UNIVERSIDAD NACIONAL

SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE FACTORIZACIÓN DE KRONECKER EN UNA EQUIVALENCIA DE CATEGORÍAS

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR: Bach. MARLENNHI MAGDA MORENO VILLANUEVA

ASESOR: Dr. BIBIANO MARTÍN CERNA MAGUIÑA

HUARAZ - PERÚ

2023

N° Rgistro: T017

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 001-2023

Los Miembros del Jurado de la Revisión y Sustentación de Tesis de la Escuela Académico Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias, designados mediante Resolución de Consejo de Facultad N° 301-2022-UNASAM-FC, se reunieron el día martes 16 de enero de 2023, a horas 02:00 p.m. en el Auditorio de la Facultad de Ciencias en acto público para evaluar la Sustentación de Tesis, presentado por la:

Bachiller : **Marlennhi Magda Moreno Villanueva**

Tesis Titulada : **"APLICACIÓN DEL TEOREMA DE KRONECKER EN UNA EQUIVALENCIA DE CATEGORÍAS".**

Después de la Sustentación y las respuestas a las preguntas, el Jurado lo declara APROBADA para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, con el calificativo de CATORCE (14)

En señal de conformidad y para constancia, firmamos la presente ACTA, siendo las 3:00 pm del mismo día y año.

Huaraz, 16 de enero de 2023

Dra. Perpetua María Alayo Meregildo
Presidenta

Dr. Jonhson Diómedes Valderrama Arteaga
Secretario

Lic. Jackson García Muñoz
Vocal

Dr. Bibiano Martin Cerna Maguiña
Asesor

NOMBRE DEL TRABAJO

T033_70272115_T.pdf

AUTOR

MARLENNHI MAGDA MORENO VILLANUEVA

RECUENTO DE PALABRAS

14751 Words

RECUENTO DE CARACTERES

64784 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

73 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.7MB

FECHA DE ENTREGA

May 4, 2023 8:07 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

May 4, 2023 8:09 PM GMT-5

18% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base d

- 14% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 10% Base de datos de trabajos entregados
- 9% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossr

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Fuentes excluidas manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 8 palabras)

MIEMBROS DEL JURADO

Mag. Perpetua ALAYO MEREGILDO

(Presidente)

Dr. Jonhson Diomedes VALDERRAMA ARTEAGA

(Secretario)

Lic. Jackson GARCÍA MUÑOZ

(Vocal)

Índice

Dedicatoria IV

Agradecimientos V

Resumen VI

Abstract VII

I. Introducción 1

1.1. Justificación 2

1.2. Planteamiento del problema 3

1.2.1. Delimitación del problema 3

1.2.2. Formulación del problema 3

1.3. Objetivos 3

1.3.1. Objetivo general 3

1.3.2. Objetivos específicos 3

II. Marco teórico 4

2.1. Antecedentes 4

2.2. Bases teóricas 7

2.2.1. Anillos 7

2.2.2. Módulos 14

2.2.3. Álgebras 19

2.2.4. Bimódulo asociativo sobre una álgebra 22

2.2.5. Categorías 24

2.2.6. Equivalencia de categorías 38

III. Metodología **51**

IV. Resultados de la investigación **52**

4.1. El teorema de factorización de Kronecker 52

V. Conclusiones **60**

VI. Recomendaciones **61**

Referencias **62**

Dedicatoria

El presente trabajo de investigación dedico:

A Dios por acompañarme en cada paso que doy, por fortalecerme e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio y después de ella.

A mis padres, Luis y Virginia, quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido cumplir mis metas, gracias por inculcar en mi el ejemplo de esfuerzo y valentía.

A mis hermanas Margoth, Yadira y Miriam por su cariño y apoyo incondicional, por estar conmigo en todo momento. A toda mi familia por sus consejos y palabras de aliento y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a todos mis amigos, por apoyarme cuando más los necesito, por extender su mano en momentos difíciles y por el amor brindado cada día.

Marlennhi M.

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo por haberme permitido ser parte de ella y cobijarme a lo largo del estudio de mi carrera profesional, por brindarme oportunidades.

Agradezco infinitamente al Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica, que mediante el contrato 380-2019-FONDECYT financió este trabajo de investigación.

Agradecer a mi familia porque si no fuese por el esfuerzo realizado por ellos, mis estudios no hubiesen sido posible. A mis padres Luis y Virginia, mis hermanas Margoth, Yadira y Miriam, mis abuelos Elias y Pompeya que en paz descansen, mis tíos Benigno y Yolanda, porque a pesar de la distancia, el ánimo, apoyo y alegría que me brindaron y brindan, me dan la fortaleza para seguir adelante.

Agradezco al Dr. Victor Hugo López Solís, quien fue mi asesor, por compartir su conocimiento científico, así como también por motivarme a concluir con esta investigación a pesar de todas las dificultades surgidas en el camino.

Agradezco al Dr. Bibiano Martín Cerna Maguiña por haber compartido sus conocimientos y aceptado ser mi asesor en esta última etapa de la ejecución mi tesis.

Marlennhi M.

Resumen

En esta tesis, se tuvo como objetivo establecer una equivalencia de categorías de bimódulos asociativos por medio del Teorema de Factorización de Kronecker (teorema 4.1.1). Los objetivos fueron alcanzados y estos están dados en el teorema 4.1.2 y el corolario 4.1.3.

Se usó el teorema 4.1.1 para probar el teorema 4.1.2, para ello se desenvolvió conceptos básicos de la teoría de categorías tal como la equivalencia de categorías. Además, se volvió a usar el teorema 4.1.1 para probar el corolario 4.1.3, donde se clasificó a los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre el álgebra de las matrices $n \times n$.

Palabras claves: Módulos, Bimódulos, Teorema de Factorización de Kronecker, Categoría de bimódulos.

Abstract

In this thesis, the objective was to establish an equivalence of categories of associative bimodules by means of the Kronecker Factorization Theorem (theorem 4.1.1). The objectives were achieved and these are given in theorem 4.1.2 and corollary 4.1.3.

The theorem 4.1.1 was used to prove theorem 4.1.2, for which basic concepts of category theory such as category equivalence were developed. In addition, the theorem 4.1.1 was used again to prove corollary 4.1.3 where the irreducible unitary associative bimodules were classified over the algebra of matrices of order $n \times n$.

Keywords: Modules, bimodules, Kronecker factorization theorem, category of bimodules

I. Introducción

En álgebra es esencial describir y clasificar los elementos básicos tales como los ideales, ideales primos, semiprimos, etc. En particular, es importante estudiar las álgebras que no tienen ideal alguno, los llamados álgebras simples.

Las álgebras asociativas simples llamaron la atención y fueron estudiados por Wedderburn y Artin quienes los clasificaron a principios del siglo pasado. Los resultados de Wedderburn y Artin motivaron el estudio, desenvolvimiento y desarrollo de las álgebras asociativas que hasta nuestros días es un terreno fértil de investigaciones que están diseminados en importantes revistas científicas de alto impacto.

Los resultados de Wedderburn y Artin fueron generalizados para las álgebras no asociativas (Lie, Jordan, alternativas y otras). Los precursores de esta línea de investigación son la escuela estadounidense (Adrian Albert, Nathan Jacobson, Richard Schafer, Kevin McCrimmon y otros) y la escuela rusa de la Universidad Estatal de Novosibirsk (Anatoly Shirshov, Slin'ko, Zhevlakov, Shestakov, Efim Zelmanov y otros).

Una forma de comprender y estudiar la estructura de las álgebras es a tráves de sus representaciones (módulos o bimódulos). Las representaciones son actualmente la herramienta principal para comprender la estructura de las álgebras. En el caso de las representaciones, el problema principal es la clasificación de los módulos o bimódulos irreducibles, esto es, módulos o bimódulos que no poseen submódulos o subbimódulos, respectivamente.

Además, otro concepto de suma importancia es la noción de categoría que vio la luz a principios del siglo pasado. La teoría de categorías fue y es estudiado por matemáticos activos y es quizá la herramienta principal para observar las conexiones que existen entre las diferentes áreas de la matemática. Además, es la base principal para comprender desde un punto de vista global las diferentes estructuras de las álgebras.

Por otro lado, el Teorema de Factorización de Kronecker es el abuelo de todos los teoremas de factorización y es un resultado importante de las álgebras asociativas. Análogos de este teorema fueron encontrados en otras estructuras algebraicas, por ejemplo, en las álgebras de Lie graduadas, álgebras alternativas, álgebras de Jordan, álgebras alternativas a la derecha.

En esta tesis, aplicamos el Teorema de Factorización de Kronecker para obtener una equivalencia de categorías de bimódulos asociativos. Esta equivalencia nos permite identificar el reticulado de subbimódulos de un bimódulo de una de las categorías con el reticulado de los subbimódulos de un bimódulo de la otra categoría. Además, usamos el Teorema de Factorización de Kronecker para clasificar los bimódulos asociativos irreducibles.

1.1. Justificación

El Teorema de Factorización de Kronecker es un resultado clásico en las álgebras asociativas, el cual afirma que cualquier álgebra asociativa unitaria que contiene un sistema de n^2 elementos de matrices unitarias, es también una álgebra de matrices. Un problema muy importante en álgebra es determinar los bimódulos irreducibles sobre una cierta estructura algebraica y en general es también útil saber la reductibilidad completa de los bimódulos arbitrarios. Por lo tanto, si deseamos clasificar los bimódulos asociativos irreducibles unitarios sobre $M_n(F)$ como es qué el Teorema de Factorización de Kronecker puede ayudarnos, además como es qué puede ayudarnos con respecto a la reductibilidad completa de los bimódulos. El estudio se justifica, pues el Teorema de Factorización de Kronecker nos permitirá clasificar los bimódulos irreducibles y la reductibilidad completa de los bimódulos sobre $M_n(F)$ a través de una equivalencia de categorías.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Delimitación del problema

En el presente trabajo de investigación nos limitaremos a estudiar la aplicación del Teorema de Factorización de Kronecker en una equivalencia de categorías.

1.2.2. Formulación del problema

¿Será posible obtener a través del Teorema de Factorización de Kronecker una cierta equivalencia de categorías de bimódulos?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Obtener una equivalencia de categorías por medio del Teorema de Factorización de Kronecker.

