= A^2 E + 2ABF + B^2 G \end{aligned}$$

Solución 1.

$$X(u,v) = (a \cdot \text{sen}(u) \cos(v), b \cdot \text{sen}(u) \text{sen}(v), c \cdot \cos(u))$$

$$X_u(u,v) = (a \cdot \cos(u) \cos(v), b \cdot \cos(u) \text{sen}(v), -c \cdot \text{sen}(u))$$

$$X_v(u,v) = (-a \cdot \text{sen}(u) \text{sen}(v), b \cdot \text{sen}(u) \cos(v), 0)$$

Luego tenemos

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cdot \cos^2(u) \cos^2(v) + b^2 \cdot \sin(u) \cos(v) + c^2 \cdot \sin^2(u)$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -a^2 \cdot \sin(u) \cos(u) \sin(v) \cos(v) + b^2 \cdot \sin(u) \cos(v) \sin(v) \cos(v)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \cdot \cos^2(u) \sin^2(v) + b^2 \cdot \sin^2(u) \cos^2(u)$$

Por tanto

$$I(w) = A^2(a^2 \cdot \cos^2(u) \cos^2(v) + b^2 \cdot \cos^2(u) \sin^2(v) + c^2 \cdot \sin^2(u) + 2AB(b^2 - a^2) \sin(u) \cdot \cos(u) \sin(v) \cos(v) + B^2 \sin^2(u) (a^2 \sin^2(v) + b^2 \cos^2(v))$$

Solución 2.

$$X(u,v) = (a \cdot u \cdot \cos(v), b \cdot u \cdot \sin(v), u^2)$$

$$X_u(u,v) = (a \cdot \cos(v), b \cdot \sin(v), 2u)$$

$$X_v(u,v) = (-a \cdot \sin(v), b \cdot u \cos(v), 0)$$

$$E = a^2 \cos^2(v) + b^2 \sin^2(v) + 4u^2$$

$$F = -a^2 \sin(v) \cos(v) + b^2 u \sin(v) \cos(v)$$

$$G = a^2 \sin^2(v) + b^2 u^2 \cos^2(v)$$

Luego

$$I(w) = A^2(a^2 \cdot \cos^2(v) + b^2 \sin^2(v) + 4u^2) (u) + 2AB(b^2 - a^2) u \sin(v) \cdot \cos(v) \sin(v) + B^2 u^2 (a^2 \sin^2(v) + b^2 \cos^2(v))$$

Solución 3.

$$X(u,v) = (a \cdot u \cdot \cosh(v), b \cdot u \cdot \sinh(v), u^2)$$

$$X_u(u,v) = (a \cdot \cosh(v), b \cdot \sinh(v), 2u)$$

$$X_v(u,v) = (-a \cdot \sinh(v), b \cdot u \cosh(v), 0)$$

$$E = a^2 \cdot \cosh^2(v) + b^2 \cdot \sinh^2(v) + 4u^2$$

$$F = -a^2 u \cdot \sinh(v) \cosh(v) + b^2 \cdot u \sinh(v) \cosh(v)$$

$$G = a^2 u^2 \cdot \sinh^2(v) + b^2 \cdot u^2 \cosh^2(v)$$

Luego

$$I(w) = A^2(a^2 \cdot \cosh^2(v) + b^2 \sinh^2(v) + 4u^2) + 2AB(b^2 - a^2) u \cdot \sinh(v) \cdot \cosh(v) \sinh(v) + B^2 u^2 (a^2 \sinh^2(v) + b^2 \cosh^2(v))$$

Solución 4.

$$X(u,v) = (a \cdot \sinh(u) \cos(v), b \cdot \sinh(u) \sin(v), c \cdot \cosh(u))$$

$$X_u(u,v) = (a \cdot \cosh(u) \cos(v), b \cdot \cosh(u) \sin(v), -c \cdot \sinh(u))$$

$$X_v(u,v) = (-\sinh(u) \sin(v), b \cdot \sinh(u) \cos(v), 0)$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned}
E &= a^2 \cdot \cosh^2(u) \cos^2(v) + b^2 \cdot \cosh^2(u) \sin^2(v) + c^2 \sin^2(u) \\
F &= -a^2 \cdot \sinh(u) \cosh(u) \sinh(v) \cos(v) + b^2 \cdot \sinh(u) \cosh(u) \cos(v) \\
G &= a^2 \cdot \sinh^2(u) + b^2 \cdot \sinh^2(u) \cos^2(v)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
I(w) &= A^2(a^2 \cdot \cosh^2(v) \cos^2(v) + b^2(v) \cosh^2(u) \sin^2(v)) + \\
&2AB(b^2 - a^2) \sinh(u) \cdot \cosh(u) \sinh(v) \cos(v) + B^2 \sinh^2(u) (a^2 \sin^2(v) + b^2 \cos^2(v))
\end{aligned}$$

2.2.5 La segunda forma fundamental

La segunda forma fundamental es el objeto que nos va a permitir estudiar la relación que existe entre una superficie y el espacio en el que está contenida.

Definición 2.2.5.1 Sea S una superficie regular orientada y sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva de forma que $\alpha'(t)$ es una dirección principal en $\alpha(t)$, para todo $t \in I$. Se dice entonces que α es una línea de curvatura de S .

A continuación, vamos a probar que, fundamentalmente, las curvaturas principales determinan por completo la curvatura normal en cualquier dirección, siempre y cuando conozcamos el ángulo que forma dicho vector con una de las direcciones principales

Teorema 2.2.5.1 (La fórmula de Euler). Sea S una superficie regular orientada por N , sean $k_1(p) \leq k_2(p)$ las curvaturas principales de S en un punto $p \in S$ y sean e_1, e_2 las direcciones principales asociadas a dichas curvaturas, respectivamente.

Si $v_\theta \in T_p S$, $k_n(v_\theta, p) = k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta$ donde θ es el ángulo tal que $\cos \theta = \langle e_1, \theta \rangle$

Demostración. Dado que $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal del plano tangente, entonces podemos expresar $v_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$. Ahora

$$k_n(v_\theta, p) = \Pi_p(v_\theta) = \langle A_p v_\theta, v_\theta \rangle = \langle A_p (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2), \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle$$

Aplicamos la bilinealidad de A_p

$$k_n(v_\theta, p) = \langle k_1(p) \cos \theta e_1 + k_2(p) \sin \theta e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle$$

$$k_n(v_\theta, p) = k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta \quad \square$$

De esto:

$$k_1(p) = \min \{k_n(v,p): |v|=1\} \quad \text{y} \quad k_2(p) = \max \{k_n(v,p): |v|=1\}$$

Definición 2.2.5.2 Sea S una superficie regular orientada por N . Se denomina curvatura de Gauss de S en $p \in S$ al valor.

$$k(p) = \det A_p = \det(-dN_p)$$

Entonces

$$k(p) = k_1(p)k_2(p)$$

y

$$k(p) = \frac{1}{2} \text{traz} A_p = \frac{1}{2} \text{traz}(dN_p)$$

Es decir,

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$$

Proposición 2.2.5.1. La curvatura de Gauss no depende de la orientación escogida para la superficie. La curvatura media cambia signo al cambiar la orientación

Definición 2.2.5.3 Sea S una superficie regular orientada y sea $p \in S$. Entonces,

- Se dice que $p \in S$ es **elíptico** si $k(p) > 0$;
- Se dice que $p \in S$ es **hiperbólico** si $k(p) < 0$;
- Se dice que $p \in S$ es **parabólico** si $k(p) = 0$ pero $A_p \neq 0$, esto es, cuando una de las dos curvaturas principales en p se anula y la otra es distinta de cero;
- se dice que $p \in S$ es **plano** cuando $A_p \equiv 0$, esto es, si $k_1(p) = k_2(p) = 0$

Definición. 2.2.5.4 Si en $p \in S$, $k_1(p) = k_2(p)$, entonces se dice que p es un punto umbílico de S ; en particular, los puntos planos ($k_1(p) = k_2(p) = 0$) son puntos umbílicos.

Teorema 2.2.5.2 (Caracterización de las superficies totalmente umbilicales). Si todos los puntos de una superficie conexa S son puntos umbílicos, entonces S está contenida en una esfera o un plano

Ejemplo 2.2.5.1. Hallar la segunda forma fundamental del toro con parametrización

$$\vec{r}: [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = ((\cos\alpha + 2)\cos\beta, (\cos\alpha + 2)\sin\beta, \sin\alpha)$$

Resolución.

$$\begin{aligned}\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta) &= (-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta, -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \operatorname{cosa}) \\ \vec{r}_\beta(\alpha,\beta) &= (-(\operatorname{cosa}+2)\operatorname{sen}\beta, (\operatorname{cosa}+2)\operatorname{cos}\beta, 0)\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\times\vec{r}_\beta(\alpha,\beta) &= (-\operatorname{cosa}(\operatorname{cosa}+2)\operatorname{cos}\beta, -\operatorname{cosa}(\operatorname{cosa}+2)\operatorname{sen}\beta, \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{cosa}+2)) \\ \|\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\times\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\| &= (\operatorname{cosa}+2)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\vec{N}(\alpha,\beta) &= \frac{\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\times\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)}{\|\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\times\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\|} = (-\operatorname{cos}\alpha\operatorname{cos}\beta, -\operatorname{cos}\alpha\operatorname{sen}\beta, -\operatorname{sen}\alpha) \\ \vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) &= (-\operatorname{cos}\alpha\operatorname{cos}\beta, -\operatorname{cos}\alpha\operatorname{sen}\beta, -\operatorname{sen}\alpha) \\ \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) &= (-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \operatorname{sen}\alpha\operatorname{cos}\beta, 0) \\ \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) &= (-(\operatorname{cosa}+2)\operatorname{cos}\beta, (\operatorname{cosa}+2)\operatorname{sen}\beta, 0)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\vec{N}(\alpha,\beta) &= \frac{\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\times\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)}{\|\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\times\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\|} = (-\operatorname{cos}\alpha\operatorname{cos}\beta, -\operatorname{cos}\alpha\operatorname{sen}\beta, -\operatorname{sen}\alpha) \\ e(\alpha,\beta) &= \langle \vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta), \vec{N}(\alpha,\beta) \rangle = 1 \\ f(\alpha,\beta) &= \langle \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta), \vec{N}(\alpha,\beta) \rangle = 0 \\ g(\alpha,\beta) &= \langle \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha,\beta), \vec{N}(\alpha,\beta) \rangle = (\operatorname{cosa}+2)\operatorname{cosa}\end{aligned}$$

Entonces

$$\Pi_q(w) = a^2 + b^2(\operatorname{cosa}+2)\operatorname{cosa}$$

2.2.6 Expresión local de la segunda forma fundamental, la curvatura de Gauss y la curvatura media

Sean S una superficie regular orientada, $p \in S$ y (U, X) una parametrización en p . Dado un vector $v \in T_p S$, nos preguntamos por el valor de la segunda forma fundamental $\Pi_p(v)$ en términos de dicha parametrización. Para responder a esta cuestión, consideremos una curva α en S con condiciones iniciales p y v , de modo que $v = \alpha'(0) = u'(0)X_u(u(0), v(0)) + v'(0)X_v(u(0), v(0))$ y $p = X(u(0), v(0))$. En lo que sigue, X_u, X_v y

demás funcionales estarán evaluados en el punto $u(0),v(0)$, aunque lo omitiremos por comodidad. Entonces,

$$dN_p(v) = dN_p(\alpha'(0)) = u'(0)dN_p(X_u) + v'(0)dN_p(X_v) = u'(0)N_u + v'(0)N_v$$

Como N_u y N_v son vectores tangentes a S en p , podemos escribir

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$$

y de esta manera, $dN_p(v) = u'(0)(a_{11}X_u + a_{21}X_v) + v'(0)(a_{12}X_u + a_{22}X_v)$

$$dN_p(v) = (a_{11}u'(0) + a_{12}v'(0))X_u + (a_{21}u'(0) + a_{22}v'(0))X_v$$

Dado que $v = u'(0)X_u + v'(0)X_v$ la matriz de dN_p con respecto a la base $\{X_u, X_v\}$ es

$$dN_p \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Nuestra intención es calcular de forma explícita los coeficientes a_{ij} de esta matriz, para lo cual, se tiene que

$\Pi_p(v) = \langle A_p v, v \rangle = \langle -dN_p(v), v \rangle = -\langle u'(0)N_u + v'(0)N_v, u'(0)X_u + v'(0)X_v \rangle$ por la bilinealidad se tiene

$$\Pi_p(v) = -u'(0)^2 \langle N_u, X_u \rangle - u'(0)v'(0) \langle N_u, X_v \rangle - u'(0)v'(0) \langle N_v, X_u \rangle - v'(0)^2 \langle N_v, X_v \rangle$$

Donde, puesto que $\langle N_u, X_u \rangle = \langle N_v, X_v \rangle = 0$ derivando respecto a u, v , se tiene

$$\langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \quad \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \quad \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0$$

Ahora, despojamos los primeros, se tiene que

$$-\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle := e$$

$$-\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle := f$$

$$-\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle := f$$

$$-\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle := g$$

Las funciones e, f, g están definidas sobre el abierto U , y se denominan los coeficientes de la segunda forma fundamental. En términos de estos coeficientes, la segunda forma fundamental queda expresado como sigue

$$\Pi_p(v) = \Pi_p(\alpha'(0)) = u'(0)^2 e + 2u'(0)v'(0)f + v'(0)^2 g$$

En relación a las líneas de curvatura, siempre que no hayan puntos umbilicales, de encontrar una parametrización $X(u,v)$ de suerte que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura. Estas curvas coordenadas son entonces ortogonales, por lo que $F=0$. Además, al ser X_u una dirección principal, el vector

$$N_u = dN_p(X_u) = -A_p(X_u) = \lambda X_u \text{ es colineal con } X_u \text{ de donde } f = -\langle N_u, X_v \rangle = 0.$$

Razón por la cual a estas parametrizaciones también se llaman doblemente ortogonales.