1.3.2. Objetivos específicos

- Definir los conceptos básicos de la teoría de categorías.
- Describir del Teorema de Factorización de Kronecker.
- Clasificar los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre $M_n(F)$.

II. Marco teórico

2.1. Antecedentes

En el año 1954, Jacobson en **(Jacobson, 1954)** demostró un análogo del Teorema de Factorización de Kronecker para las álgebras de Jordan que contienen el álgebra de Albert (álgebra de Jordan excepcional de dimensión 27). Jacobson en **(Jacobson, 2009)** usó dicho resultado para estudiar las birepresentaciones de las álgebras de Jordan y así obtener ciertas equivalencias de categorías.

Martínez, Shestakov y Zelmanov en **(Martínez, Shestakov, y Zelmanov, 2010)** en el año 2010 generalizaron los resultados obtenidos por Jacobson en **(Jacobson, 1954)** y obtuvieron un análogo del Teorema de Factorización de Kronecker para las superálgebras de Jordan, el cual fue usado para clasificar los bimódulos de Jordan sobre las superálgebras de Jordan $P(n)$ y $Q(n)$. Además, en el año 2003, Martínez y Zelmanov en **(Martínez y Zelmanov, 2003)** probaron un análogo del Teorema de Factorización de Kronecker para las superálgebras de Jordan que contienen la superálgebra de Kac K_{10} (superálgebra de Jordan excepcional de dimensión 10).

En el año 2019, Victor López Solís obtuvo en **(Solís, 2019)** algunos análogos del Teorema de Factorización de Kronecker para las superálgebras alternativas. Por otro lado, en el año 2020, Popov obtuvo en **(Popov, 2020)** algunos análogos del Teorema de Factorización de Kronecker para las superálgebras de Jordan no conmutativas, los cuales fueron usados para estudiar las representaciones de $Q(2)$. Recientemente, en un artículo publicado en el año 2020, Pchelintsev, Shashkov y Shestakov en **(Pchelintsev, Shashkov, y Shestakov, 2021)** obtuvieron un análogo del Teorema de Factorización de Kronecker para las álgebras alternativas a la derecha que contienen el álgebra de Cayley de dimensión 8.

También, en el año 2020, Victor López Solís y Shestakov resolvieron en **(Solís y Shestakov, 2021)** el problema de Nathan Jacobson descrito en **(Jacobson, 1954)**, donde se obtuvo un análogo del Teorema de Factorización de Kronecker. Además, en el año 2022, Victor López Solís ha obtenido en **(Solís, 2022)** algunos análogos del Teorema de Factorización de Kronecker para las álgebras de Malcev que contienen el álgebra de Malcev excepcional de dimensión 7, los cuales fueron usados para demostrar ciertas equivalencias de categorías.

Uno de los resultados clásicos de las álgebras asociativas afirma que cualquier álgebra asociativa semisimples se escribe de manera única como una suma directa $I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ de ideales simples (donde una álgebra es simple, desde que no tenga ideales propios y no sea una álgebra de dimensión 1 en el cual el producto sea cero). Un célebre teorema de Wedderburn-Artin afirma que cualquier álgebra asociativa simple A es el producto de Kronecker $D \otimes M_n(F)$ de una álgebra de división D sobre F y la álgebra de matrices $M_n(F)$ de dimensión n^2, donde n es único y D está determinada de manera única a menos de isomorfismo.

La afirmación del teorema de Wedderburn-Artin sobre las álgebras asociativas simples permite tener intuitivamente claro que la categoría de los módulos a la izquierda sobre una álgebra asociativa simple es equivalente a la categoría de espacios vectoriales a la izquierda sobre su anillo de división asociado. Una vez que se realizaron las nociones categóricas adecuadas, Morita caracterizó la equivalencia de categorías entre las categorías de módulos unitarios a la izquierda de dos anillos con identidad como los dados por los functores covariantes **Hom** y **Tensor** proporcionados por los progeneradores (generadores proyectivos generados finitamente). Así, los teoremas de Morita sobre la equivalencia de categorías tienen una relación íntima con el teorema de Wedderburn-Artin.

Inspirándose y basándose en gran medida en las ideas de Morita en **(Morita, 1958)**y **(Morita, 1965)**, Fuller estableció en (Fuller, 1974) una relación similar entre el Teorema de la densidad de Jacobson y la equivalencia de ciertas categorías de módulos.

Así, en el subsecuente desarrollo y ejecución de mi tesis, deseo realizar algo parecido y pretendo aplicar el Teorema de Factorización de Kronecker para obtener una equivalencia de ciertas categorías de bimódulos asociativos, similar a los trabajos realizados por Morita en **(Morita, 1958)** y **(Morita, 1965)**, Fuller en **(Fuller, 1974)**, Jacobson en **(Jacobson, 1968)** y por los trabajos **(Martínez y cols., 2010)**,**(Solís, 2022)** de Martínez, Shestakov, Zelmanov y Victor López Solís.

2.2. Bases teóricas

Las definiciones presentadas en esta sección se encuentran en cualquier libro de Álgebra y/o Álgebra abstracta; siendo **(Hungerford, 2012)** el texto guía de esta investigación, complementado con **(Smith, 2015)**,**(Artin, 1991)**, **(Bhattacharya, Jain, y Nagpaul, 1994)** y **(Wisbauer, 2010)**.

2.2.1. Anillos

Definición 2.2.1 Un **anillo** es un conjunto no vacío R junto con dos operaciones binarias (denotadas usualmente como **suma** y **multiplicación**) que satisfacen:

1. $(R, +)$ es un grupo abeliano.
2. $(ab)\,c = a\,(bc)$ para todo $a, b, c \in R$ (propiedad asociativa de la multiplicación).
3. $a\,(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$ para todo $a, b, c \in R$ (propiedad distributiva a la izquierda y a la derecha).

Además, si

4. $ab = ba$ para todo $a, b \in R$ se dice que R es un anillo conmutativo.

Si R tuviese un elemento 1_R tal que

5. $1_R a = a 1_R$ para todo $a \in R$, se dice que R es un anillo con identidad.

Ejemplo 2.2.2 El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la suma y multiplicación usual, son anillos conmutativos con identidad.

Ejemplo 2.2.3 El conjunto $\mathbb{Z}_n$ con la adición y multiplicación usual de clases, es un anillo conmutativo con identidad.

Ejemplo 2.2.4 Sea $M_2(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices de orden 2×2 sobre los números reales, esto es, $M_2(\mathbb{R})$ consiste de todos los arreglos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dos matrices son iguales siempre que las entradas en las posiciones correspondientes son iguales, esto es,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \text{ si y solo si } a = r, b = s, c = t, d = u.$$

La adición de matrices está definida por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+r & b+s \\ c+t & d+u \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matrices está definida por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar+bt & as+bu \\ cr+dt & cs+du \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, con las operaciones de suma y multiplicación de matrices definidas anteriormente, $M_2(\mathbb{R})$ es un anillo. A continuación, a través de un ejemplo verificaremos que no se cumple la conmutatividad en $M_2(\mathbb{R})$.

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2(4)+3(1) & 2(1)+3(2) \\ 4(4)+1(1) & 4(1)+1(2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4(2)+1(4) & 4(3)+1(1) \\ 1(2)+2(4) & 1(3)+2(1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Comparando las matrices AB y BA verificamos que estas son diferentes, pues sus entradas son diferentes; así

$$\begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 17 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $M_2(\mathbb{R})$ es un anillo no conmutativo.

En general, se muestra análogamente que el anillo con identidad $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n es un anillo no conmutativo.

Definición 2.2.5 Un elemento $a \neq 0$ de un anillo R es llamado **divisor de cero a la izquierda** (**a la derecha**) si existe $b \neq 0$ tal que $ab = 0$ ($ba = 0$). Un **divisor de cero** es un elemento de R que es a su vez un divisor de cero a la izquierda y a la derecha.

Ejemplo 2.2.6 Sea el anillo $\mathbb{Z}_6$. Los elementos 2 y 3 son divisores de cero, porque $2 \cdot 3 = 0$. Similarmente, en el anillo $\mathbb{Z}_{12}$, 4 y 9 son divisores de cero porque $4 \cdot 9 = 0$.

Ejemplo 2.2.7 Una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ en $M_2(R)$ tal que $ad - bc = 0_R$ es un divisor de cero porque

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.2.8 Un elemento u de un anillo R con identidad es llamado **unidad** si, existe $r \in R$ tal que $ur = 1_R = ru$. En este caso, el elemento r es llamado el **inverso multiplicado** de u y es denotado por u^{-1}.

Ejemplo 2.2.9 El anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros tiene 2 unidades; pues, $1 \cdot 1 = 1$ y $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Ejemplo 2.2.10 Una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $M_2(\mathbb{R})$ tal que $ad - bc \neq 0$ es una unidad porque se verifica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.2.11 Un **dominio de integridad** es un anillo conmutativo con identidad sin divisores de cero. Un anillo D con identidad en el que cada elemento distinto de cero es una unidad es llamado un **anillo de división**. Un **cuerpo** es un anillo de división conmutativo.

Ejemplo 2.2.12 El anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros es un dominio de integridad.

Ejemplo 2.2.13 Los sistemas de los números racionales $\mathbb{Q}$, reales $\mathbb{R}$ y complejos $\mathbb{C}$ son cuerpos.

Ejemplo 2.2.14 **(Los cuaterniones)** Sea F el cuerpo de los números reales y considere el conjunto de todos los símbolos $\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ llamados cuaterniones, donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$.
La igualdad y la adición de dichos cuaterniones están definidas por

$$\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k$$

si y solo si $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3$ y

$$(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k) + (\beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k)$$

$$= (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\, i + (\alpha_2 + \beta_2)\, j + (\alpha_3 + \beta_3)\, k$$

El producto está basado en $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$,$jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$ y $ik = -i$.
Escribimos el producto de dos cuaterniones de acuerdo con las reglas anteriores, de la siguiente manera

$$(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)\,(\beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k) = \gamma_0 + \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3 k$$

donde

$$\gamma_0 = \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3,$$

$$\gamma_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,$$

$$\gamma_2 = \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1,$$

$$\gamma_3 = \alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0.$$

Aquí se esta haciendo uso de las leyes distributivas y las reglas de la multiplicación para i, j y k.

Si algún $\alpha_i = 0$ en $x = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, omitiremos esta expresión de x; entonces $0 + 0i + 0j + 0k$ se escribe simplemente como 0, $1 + 0i + 0j + 0k$ como 1.

Un cálculo revela que

$$(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)\,(\alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Esto tiene una consecuencia muy importante, suponiendo que $x = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \neq 0$. Entonces $\beta = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$. Luego

$$(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)\left(\frac{\alpha_0}{\beta} - \frac{\alpha_1}{\beta}i - \frac{\alpha_2}{\beta}j - \frac{\alpha_3}{\beta}k\right) = 1$$

Así, si $x \neq 0$, entonces x tiene un inverso en los cuaterniones. Entonces, los cuaterniones forman un anillo de división no conmutativo.

Definición 2.2.15 Sea R un anillo y S un subconjunto no vacío de R que es cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación de R. Si S es en sí mismo un anillo bajo esas operaciones, entonces es llamado un **subanillo** de R. Un subanillo I de R es un **ideal a la izquierda** siempre que

$$\text{si } r \in R \text{ y } x \in I \text{ entonces } rx \in I,$$

y I es un **ideal a la derecha** siempre que

$$\text{si } r \in R \text{ y } x \in I \text{ entonces } xr \in I.$$

I es un **ideal** si es a la vez un ideal a la izquierda y a la derecha.

Ejemplo 2.2.16 Para cada entero n el subanillo $\langle n\rangle = \{kn | k \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal en $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.2.17 Sea $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$, R es un subanillo de $M_2(\mathbb{R})$. Sea $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | b \in \mathbb{R} \right\}$; I es un subanillo de R.

Consideremos $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in R$ y $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$, entonces

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Similarmente

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, I es un ideal de R.

Definición 2.2.18 . Sean R y S anillos. Una aplicación $f : R \longrightarrow S$ es un **homomorfismo de anillos** si para todo $r_1, r_2 \in R$ se cumple

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) \qquad \text{y} \qquad f(r_1 r_2) = f(r_1)f(r_2).$$

Ejemplo 2.2.19 La aplicación $g : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$g(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r & r \end{pmatrix}$$

es un homomorfismo, pues para $r, s \in \mathbb{R}$ se cumple

$$
\begin{aligned}
g(r) + g(s) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s & s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(r+s) & r+s \end{pmatrix} \\
&= g(r+s)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
g(r)g(s) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s & s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -rs & rs \end{pmatrix} \\
&= g(rs)
\end{aligned}
$$

2.2.2. Módulos

Dados R y S anillos, a continuación definiremos los conceptos de módulos a la izquierda (respectivamente, a la derecha) y bimódulos.

Definición 2.2.20 Sea R un anillo. Un $R-$**módulo a la izquierda** (o **módulo** sobre R), es un grupo abeliano aditivo M junto con una aplicación $R \times M \longrightarrow M$ (denotamos la imagen de (r, m) como rm) tal que para cada $r, s \in R$ y $m, n \in M$ se tiene

1. $r(m+n) = rm + rn$,
2. $(r+s)m = rm + sm$,
3. $r(sm) = (rs)m$.

Si R tiene elemento identidad 1_R tal que

4. $1_R m = m$ para todo $m \in M$

entonces M es llamado **módulo unitario** sobre R. Si R es un anillo de división, entonces un módulo unitario M es llamado **espacio vectorial a la izquierda**.

De manera análoga se definen los módulos a la derecha sobre S. Además, diremos que M es un **bimódulo** si es a la vez un módulo a la izquierda sobre R y a la derecha sobre S tal que

$$(rm)s = r(ms)$$

para cualesquiera $m \in M, r \in R, s \in S$.

Ejemplo 2.2.21 . Sea M algún grupo abeliano aditivo. Entonces M es un $\mathbb{Z}-$ módulo a la izquierda, donde la acción de $\mathbb{Z}$ sobre M está dada por $am = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{a}$, para $m \in M$ y a un entero. Además,

$$a(m+n) = am + an,$$

$$(a+b)m = am + bm,$$

$$(ab)m = a(bm),$$

$$1m = m$$

para todos los enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ y para todo $m, n \in M$. Por otro lado, como $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo, entonces M es un bimódulo (vea el Ejemplo 2.24).

Ejemplo 2.2.22 . Si I es un ideal a la izquierda de un anillo R, entonces I es un $R-$módulo a la izquierda, siendo $ra\,(r \in R, a \in I)$ la acción de R sobre I.

Ejemplo 2.2.23 . El caso especial en que $I = R$; cualquier anillo R es un $R-$módulo a la izquierda sobre sí mismo.

Ejemplo 2.2.24 Si R es un anillo conmutativo, entonces cada $R-$módulo a la izquierda es también un $R-$módulo a la derecha. Verifiquemos esta afirmación, para ello consideremos un $R-$módulo M a la izquierda con la acción

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \mapsto r \cdot m$$

Definamos la siguiente acción

$$* : M \times R \longrightarrow M$$

$$(m, r) \mapsto m * r$$

dada por

$$m * r = r \cdot m$$

Así, para todo $m, n \in M$ y $r, s \in R$, se tienen

1. $$\begin{aligned} (m+n) * r &= r \cdot (m+n) \\ &= r \cdot m + r \cdot n \\ &= m * r + n * r \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} m * (r+s) &= (r+s) \cdot m \\ &= r \cdot m + s \cdot m \\ &= m * r + m * s \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(m * s) * r &= r \cdot (m * s)\\ &= r \cdot (s \cdot m)\\ &= (r \cdot s) \cdot m\\ &= m * (r \cdot s)\\ &= m * (s * r)\end{aligned}$$

Por lo tanto, M es un $R-$módulo a la derecha con la acción $*$.

Ejemplo 2.2.25 Consideremos el anillo $R = M_2(\mathbb{R})$.

(a) Sea $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\} \neq \varnothing$ un subconjunto de R. Se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ y_1 + y_2 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

y

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by & 0 \\ cx + dy & 0 \end{bmatrix} \in I$$

Por lo tanto, I es un ideal a la izquierda. Además, I es un $R-$módulo a la izquierda con la acción

$$R \times I \longrightarrow I$$

$$(A, X) \mapsto AX.$$

Por otro lado,

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx \\ ay & by \end{bmatrix}$$

no es necesariamente un elemento de I. Por lo tanto, I no es un $R-$módulo a la derecha.

(b) Consideremos $J = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\} \neq \varnothing$ un subconjunto de R. J es un ideal a la derecha y por lo tanto; un $R-$módulo a la derecha. Por otro lado, J no es un $R-$módulo a la izquierda.

Ejemplo 2.2.26 Si S es un anillo y R un subanillo de S, entonces S es un $R-$módulo a la izquierda con $ra(r \in R, a \in S)$ siendo la multiplicación en S. En particular, los anillos $R\left[x_1, ..., x_m\right]$ y $R\left[\left[x\right]\right]$ son $R-$módulos a la izquierda.

De aquí en adelante la palabra "módulo" hará referencia a un "módulo a la izquierda".

Definición 2.2.27 Sean los módulos M y N sobre un anillo R. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es un **homomorfismo de $R-$módulos** si para todo $m_1, m_2 \in M$ y $r \in R$, se cumple

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad \text{y} \quad f(rm_1) = rf(m_1).$$

Si R es un anillo de división, entonces un homomorfismo de $R-$módulos es llamado una **transformación lineal**.

En lo que sigue, los homomorfismos de módulos sobre R se denominan simplemente homomorfismos. Observe que un homomorfismo de módulos, $f : M \longrightarrow N$ es necesariamente un homomorfismo de grupos abelianos aditivos. En consecuencia, f es un **monomorfismo inyectivo** de módulos [respectivamente, **epimorfismo**, **isomorfismo**] si este es inyectivo [respectivamente, sobreyectiva, biyectiva] como una aplicación de conjuntos. El núcleo de f es su núcleo como homomorfismo de grupos abelianos aditivos, esto es, $Kerf = \{m \in M : f(m) = 0\}$. Similarmente la imagen de f es el conjunto $Imf = \{n \in N : n = f(m), \text{ con } m \in M\}$.

Definición 2.2.28 Sea R un anillo, M un $R-$módulo y $B \neq \varnothing$ un subconjunto de M. Se dice que B es un **submódulo** de M siempre que B es un subgrupo aditivo de M y $rb \in B$, para $r \in R$ y $b \in B$. Un submódulo de un espacio vectorial sobre un anillo de división es llamado un **subespacio** .

Ejemplo 2.2.29 . Si R es un anillo y $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de $R-$módulos, entonces $Kerf$ es un submódulo de M y Imf es un submódulo de N.

Teorema 2.2.30 Sea N un submódulo de un módulo M sobre un anillo R. Entonces el grupo cociente M/N es un $R-$módulo, con la acción de R sobre M/N dada por

$$r\,(m+N) := rm + N$$

para todo $r \in R$ y $m \in M$. Además, la aplicación $\pi : M \longrightarrow M/N$ dada por $m \mapsto m + N$ es un epimorfismo de $R-$módulos, con núcleo N y es llamado **epimorfismo canónico** (o **proyección**)

Denotamos por M_R un módulo a la derecha sobre R y por ${}_RN$ un módulo a la izquierda sobre R.

2.2.3. Álgebras

Definición 2.2.31 Sea K un anillo conmutativo con identidad. Una $K-$**álgebra** (o álgebra sobre K) A es un anillo, donde está definida una operación binaria bilineal $A \times A \to A\,((a,b) \mapsto ab)$ llamada producto tal que

i. A es un $K-$módulo,

ii. $(a+b)c = ac + bc,\ a(b+c) = ab + ac,$ para todo $a, b, c \in A$.

La teoría clásica de las álgebras se ocupa de las álgebras sobre un cuerpo K. Tal álgebra es un espacio vectorial sobre K y, por lo tanto, son aplicables varios resultados del álgebra lineal.