En general

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

Pasando a forma matricial

$$\begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

la matriz de los coeficientes de la primera forma fundamental es invertible, dado que su determinante, $EG-F^2$, es siempre estrictamente positivo. Por lo cual podemos despejar la matriz de las variables, entonces, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -F \\ -F & G \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF-eG}{EG-F^2} & a_{12} &= \frac{gF-eG}{EG-F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF-fE}{EG-F^2} & a_{22} &= \frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{aligned}$$

Recordar que los a_{ij} son los coeficientes de la matriz de la aplicación dN_p respecto a la base $\{X_u, X_v\}$. Pasemos a calcular su determinante y su traza que dan la curvatura de Gauss ($k_p = \det(-dN_p) = \det dN_p$) y curvatura media respectivamente, quedando, Así

$$k(p) = \frac{1}{EG-F^2} [(fF-eG)(fF-gE) - (gF-fG)(eF-fE)]$$

La curvatura de Gauss viene dada por

$$k(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

y la curvatura media

$$H(p) = -\frac{1}{2} \text{traz}(dN_p) = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

2.2.7 Superficies regladas.

A lo largo de este capítulo presentaremos algunas de las principales características y propiedades de las que gozan las superficies regladas y que resultan fundamentales para el estudio más profundo de las mismas.

Definición 2.2.7.1 Una superficie reglada es aquella que tiene la propiedad de que por cada uno de sus puntos pasa una línea recta que está enteramente contenida en dicha superficie. En consecuencia, la superficie está formada por un número infinito de rectas, que se denominan generatrices

Definición 2.2.7.2 Una superficie reglada es una superficie regular parametrizada por una expresión cualquiera de la forma

$$\begin{aligned} X: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X(t, s) &= \alpha(t) + s w(t) \end{aligned}$$

Donde las funciones

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ w: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

son diferenciables. A la curva $\alpha(t)$ se le denomina directriz de la superficie y en cada punto de ella tomamos un vector unitario, dirección del generador que pasa por ese punto, este vector unitario depende del parámetro de la curva, tenemos la función $\omega(t)$ que nos describe a dichos vectores unitarios (Terrón, 2018).

A continuación, se muestran algunos ejemplos de superficies regladas.

Ejemplo 2. 2.7.1 (Superficies cilíndricas). Son aquellas superficies que están formadas por todas las generatrices paralelas que se apoyan en una curva plana cualquiera (directriz). Entre los más habituales son: El cilindro circular, elíptico, el parabólico, etc.

Tenemos una parametrización de la forma

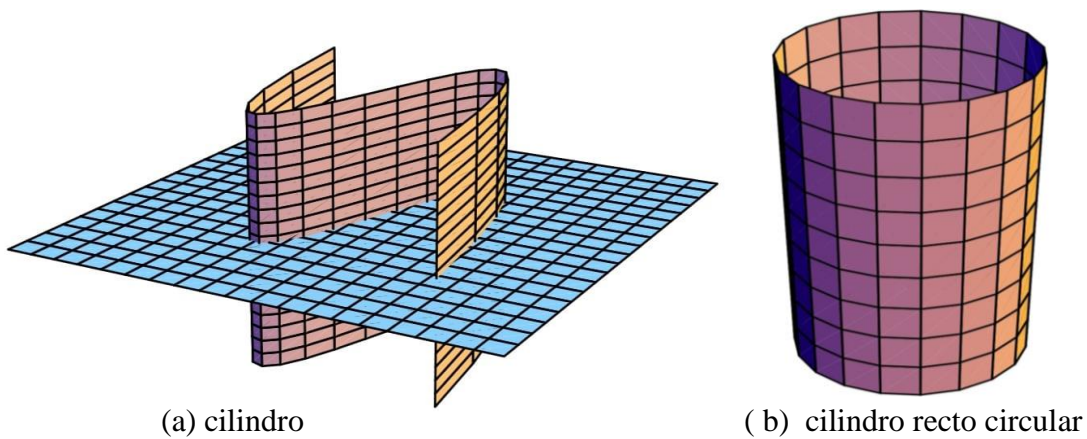
$$X(t, s) = \alpha(t) + s w(t)$$

Si las generatrices son perpendiculares al plano que contiene la directriz, se obtienen cilindros rectos. En particular, si tomamos la directriz a la circunferencia centrada en el origen de radio a , situado en el plano $z = 0$ de obtiene el cilindro usual, es decir

$$\begin{cases} \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0) \\ w(t) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación del cilindro es

$$X(t,s) = (a \cos t, a \sin t, 0) + s(0,0,1) \quad \text{con } X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



(a) cilindro

(b) cilindro recto circular

Figura (1) ejemplos de cilindros.

Ejemplo. 2. 2.7.2 (Superficies Cónicas). Son aquellas superficies que están formadas por todas las generatrices que se apoyan en una curva cerrada plana cualquiera (directriz) y que pasan por un punto exterior a ella (ésta será el vértice de la superficie). El más usual es el cono circular, donde la directriz es una circunferencia centrada en $(0,0,b)$, de radio a , situado en el plano $z = b$, es decir.

$$\begin{cases} \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, b) \quad , b \neq 0 \\ w(t) = \frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (a \cos t, a \sin t, b) \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación del cono es

$$X(t,s) = (a \cos t, a \sin t, b) + s \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (a \cos t, a \sin t, b) \right)$$

$$X(t,s) = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) (a \cos t, a \sin t, b)$$

Tener en cuenta, para que la ecuación del cono sea una superficie simple (inyectiva) es necesario que $(s,t) \in \mathbb{R} \times (-\sqrt{a^2+b^2}, +\infty)$ o $(s,t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, -\sqrt{a^2+b^2})$, esto es por:

$$X_t \times X_s = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2+b^2}$$

El vértice del cono se obtiene justamente para $s = -\sqrt{a^2+b^2}$, esto es un punto singular de la superficie.

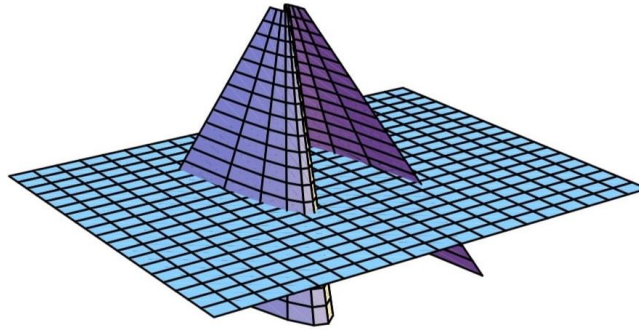


Figura (2) Cono

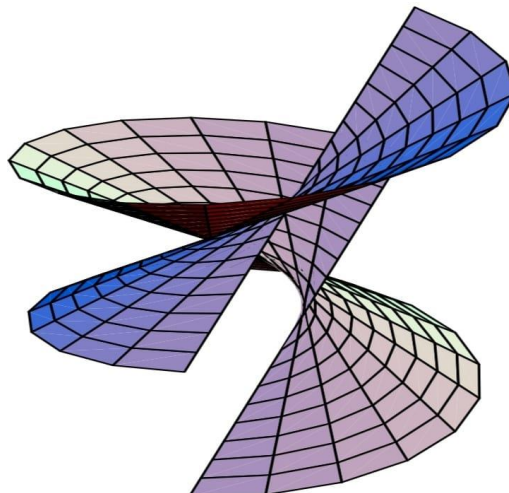
Ejemplo. 2. 2.7.3 (Superficie reglada desarrollable tangencial de una curva). Superficie formada por todas las rectas tangentes a una curva regular no recta. sea $\alpha(t):(a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada. Tomemos como $w(t) = T(t)$, Luego, la ecuación de la superficie es:

$$X(t,s) = \alpha(t) + sT(t)$$

Se tiene que

$$\begin{cases} X_t = T(t) + sk(t)n(t) \\ X_s = T(t) \end{cases} \Rightarrow X_t \wedge X_s = -sk(t)b(u) = 0 \Leftrightarrow s = 0$$

Ahora ,tomemos los puntos singulares de α , es decir, $(t,s) \in (a,b) \times (0,+\infty)$ o bien $(t,s) \in (a,b) \times (-\infty,0)$



Superficie tangente a una hélice

Ejemplo. 2. 2.7.4 (Superficie reglada de las normales principales de una curva.). La superficie formada por todas las rectas normales de una curva regular no recta. Una de las parametrizaciones de es ésta superficie, es.

$$X(t, s) = \alpha(t) + sN(t) \quad \text{donde } w(t) = N(t)$$

Se tiene que.

$$\begin{cases} X_t = T(t) + s(-k(t)T(t) + \tau(t)B(t)) \\ X_s = N(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_t \wedge X_s = -s\tau(t)T(t) + (1 - sk(t))B(t) \neq 0$$

Esta superficie tendrá punto singular si

$$\tau(t) = 0 \quad , \quad s = \frac{1}{k(t)}$$

Si el caso que α sea una circunferencia, el centro de α es un punto singular de la superficie de las normales principales de α , que coincide con el cono de vértice el centro α .

Ejemplo. 2. 2.7.5 (Superficie reglada de las binormales principales de una curva). Superficie formada por todas las rectas binormales a una curva regular no recta. Si $\alpha(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la curva, parametrizada por $X(t, s) = \alpha(t) + sB(t)$

se tiene que

$$\begin{cases} X_t = T(t) - s\tau(t)N(t) \\ X_s = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_t \wedge X_s = -N(t) - s\tau(t)T(t) \neq 0$$

Si el caso que α sea una circunferencia, la superficie reglada de sus binormales es el cilindro circular sobre α .

Definición. 2.2.7.3 Una superficie reglada $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$ se dice no cilíndrica si $w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$

Si la dirección de los generadores es constante, son paralelos y por lo tanto obtenemos un fragmento de cilindro. En esta investigación evitamos que w' se anule en ningún punto,

cuando se aíslan los ceros de la función $w'(t)$, la superficie puede simplemente fragmentarse en regiones donde $w'(t)$ no se anule, en consecuencia se puede aplicar la teoría.

Definición 2.2.7.4 Se denomina línea de estricción de una superficie reglada a una curva $\gamma(t)$ sobre la superficie. Es decir, contenida enteramente sobre la superficie

Proposición 2.2.7.1 Una superficie reglada no cilíndrica parametrizada mediante

$$X(t,s)=\alpha(t)+sw(t)$$

Con $|w(t)|=1$, existe una curva en la superficie parametrizada por

$$\gamma(t)=\alpha(t)+s(t)w(t) \text{ (línea de estricción)}$$

tal que $\gamma'(t) \perp w'(t)$ para todo t , y que no depende de la directriz escogida para parametrizar la superficie.

Demostración : por hipótesis se tiene que $|w(t)|=1$, entonces, derivando esta identidad se deduce que $w \perp w'$. Ahora, pasamos a derivar a la parametrización de $\gamma(t)$ se tiene

$\gamma'=\alpha'+s'w+sw'$ y buscando la igualdad a la queremos llegar, y usando el resultado anterior $w \perp w'$, tenemos $\langle \gamma', w' \rangle = \langle \alpha' + s'w + sw', w' \rangle = \langle \alpha', w' \rangle + s|w'|^2 = 0$, de modo que la curva γ debe verificar que

$$s = \frac{\langle \alpha', w' \rangle}{|w'|^2}$$

Así pues, definiendo la curva como

$$\gamma = \alpha - \frac{\langle \alpha', w' \rangle}{|w'|^2} w$$

Es necesario que w sea unitario en esta parametrización, ahora, puede comprobarse derivando, efectivamente $\gamma'(t) \perp w'(t)$, como queríamos.

Proposición 2.2.7.2. La línea de estricción de una superficie reglada es independiente de la directriz elegida en la parametrización de dicha superficie, es decir si se parametriza la superficie reglada por medio de otra directriz, la línea de estricción sigue siendo la misma.