Ejemplo 2.2.32 . Sea K un anillo conmutativo con identidad. El anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$ es una $K-$álgebra.

Recordemos que el **centro** de un anillo R es el conjunto de elementos que conmutan con cada elemento de R, esto es,

$$Z(R) = \{a \in R : ab = ba, \forall b \in R\}.$$

Ejemplo 2.2.33 . Sea R un anillo conmutativo con identidad y K un subanillo del centro de R tal que $1_R \in K$. Entonces R es una $K-$álgebra, con la estructura de $K-$módulo dada por la multiplicación en R. En particular, todo anillo conmutativo R con identidad es una $K-$álgebra.

Si existe un elemento 1 en A tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$, decimos que A es una $K-$álgebra con identidad.

Definición 2.2.34 Sea K un anillo conmutativo con identidad y A, B K -álgebras.

(i) Una **subálgebra** de A es un subanillo de A que también es un K-submódulo de A.

(ii) Un **ideal** de A es un ideal del anillo A que también es un $K-$submódulo de A.

(iii) Un **homomorfismo** (**isomorfismo**) de $K-$álgebras $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo (isomorfismo) de anillos que es también un homomorfismo (isomorfismo) de $K-$módulos.

Dada una álgebra, podemos a partir de ella construir otras álgebras tal como la álgebra cociente de una dada $K-$álgebra A por un ideal I de A.

Álgebras de endomorfismos

Sea A una $K-$álgebra y sean M y N $A-$módulos a la izquierda o a la derecha. Denotaremos el conjunto de los homomorfismos de $A-$módulos de M en N como $hom_A(M, N)$. El conjunto $hom_A(M, N)$ tiene una estructura de $K-$álgebra, donde la suma y la multiplicación están definidas de la siguiente manera

$$(\phi + \psi)(m) = \phi(m) + \psi(m)$$

y

$$(\phi\psi)(m) = \phi(m)\psi(m)$$

para $m \in M$.

Si $M = N$, entonces la composición de homomorfismos

$$(\phi \circ \psi)(m) = \phi(\psi(m))$$

define un producto bilineal, con el cual el conjunto $hom_A(M, M)$ adquiere una estructura de $K-$álgebra con elemento identidad id_M. Denotaremos este último por $\mathrm{End}_A(M)$ y la llamaremos **álgebra de endomorfismos** del módulo M.

La aplicación de $\mathrm{End}_A(M)$ sobre M induce en M una estructura de $\mathrm{End}_A(M)$-módulo a la izquierda. De esta forma, un A-módulo a la derecha M adquiere una estructura de $\mathrm{End}_A(M)$-A-bimódulo.

Álgebras Matriciales

Dada una $K-$álgebra A, denotaremos por $M_n(A)$ al conjunto de las matrices de orden $n \times n$ con entradas en A. Llamaremos a $M_n(A)$ el **álgebra matricial** $n \times n$ sobre A.

En general, denotaremos a las matrices con letras griegas minúsculas. Denotaremos por I_n a la matriz identidad $n \times n$. Asimismo, denotaremos por e_{ij} a las **unidades matriciales** para n y A fijados. Sean $\alpha = (x_{ij}) \in M_n(A)$ y $a \in A$, definimos los productos $a\alpha = (ax_{ij})\,, \alpha a = (x_{ij}a)$. Esos productos nos permiten inducir una estructura de A-bimódulo en $M_n(A)$, el cual tiene una base formada por las unidades matriciales tales que

$$(x_{ij}) = \Sigma_{ij} e_{ij} x_{ij}$$

es la representación única de la matriz α. Además, se cumple la propiedad

$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta) \text{ para todo } \alpha, \beta \in M_n(A) \text{ y } a \in A.$$

2.2.4. Bimódulo asociativo sobre una álgebra

Sea A una $K-$álgebra y sea M un $A-$bimódulo, esto es, M es un $K-$módulo tal que sobre M están definidas las multiplicaciones a la derecha y a la izquierda por los elementos de la álgebra A

$$A \times_R M \longrightarrow M,\ (a, m) \mapsto am, \quad M \times_R A \longrightarrow M,\ (m, a) \mapsto ma$$

donde $a \in A$, $m \in M$. En la suma directa $E = A \oplus M$ de los $K-$módulos se define un producto $*$

$$(a + m) * (b + m) = ab + (an + mb),$$

donde $a, b \in A$, $m, n \in M$. Así, E viene a ser una álgebra sobre K, en el cual A es una subálgebra y M es un ideal con multiplicación cero. La álgebra E

es llamada la **extensión de división nula** de la álgebra A por su bimódulo M. El bimódulo M es llamado un $A-$**bimódulo asociativo** si la extensión de división nula $E = A \oplus M$ es una álgebra asociativa. Es fácil de verificar que un bimódulo M es asociativo si y solamente si para cualesquiera $a, b \in A$, $m \in M$, las siguientes iguales son válidas en la álgebra E:

$$(ab)m = a(bm),$$

$$(am)b = a(mb),$$

$$(ma)b = m(ab).$$

Sea M un $A-$bimódulo, los subbimódulos $\{0\}$ y M son llamados **subbimódulos triviales** y los subbimódulos no triviales son llamados **subbimódulos propios** de M.

Definición 2.2.35 Un bimódulo M es **irreducible** si M no contiene ningún subbimódulo propio.

La descripción de los (bi)módulos irreducibles es uno de los principales problemas en la teoría de la (bi)representación en cualquier clase de álgebras. Para una álgebra A denotaremos por Reg$A$ el bimódulo regular $M = A$, con la acción de A dada por el producto en A.

2.2.5. Categorías

Definición 2.2.36 Una **categoría** $\mathcal{C}$ consiste de una clase de objetos ob($\mathcal{C}$) (denotados por $A, B, C, \cdots$) junto con:

i. Una clase de subconjuntos disjuntos, denotados por $hom(A, B)$, uno para cada par de objetos en $\mathcal{C}$; (un elemento f de $hom(A, B)$ es llamado un **morfismo** de A a B y es denotado por $f : A \longrightarrow B$);

ii. Para cada triple (A, B, C) de objetos de $\mathcal{C}$ una función

$$hom(B, C) \times hom(A, B) \longrightarrow hom(A, C);$$

(para morfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, esta función es escrita por $(g, f) \mapsto g \circ f$ y $g \circ f : A \longrightarrow C$ es llamada la composición de f y g); todo sujeto a dos axiomas:

a) **Asociatividad**. Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

b) **Identidad**. Para cada objeto B de $\mathcal{C}$ existe un morfismo $1_B : B \longrightarrow B$ tal que para cada $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$,

$$1_B \circ f = f \text{ y } g \circ 1_B = g.$$

En una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es llamado una **equivalencia** si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. La composición de dos equivalencias, cuando se define, es una equivalencia, A y B son llamados **equivalentes**.

Ejemplo 2.2.37 . **Set**, la categoría de los conjuntos. Aquí, ob(**Set**) es la clase de todos los conjuntos. Si A y B son conjuntos, $hom(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow B$. Entonces es fácil de mostrar que

Set es una categoría. Así, la función f será una equivalencia si, y solamente si f es una biyección.

Ejemplo 2.2.38 . **Grp**, la categoria de grupos, donde ob(**Grp**) es la clase de todos los grupos, $hom(A, B)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de grupos $f : A \longrightarrow B$. Entonces, f es una equivalencia si, y solamente si f es un isomorfismo.

Ejemplo 2.2.39 . Un grupo G (multiplicativo) puede ser considerado como una categoría con un objeto, G. Sea $hom(G, G)$ el conjunto de elementos de G, la composición de los morfismos a y b es simplemente ab dada por la operación binaria en G. Cada morfismo es una equivalencia (cada elemento de G tiene inversa). 1_G es el elemento identidad e de G.

Ejemplo 2.2.40 . Sea $\mathcal{C}$ cualquier categoría y definimos la categoría $\mathcal{D}$ cuyos objetos son todos los morfismos de $\mathcal{C}$. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces $hom(f, g)$ consiste de los pares (α, β), donde $\alpha : A \longrightarrow C$, $\beta : B \longrightarrow D$ son morfismos de $\mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

esto es, $g \circ \alpha = \beta \circ f$.

Ejemplo 2.2.41 **Ring**, la categoría de los anillos (asociativos) con identidad, donde ob(**Ring**) es la clase de anillos y los morfismos son homomorfismos (aplicaciones 1 a 1).

Ejemplo 2.2.42 $R-$**mod**, la categoría de los módulos a la izquierda para un anillo R fijo. (Asumimos $1x = x$, para todo x en un $R-$módulo M a la izquierda). Además, denote por ob($R-$mod) la clase de módulos a la izquierda sobre R y los morfismos son homomorfismos de $R-$módulos. Los productos son composiciones de aplicaciones. Si R es un anillo de división (en particular, un cuerpo), entonces $R-$mod es la categoría de espacios vectoriales (a la izquierda) sobre R. De manera similar, se define mod$-R$ como la categoría de módulos a la derecha para el anillo R.

Definición 2.2.43 Una **categoría concreta** es una categoría $\mathcal{C}$ junto con una función σ que asigna a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un conjunto $\sigma(A)$ (llamado el **conjunto subyacente** de A) de tal manera que:

i. Cada morfismo $A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ es una función sobre los conjuntos subyacentes $\sigma(A) \longrightarrow \sigma(B)$;

ii. El morfismo identidad de cada objeto A de $\mathcal{C}$ es la función identidad sobre el conjunto subyacente $\sigma(A)$;

iii. La composición de morfismos en $\mathcal{C}$ concuerda con la composición de funciones sobre los conjuntos subyacentes.

Ejemplo 2.2.44 La categoría de grupos, junto con la función que asigna a cada grupo su conjunto subyacente en el sentido habitual, es una categoría concreta. Similarmente, la categoría de grupos abelianos, es una categoría concreta.

Definición 2.2.45 . Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un **isomorfismo**, si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ y $g \circ f = 1_A$, entonces f es llamado **sección** de g y g es llamado una **retracción** de f. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es llamado **monomorfismo (epimorfismo)** si es cancelable a la izquierda (a la derecha) en $\mathcal{C}$; esto es, si $g_1, g_2 \in \hom(C, A)$ $(\hom(B, C))$ para algún C y $f \circ g_1 = f \circ g_2$ $(g_1 \circ f = g_2 \circ f)$, entonces $g_1 = g_2$.

Los siguientes hechos son consecuencias inmediatas de la definición.

1. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ y, f y g son monomorfismos (epimorfismos), entonces $g \circ f$ es monomorfismo (epimorfismo). En efecto, como $g \circ f \in hom(A, C)$, considérense $g_1, g_2 \in hom(D, A)$ $(hom(C, D))$ para cualquier D tales que

$$(g \circ f) \circ g_1 = (g \circ f) \circ g_2 \quad (g_1 \circ (g \circ f) = g_2 \circ (g \circ f))$$

y por asociatividad $g \circ (f \circ g_1) = g \circ (f \circ g_2)$ $((g_1 \circ g) \circ f = (g_2 \circ g) \circ f)$, entonces

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \quad (g_1 \circ g = g_2 \circ g),$$

pues g es monomorfismo (epimorfismo). Ahora, como f es monomorfismo (g es epimorfismo), entonces $g_1 = g_2$. Esto muestra que, $g \circ f$ es cancelable a la izquierda (a la derecha).

2. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ y $g \circ f$ es monomorfismo (epimorfismo), entonces f es monomorfismo (g es epimorfismo). En efecto, como $f \in hom(A, B)$ y $g \in hom(B, C)$, consideremos $g_1, g_2 \in hom(D, A)$ $(hom(C, D))$ para cualquier D tales que

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \quad (g_1 \circ g = g_2 \circ g).$$

Entonces $g \circ (f \circ g_1) = g \circ (f \circ g_2)$ $((g_1 \circ g) \circ f = (g_2 \circ g) \circ f)$ y por asociatividad $(g \circ f) \circ g_1 = (g \circ f) \circ g_2$ $(g_1 \circ (g \circ f) = g_2 \circ (g \circ f))$. Ahora, como $g \circ f$ es monomorfismo (epimorfismo), entonces $g_1 = g_2$. Esto muestra que, f es cancelable a la izquierda (g es cancelable a la derecha).

3. Si f tiene una sección, entonces f es epimorfismo y, si f tiene una retracción, entonces f es monomorfismo. En efecto, consideremos $g_1, g_2 \in hom(B, D)$ $(hom(D, A))$ para cualquier D tales que

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \quad (f \circ g_1 = f \circ g_2).$$

Si f tiene una sección (retracción), existe $g : B \longrightarrow A$ $(h : B \longrightarrow A)$ tal que

$$f \circ g = 1_B \quad (h \circ f = 1_A).$$

Luego $(g_1 \circ f) \circ g = (g_2 \circ f) \circ g \quad (h \circ (f \circ g_1) = h \circ (f \circ g_2))$ y por la asociatividad $g_1 \circ (f \circ g) = g_2 \circ (f \circ g) \quad ((h \circ f) \circ g_1 = (h \circ f) \circ g_2)$, lo cual implica

$$g_1 \circ 1_B = g_2 \circ 1_B \ (1_A \circ g_1 = 1_A \circ g_2),$$

esto es, $g_1 = g_2$. Esto muestra que, f es cancelable a la derecha (a la izquierda).

Si f es una función de un conjunto A en un conjunto B, entonces se ve fácilmente que f es inyectiva (esto es, $f(a) \neq f(a')$ para $a \neq a'$ en A) si, y solamente si para cualquier conjunto C y funciones g_1, g_2 de C en A, $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implica $g_1 = g_2$. Por lo tanto, $f \in hom_{\mathbf{Set}}(A, B)$ es monomorfismo si, y solamente si f es inyectiva. Similarmente, f es epimorfismo en **Set** si, y solamente si f es sobreyectiva $(f(A) = B)$. Similar resultado es válido en las categorias $R-$**mod** y **Grp**.

Proposición 2.2.46 Un morfismo f en $R-$**mod** o en **Grp** es monomorfismo (epimorfismo) si, y solamente si la función del conjunto subyacente es inyectiva (sobreyectiva).

Demostración: La demostración está dada en (Jacobson, 1968). ■

Definición 2.2.47 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, un **functor (covariante)** T de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ (denotado por $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$) consiste de un par de funciones (ambas denotadas por T), esto es

1) Una función de objetos $A \mapsto T(A)$ de ob($\mathcal{C}$) en ob($\mathcal{D}$).

2) Para cada par de objetos (A, B) de ob($\mathcal{C}$), una función $f \mapsto T(f)$ de $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ en $hom_{\mathcal{D}}(T(A), T(B))$, esto es, una función que asigna a cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ un morfismo

$$T(f) : T(A) \longrightarrow T(B)$$

de $\mathcal{D}$, de modo que

a) $T(1_A) = 1_{T(A)}$ para cada morfismo identidad 1_A de $\mathcal{C}$.

b) $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$ para morfismos cualesquiera f, g de $\mathcal{C}$ cuya composición está definida.

Ejemplo 2.2.48 . El **functor identidad** (covariante) $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ asigna a cada objeto y a cada morfismo de la categoría $\mathcal{C}$ sobre si misma.

Ejemplo 2.2.49 . Obtenemos un functor de **Grp** en **Set** aplicando cualquier grupo en el conjunto subyacente del grupo y aplicando cualquier homomorfismo de grupos en la correspondiente función de conjuntos. El tipo de functor que descarta alguna estructura dada es llamada "functor olvidadizo".

Ejemplo 2.2.50 . Sea n un entero positivo. Para cualquier anillo R podemos formar el anillo $M_n(R)$ de las matrices de orden $n \times n$, con entradas en R. Un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$ determina un homomorfismo $(r_{ij}) \mapsto (f(r_{ij}))$ de $M_n(R)$ en $M_n(S)$. De este modo obtenemos un functor M_n de **Ring** en **Ring**.

Ejemplo 2.2.51 . Sean n y R como en el ejemplo 2.52 y $GL_n(R)$ denota el grupo de unidades de $M_n(R)$, esto es, el grupo de las matrices invertibles $n \times n$, con entradas en R. La función $R \mapsto M_n(R)$ $((r_{ij}) \mapsto f\,(r_{ij}))$ define un functor GL_n de **Ring** en **Grp**.

Ejemplo 2.2.52 Sea **Poset** la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados. Sus objetos son conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son funciones que preservan orden. Obtenemos un functor de $R-$ **mod** en **Poset** aplicando cada $R-$módulo M en $L(M)$, el conjunto de submódulos de M ordenados por inclusión. Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de módulos, f determina una función de $L(M)$ en $L(N)$ que preserva orden. Estas funciones definen un functor.

Ejemplo 2.2.53 Sea R un anillo y M un $R-$módulo a la izquierda fijo. Para cada $R-$módulo N, sea $T(N) = hom(M, N)$. Para cada homomorfismo de $R-$módulos $f : N \longrightarrow N'$, sea $T(f)$ la aplicación usual inducida

$$\bar{f} : hom(M, N) \longrightarrow hom(M, N')(g \mapsto f \circ g)$$

Entonces T es un functor desde la categoría $R-$**mod** en la categoría de los grupos abelianos **Ab**.

Definición 2.2.54 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, un **functor contravariante** S de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ ($S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$) consiste de un par de funciones (ambas denotadas por S), esto es:

1) Una función de objetos $A \mapsto S(A)$ de ob$(\mathcal{C})$ en ob$(\mathcal{D})$.

(2) Para cada par de objetos (A, B) de ob$(\mathcal{C})$, una función $f \mapsto S(f)$ de $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ en $hom_{\mathcal{D}}(S(B), S(A))$, esto es, una función que asigna a

cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ un morfismo

$$S(f) : S(B) \longrightarrow S(A)$$

de $\mathcal{D}$, de modo que

a) $S(1_A) = 1_{S(A)}$ para cada morfismo identidad 1_A de $\mathcal{C}$.

b) $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$ para morfismos cualesquiera f, g de $\mathcal{C}$ cuya composición está definida.

Ejemplo 2.2.55 Considere las categorías $R - \mathbf{mod}$ y $\mathbf{mod} - R$, para el anillo R. Definiremos un functor contravariante S de $R-\mathbf{mod}$ en $\mathbf{mod}-R$ como sigue. Si M es un $R-$módulo a la izquierda, considere el conjunto $M^* = hom_R(M, R)$ de homomorfismos de M en R visto como $R-$módulo a la izquierda de la manera habitual. Por lo tanto, M^* es el conjunto de funciones de M en R tales que

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(rx) = r\varphi(x)$$

para $x, y \in M$, $r \in R$.

Si $\varphi, \phi \in M^*$ y $s \in R$, entonces $\varphi + \phi$ definida por $(\varphi + \phi)(x) = \varphi(x) + \phi(x)$ y φs definida por $(\varphi s)(x) = \varphi(x)s$ están en M^*. De este modo M^* viene ser un $R-$módulo a la derecha y tenemos la función $M \mapsto M^*$ de ob($R-\mathbf{mod}$) en ob($\mathbf{mod}-R$). Ahora sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo del $R-$módulo M en el $R-$módulo N. Se tiene la función *transpuesta* $f^* : N^* \longrightarrow M^*$ definida como

$$f^* : \phi \mapsto \phi \circ f,$$

la composición de ϕ y f:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\phi\circ f"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Si $M_1 \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{f} M_3$ en $R-$**mod** y $\phi \in M_3^*$, entonces

$$(f \circ g)^*(\phi) = \phi \circ (f \circ g) = (\phi \circ f) \circ g = g^*(f^*(\phi)).$$

Por lo tanto,

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Es claro que $(1_M)^* = 1_{M^*}$. Se sigue que

$$D : M \mapsto M^*, \quad f \mapsto f^*.$$

define un functor contravariante, el *functor dualidad* S de $R-$ **mod** en **mod**$-R$. En una forma similar uno obtiene el functor dualidad S de **mod**$-R$ en $R-$ **mod**.