Corolario 2.2.7.1. Se denomina línea de estricción de una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s)=\alpha(t)+sw(t)$, a la única curva $\gamma(t,s)=\alpha(t)+sw(t)$ sobre la superficie que corta a las generatrices perpendicularmente en todo punto.

Nota 2.2.7.1 .Una superficie reglada puede parametrizarse como $X(t,s) = \gamma(t) + sw(t)$, Donde $\gamma(t)$ es la línea de estricción de la superficie

Nota 2.2.7.2. Se dice puntos centrales a los puntos de la superficie que están en la traza de línea de estricción.

Ahora estudiaremos diversas cuestiones sobre superficies regladas bajo las hipótesis que mencionamos. Observemos que, como $w' \perp w$ y $w' \perp \gamma'$, entonces w' es ortogonal al plano generado por ambos, y por tanto es proporcional $\gamma' \wedge w$. De este modo, existirá alguna función escalar λ tal que $\gamma' \wedge w = \lambda w'$.

Definición 2.2.7.5. Una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s) = \gamma(t) + sw(t)$ donde $\gamma(t)$ es la línea de estricción, con $|w| = 1$, se define el parámetro de distribución de X como a función escalar $\lambda(t)$, que verifica $\gamma'(t) \times w(t) = \lambda(t)w'(t)$ para todo $t \in I$

Nota 2.2.7.3 La unicidad del parámetro de distribución es inmediato. Es decir, si existiesen dos funciones escalares λ_1 y λ_2 , en las condiciones de la definición anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\gamma' \wedge w &= \lambda_1 w' \\ \gamma' \wedge w &= \lambda_2 w\end{aligned}$$

Restamos ambas expresiones, se tiene

$$\begin{aligned}\lambda_1 w' - \lambda_2 w' &= 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)w' &= 0\end{aligned}$$

Recordemos que, estamos trabajando con superficies no cilíndricas, $w' \neq 0$, de donde se deduce que $\lambda_1 = \lambda_2$

El parámetro de distribución mide la velocidad a la que cambia el ángulo del vector normal a la superficie a lo largo de dicha superficie

Definición 2.2.7.6. Sean dos generatrices, consideremos el cociente entre el ángulo que determinan y su distancia. El límite cuando las distancias entre los generatrices tienden a cero se llama la estricción

Teorema 2.2.7.1 La estricción en la definición anterior, existe y vale

$$\frac{|w'|^2}{\det(\gamma' w, w')}$$

Corolario 2.2.7.2 El parámetro de distribución es el inverso de la estricción.

Demostración. Por la definición del parámetro de distribución, tener en cuenta que se trata de la única función escalar verificando

$$\gamma'(t) \wedge w(t) = \lambda(t)w'(t)$$

Y que, por tanto, viene dado por

$$\lambda = \frac{\langle \gamma' \wedge w, w' \rangle}{|w'|^2} = \frac{\det(\gamma' w, w')}{|w'|^2}$$

Sintetizando, la estricción mide lo rápido que gira el plano tangente alrededor de las generatrices conforme se avanza por ellas, y el inverso de esta cantidad es el parámetro de distribución.

Ahora pasemos a ver algunas propiedades generales, en las cuales veremos de qué manera el parámetro de distribución contiene una cantidad de información.

Proposición. 2.2.7.3. Las generatrices de una superficie reglada son líneas asintóticas y geodésicas.

Demostración. Por ser rectas su curvatura k es nula. Como $k = k_n^2 + k_g^2$, en consecuencia tanto la curvatura normal como la curvatura geodésica se anulan, de modo que las generatrices son, respectivamente, líneas asintóticas y geodésicas.

Proposición 2.2.7.4. Una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s) = \gamma(t) + sw(t)$, en las condiciones usuales, se verifica

- i. Los puntos singulares son exactamente los puntos centrales que son ceros del parámetro de distribución
- ii. La curvatura de Gauss es no positiva, y nula sobre los ceros del parámetro de distribución

Demostración. i) Los puntos singulares son aquellos puntos donde el plano tangente no está definido. Esto significa, a que los vectores X_t, X_s son linealmente dependientes, y por tanto su producto vectorial es nulo. Pasando al cálculo

$$\begin{aligned} X_t &= \gamma' + sw' \quad , \quad X_s = w \\ \Rightarrow X_t \wedge X_s &= (\gamma' + sw') \wedge w = \lambda w' + sw' \wedge w \end{aligned}$$

Luego, aplicando el módulo

$$|X_t \wedge X_s|^2 = \lambda^2 |w'| + s^2 |w'|^2 = (\lambda^2 + s^2) |w'|^2$$

Se ha considerado $w' \perp w$ y $|w'| = 1$. Se deduce entonces que los puntos singulares están situados sobre la línea de estricción ($s = 0$) y se tiene cuando $\lambda = 0$. Es decir, son puntos centrales y ceros del parámetro de distribución.

ii) ahora encontremos una expresión general para la curvatura de Gauss en los puntos regulares. Recordemos para la curvatura necesitamos la segunda derivada de la parametrización, y son

$$\begin{aligned} X_{tt} &= \gamma'' + s w'' \\ X_{ss} &= 0 \\ X_{ts} &= w' \end{aligned}$$

y el vector normal

$$\frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|} = \frac{(\gamma' + s w') \wedge w}{\sqrt{\lambda^2 + s^2} |w'|}$$

Dado que $X_{ss} = 0$ entonces $g = 0$.

Tambien
$$f = \langle N, X_{ts} \rangle = \frac{\lambda |w'|}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}}$$

Luego la curvatura de Gauss resulta ser

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2)^2} \quad \dots (*)$$

Sintetizando, se observa, que la curvatura de toda superficie reglada es negativa o cero, anulándose únicamente en los ceros del parámetro de distribución.

Corolario 2.2.7.3 Una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s) = \gamma(t) + s w(t)$, en las condiciones usuales, se verifica

- i. Sobre cada generatriz con $\lambda \neq 0$, la curvatura de Gauss es continua y alcanza un máximo en el punto central.
- ii. Sobre cada generatriz, la curvatura tiende a cero cuando “s” tiende a infinito
- iii. La curvatura es simétrica respecto al punto central en toda generatriz

Demostración. i) Sabemos por el resultado anterior (*) que

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2)^2}$$

Si $\lambda \neq 0$ entonces k es una función racional cuyo denominador no se anula, y dado que λ es continua, se deduce que k también lo es. Por tanto, k alcanza un máximo cuando $s = 0$, y

la curvatura vale
$$k = \frac{-1}{\lambda^2}$$

ii) basta tomar el límite en (*)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} k = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2)^2} \right) = 0$$

iii) Esto es de inmediato, dado que, solo aparecen potencias pares del parámetro “s” en la expresión de k .

Nota 2.2.7.4. *Recordatorio*, aunque no ha sido necesario para los cálculos anteriores, los coeficientes de la primera forma fundamental para una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por línea de estricción, se tiene.

$$\begin{aligned} E &= \langle X_t, X_t \rangle = \langle \gamma' + s w', \gamma' + s w' \rangle = \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2s \langle \gamma', w' \rangle + s^2 \langle w', w' \rangle = |\gamma'|^2 + s^2 |w'|^2 \\ F &= \langle X_t, X_s \rangle = \langle \gamma' + s w', w \rangle = \langle \gamma', w \rangle + s \langle w', w \rangle = \langle \gamma', w \rangle \\ G &= \langle X_s, X_s \rangle = \langle w, w \rangle = 1 \end{aligned}$$

En resumen.

$$\begin{aligned} E &= |\gamma'|^2 + s^2 |w'|^2 & F &= \langle \gamma', w \rangle & G &= 1 \\ f &= \frac{\lambda |w'|}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} & g &= 0 \\ N &= \frac{\lambda w' + s w' \wedge w}{\sqrt{\lambda^2 + s^2} |w'|} & k &= \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2)^2} \end{aligned}$$

Lema 2.2.7.1 Para efectos de cálculo, se verifica la siguiente identidad

$$|X_t \wedge X_s|^2 = EG - F^2$$

Demostración. aplicando módulos, se tiene

$$\begin{aligned} |X_t \wedge X_s| &= |X_t| |X_s| \sin(\angle X_t, X_s) \\ \langle X_t, X_s \rangle &= |X_t| |X_s| \cos(\angle X_t, X_s) \end{aligned}$$

Sumando los cuadrados, obtenemos

$$|X_t \wedge X_s|^2 + \langle X_t, X_s \rangle^2 = |X_t|^2 |X_s|^2$$

Reemplazamos los coeficientes de la primera forma fundamental

$$|X_t \wedge X_s|^2 = EG - F^2$$

2.2.8 Superficies regladas desarrollables

En las superficies regladas encontramos un subconjunto destacado, el de las superficies desarrollables, que tienen la propiedad de ser aplanadas hasta conseguir planos sin modificarlas distancias entre los puntos, es decir, trata de superficies que pueden transformarse en un plano, cortándola y doblándola, pero sin distorsionarla.

Definición 2.2.8.1 Una superficie reglada $X(t,s) = \alpha(t) + s w(t)$, con $|w(t)| = 1$ es desarrollable si $\det(w, w', \alpha') = 0$

A continuación, analicemos la desarrollabilidad de las superficies.

Ejemplo 2.2.8.1. (Los cilindros)

Como ya se ha visto en la sección anterior, una parametrización del cilindro es

$$X(t,s) = \alpha(t) + s w(t)$$

En particular, si tomamos la directriz a la circunferencia centrada en el origen de radio a , situado en el plano $z = 0$ de obtiene el cilindro usual, es decir

$$\begin{cases} \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0) \\ w(t) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación del cilindro es

$$X(t,s) = \alpha(t) + s w(t) = (a \cos t, a \sin t, 0) + s(0, 0, 1)$$

Para verificar que se trata de una de una superficie reglada desarrollable, tenemos que ver si cumple la definición 2.2.1, es decir, $\det(w, w', \alpha') = 0$,

Tenemos.

$$\begin{cases} \alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0) \\ w(t) = (0, 0, 1) \\ w'(t) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Por tanto $\det(w, w', \alpha') = 0$.

Ejemplo 2.2.8.2 (cono)

El más usual es el cono circular, donde la directriz es una circunferencia centrada en $(0, 0, b)$, de radio a , situado en el plano $z = b$, es decir.

$$\begin{cases} \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, b), \quad b \neq 0 \\ w(t) = \frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \cos t, a \sin t, b) \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación del cono es

$$X(t,s) = \alpha(t) + s w(t) = (a \cos t, a \sin t, b) + s \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \cos t, a \sin t, b) \right)$$

$$X(t,s) = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) (a \cos t, a \sin t, b)$$

Para verificar que se trata de una de una superficie reglada desarrollable, tenemos que ver si cumple la definición 2.2.8.1, es decir, $\det(w, w', \alpha') = 0$,

Tenemos

$$\begin{cases} \alpha'(t) = (-a \operatorname{sent}, a \operatorname{cost}, 0) \\ w(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (a \operatorname{cost}, a \operatorname{sent}, b) \\ w'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-a \operatorname{sent}, a \operatorname{cost}, 0) \end{cases}$$

Luego,

$$\det(w, w', \alpha') = \begin{vmatrix} \frac{a \operatorname{cost}}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a \operatorname{sent}}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-a \operatorname{sent}}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a \operatorname{cost}}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ -a \operatorname{sent} & a \operatorname{cost} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, el cono es una superficie reglada desarrollable.

Ejemplo 2.2.3. Las superficies normales son siempre superficies regladas, pero no tienen que ser necesariamente desarrollables. Consideremos la superficie formada por las normales de hélice circular, cuya parametrización es

$$\alpha(t) = (\operatorname{cost}, \operatorname{sent}, t)$$

Tenemos la siguiente superficie reglada

$$X(t,s) = \alpha(t) + s n_{\alpha}(t) = (\operatorname{cost}, \operatorname{sent}, t) + s (-\operatorname{cost}, -\operatorname{sent}, 0)$$

$$X(t,s) = ((1-s)\operatorname{cost}, (1-s)\operatorname{sent}, t)$$

Ahora pasemos a verificar, si efectivamente es una superficie reglada no desarrollable,

$$\begin{cases} \alpha'(t) = (-\operatorname{sent}, \operatorname{cost}, 1) \\ w(t) = n_{\alpha} = (-\operatorname{cost}, -\operatorname{sent}, 0) \\ w'(t) = (\operatorname{sent}, -\operatorname{cost}, 0) \end{cases}$$

Luego,

$$\det(w, w', \alpha') = \begin{vmatrix} -\operatorname{cost} & -\operatorname{sent} & 0 \\ \operatorname{sent} & -\operatorname{cost} & 0 \\ -\operatorname{sent} & \operatorname{cost} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Dado que $\det(w, w', \alpha') \neq 0$, se concluye que la superficie es no desarrollable.