Como S es un functor contravariante, se deduce que $S^2 = S \circ S$ es un functor covariante de $R-$**mod** en sí mismo. Este functor es llamado *functor dualidad doble.*

La imagen de un isomorfismo a través de um functor es isomorfismo. Además, las secciones son aplicadas en secciones y las retracciones son aplicados en retracciones a través de functores. Por otro lado, los monomorfismos (epimorfismos) no son necesariamente aplicados en monomorfismos (epimorfismos) a través de functores.

A continuación ejemplificamos la última afirmación. Consideremos las categorías **Grp** y **Ab** y vamos mostrar que el functor abelianizador

$$\mathfrak{A} : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

no preserva monomorfismos.

Sabemos que la abelianización del grupo alternante A_n es $\{0\}$ para $n \geq 5$, mientras que la abelianización del grupo cíclico C_m es C_m (pues dicho grupo ya es abeliano). Cada elemento de A_n define un subgrupo cíclico, por lo tanto, un monomorfismo $C_m \hookrightarrow A_n$, mas la abelianización de este morfismo es $C_m \longrightarrow \{0\}$, el cual no es un monomorfismo.

/

Ahora consideremos las categorías **Ring** y **Set** y vamos a mostrar que el functor olvidadizo $\mathfrak{O} : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Set}$ no preserva epimorfismos.

Demostremos que $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(n) = n$ es un epimorfismo en **Ring**.

Sean $g_1, g_2 \in hom_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Q}, R)$, donde R es un anillo, tales que

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f,$$

esto es, $(g_1 \circ f)(n) = (g_2 \circ f)(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, o sea, $g_1(f(n)) = g_2(f(n))$, el cual implica

$$g_1(n) = g_2(n).$$

Sea $q = mn^{-1}$ cualquier elemento de $\mathbb{Q}$, con $n \neq 0$. Usando el hecho que g_1

es un homomorfismo, resulta

$$\begin{aligned} g_1(q) &= g_1(mn^{-1}) \\ &= g_1(m)(g_1(n))^{-1} \\ &= g_2(m)(g_2(n))^{-1} \\ &= g_2(mn^{-1}) \\ &= g_2(q) \\ g_1(q) &= g_2(q) \end{aligned}$$

para cualesquiera $q \in \mathbb{Q}$; por lo tanto,

$$g_1 = g_2$$

Esto muestra que f es cancelable a la derecha. Así, f es un epimorfismo. Por otro lado, no es un epimorfismo en **Set**, pues no es sobreyectiva.

Definiremos a continuación el concepto de transformación natural entre functores. Sin embargo, antes de pasar a la definición, será esclarecedor examinar en detalle un ejemplo.

Ejemplo 2.2.56 Sea la categoría $R-$**mod** para un anillo R y el functor dualidad doble D^2 en la categoría. Este aplica un $R-$módulo a la izquierda M en $M^{**} = (M^*)^*$ y un homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ en

$$f^{**} = (f^*)^* : M^{**} \longrightarrow N^{**}$$

Si $x \in M$, $\phi \in N^*$, entonces $f^* \circ \phi \in M^*$ y $(f^* \circ \phi)(x) = \phi(f(x))$. Si $\varphi \in M^{**}$, $f^{**} \circ \varphi \in N^{**}$ y $(f^{**} \circ \varphi)(\phi) = \varphi(f^* \circ \phi)$. Ahora consideremos la aplicación

$$\eta_M(x) : f \mapsto f(x)$$

de M^* en R. Este está contenido en $M^{**} = hom_R(M^*, R)$ y la aplicación

$$\eta_M : x \mapsto \eta_M(x)$$

es un $R-$homomorfismo de M en M^{**}. Ahora para cualquier homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "f"'] & M^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ N \arrow[r, "\eta_N"'] & N^{**} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, porque si $x \in M$, entonces $\eta_N(f(x))$ es la aplicación

$$\phi \mapsto \phi(f(x))$$

de N^* en R y para $\varphi = \eta_M(x) \in M^{**}$, $(f^{**} \circ \varphi)(\phi) = \varphi(f^* \circ \phi)$.

Por lo tanto,

$$(f^{**} \circ \eta_M(x))(\phi) = \eta_M(x) \circ (f^* \circ \phi) = (f^* \circ \phi)(x) = \phi(f(x)).$$

Definición 2.2.57 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ functores covariantes. Una **transformación natural** $\eta : S \longrightarrow T$ es una función que asigna a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un morfismo $\eta_A : S(A) \longrightarrow T(A)$ de $\mathcal{D}$ de tal manera que para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$, el rectángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ S(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{D}$ es conmutativo. Además, si η_A es una equivalencia para cada A en $\mathcal{C}$, entonces η es llamado un **isomorfismo natural** de los functores S y T.

Si existe un isomorfismo natural entre los functores

$$S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \text{ y } T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

diremos que T es naturalmente isomorfo a S y escribiremos $T \cong S$.

Una transformación (o isomorfismo) natural $\beta : S \longrightarrow T$ de functores contravariantes $S, T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se define de la misma manera, excepto que en este caso, el diagrama conmutativo es:

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "\beta_A"] & T(A) \\ S(B) \arrow[u, "S(f)"] \arrow[r, "\beta_B"'] & T(B) \arrow[u, "T(f)"'] \end{tikzcd}$$

para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathfrak{C}$.

Ejemplo 2.2.58 Si $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es cualquier functor covariante, entonces la asignación $A \mapsto 1_{T(A)}$ define un isomorfismo natural $1_T : T \longrightarrow T$, llamado el isomorfismo natural identidad. En efecto, sea $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, entonces tenemos el morfismo identidad

$$1_{T(A)} : T(A) \longrightarrow T(A).$$

Considere el morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$, de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo, esto es, $1_B \circ f = f \circ 1_A$. Como T es un functor covariante, resulta que

$$\begin{aligned} 1_{T(B)} \circ T(f) &= T(1_B) \circ T(f) \\ &= T(1_B \circ f) \\ &= T(f \circ 1_A) \\ &= T(f) \circ T(1_A) \\ &= T(f) \circ 1_{T(A)} \end{aligned}$$

Así, $1_{T(B)} \circ T(f) = T(f) \circ 1_{T(A)}$, lo cual implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "1_{T(A)}"] \arrow[d, "T(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ T(B) \arrow[r, "1_{T(B)}"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo; por lo tanto, esto muestra que $1_T : T \longrightarrow T$ es una transformación natural. Finalmente, es fácil verificar que, 1_T es un isomorfismo.

Ejemplo 2.2.59 Definimos el functor $\oplus_n : R - \mathbf{mod} \longrightarrow R - \mathbf{mod}$ por $M \mapsto M^{(n)}$, donde $M^{(n)}$ es la suma directa de n copias de M, el cual aplica cualquier homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ en

$$f^{(n)} : (a_1, \cdots, a_n) \mapsto (f(a_1), \cdots, f(a_n)).$$

Para cualquier M definimos el homomorfismo diagonal

$$\delta_M^{(n)} : a \mapsto (a, \cdots, a).$$

Entonces $\delta^{(n)} : M \mapsto \delta_M^{(n)}$ es una transformación natural de $1_{R-\mathbf{mod}}$ en $\oplus_n$, pues se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta_M^{(n)}"] \arrow[d, "f"'] & M^{(n)} \arrow[d, "f^{(n)}"] \\ N \arrow[r, "\delta_N^{(n)}"'] & N^{(n)} \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.2.60 Consideremos el functor abelianizador $\mathfrak{A} : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, en este caso la imagen de $\mathfrak{A}$ cae en $\mathbf{Grp}$, mas no en $\mathbf{Ab}$. Denotemos por v_G el homomorfismo canónico de G sobre el grupo factor. Entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "v_G"] \arrow[d, "f"'] & \dfrac{G}{[G,G]} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ H \arrow[r, "v_H"'] & \dfrac{H}{[H,H]} \end{tikzcd}$$

el cual muestra que $v : G \mapsto v_G$ es una transformación natural del functor identidad de **Grp** al functor abelianizador.

Definición 2.2.61 Un functor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es llamado **fiel (completo)** si para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ la aplicación $f \mapsto T(f)$ de $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ sobre $hom_{\mathcal{D}}(T(A), T(B))$ es inyectiva (sobreyectiva).

2.2.6. Equivalencia de categorías

Se dice que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son **isomorfas** si existen functores

$$T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \text{ y } S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tales que $T \circ S = 1_{\mathcal{D}}$ y $S \circ T = 1_{\mathcal{C}}$. Esta condición es bastante fuerte, pues para mostrar que dos categorías son isomorfas, solo debemos verificar que la composición $T \circ S$ es la identidad en un objeto genérico y similarmente en un morfismo arbitrario, y viceversa. Para ello, es suficiente usar las propiedades generales de una manera inteligente, como en cualquier otra rama de la matemática. En conclusión, basta verificar para un solo objeto y para un solo morfismo, ambos arbitrarios.

A través de los siguientes ejemplos dilucidamos la definición de isomorfismo de categorías.

Ejemplo 2.2.62 Sean $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ y $\mathcal{D} = \mathbb{Z} - \mathbf{mod}$. Si M es un grupo abeliano aditivo, M se convierte en un módulo sobre $\mathbb{Z}$ definiendo la operación nx para $n \in \mathbb{Z}, x \in M$ como el enésimo múltiplo de x; $nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n}$.
Por otra parte, si M es un módulo sobre $\mathbb{Z}$, entonces el grupo aditivo M es un grupo abeliano. De esta manera tenemos aplicaciones de ob($\mathbf{Ab}$) en ob($\mathbb{Z} - \mathbf{mod}$) y de ob($\mathbb{Z} - \mathbf{mod}$) en ob($\mathbf{Ab}$), donde ambos son inversos.

Si f es un homomorfismo del grupo abeliano M en el grupo abeliano N, $f : M \longrightarrow N$, entonces

$$f(nx) = nf(x),$$

para cualesquiera $n \in \mathbb{Z}$, $x \in M$. Por lo tanto, f es un homomorfismo de M como $\mathbb{Z}-$módulo en N como $\mathbb{Z}-$módulo. Inversamente, cualquier $\mathbb{Z}$-homomorfismo es un homomorfismo de grupos abelianos aditivos. De esto queda claro que **Ab** y $\mathbb{Z}-$**mod** son categorías isomorfas.

Ejemplo 2.2.63 Sea R un anillo arbitrário. Se define el anillo R^{op} como el própio conjunto R, con la misma operación $+$ de R, pero con la siguiente multiplicación

$$a \cdot b = ba,$$

donde la multiplicación del lado derecho de la igualdad corresponde a la multiplicación de R, para cualesquiera $a, b \in R$. El anillo R^{op} es llamado el ***anillo opuesto*** de R.

A seguir mostraremos que las categorías $R-$**mod** y **mod**$-R^{op}$ son isomorfas, para cualquier anillo R. Sea M un $R-$módulo a la izquierda, entonces

$$a(bm) = (ab)m$$

para todo $m \in M$ y $a, b \in R$. Al definir la siguiente acción de R^{op} en M por

$$m * a = am$$

para $m \in M$, $a \in R^{op} = R$ (como conjuntos), el módulo M se convierte en un $R^{op}-$módulo a la derecha, pues

$$\begin{aligned}(m * a) * b &= b(m * a)\\ &= b(am)\\ &= (ba)m\\ &= (a \cdot b)m\\ &= m * (a \cdot b)\\ &= m * (a * b)\end{aligned}$$

Similarmente, un $R^{op}-$módulo a la derecha se convierte en un $R-$módulo a la izquierda revirtiendo este proceso.

Un homomorfismo de ${}_RM$ en ${}_RN$, $f : M \longrightarrow N$, es también un homomorfismo de $R-$módulos a la derecha, $f : M_{R^{op}} \longrightarrow N_{R^{op}}$. Así, existen functores $T : R - \mathbf{mod} \longrightarrow \mathbf{mod} - R^{op}$ y $S : \mathbf{mod} - R^{op} \longrightarrow R - \mathbf{mod}$ tales que $S \circ T = 1_{R-\mathbf{mod}}$ y $T \circ S = 1_{\mathbf{mod}-R^{op}}$. Por lo tanto, las dos categorías son isomorfas.

El concepto de isomorfismo de categorías es algo demasiado restrictivo; una noción más interesante es obtenida ampliando esta de la siguiente manera. Defina $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ como categorías **equivalentes**, si existen functores $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que

$$S \circ T \cong 1_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad T \circ S \cong 1_{\mathcal{D}},$$

donde $\cong$ denota el isomorfismo natural de functores. Evidentemente, isomorfismo de categorías implica equivalencia. También es claro que la relación de equivalencia entre categorías es lo que sugiere el nombre: pues es reflexiva, simétrica y transitiva.

El functor S de la definición de equivalencia no es unicamente determinada por T. Por lo tanto, es natural cambiar el énfasis del par (T, S) al functor

T y buscar las condiciones sobre un functor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ para que exista un functor $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que (T, S) sea una equivalencia, esto es, $S \circ T \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $T \circ S \cong 1_{\mathcal{D}}$.

Como $S \circ T \cong 1_{\mathcal{C}}$ implica que la aplicación $f \mapsto (S \circ T)(f)$ de $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ sobre $hom_{\mathcal{C}}((S \circ T)(A), (S \circ T)(B))$ es biyectiva. Similarmente, $g \mapsto (T \circ S)(g)$ es biyectiva de $hom_{\mathcal{D}}(A', B')$ sobre $hom_{\mathcal{D}}((T \circ S)(A'), (T \circ S)(B'))$. Entonces la inyectividad de $f \mapsto (S \circ T)(f)$ implica la inyectividad de la función $f \mapsto T(f)$ del conjunto $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ en el conjunto $hom_{\mathcal{D}}(T(A), T(B))$ y la sobreyectiva de $g \mapsto (T \circ S)(g)$ implica la sobreyectividad de $f \mapsto T(f)$.

Por lo tanto, el functor F es fiel y completo. Para cualquier $A' \in \text{ob}(\mathcal{D})$, el isomorfismo natural $T \circ S \cong 1_{\mathcal{D}}$ da un ismorfismo $\eta_{A'} \in hom_{\mathcal{D}}(A', (T \circ S)(A'))$. Por lo tanto, si tomamos $A = S(A') \in \text{ob}(\mathcal{C})$, entonces existe un ismorfismo contenido en $hom_{\mathcal{D}}(A', T(A))$ o, equivalentemente en $hom_{\mathcal{D}}(T(A), A')$.

Ahora mostraremos que las condiciones que hemos descrito son también suficientes y por lo tanto, tenemos el siguiente importante criterio.

Proposición 2.2.64 Sea $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor. Entonces existe un functor $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que (T, S) es una equivalencia si y solamente si T es fiel y completo y para cada objeto A' de $\mathcal{D}$ existe un objeto A de $\mathcal{C}$ tal que TA y A' son isomorfos en $\mathcal{D}$ esto es, existe un isomorfismo contenido en $hom_{\mathcal{D}}(T(A), A')$.

Demostración: Si (T, S) es una equivalencia, entonces de los párrafos anteriores concluimos lo que se desea. Inversamente, para cualquier $A' \in \text{ob}(\mathcal{D})$, elegimos $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ de tal manera que TA y A' son isomorfos y elegimos un isomorfismo $\eta_{A'} : A' \longrightarrow T(A)$. Definimos una aplicación S de $\text{ob}(\mathcal{D})$ en $\text{ob}(\mathcal{C})$ por $A' \mapsto A$, donde A es el que se acaba de elegir. Entonces

$\eta_{A'} : A' \longrightarrow TS\,(A')$.

Sea B' un segundo objeto de $\mathcal{D}$ y sea $f' \in hom_D(A', B')$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "f'"'] & TS(A') \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}"'] & TS(B') \end{tikzcd}$$

Dado que $\eta_{A'}$ es un isomorfismo, tenemos un único morfismo

$$\eta_{B'} f' \eta_{A'}^{-1} : TS(A') \longrightarrow TS(B')$$

formando un rectángulo conmutativo. Dado que T es completo y fiel, existe un único $f : S\,(A') \longrightarrow S\,(B')$ en $\mathcal{C}$, tal que $T(f) = \eta_{B'} f' \eta_{A'}^{-1}$. Definimos la aplicación S de $hom_{\mathcal{D}}(A', B')$ en $hom_{\mathcal{C}}(SA', SB')$ por $f' \mapsto f$. Entonces, tenemos el rectángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "f'"'] & TS\,(A') \arrow[d, "TS(f')"] \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}"'] & TS\,(B') \end{tikzcd}$$

y $S(f')$ es el único morfismo $S\,(A') \longrightarrow S\,(B')$ tal que el diagrama anterior es conmutativo.

Ahora, sea $g' \in hom_{\mathcal{D}}(B', C')$. Entonces, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "f'"'] & TS\,(A') \arrow[d, "TS(f')"] \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}"] \arrow[d, "g'"'] & TS\,(B') \arrow[d, "TS(g')"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & TS\,(C') \end{tikzcd}$$

En el cual los dos pequeños rectángulos son conmutativos y, por lo tanto, el grande es conmutativo. Dado que T es un functor, tenemos el rectángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "g'f'"'] & TS\left(A'\right) \arrow[d, "T(S(g')S(f'))"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & TS\left(C'\right) \end{tikzcd}$$

Por otro lado, tenemos el rectángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "g'f'"'] & TS\left(A'\right) \arrow[d, "T(S(g'f'))"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & TS\left(C'\right) \end{tikzcd}$$

y $S(g'f') : S\left(A'\right) \longrightarrow S\left(C'\right)$ es el único morfismo por el cual es conmutativo. Por lo tanto, tenemos $S(g'f') = S(g')S(f')$. De manera similar, se ve que $S(1_{A'}) = 1_{S(A')}$. Entonces, las aplicaciones $S : A' \mapsto S\left(A'\right)$, $S : f' \mapsto S(f')$ para todos los conjuntos $hom_{\mathcal{D}}(A', B')$ constituye un functor de $\mathcal{D}$ para $\mathcal{C}$. Además, la conmutatividad del segundo esquema muestra que $\eta' : A' \mapsto \eta_{A'}$ es un isomorfismo natural de $1_{\mathcal{D}}$ para TS.

Observamos a continuación, dado que T es fiel y completo, si $A, B \in ob\,\mathcal{C}$ y $f' : T\left(A\right) \longrightarrow T\left(B\right)$ es un isomorfismo, entonces el morfismo $f : A \longrightarrow B$ tal que $T(f) = f'$ es un isomorfismo. Se sigue que, como

$\eta_{T(A)} : T\left(A\right) \longrightarrow TST\left(A\right)$ es un isomorfismo, existe un único isomorfismo $\zeta_A : A \longrightarrow STA$ tal que $T(\zeta_A) = \eta_{T(A)}$. La conmutatividad del segundo esquema para $A' = T\left(A\right)$, $B' = T\left(B\right)$ y $f' = T(f)$ donde $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ implica que

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(\zeta_A)"] \arrow[d, "T(f)"'] & TST(A) \arrow[d, "TST(f)"] \\ T(B) \arrow[r, "T(\zeta_A)"'] & TST(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativa. Como f es fiel, esto implica que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\zeta_A"] \arrow[d, "f"'] & ST(A) \arrow[d, "ST(f)"] \\ B \arrow[r, "\zeta_A"'] & ST(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativa. Por lo tanto, $\zeta : A \mapsto \zeta_A$ es un isomorfismo natural de $1_{\mathcal{C}}$ sobre ST. ■

Como ilustración de este criterio, probaremos una proposición muy interesante, pero antes de ello daremos algunos resultados básicos sobre el anillo de las matrices.

Recordemos algunos hechos elementales sobre las unidades matriciales en $M_n(R)$, donde R es un anillo con identidad. Para $i, j = 1, ..., n$, definimos e_{ij} como una matriz cuya entrada (i, j) es 1 y las otras entradas son 0, y para algún $a \in R$, a' denotará la matriz diagonal en la cual las entradas son a. También, tenemos la tabla de multiplicación

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$$

y

$$\sum e_{ii} = 1.$$

Además,

$$a'e_{ij} = e_{ij}a'$$

y esta matriz tiene a en la posición (i, j) y ceros en las otras posiciones. Por lo tanto, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $a_{ij} \in R$. Luego

$$A = \sum a'_{ij} e_{ij} = \sum e_{ij} a'_{ij}.$$

Proposición 2.2.65 Sea R un anillo y $M_n(R)$ el anillo de matrices de orden $n \times n$ con entradas en R. Entonces, las categorías $\mathbf{mod}-R$ y $\mathbf{mod}-M_n(R)$ de módulos a la derecha sobre R y $M_n(R)$, respectivamente, son equivalentes.