Proposición 2.2.8.1. una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s)=\alpha(t) + s w(t)$ es desarrollable si el parámetro de distribución $\lambda(t)$ es nulo, para todo "t"

Demostración. Por el corolario 2.1.1 del parámetro de distribución

$$\lambda = \frac{\langle \gamma' \wedge w, w' \rangle}{|w'|^2} = \frac{\det(\gamma', w, w')}{|w'|^2} = 0$$

Proposición 2.2.8.2. Las superficies desarrollables son localmente isométricas al plano.

Demostración. Consideremos la parametrización de la superficie por $X(t,s)=\gamma(t) + s w(t)$, para las superficies regladas arbitrarias se tiene $g = 0$, también tenemos que

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{ts} \rangle = \left\langle \frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|}, X_{ts} \right\rangle = \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \langle X_t \wedge X_s, X_{ts} \rangle = \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \det(X_t, X_s, X_{ts}) \\ &= \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \det(\gamma' + s w', w, w') = \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \det(\gamma', w, w') = 0 \end{aligned}$$

Luego, la curvatura de Gauss, es

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

Por tanto, las superficies desarrollables son localmente isométricas al plano

2.2.9 Superficies con curvatura Gaussiana Nula.

En ésta sección de nuestra investigación probaremos dos resultados.

1. Toda curvatura Gaussiana nula es, necesariamente una unión de fragmentos de cilindros, conos y superficies tangentes a curvas
2. Toda superficie regular llana completa es necesariamente un plano o un cilindro, ambas superficies regladas

Teorema 2.2.9.1 Una superficie desarrollable parametrizada por $X(t,s)=\alpha(t) + s w(t)$ es localmente un fragmento de cilindro, cono, o superficies tangentes ,en entornos que no contengan puntos de acumulación de ceros de w' .

Demostración. Consideramos $X(t,s)=\gamma(t) + s w(t)$, con $\gamma(t)$ línea de estricción ,tener en cuenta que, $|w(t)| = 1$, se tiene $w(t) \perp w'(t)$. por tanto , $w(t).w'(t) = 0$.

Dado que la superficie es desarrollable ,se tiene, $\det(w, w', \gamma') = 0$. Podemos distinguir los siguientes casos.

- Si $w(t) \wedge w'(t) = 0$, entonces se tiene que $w(t)/w'(t)$ lo que implica que $w'(t) = 0$, esto quiere decir $w(t)$ es constante. Dado que w es la dirección de las generatrices, esto se traduce en que la superficie sea un cilindro.
- Si $w(t) \wedge w'(t) \neq 0$ podemos distinguir dos casos: Los ceros de la expresión sean aislados o se acumulen. Como los ceros del producto son los ceros de $w'(t)$, el caso de vamos dejarlo en esta investigación. Por otro lado, veamos el caso donde los ceros sean aislados.

Se tiene que $w'(t) \neq 0$, por tanto, la superficie no es un cilindro y su parámetro de distribución es idénticamente nulo.

En consecuencia, los puntos singulares son, exactamente los puntos centrales, es decir los puntos de la línea de estricción. Si $\gamma'(t) \neq 0$, como $\gamma'(t)w'(t) = 0$, entonces $\gamma'(t)/w'(t)$. Entonces la superficie es una reglada desarrollable tangencial.

Ahora $\gamma'(t) = 0$, la línea de estricción es un punto y la superficie es un cono de vértice dicho punto, es decir todas las generatrices pasan por el punto, ya que toda generatriz tiene un punto de estricción, luego estamos en cono.

En otro caso, la superficie es una unión de conos y desarrollables tangenciales.

- La superficie es una unión de cilindros, cono y desarrollables tangenciales.

□

Antes de demostrar el siguiente resultado, es conveniente recordar las definiciones y las propiedades básica de superficies regulares planas y completas.

2.2.10 Clasificación de superficies regulares planas y completas

Sea S una superficie regular plana. Dado que la curvatura de Gauss es $k = k_1 k_2$, tenemos que necesariamente todos los puntos han de ser puntos parabólicos o planos. Denotemos por P al conjunto de los puntos planos, y sea $U = S \setminus P$ el conjunto de los puntos parabólicos, es inmediato que P es cerrado en S .

En efecto: si $k = 0$, los puntos planos son exactamente los puntos de S que son solución de $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$, y sabemos que H es continua.

Teorema 2.2.10.1. (Olinde- Rodrigues). Una curva regular $\alpha(t)$ en una superficie regular S es línea de curvatura si y solo si $N'(\alpha(t)) = \mu(t)\alpha'(t)$, donde μ es una función escalar diferenciable.

En tal caso, $-\mu(t)$ es la curva normal de S en $\alpha(t)$ en la dirección de $\alpha'(t)$.

Lema 2.2.10.1 Sea S una superficie regular parametrizada por X y se $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$ una curva en ella, donde u,v son funciones escalares reales diferenciables. Entonces la curva es una línea de curvatura si y solo si se verifica la ecuación.

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)(u'v') + (gF - fG)(v')^2 = 0$$

Corolario 2.2.10.1 Sea S una superficie regular parametrizada por X , para que las curvas coordenadas de la parametrización sean líneas de curvatura, es suficiente y necesaria que $F = f = 0$.

Demostración. si las curvas coordenadas son líneas de curvatura entonces sus direcciones son principales, luego ortogonales, de modo que $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$. Como $F = \langle X_v, N \rangle = 0$ derivemos respecto a u , se tiene que $\langle X_{uv}, N \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle$. Luego por el teorema de Olinde-Rodrigues, se tiene $N_u = dN(X_u) = \mu X_u$, de modo que $f = \langle X_{uv}, N \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = -\mu \langle X_v, X_u \rangle = 0$. Recíprocamente, si $F = f = 0$, por el lema 3.2.3 $(gE - eG)(u'v') = 0$, de modo que a lo largo de las curvas coordenadas $u = \text{cte}$ y $v = \text{cte}$. Se verifica la ecuación. Por lo tanto, son líneas de curvatura.

Teorema 2.2.10.2 Sean S una superficie regular y w_1, w_2 dos campos diferenciables en algún entorno de un punto $p \in S$ donde, además, son linealmente independiente. Entonces se puede parametrizar un entorno $V \subset U$ de manera que sendas curvas coordenadas sean paralelas a sendos campos en todo punto de V .

Corolario 2.2.10.2 Sean S una superficie regular y $p \in S$ un punto no umbílico. Entonces existe una parametrización local X de S alrededor de p tal que las curvas coordenadas $X(u,t)$ y $X(t,v)$ con u,v fijos, son líneas de curvatura.

Demostración. para una demostración se puede ver (Lucas Marin, pg 27)

Definición 2.2.10.1 Dada una parametrización en las condiciones anteriores se llama una parametrización doblemente ortogonal.

Corolario 2.2.10.3 dada una superficie con una parametrización doblemente ortogonal, las ecuaciones de Mainardi-Codazzi se reducen a

$$\begin{cases} e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \end{cases}$$

Lema 2.2.10.2 Sean S una y $p \in S$ un punto parabólico . Entonces existe exactamente una dirección asintótica en el plano tangente a S en p .

Demostración. Dado que el punto es parabólico no puede ser umbílico, luego por la fórmula de Euler, las curvaturas normales en p se pueden expresar como $k_n(p,v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$.Donde $v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 = (\cos \theta, \sin \theta) = (x,y)$, las direcciones asintóticas serán las soluciones en x,y de la ecuación $0 = k_n(p,v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = k_1 x^2 + k_2 y^2$, dado que el punto p es parabólico ,una de las curvaturas principales es nula .como el vector $v = (x,y)$ es unitario ,entonces es inmediato que la ecuación anterior tiene una única solución ,como se quería. \square

Es claro que toda recta es una curva asintótica. Veamos un resultado que refuerza el lema 2.2.10.2 al llevarlo a capos de las superficies planas.

Proposición 2.2.10.1 Sea S una superficie con $k \equiv 0$ y $p \in U \subset S$ un punto parabólico .Entonces la única curva asintótica de S que pasa por p es un segmento abierto de recta.

Demostración. Como el punto p es parabólico no puede ser umbílico, por el corolario 2.2.10.2 es posible parametrizar en un entorno $V \subset U$ de p las curvas coordenadas son líneas de curvatura .Dado que p es parabólico, una de las direcciones principales es asintótica ,de modo que una de las líneas de curvatura es una curva asintótica ,supongamos que $X(t,v)$ con $v = v_0$ constante. En virtud al teorema de Olinde-Rodrigues, tenemos que $N_u = 0$ a lo largo de tal curva , la función μ corresponde a la curvatura normal en la dirección de la curva ,que resulta ser nula por ser una dirección asintótica. Esto es válido para todo punto de la curva. Se deduce entonces que en V .

$$\langle X, N \rangle_u = \langle X_u, N \rangle + \langle X, N_u \rangle = 0$$

Esto es debido a que X_u es tangente . Esto significa que, a lo largo de la curva $X(u,v_0)$, $\langle X, N \rangle$ es constante ,pero como $N_u = 0$, entonces N también es constante a lo largo de esta curva .Si denotamos $N_0 = N(p)$, luego tendremos que $N(u,v_0) = N_0$, entonces concluimos

que $\langle X, N_0 \rangle$ es constante, entonces la curva $X(u, v_0)$ está contenido en un plano ortogonal al vector fijo N_0 .

Por otra parte, dado que $\langle X, N \rangle_u = 0$, se tiene que $\langle X, N \rangle = \phi(v)$ en todo. Derivando con respecto a v , se obtiene $\langle X, N_v \rangle = \phi'(v)$, en particular tal producto escalar es constante a lo largo de la curva, como $N_u = 0$, entonces, se deduce que $N_{vu} = N_{uv} = 0$, en consecuencia N_v también es constante a lo largo de $X(u, v_0)$, y será $N_v(u, v_0) = (N_v)_0 = N_v(p)$. Por lo tanto $\langle X, N_v \rangle = \langle X, (N_v)_0 \rangle$ de modo que esto es constante, llegamos a la conclusión de nuevo que la curva está contenido en un plano normal a $(N_v)_0$.

Por último, se observamos que los vectores $(N_v)_0$ y N_0 son linealmente independientes. En efecto N_v siempre es ortogonal a N y no puede ser nulo, porque el punto p es parabólico y el módulo de N_v es la curvatura principal que no es nula, por el teorema de Olinde-Rodrigues y por la parametrización por líneas de curvatura. En consecuencia, la curva está contenida, en todo un abierto V , es decir, en la intersección de dos planos distintos, lo cual implica, que debe ser necesariamente un segmento de recta.

□

Ahora veamos la curvatura de Gauss para parametrizaciones ortogonales.

Proposición 2.2.10.2 Dada una superficie regular parametrizada ortogonalmente, se tiene.

$$k = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right]$$

Demostración. Para una demostración se puede ver (Lucas Marin.pg 30)

Lema 2.2.10.3 Sea s la longitud de arco de la curva asintótica que pasa por un punto parabólico p de una superficie S , con curvatura nula, y sea $H = H(s)$ la curvatura media de S a lo largo de dicha curva. Entonces, $\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$ en U .

Demostración. Dado que p es parabólico no puede ser umbílico. Establecemos entonces en un entorno $V \subset U$ de p un sistema de coordenadas de manera que las curvas coordenadas son líneas de curvatura (esto por el corolario 2.2.10.2) y por la proposición 2.2.10.1, suponemos que las curvas $v = \text{cte}$, Son curvas asintóticas.

Del corolario 2.2.10.1, se tiene $F = f = 0$. Ahora denotemos por $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ a la curva $v = \text{cte}$ en la superficie parametrizada por longitud de arco (p.l.a) por hipótesis, se tiene que $v' = 0$ a lo largo de esta curva. Como la curva es asintótica, verificará la siguiente ecuación. $e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2 = 0$, dado que $e(u')^2 = 0$ con u no constante, entonces $e = 0$. Luego la ecuación de curvatura media se reduce a

$$H = \frac{g}{2G} \quad \dots\dots(1^*)$$

Por el corolario 3.2.7 (ecuaciones de Mainardi - Codazzi) y teniendo en cuenta $F = f = 0$, queda como

$$\begin{cases} 0 = \frac{E_v}{2} \left(\frac{g}{G} \right) \\ g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{g}{G} \right) \end{cases} \quad \dots\dots (2^*)$$

Observemos que $g \neq 0$ puesto que si $H = 0$, entonces, p sería plano y no parabólico. De la primera ecuación de (2*) se deduce $E_v = 0$. Por tanto, $E = E(u)$ es una función que solo depende u . Entonces es válido definir el siguiente cambio de variable de parámetro.

$$\bar{u} = \int \sqrt{E(u)} \, du \quad \bar{v} = v.$$

En lo que sigue eliminaremos las barras por simplicidad de notación, es decir, volveremos llamar u y v a los nuevos parámetros. El parámetro u mide ahora la longitud de arco a lo largo de $v = \text{cte}$, puesto que $E = \langle X_u, X_u \rangle$ y X_u es la velocidad de esta curva de esta curva. Con esta nueva parametrización, se tiene que tanto $E = 1$ y $u = s$. Por la fórmula de curvatura de Gauss para parametrizaciones ortogonales se tiene.

$$k = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u = \frac{-1}{\sqrt{G}} (\sqrt{G})_{uu} = 0$$

De esto se deduce entonces que

$$\sqrt{G} = c_1 u + v c_2 \quad \dots\dots (3^*)$$

Por la segunda ecuación de (2*), dado que $g \neq 0$, se deduce

$$\frac{g_u}{g} = \frac{G_u}{2\sqrt{G}\sqrt{G}} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}} = 0$$

Es decir, $(\log g)_u = (\log \sqrt{G})_u$, integrando

$$g = c_3(v) \sqrt{G} \quad \dots\dots (4^*)$$

De las igualdades (3* y 4*), la curvatura media H , de la ecuación (1*) queda como

$$H = \frac{g}{2\sqrt{G}} = \frac{c_3(v)\sqrt{G}}{2\sqrt{G}\sqrt{G}} = \frac{c_3(v)}{2(c_1(v)u + c_2(v))}$$

Se sabe que $u = s$, derivando $\frac{1}{H}$ con respecto a s dos veces se obtiene 0.

Recuperando la nueva notación de barras. Aplicando por la regla de la cadena, dado que \bar{u} depende de u y $\frac{d\bar{v}}{dv} = 1$, se tiene

$$X_u = \frac{d\bar{u}}{du} X_{\bar{u}} \quad , \quad X_v = X_{\bar{v}} \quad , \quad X_{uu} = \frac{d^2\bar{u}}{du^2} X_{\bar{u}\bar{u}} \quad , \quad X_{uv} = \frac{d\bar{u}}{du} X_{\bar{u}\bar{v}} \quad , \quad X_{vv} = X_{\bar{v}\bar{v}}.$$

Entonces, deducimos

$$\bar{e} = \frac{d^2\bar{u}}{du^2} e = 0 \quad , \quad \bar{F} = \frac{d\bar{u}}{du} F = 0 \quad , \quad \bar{f} = \frac{d\bar{u}}{du} f = 0$$

La demostración a concluido.

□

Definición 2.2.10.2 Una curva asintótica que pasa por $p \in S$ es maximal si no está contenida propiamente en otra curva asintótica que pasa por p .

Proposición 2.2.10.3 Sea S una superficie regular plana (con $k \equiv 0$) y sea r una curva asintótica maximal que pasa por $p \in U \subset S$. Entonces $r \cap P = \emptyset$.

Demostración. Consideremos que la curva asintótica maximal r que pasa por p contuviera un punto plano q , y asumimos que $r(0) = p$ y está parametrizada (p.l.a) s . Puesto que la curva también pasa por un punto parabólico y es conexa, tiene algún punto de la frontera de U , asumamos $r(s_0) = p_0$. Así mismo, como U es abierto, se tiene que $p_0 \in P$ (es plano). Ahora si tomamos como el primer punto plano contenido en r tal que $r(s) \in U$, $\forall 0 \leq s < s_0$.

Acudiendo al lema 3.2.11, deducimos la curvatura media H , a lo largo de la curva (r), como una expresión de la forma

$$H(s) = \frac{1}{as+b}$$

Con a y b constante, $H(s) = H(r(s))$. Puesto que los puntos de P verifican $H=0$ y P es cerrado, tomemos límites en s con $s < s_0$, se tiene

$$0 = H(p_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^+} H(s) = \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{1}{as+b}$$

Lo cual constituye una contradicción, esto significa que, una curva asintótica que pasa por un punto parabólico está dentro del abierto U (de puntos parabólicos).

□

Sintetizando, la superficie S está dividida en dos subconjuntos disjuntos P y U correspondientes a los puntos planos y parabólicos, ahora veamos que sus fronteras en S coinciden.

Lema 2.2.10.4. Sea S una superficie regular plana. Entonces $Bd(P) = Bd(U) \subset P$.

Demostración. Como $Bd(U)$ es la frontera de U en S , $Bd(U)$ es el conjunto de los puntos $p \in S$ tal que cada entorno de p en S contiene puntos de U y puntos de $P = S \setminus U$. Como U es abierto en S se deduce que $Bd(U) \subset P$. Además, como la definición de punto frontera es simétrica para U y para P tenemos que

$$Bd(U) = Bd(P)$$

□

Seguidamente estudiamos el comportamiento de la frontera, veremos el conjunto $Bd(U) = Bd(P)$ está constituido por segmentos rectilíneos.

Proposición 2.2.10.4 Sean S una superficie regular plana (con curvatura $k \equiv 0$), $Bd = Bd(U) = Bd(P) \subset P \subset S$ la frontera común y $p \in Bd$ un punto de ella. Entonces por p pasa un único segmento de recta $C(p) \subset S$, además, está contenido en Bd .

Demostración. Sea $p \in Bd(U)$ será un punto límite de U , es posible elegir una sucesión $\{p_n\}_n \subset U$, tal que $p_n \rightarrow p$. Para cada p_n , que es parabólico, sea $C(p_n)$ la única curva asintótica maximal que pasa por p_n (esto por el teorema 2.2.10.2), que sabemos se trata de un segmento abierto de recta (por la proposición 2.2.10.1). Demostraremos que cuando $n \rightarrow \infty$, las direcciones asintóticas de los segmentos $C(p_n)$ convergen hacia una cierta dirección fija que no depende de la elección de la sucesión $\{p_n\}$. Emplearemos esto para ver que el límite de las rectas C_n siguen siendo un segmento abierto de recta y está contenido en Bd . Después se trata de la curva C buscada.

En efecto, sea Σ una esfera con centro en p suficientemente pequeña, como la esfera Σ es compacta, consideremos las intersecciones q_n de C_n con Σ , tienen al menos un punto de acumulación $q \in \Sigma$, y como $p_n \rightarrow p$, que es el centro de la esfera, puede ser que también se acumulen en el punto antipodal de q . Si hubiera, además de q y de su punto antipodal, otro

punto de acumulación r , entonces, podríamos encontrar subsucesiones de puntos convergentes a q y a r , de modo que habrían un par de puntos p_n y p_m arbitrariamente próximos a las curvas asintóticas $C(p_n)$ y $C(p_m)$ deberían formar un ángulo mayor que

$$\frac{1}{2} \angle(pq, pr)$$

No obstante, esto no es posible, pues las curvas asintóticas son solución de una ecuación diferencial respecto al punto de la superficie, específicamente $e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2 = 0$, en la que los coeficientes son funciones diferenciables, de manera que, las direcciones de C_n tienden a una dirección fija (dirección límite), la que q con su punto antipodal. Con un mismo razonamiento se demuestra que esta dirección límite no depende de la sucesión escogida $\{p_n\}$, dada otra sucesión $p'_n \rightarrow p$ con otro punto de acumulación q' , si consideramos q' distinto de q o de su punto antipodal, se puede considerar la sucesión mixta p_n, p'_n que convergería a p , obtendríamos puntos arbitrariamente cercanos con C_n, C'_n que formarían un ángulo mayor que a la cantidad positiva fija

$$\frac{1}{2} \angle(pq, pq')$$

Contradiendo de nuevamente a la continuidad de las curvas asintóticas como solución general de la ecuación diferencial anterior.

Como $p_n \rightarrow p$ y las direcciones de los segmentos asociados convergen, de manera que los segmentos asociados convergen a un segmento $C(p) \subset S$ que pasa por p . Para notar que ciertamente es un segmento abierto que no se reduce a p emplearemos el mismo razonamiento análogo. Así mismo, si fuera $C = \{p\}$ se tendría que p sería un punto de acumulación de los extremos de los segmentos C_n son maximales, por la proposición 2.2.10.3 que tales extremos pertenecen a la frontera de S (que no está incluida en S por regularidad). Ésta es cerrada en \mathbb{R}^3 , se tendría que p tampoco está en S (esto es contradicción). De manera análogo se observa que C es un segmento abierto, es decir, de contener sus extremos, tales puntos serían de acumulación de los extremos de C_n en consecuencia no estarían en S .

Finalmente, visto que C es un segmento abierto de recta, demostraremos que $C \subset \text{Bd}$, es decir, puesto que $q \in C$, como $C_n \rightarrow C$, existe una sucesión $q_n \in C_n$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$. Ahora, al estar $C_n \subset U$ por la proposición 2.2.10.3 se infiere que $q \in U \cup \text{Bd}(U) = U \cup \text{Bd}$. Si suponemos que

$q \notin Bd$, entonces, se tendría que por tanto $q \in U$. Dado que C es una curva asintótica, por el lema 3.2.8 es la única que pasa por q , y en virtud a la proposición 2.2.10.2, estará contenida en U , de donde $p \in U$, puesto que $p \in C$, lo cual es una contradicción pues $p \in Bd \subset P$ por ser cerrado. Con esto hemos concluido la demostración.

□

Proposición 2.2.10.5 Si todos los puntos de una superficie conexa S son puntos umbílicos, entonces S está contenida en una esfera o en un plano.

Demostración. Para una demostración se puede ver (Do Carmo.cap. 3, prop.4, pg. 153)

Por último, conviene recordar, la definición y propiedades básicas de una superficie completa. El teorema que nos permite establecer la definición usual de superficie completa es el teorema de Hopf-Rinow.

Teorema 2.2.10.3 (Teorema de Hopf – Rinow). Dada una superficie S conexa, son equivalentes:

- I. S es métricamente completa con la distancia intrínseca.
- II. S es geodésicamente completa en un punto.
- III. S es geodésicamente completa.
- IV. S verifica el teorema de Heine-Borel

Demostración. Para una demostración se puede ver (M.Hernández.cap. 7, prop.7.2.7, pg. 267) Cuando se verifica el teorema de Hopf-Rinow decimos que la superficie S es completa.

Definición 2.2.10.3. Una superficie regular conexa S , se dice que es extendible o prolongable si existe otra superficie regular conexa \bar{S} tal que $S \subset \bar{S}$ como subconjunto propio.

Proposición 2.2.10.6 Toda superficie regular completa es cerrada y no extendible.

Demostración. Para una demostración se puede ver (Do Carmo.cap. 5, prop.1, prop.5, pg. 327 y 332)

Ahora recordemos la aplicación exponencial, se trata de que para cada vector tangente v a S en P , recorre a partir de p una distancia $|v|$ sobre la única geodésica maximal $\gamma_v: I_v \rightarrow S$ cuyas condiciones iniciales son $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$. Representemos por D_p el conjunto

$$D_p = \{v \in T_p S : 1 \in I_v\}$$

Definición 2.2.10.4 Se define la aplicación exponencial $p \in S$ como la aplicación

$$\exp_p : T_p S \rightarrow S \text{ dado por } \begin{cases} \exp_p(v) = \gamma_v(1) \\ \exp_p(0) = p \end{cases}$$

Proposición 2.2.10.7 Sea S una superficie regular con aplicación exponencial \exp_p en cada punto. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- I. Si $k = 0$ entonces \exp_p es una isometría local para todo p de S .
- II. Si $k \leq 0$ y S completa, entonces \exp_p es una aplicación recibidora para todo p de S

Demostración. Para una demostración se puede ver (Do Carmo. cap. 5, prop.5, corolario a, pg. 367)

□

Recordemos también sobre la aplicación recubridora, que es una aplicación continua y sobreyectiva, tal que para cada punto del conjunto imagen, existe un entorno cuya preimagen es una unión disjunta de abiertos de forma que la restricción de la aplicación a tales abiertos es un homeomorfismo.

Definición 2.2.10.5 Sea $\pi : \bar{S} \rightarrow S$ una aplicación continua, y $\alpha : [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ una curva en S . Entonces se dice que una curva $\bar{\alpha} : [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{S}$ en \bar{S} , es una elevación de α con $\pi \circ \bar{\alpha} = \alpha$ con origen en $\bar{\alpha}(0) \in \bar{S}$

Proposición 2.2.10.8 Sean $\pi : \bar{S} \rightarrow S$ una aplicación recubridora, $\alpha : [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ un arco (curva) en S con origen en un punto p , y \bar{p} una preimagen de p . Entonces existe una única elevación $\bar{\alpha} : [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{S}$ con el origen \bar{p} .

Demostración. Para una demostración se puede ver (Do Carmo. cap. 5, prop.2, pg. 376)

□

Ahora ya estamos en condiciones de probar, el resultado principal.

Teorema 2.2.10.4 Sea S una superficie regular plana, conexa y completa con curvatura gaussiana nula. Entonces S es necesariamente un plano o un cilindro.

Demostración. vamos a suponer que S no es un plano. Entonces no todos los puntos son planos. Porque, de serlo, todos los puntos serían umbílicos y acudiendo a la proposición 2.2.10.5 la superficie sería un fragmento de plano. Como la superficie es plana, entonces, existe un abierto U no vacío de puntos parabólicos. Indicamos por $P = S \setminus U$ al conjunto (cerrado) de los puntos planos de S . Dado que el interior de P es un abierto conformado por puntos planos, una vez más por la proposición 2.2.10.5 se tiene que cada componente conexa de $\text{int}P$ es un fragmento de plano. Denotaremos por

$$Q = S \setminus \text{int}P = U \cup \text{Bd} \text{ con } \text{Bd} = \text{Bd}(P) = \text{Bd}(U) \text{ (por lema 2.2.10.4)}$$

Para demostrar nos organizamos de la siguiente manera. En primer lugar, probaremos que por cada punto $q \in Q$ pasa una única recta

$$C(q) \subset Q \subset S$$

dos rectas de este tipo, o son iguales o no se cortan. En segundo lugar, reforzaremos esta afirmación, que si no son coincidentes entonces son paralelos. Haremos esto llevando las rectas al plano tangente mediante la aplicación exponencial. En tercer lugar, veremos que el $\text{int}P$ debe ser una banda de plano limitado por dos rectas paralelas. De esto deduciremos finalmente que la superficie es un cilindro. Observemos los detalles antes de comenzar, según la proposición 2.2.10.6, S no puede tener frontera, porque, es cerrado y debería contenerlo y esto no cumpliría con la regularidad. Y no puede ser un fragmento de un cilindro o un plano, ya que la superficie sería extendible.

Primer paso: Empezamos tomando un punto $q \in Q$, digamos $q \in U$. Entonces por q pasa una única curva r asintótica maximal (por la proposición 2.2.10.3) es un segmento de recta y no interseca a P . Como r es un segmento de recta, será una geodésica porque su curvatura geodésica es nula, y observamos que no puede ser un segmento de recta finito según el teorema de Hopf-Rinow. De ser así bastaría con parametrizar por la longitud del arco y obtendríamos una geodésica que no está definida en todo \mathbb{R} , lo que contradice la completitud. Por tanto, r es una recta completa contenida en S lo denotaremos por $C(q)$. Por la proposición 2.2.10.3 $C(q) \subset U$, porque como la superficie completa no tiene frontera por la proposición 2.2.10.6. Por tanto, esto prueba la existencia de las rectas. Para el caso en que dos rectas no pueden interceptarse, dado que están contenidas en U , entonces el punto de intersección está en U , lo cual es una contradicción a la unicidad de las curvas maximales que garantiza el lema 2.2.10.2

Ahora estudiemos el otro caso, sea $q \in Bd$. Según la proposición 2.2.10.4, existe un único segmento de recta r contenido en Bd que pasa por q . Se deduce nuevamente por teorema de Hopf-Rinow que tal segmento de recta debe ser una recta completa

$$C(q) \subset Bd.$$

La unicidad en este caso no se deduce como antes, ya que los puntos son planos en lugar de parabólicos, pero se desprende de la unicidad garantizada la proposición 2.2.10.4 mediante un argumento similar.

Finalmente, ninguna de las dos rectas $C(q)$ y $C(p)$ se cortan si $q \in Bd$ y $p \in U$, ya que cada recta está nuevamente contenida en los respectivos conjuntos, que por ser U abierto, son disjuntos. Con esto queda concluido el primer paso.

Segundo paso. En lo que sigue probaremos que todas estas rectas son, paralelas o coincidentes, y como ya anticipamos, haremos esto llevando las rectas al plano tangente. En primer lugar, veremos que las elevaciones (levantamientos) de diferentes rectas no pueden interceptarse en el plano tangente, por lo que necesariamente deben ser paralelos. En segundo lugar se probará la existencia de rectas que pasan por puntos de $\text{int}P$, el conjunto que nos faltaba. En tercer lugar, apreciaremos que todas estas rectas son paralelas entre sí en la superficie, llevando la información que conocemos sobre el plano tangente mediante la aplicación exponencial.

Ahora bien, tomemos $q \in Q$ y $p \in U$. Como S es conexa existe una curva $\alpha: [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. En virtud a la proposición 2.2.10.7 y las hipótesis, la exponencial es una aplicación recubridora. Entonces, por la proposición 2.2.10.8 podemos elevar la curva α al plano tangente, y así encontrar una curva $\bar{\alpha}: [0,1] \rightarrow T_p S$, donde el origen es 0 . Para proyectar de nuevo esta curva sobre la superficie podemos hacer el uso de la exponencial. De esta manera, para cada punto $\bar{\alpha}(t) \in T_p S$ tal que

$$\alpha(t) = \exp_p \bar{\alpha}(t) \in Q = U \cup Bd$$

consideremos la $C(\alpha(t))$ (existe, ya fue probado), y su respectivo elevamiento $r_t \subset T_p S$ por la exponencial. En virtud a la proposición 2.2.10.7 la exponencial es una isometría local, luego, se tendrá que los elevamientos r_t también son rectas. Ahora bien, es mucho más sencillo estudiar el comportamiento de estas rectas en el plano, pues no existe la posibilidad que se intercepten. Sean dos puntos $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, si $v \in r(t_1) \cap r(t_2)$, entonces tendremos que

$$\alpha(t) = \exp_p(v) \in C(\alpha(t_1)) \cap C(\alpha(t_2)).$$

Sin embargo, dado que estas rectas pasan por diferentes puntos, no pueden interceptarse, esto es una contradicción. En consecuencia, las rectas $r(t_1)$ y $r(t_2)$ tampoco se interceptan, por lo tanto son paralelas.

Ahora tenemos que probar también la existencia de las rectas $C(\alpha(t))$ para los puntos $\alpha(t) = \exp_p \bar{\alpha}(t) \in \text{int}P$. Considerando en T_pS la recta r que pasa por $\bar{\alpha}(t)$ con dirección paralela a todas las rectas que acabamos de obtener hace un momento. Está claro que $\exp_p(r) \subset P$, porque al interceptarse con Q , sería una contradicción a la unicidad de las rectas en cada punto del conjunto (que ya probamos). Dado que r es una geodésica por ser una recta y \exp_p es una simetría local, $\exp_p(r)$ es una recta y una geodésica. En virtud a los argumentos ya indicados en los párrafos anteriores, no puede ser segmento de recta porque contradiría la completitud, luego $\exp_p(r)$ es una recta completa contenida en S . De este modo denotamos

$$C(\alpha(t)) = \exp_p(r)$$

para cada $\alpha(t) \in \text{int}P$. Por lo tanto, $C(\alpha(t))$ define ahora una recta para todo $t \in [0; 1]$.

Ahora demostraremos que las rectas $C(\alpha(t))$ para todo $t \in [0; 1]$, son paralelas, dado que la aplicación exponencial es una simetría local, podemos considerar el entorno V_t de $\bar{\alpha}(t)$ de manera que \exp_p es una isometría en V_t . Si ahora consideramos el correspondiente intervalo $I_t \subset [0; 1]$ tal que $\bar{\alpha}(s) \in V_t$ para todo $s \in I_t$, que evidentemente incluye a t , obtenemos un cubrimiento de $[0; 1]$. Por el argumento habitual de compacidad, es posible, obtener un subrecubrimiento finito, que indexaremos como V_i, I_i . Por consiguiente, dados $t_1, t_2 \in I_i$ con $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, se sabe que las rectas $r(t_1)$ y $r(t_2)$ son paralelas en T_pS , entonces por ser $\exp_p(r)$ una simetría en todo V_i , se tiene que

$$\exp_p(r(t_1) \cap V_i) \text{ y } \exp_p(r(t_2) \cap V_i)$$

son segmentos paralelos. Luego se observa que estos segmentos no se pueden reducir en puntos porque los V_i son abiertos, y tampoco pueden ser vacíos dado que $t_1, t_2 \in I_i$. En suma, esto significa que las rectas $\exp_p(r(t_1))$ y $\exp_p(r(t_2))$ también son paralelas por contener segmentos abiertos paralelos no vacíos.

Este proceso podemos extender para todo par de puntos $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ con $t_1, t_2 \in I_i$. En efecto, si tomamos los puntos en las intersecciones de los I_i , obtenemos que las rectas de diferentes V_i

son también paralelas, y dado que hay una cantidad finita, esta propiedad se cumple en todo $[0;1]$. En particular, las rectas inicial y final $C(p)$ y $C(q)$ son paralelos. Ahora, si cambiamos q por cualquier otro punto en Q se obtienen rectas paralelas con $C(p)$ y por lo tanto entre sí, con esto damos por concluido la prueba que todas las rectas $C(p)$ con $p \in Q$ son paralelos en S .

Tercer paso. Completaremos la prueba en este paso, se sabe en virtud a la proposición 2.2.10.4, la frontera Bd entre el conjunto de puntos parabólicos y puntos planos está formado por unión de segmentos de recta contenidos en Bd . Dado que $Bd \subset Q$, como se muestra en el paso anterior nos permite asegurar que todos estos segmentos de recta son paralelos. También, nuevamente por el argumento de completitud y por el teorema de Hopf-Rinow, estos segmentos son rectas completas. Por consiguiente, la única posibilidad es que cada componente conexa de $intP$, que ya es sabido que se trata de un fragmento de plano, es decir, sea una banda plana.

Así, para cada punto $p \in intP$ podemos definir una única recta $C(p)$, paralelo a los márgenes de la banda, que está contenida en $intP$. Se concluye que por todo punto de la superficie S pasa exactamente una recta, que ahora llamaremos generatriz ya que cubren toda la superficie, en consecuencia, S es una superficie reglada. Por último, como todas las generatrices son paralelas, entonces, S es un cilindro. Concluye así la demostración

III. METOTOLOGIA

3.1. Tipo de investigación

Tipo de investigación es básica, dado que el objetivo es incrementar los conocimientos científicos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico.

3.2. Diseño de investigación

Por tratarse de una investigación pura, teórica, su diseño de investigación es descriptivo exploratorio, de manera que comenzaremos introduciendo las superficies regladas. Para ello usaremos las habituales parametrizaciones de este tipo de superficies, que consisten en fijar una curva en el espacio que denominaremos directriz, y en cada punto de ella, adjuntar una recta que llamaremos generatriz.

Introduciremos para concluir nuestra investigación las superficies desarrollables, que son las superficies regladas que, intuitivamente, se pueden aplanar sin deformarlas ni distorsionarlas. Naturalmente, veremos que son localmente isométricas al plano. Caracterizaremos además las superficies desarrollables como las superficies regladas con curvatura de Gauss nula, las superficies regladas con parámetro de distribución nulo, y las superficies regladas tales que el plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz.

IV. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En esta investigación, se ha estudiado las superficies regladas en el contexto de las superficies regulares, que consiste en fijar una curva en el espacio que llamamos directriz, y por cada punto de ella pasa una recta que hemos llamado generatriz.

Se ha realizado un estudio de las propiedades y características básicas de superficies regladas. Nos ha sido necesario dar ciertas condiciones para llegar a resultados habituales, concretamente, hemos exigido que las generatrices no sean constantes en ningún abierto, lo que hemos llamado superficie no cilíndrica. Una propiedad interesante, resulta que existe una curva (directriz) que es única y no depende de la parametrización y es perpendicular a todas las generatrices, nos referimos a la línea de estricción.

Seguidamente hemos probado la existencia y unicidad de una función escalar, que resulta, si medimos, para dos generatrices arbitrarias su distancia y el ángulo que determinan y calculamos el límite de este cociente, obtenemos el parámetro de distribución. Esto nos ha permitido comprobar varias propiedades, como, por ejemplo, la curvatura de Gauss de una superficie reglada ha de ser negativo.

Hemos estudiado las superficies desarrollables, que son las superficies regladas, intuitivamente, se pueden aplanar sin deformarlas, es decir, son localmente isométricas al plano. También hemos caracterizado las superficies desarrollables como superficies regladas con curvatura de Gauss nula, es decir, las superficies regladas con parámetro de distribución nulo. Las superficies desarrollables (superficies regladas con $k = 0$), han de ser necesariamente una unión de fragmentos de planos, cilindros, conos y superficies tangentes. Así mismo, se ha estudiado la clasificación de superficies completas con curvatura de Gauss nula.

A lo largo de ésta investigación hemos construido un tejido teórico que nos ha permitido observar cómo aparecen las rectas, para concluir que, efectivamente, han de ser superficies regladas. Así, hemos llegado al teorema final, se ha visto que por los puntos planos también pasan segmentos de rectas contenidos en la superficie y bajo la hipótesis de completitud de los segmentos tienen que ser siempre rectas completas. Además, se ha verificado que todas las generatrices han de ser paralelas, con la cual, hemos concluido que las únicas superficies completas con curvatura de Gauss nula son los planos y cilindros, ambas superficies regladas.

Para demostrar se organizó de la siguiente manera.

En Primer lugar: Tomando un punto $q \in Q$, digamos $q \in U$. Entonces por q pasa una única curva r asintótica maximal, es un segmento de recta y no interseca a P . Como r es un segmento de recta, será una geodésica porque su curvatura geodésica es nula, y observamos que no puede

ser un segmento de recta finito en virtud al teorema de Hopf-Rinow. De ser así bastaría con parametrizar por la longitud del arco y obtendríamos una geodésica que no está definida en todo \mathbb{R} , lo que contradice la completitud. Por tanto, r es una recta completa contenida en S lo denotaremos por $C(q) \subset U$, porque como la superficie completa no tiene frontera por tanto, esto prueba la existencia de las rectas. Para el caso en que dos rectas no pueden interceptarse, dado que están contenidas en U , entonces el punto de intersección está en U , lo cual es una contradicción a la unicidad de las curvas maximales.

el otro caso, sea $q \in Bd$. Existe un único segmento de recta r contenido en Bd que pasa por q . Se deduce nuevamente por teorema de Hopf-Rinow que tal segmento de recta debe ser una recta completa $C(q) \subset Bd$. La unicidad en este caso no se deduce como antes, ya que los puntos son planos en lugar de parabólicos.

Finalmente, ninguna de las dos rectas $C(q)$ y $C(p)$ se cortan si $q \in Bd$ y $p \in U$, ya que cada recta está nuevamente contenida en los respectivos conjuntos, que por ser U abierto, son disjuntos. Con esto quedó concluido el primer paso.

Segundo lugar. En lo que sigue se ha probado que todas estas rectas son, paralelas o coincidentes, haremos esto llevando las rectas al plano tangente. En primer lugar, hemos visto que las elevaciones (levantamientos) de diferentes rectas no pueden interceptarse en el plano tangente, por lo que necesariamente deben ser paralelos. En segundo lugar, se ha probado la existencia de rectas que pasan por puntos de $intP$, el conjunto que nos faltaba. En tercer lugar, se observa que todas estas rectas son paralelas entre sí en la superficie, llevando la información que conocemos sobre el plano tangente mediante la aplicación exponencial.

Entonces, se ha tomado que $q \in Q$ y $p \in U$. Como S es conexa existe una curva $\alpha: [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$, la exponencial es una aplicación recubridora. Luego, por la proposición 2.2.10.8 podemos elevar la curva α al plano tangente, y así encontrar una curva $\bar{\alpha}: [0,1] \rightarrow T_p S$, donde el origen es 0 . Para proyectar de nuevo esta curva sobre la superficie podemos hacer el uso de la exponencial. De esta manera, para cada punto $\bar{\alpha}(t) \in T_p S$ tal que $\alpha(t) = \exp_p \bar{\alpha}(t) \in Q = U \cup Bd$, considerando la $C(\alpha(t))$ (existe, ya fue probado), y su respectivo elevamiento $r_t \subset T_p S$ por la exponencial. Recordemos la exponencial es una isometría local, luego, se tendrá que los elevamientos r_t también son rectas. Ahora bien, es mucho más sencillo estudiar el comportamiento de estas rectas en el plano, pues no existe la posibilidad que se intercepten. Sean dos puntos $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, si $v \in r(t_1) \cap r(t_2)$, entonces

tendremos que $\alpha(t) = \exp_p(v) \in C(\alpha(t_1)) \cap C(\alpha(t_2))$. Sin embargo, dado que estas rectas pasan por diferentes puntos, no pueden interceptarse, esto es una contradicción. En consecuencia, las rectas $r(t_1)$ y $r(t_2)$ tampoco se interceptan, por lo tanto son paralelas.

Ahora tenemos que probar también la existencia de las rectas $C(\alpha(t))$ para los puntos $\alpha(t) = \exp_p \bar{\alpha}(t) \in \text{int}P$. Considerando en T_pS la recta r que pasa por $\bar{\alpha}(t)$ con dirección paralela a todas las rectas que acabamos de obtener hace un momento. Está claro que $\exp_p(r) \subset P$, porque al interceptarse con Q , sería una contradicción a la unicidad de las rectas en cada punto del conjunto (que ya probamos). Dado que r es una geodésica por ser una recta y \exp_p es una simetría local, $\exp_p(r)$ es una recta y una geodésica. En virtud a los argumentos ya indicados en los párrafos anteriores, no puede ser segmento de recta porque contradiría la completitud, luego $\exp_p(r)$ es una recta completa contenida en S .

De este modo denotamos $C(\alpha(t)) = \exp_p(r)$ para cada $\alpha(t) \in \text{int}P$. Por lo tanto, $C(\alpha(t))$ define ahora una recta para todo $t \in [0; 1]$.

Ahora demostraremos que las rectas $C(\alpha(t))$ para todo $t \in [0; 1]$, son paralelas, dado que la aplicación exponencial es una simetría local, podemos considerar el entorno V_t de $\bar{\alpha}(t)$ de manera que \exp_p es una isometría en V_t . Si ahora consideramos el correspondiente intervalo $I_t \subset [0; 1]$ tal que $\bar{\alpha}(s) \in V_t$ para todo $s \in I_t$, que evidentemente incluye a t , obtenemos un cubrimiento de $[0; 1]$. Por el argumento habitual de compacidad, es posible, obtener un subcubrimiento finito, que indexaremos como V_i, I_i . Por consiguiente, dados $t_1, t_2 \in I_i$ con $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, se sabe que las rectas $r(t_1)$ y $r(t_2)$ son paralelas en T_pS , entonces por ser $\exp_p(r)$ una simetría en todo V_i , se tiene que $\exp_p(r(t_1) \cap V_i)$ y $\exp_p(r(t_2) \cap V_i)$ son segmentos paralelos.

Luego se observa que estos segmentos no se pueden reducir en puntos porque los V_i son abiertos, y tampoco pueden ser vacíos dado que $t_1, t_2 \in I_i$. En suma, esto significa que las rectas $\exp_p(r(t_1))$ y $\exp_p(r(t_2))$ también son paralelas por contener segmentos abiertos paralelos no vacíos.

Este proceso podemos extender para todo par de puntos $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ con $t_1, t_2 \in I_i$. En efecto, si tomamos los puntos en las intersecciones de los I_i , obtenemos que las rectas de diferentes

V_i son también paralelas, y dado que hay una cantidad finita, esta propiedad se cumple en todo $[0;1]$. En particular, las rectas inicial y final $C(p)$ y $C(q)$ son paralelos. Ahora, si cambiamos q por cualquier otro punto en Q se obtienen rectas paralelas con $C(p)$ y por lo tanto entre sí, con esto se dio concluido prueba que todas las rectas $C(p)$ con $p \in Q$ son paralelos en S .

En el tercer lugar y último. Hemos Completado la prueba, se sabe en virtud a la proposición 2.2.10.4 la frontera Bd entre el conjunto de puntos parabólicos y puntos planos está formado por unión de segmentos de recta contenidos en Bd . Dado que $Bd \subset Q$, como se muestra en el paso anterior nos permite asegurar que todos estos segmentos de recta son paralelos. También, nuevamente por el argumento de completitud y por el teorema de Hopf-Rinow, estos segmentos son rectas completas. Por consiguiente, la única posibilidad es que cada componente conexa de $intP$, que ya es sabido que se trata de un fragmento de plano, es decir, sea una banda plana. Así, para cada punto $p \in intP$ podemos definir una única recta $C(p)$, paralelo a los márgenes de la banda, que está contenida en $intP$. Se concluye que por todo punto de la superficie S pasa exactamente una recta, que ahora llamaremos generatriz ya que cubren toda la superficie, en consecuencia, S es una *superficie reglada*.

Por último, como todas las generatrices son paralelas, entonces, S es un cilindro. De esta manera se concluyó la demostración.

V. CONCLUSIONES

- En nuestra investigación nuestro objetivo principal era saber, si es posible determinar las superficies regladas a partir de superficies cuya curvatura gaussiana es nula.

En efecto, Sí, es posible, en virtud al teorema 3.2.24, es decir, sea S una superficie regular plana, conexa y completa con curvatura gaussiana nula. Entonces S es necesariamente un plano o un cilindro.

objetivos específicos

- Se ha determinado que una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s) = \gamma(t) + s w(t)$, Sobre cada generatriz con $\lambda \neq 0$, la curvatura de Gauss es continua y alcanza un máximo en el punto central; Sobre cada generatriz, la curvatura tiende a cero cuando “s” tiende a infinito. La curvatura es simétrica respecto al punto central en toda generatriz
- hemos caracterizado las superficies desarrollables como las superficies regladas con curvatura Gaussiana nula, es decir, una superficie desarrollable parametrizada por $X(t,s) = \alpha(t) + s w(t)$, es localmente un fragmento de cilindro, cono o superficie tangente, en entornos que no contengan puntos de acumulación de ceros de w' .
- En la clasificación de superficies regulares planas y completas, se ha estudiado las superficies regulares con curvatura Gaussiana nula. Se comenzó viendo que una superficie plana está compuesta por puntos parabólicos y planos, donde el conjunto de puntos parabólicos es abierto en la superficie y el de los planos es cerrado. Sea S una superficie regular plana. Como la curvatura de Gauss es $k = k_1 k_2$, tenemos necesariamente todos los puntos han de ser parabólicos y planos.

Cuando se verifica el siguiente las condiciones del teorema de Hopf-Rinow decimos que la superficie es completa.

Teorema de Hopf – Rinow. Dada una superficie S conexa, son equivalentes:

- V. S es métricamente completa con la distancia intrínseca.
- VI. S es geodésicamente completa en un punto.
- VII. S es geodésicamente completa.
- VIII. S verifica el teorema de Heine-Borel.

Se sabe que una superficie es métricamente completa si toda sucesión de Cauchy es convergente, y una superficie es geodésicamente completa si las geodésicas están definidas en todo \mathbb{R}

VI. RECOMENDACIONES

- La caracterización de superficies minimales regladas.

Sugerencia. Para ello se tiene que primero un lema que refleja una propiedad que será clave para el estudio de las superficies minimales regladas. Resulta que, en una superficie reglada minimal, todo par de generatrices son simétricas respecto de una generatriz intermedia.

Lema. Sea S una superficie reglada minimal con directriz $\alpha(t)$. Sean ℓ_0 y ℓ_1 las generatrices de S que parten de los puntos de directriz $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$, respectivamente, con $t_0, t_1 \in I$. Entonces, existe una generatriz intermedia, es decir, que corta a la directriz en un punto $\alpha(t)$ con $t \in (t_0, t_1)$, que es el eje de simetría.

Para una demostración intuitiva se puede ver (Lucas Marin pg. 39)
- una superficie reglada minimal no plana ¿Es un fragmento de helicoides?

Sugerencia. Construimos un marco correspondiente a una superficie reglada minimal, y veremos que debe ser necesariamente, el marco de un plano o de un helicoides.

Consideremos S una superficie reglada minimal arbitraria con directriz $\alpha(t)$. Tomemos dos generatrices ℓ_0 y ℓ_1 distintas cualesquiera que corten a la directriz en los puntos $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$ respectivamente, la línea $\ell_{1/2}$ es una generatriz de S intermedia a ℓ_0 y ℓ_1 .

Análogamente, se puede considerar $\ell_{1/4}$ la generatriz de S que resulta ser la línea media de $\ell_{1/2}$ y $\ell_{3/4}$ la generatriz línea media de $\ell_{1/2}$ y ℓ_1 , y con el mismo proceso, en el paso n obtenemos una familia de $2^n + 1$ generatrices denotados por $\ell_{1/2^n}$

con $j = 0, \dots, 2^n$, donde cada par de generatrices cuyos índices difieren en un número par, tiene a su eje de simetría en la familia.

- Caracterización de superficies isoparamétricas en el espacio a través de superficies mínimas.

Sugerencia. Se da una caracterización de superficies isoparamétricas en el espacio con la ayuda de superficies mínimas. Considerando una superficie en tres dimensiones con la siguiente propiedad: a través de cada punto de la superficie pasan tres curvas tales que la superficie ortogonal reglada determinada por cada una de ellas es minimal.

Como resultado preliminar se puede demostrar que una superficie con dos geodésicas, que pasan por cada punto, son hélices del ambiente tienen un operador de forma paralela. Lamonedá y Hernández, (2017),

- Las superficies regladas no desarrollables, estudiada recientemente en un artículo de (Liu y Dal, 2014), introduce el concepto de curvatura esférica de una curva esférica y algunos resultados que son muy útiles en la clasificación de estas superficies .
- Invariantes de superficies regladas no desarrollables: Hace referencia a la curva esférica asociada a una referencia ortonormal del espacio en cada uno de sus puntos, llamada la base esférica de Frenet. Haciendo, uso de ella aparecen las llamadas estructurales. (Terrón, 2018)

VII. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Cifre, M. d. I. A. H. and Gonzalez, J. A. P. (2010). *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*, volumen 47. Editorial CSIC-CSIC Press.
- Do Carmo, M. P. (2016). *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications.
- Hernandez, L. and Ruiz, G. (2018). *A characterization of isoparametric surfaces in space forms via minimal surfaces*. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 49(2):447–462.
- LIMA, E. L. (2000). *Curso de analise, volume 2-IMPA*. CNPQ.
- Lima, E. L. (2014). *Curso de analise, vol. 2*, projeto euclides. Rio de Janeiro: IMPA.
- Marin, E. L. (2017). *Superficie regladas*.
- Nair, M. T. and Singh, A. (2018). *Linear algebra*. Springer.
- Terron, G. (2018). *Invariantes de superficies regladas no desarrollables*.
- Toponogov, V. A. (2006). *Differential geometry of curves and surfaces*. Springer.
- Ysique, A. (2016). *Dinamica de las lineas de curvatura*.

VIII. ANEXOS

8.1 Topología de conjuntos de puntos en espacios.

En la demostración del teorema 3.2.24, hemos utilizado con libertad alguna propiedades topológicas de \mathbb{R}^n . Esencialmente, las propiedades que necesitamos son las habituales de los subconjuntos compactos y conexos de \mathbb{R}^n . A efectos de completitud, introduciremos aquí una breve presentación.

8.2 El espacio vectorial \mathbb{R}^n

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ de las n-tuplas de números reales.

Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Estas operaciones hacen de \mathbb{R}^n un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo \mathbb{R} de números reales.

8.3 Producto en el espacio \mathbb{R}^n

Definimos el producto interno canónico $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

8.4 Normas

A partir del producto interno definido anteriormente, construimos la norma euclidiana

$$\| \cdot \|_e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ como } \| x \|_e = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Obs. Otras normas que destacan en \mathbb{R}^n .

La norma máxima. $\| \cdot \|_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\| x \|_m = \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \} \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

La norma de suma $\| \cdot \|_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\| x \|_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\| x \|_m \leq \| x \|_e \leq \| x \|_s \leq n \| x \|_m$$

8.5 Métricas, bolas y conjuntos limitados

A partir de cualquier norma $\| \cdot \|$ en el \mathbb{R}^n podemos construir, de modo que

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Los siguientes son definiciones de ciertos lugares geométricos básicos:

Definición 8.5.0.1. Consideremos una norma $\| \cdot \|$ en \mathbb{R}^n . Dados un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, definimos:

- i. Bola abierta de centro a y radio r : $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x-a\| < r\}$
- ii. Bola cerrada de centro a y radio r : $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x-a\| \leq r\}$
- iii. La esfera de centro a y radio r : $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x-a\| = r\}$

8.6. Sucesiones

Definición 8.6.0.1 Decimos que una sucesión (x_k) en \mathbb{R}^n converge para el límite $a \in \mathbb{R}^n$, con respecto a la norma $\| \cdot \|$, cuando para cada $\varepsilon > 0$ dado, es posible obtener un índice $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$, en este caso escribimos: $a = \lim x_k$ o $x_k \rightarrow a$.

Equivalentemente tenemos que, para cada $\varepsilon > 0$, los términos x_k están en una bola abierta $B(a,\varepsilon)$ (en relación a la norma considerada), para todo k suficientemente grande.

Una consecuencia importante de la definición anterior es que si dos normas en \mathbb{R}^n son equivalentes, entonces la convergencia de una sucesión no depende de cuál de las normas equivalentes se considera.

Consecuencias inmediatas

- i. $\lim x_k = a \Leftrightarrow \lim \|x_k - a\| = 0$
- ii. Toda sucesión convergente es acotada
- iii. si $\lim x_k = a$ entonces toda sucesión (x_k) converge para a
- iv. El límite de una sucesión convergente es único

Proposición 8.6.0.1 Una sucesión (x_k) en \mathbb{R}^n converge (en relación a cualquier norma equivalente a la norma máximo) para el punto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ si, y solamente si, para cada

$i=1,2,\dots,n$, tiene $\lim x_i^k = a_i$, es decir, cada coordenada de (x_k) converge a la coordenada correspondiente de a .

Corolario 8.6.0.1 Dadas las sucesiones convergentes (x_k) y (y_k) en \mathbb{R}^n y $\alpha_k \in \mathbb{R}$, sean $\lim x_k = a$, $\lim y_k = b$, $\lim \alpha_k = \alpha$. Entonces.

- i. $\lim (x_k + y_k) = a+b$
- ii. $\lim \alpha_k x_k = \alpha a$
- iii. $\lim \langle x_k, y_k \rangle = \langle a, b \rangle$

Teorema.8.6.0.1 (Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión limitada (en relación a cualquier norma equivalente a la norma máximo) en \mathbb{R}^n tiene una subsección convergente.

8.7 Topología usual

A) Conjuntos abiertos

Definición.8.7.0.1 Se dice que un punto a es un punto interior a un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ cuando existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X$. Denotamos por $\text{int}X$ al conjunto de puntos interiores de X , es inmediato que $\text{int}X \subset X$. Si $a \in \text{int}X$ entonces X es una vecindad de a .

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto (en \mathbb{R}^n) cuando $A = \text{int}A$.

Se dice que un conjunto $B \subset X$ es un conjunto abierto en X , cuando existe un conjunto abierto (en \mathbb{R}^n) A tal que $B = X \cap A$

Consecuencias inmediatas.

- i. \emptyset y \mathbb{R}^n es abierto
- ii. La intersección $A = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_m$ de una colección finita de abiertos es un abierto
- iii. La unión $A = \bigcup A_\lambda$ de una colección arbitraria $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de abiertos es un abierto
- iv. Toda bola abierta $B(a, r)$ es un conjunto abierto.
- v. Para todo $X \subset \mathbb{R}^n$ tenemos : $\text{int}X \subset \bigcup_{\substack{A \subset X \\ A \text{ abierto}}} A$

B) Conjuntos cerrados

Definición.8.7.0.2 Se dice que un punto a es un punto *adherente* a un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ cuando existe una sucesión (x_k) en X ($x_k \in X \quad \forall k$) tal que $x_k \rightarrow a$. Si denotamos por \bar{X} (o $\text{cl}X$) el conjunto de puntos adherentes a X , es inmediato que $X \subset \bar{X}$.

Se dice que un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado cuando $F = \bar{F}$.

Se dice que un conjunto $B \subset X$ es un conjunto cerrado en X cuando existe un conjunto en \mathbb{R}^n cerrado (en \mathbb{R}^n) F tal que $B = X \cap F$.

Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, definimos $\text{fr}X = \text{cl}X \cap \text{cl}(\mathbb{R}^n - X)$ (*frontera de X*).

Sea $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que Y es *denso* en X cuando $X \subset \bar{Y}$ (todo punto de X es límite de una sucesión de puntos de Y)

Consecuencias inmediatas.

- i. $a \in \bar{X} \Leftrightarrow$ toda vecindad de a posee algún punto de X
- ii. $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\Leftrightarrow A = \mathbb{R}^n - F$ es abierto
- iii. \emptyset y \mathbb{R}^n son cerrados
- iv. La unión $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ de una colección finita de cerrados es un cerrado
- v. La intersección $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de una colección arbitraria $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de cerrados es un cerrado
- vi. Toda bola cerrada $B[a,r]$ es un conjunto cerrado
- vii. Toda esfera $S[a,r]$ es un conjunto cerrado
- viii. Para todo $X \subset \mathbb{R}^n$ se tiene : $\bar{X} = \bigcap_{\substack{F \supset X \\ F \text{ cerrado}}} F$

C) Puntos de acumulación

Un punto a se dice un *punto de acumulación* de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ cuando existe una sucesión (x_k) en $X \setminus \{a\}$ ($x_k \in X$, $x_k \neq a$, $\forall k$) tal que $x_k \rightarrow a$. Denotamos por X' al conjunto de puntos de acumulación de X .

Si $a \in X$ no es punto de acumulación de X , entonces a es un *punto aislado* de X .

Si todos los puntos de X son aislados, X es llamado un conjunto *discreto*.

Consecuencias inmediatas.

- i. $a \in X' \Leftrightarrow$ toda vecindad de a posee algún punto de $X \setminus \{a\}$
- ii. $a \in X' \Leftrightarrow$ toda bola abierta $B(a,r)$ posee una infinidad de puntos de X .
- iii. Si $X' \neq \emptyset$ entonces X es infinito
- iv. El conjunto X' de los puntos de acumulación de X es cerrado

8.8 Compacidad.

Definición.8.8.0.1 Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se denominará conjunto *compacto* cuando sea limitada y cerrada.

Ahora buscaremos nuevas caracterizaciones para los compactos de \mathbb{R}^n :

Teorema. 8.8.0.1 Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si, solamente si, toda sucesión $(x_k) \subset K$ posee una subsucesión convergente a un punto de K .

Teorema. 8.8.0.2 (propiedad de cantor) Dada una sucesión “decreciente” de conjuntos compactos y no vacíos $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_i \supset \dots$, su intersección $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ (limitada y cerrada) no vacío.

Lema.8.8.0.1 Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es separable, es decir, tiene un subconjunto numerable $E = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset X$, E es denso en X .

Lema.8.8.0.2 Considere un conjunto arbitrario $X \subset \mathbb{R}^n$. Toda cobertura abierta $X \subset \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ admite una subcobertura numerable.

Teorema.8.8.0.3 Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si, y solamente si, toda cobertura abierta K admite una subcobertura finita.

Teorema.8.8.0.4 Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto compacto. Si $f:K \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua , entonces su imagen $f(K)$ es un conjunto compacto de \mathbb{R}^n

Teorema.8.8.0.5 Toda aplicación continua $f:K \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ es uniformemente continua.

8.9 Conexidad

Teorema.8.9.0.1 Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto conexo. Si $f :K \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, entonces su imagen $f(X)$ es un conjunto conexo de \mathbb{R}^n .

Proposición.8.9.0.1 Sea $X \subset \mathbb{R}^m$. Si un conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}^m$ contiene un punto $a \in X$ y un punto $b \notin X$, entonces C contiene algún punto de la frontera de X .

Definición 8.9.0.1 (componentes conexas) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $x \in X$, definimos la componente conexa del punto x en X , como la unión C_x de todos los subconjuntos conexos de X que contienen al punto x .

Es inmediato que C_x es el mayor subconjunto conexo de X que contiene el punto x .

Se sigue también que, dados $x, y \in X$, sus componentes conexas C_x, C_y en X , o coinciden o son disjuntos.

Así, “ x e y pertenecen a la misma componente conexa en X ” es una relación de equivalencia en X y las componentes conexas de los puntos de X lo dividen en clases, llamaremos componentes conexas de X .

Proposición.8.9.0.2 Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si C_x es componente conexa del punto x en X , entonces $D_y = h(C_x)$ es la componente conexa de $y = h(x)$ en Y .

Por tanto, un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ establece una biyección entre las componentes conexas de X y las componentes conexas de Y .

Ejemplos.8.9.0.1 Un camino en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua $f: I \rightarrow X$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Ejemplos.8.9.0.2 Decimos que los puntos $a, b \in X$ pueden conectarse por un camino en X cuando existe un camino $f: I \rightarrow X$ tal que $a, b \in f(I)$

Ejemplos.8.9.0.3 si X es convexo entonces cada dos puntos $a, b \in X$ pueden ser conectados por un camino en X , es decir, el camino recto $[a, b] = \{ta + (1-t)b ; t \in [0, 1]\}$.

Ejemplos.8.9.0.4 Si $a, b \in X$ pueden ser conectados por un camino $f: I \rightarrow X$ entonces existe un camino $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\varphi(0) = a$ y $\varphi(1) = b$

Ejemplos.8.9.0.5 Un conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^n$ se dice conexo por caminos cuando cada dos puntos $a, b \in X$ pueden ser ligados por un camino en X .

Teorema.8.90.2 Todo conjunto conexo por caminos es conexo.

Teorema.8.9.0.3 Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo entonces A es conexo por caminos.

a. Matriz de consistencia

Superficies regladas con curvatura gaussiana nula

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLE	DIMENSIONES	INDICADORES	METODOLOGIA
¿Cómo obtenemos superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula?	<p>general. Determinar las superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula.</p> <p>Específicos *Determinar que una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t,s) = \gamma(t) + s w(t)$, Sobre cada generatriz con $\lambda \neq 0$. (λ : parámetro de distribución) *Caracterizar las superficies desarrollables como las superficies regladas con curvatura de Gauss nula. *Determinar que toda superficie reglada con curvatura de Gauss nula es, necesariamente, una unión de fragmentos de cilindros, conos y superficies tangentes a curvas *Reconocer que toda superficie regular llana completa es necesariamente un plano o un cilindro, ambas superficies regladas</p>	Sí, es posible obtener superficies regladas a partir de superficies que tienen curvatura Gaussiana nula	-	-	-	<p>La naturaleza de esta investigación es básica, no experimental. dado que el objetivo es incrementar los conocimientos científicos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico.</p> <p>Es una investigación no experimental, con diseño exploratorio Mecanismo que se usa en esta investigación es recolectar y registrar la información, a partir de los artículos de investigación, correspondientes a las superficies regladas. Trabajar conjuntamente con el asesor.</p>