Demostración: Sean M un $R-$módulo a la derecha y sea $M^{(n)}$ una suma directa de n copias de M. Si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in M^{(n)}$ y $A \in M_n(R)$, definimos xA como el producto de matrices

$$xA = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

donde

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

y los $x_i a_{ij}$ están en M. Usando la asociatividad de la multiplicación de matrices (en este caso mixto de multiplicación de "vectores" con matrices) podemos verificar que $M^{(n)}$ es un $M_n(R)$ – módulo a la derecha bajo la acción que hemos definido. Así, tenemos una aplicación $M \mapsto M^{(n)}$ de ob($\mathbf{mod}$-R) en ob($\mathbf{mod}$-$M_n(R)$). Si f es un homomorfismo de módulos de M en N, entonces el homomorfismo diagonal

$$f^{(n)} : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$$

es un homomorfismo de $M_n(R)-$módulos a la derecha de $M^{(n)}$ en $N^{(n)}$. Las aplicaciones $M \mapsto M^n, f \mapsto f^{(n)}$ constituyen un functor T de $\mathbf{mod}$-R en

mod-$M_n(R)$. Verificaremos que T satisface las condiciones de la proposición 2.2.64.

1) T es fiel.

   Sean $f, g : M \longrightarrow N$ homomorfismos de $R-$módulos de M en N tales que $T(f) = T(g)$, entonces $f^{(n)} = g^{(n)}$, lo cual implica que para cualquier elemento $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $M^{(n)}$, resulta $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$, esto es

   $$(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) = (g(x_1), g(x_2), \cdots, g(x_n))\,,$$

   así, $f(x_i) = g(x_i)$ para elementos cualesquiera $x_i \in M$; por lo tanto, $f = g$ y T es fiel.

2) T es completo.

   Sea g un $M_n(R)-$homomorfismo de $M^{(n)}$ en $N^{(n)}$, donde M y N son módulos a la derecha sobre R. Ahora $M^{(n)}e_{11}$ es el conjunto de elementos $(x, 0, ..., 0), x \in M$ y $N^{(n)}e_{11}$ es el conjunto de elementos $(y, 0, ..., 0), y \in N$.

   Ya que g es $M_n(R)$ $-$ homomorfismo, $g\left(M^{(n)}e_{11}\right) \subset N^{(n)}e_{11}$. Por lo tanto,

   $$g(x, 0, ..., 0) = (f(x), 0, ..., 0).$$

   Mostremos que f es aditiva. Sean $x, y \in M$ tales que

   $$g(x, 0, \cdots, 0) = (f(x), 0, \cdots, 0),$$

   $$g(y, 0, \cdots, 0) = (f(y), 0, \cdots, 0)$$

   y además, como g es un homomorfismo de módulos, se tiene

   $$g(x + y, 0, \cdots, 0) = g((x, 0, \cdots, 0) + (y, 0, \cdots, 0)) =$$
   $$g(x, 0, \cdots, 0) + g(y, 0, \cdots, 0),$$

   entonces $(f(x + y), 0, \cdots, 0) = (f(x), 0, \cdots, 0) + (f(y), 0, \cdots, 0)$; así

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Análogamente $f(xa)=f(x)a$ para $a\in R$ se sigue de

$$g\left((x,0,...,0)a'\right)=g\left((x,0,...,0)\right)a'.$$

Por lo tanto, f es un $R-$homomorfismo de M en N. Ahora

$$(x,0,...,0)e_{1i}=(0,...,0,\underbrace{x}_{i},0,...,0),$$

luego $g((x,0,\ldots,0)e_{1i})=g(x,0,\ldots,0)e_{1i}$ implica que

$$g(0,...,0,\underbrace{x}_{i},0,...,0)=(0,...,0,\underbrace{f(x)}_{i},0,...,0)$$

Entonces, $g=f^{(n)}$ y F es completo.

3) Cualquier módulo M' a la derecha sobre $M_n(R)$ es isomorfo a un módulo $T(M)$, M un módulo a la derecha sobre R.
La aplicación $a\mapsto a'$ es un homomorfismo de anillos de R en $M_n(R)$. Combinando esto con la acción de $M_n(R)$ sobre M', hacemos de M' un módulo a la derecha sobre R, con la siguiente acción

$$x'\cdot a:=x'a',\ x'\in M',$$

ya que se verifica

$$(x'\cdot a)\cdot b=(x'a')b'=x'(a'b')=x'(ab)'=x'\cdot ab,$$

o sea, $(x'\cdot a)\cdot b=x'\cdot ab$ para todo $x'\in M'$ y $a,b\in R$. Entonces, podemos verificar que $M=M'e_{11}$ es un $R-$submódulo de M' ya que $e_{11}a'=a'e_{11}, a\in R$, pues

$$(x'e_{11})\cdot a=(x'e_{11})a'=x'(e_{11}a')=x'(a'e_{11})=(x'a')e_{11}\in M'e_{11}=M$$

y así, $M \cdot R \subseteq M$ y esto significa que está bien definida la acción de R sobre M, esto muestra que M es un $R-$submódulo de M'. Además, $x'e_{i1} = x'e_{i1}e_{11} \in M$ para cualquier i.

Definimos la aplicación $\eta_{M'} : M' \longrightarrow T(M) = M^{(n)}$ por

$$x' \mapsto (x'e_{11}, x'e_{21}, ..., x'e_{n1}).$$

Vamos usar (5) y la definición de $x' \cdot a$, para verificar que $\eta_{M'}$ es un $M_n(R)-$ homomorfismo. De hecho,

$$\begin{aligned}\eta_{M'}(x'+y') &= ((x'+y')e_{11}, (x'+y')e_{21}, ..., (x'+y')e_{n1})\\ &= (x'e_{11}, x'e_{21}, ..., x'e_{n1}) + (y'e_{11}, y'e_{21}, ..., y'e_{n1})\\ &= \eta_{M'}(x') + \eta_{M'}(y')\end{aligned}$$

y

$$\eta_{M'}(x'A) = (x'Ae_{11}, x'Ae_{21}, ..., x'Ae_{n1}),$$

pero $A = \sum a'_{ij}e_{ij} = \sum e_{ij}a'_{ij}$, entonces

$$\begin{aligned}\eta_{M'}(x'A) &= (\sum x'a'_{ij}e_{ij}e_{11}, \sum x'a'_{ij}e_{ij}e_{21}, ..., \sum x'a'_{ij}e_{ij}e_{n1})\\ &= (\sum x'a'_{i1}e_{i1}, \sum x'a'_{i2}e_{i1}, ..., \sum x'a'_{in}e_{i1})\\ &= (\sum x'e_{i1}a'_{i1}, \sum x'e_{i1}a'_{i2}, ..., \sum x'e_{i1}a'_{in})\\ &= (\sum (x'e_{i1}) \cdot a_{i1}, \sum (x'e_{i1}) \cdot a_{i2}, ..., \sum (x'e_{i1}) \cdot a_{in})\\ &= (x'e_{11}, x'e_{21}, ..., x'e_{n1}) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\\ &= \eta_{M'}(x')A.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eta_{M'}$ es un $M_n(R)-$ homomorfismo.

Si $\eta_{M'}(x') = \eta_{M'}(y')$, entonces $(x'-y')e_{i1} = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ y

$$x' - y' = \sum (x'-y')e_{ii} = \sum (x'-y')e_{i1}e_{1i} = 0.$$

Por lo tanto, $\eta_{M'}$ es inyectiva. Además, $\eta_{M'}$ es suryectiva: Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pertenece a $M^{(n)}$, entonces $x_i = x_i' e_{11} = (x_i' e_{1i})\, e_{i1}$ y

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, ..., x_n) &= ((x_1' e_{11})\, e_{11}, (x_1' e_{11})\, e_{21}, ..., (x_1' e_{11})\, e_{n1}) \\
&\quad + ((x_2' e_{12})\, e_{11}, (x_2' e_{12})\, e_{21}, ..., (x_2' e_{12})\, e_{n1}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + ((x_n' e_{1n})\, e_{11}, (x_n' e_{1n})\, e_{21}, ..., (x_n' e_{1n})\, e_{n1}) \\
&= \eta_{M'}(x_1' e_{11}) + \eta_{M'}(x_2' e_{12}) + \cdots + \eta_{M'}(x_n' e_{1n}) \\
&= \eta_{M'}(x_1' e_{11} + x_2' e_{12} + \cdots + x_n' e_{1n})
\end{aligned}$$

Así, $\eta_{\mu'}$ es un isomorfismo.

■

Ejemplo 2.2.66 Sea (T, S) una equivalencia de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ y sea $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Demuestre que cualquiera de las siguientes propiedades de f implica la misma propiedad para $T(f)$: f es monomorfismo, es epimorfismo, tiene una sección, tiene una retracción, es un isomorfismo.

En efecto, primeramente suponemos que f es un monomorfismo. Se tiene $T(f) \in hom_{\mathcal{D}}(TA, TB)$ y considerense $g_1, g_2 \in hom_{\mathcal{D}}(C', TB)$ tales que

$$T(f) \circ g_1 = T(f) \circ g_2.$$

Como (T, S) es una equivalencia, existe un único $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ tal que $C \cong T(C')$ y, además, como T es fiel y completo, existen únicos $f_1, f_2 \in hom_{\mathcal{C}}(C, B)$ tales que

$$g_1 = T(f_1), \quad g_2 = T(f_2).$$

Reemplazando

$$T(f) \circ T(f_1) = T(f) \circ T(f_2),$$

$$T(f \circ f_1) = T(f \circ f_2)$$

y como T es fiel, resulta $f \circ f_1 = f \circ f_2$. Por hipótesis, f es un monomorfismo, luego

$$f_1 = f_2,$$

esto es, $g_1 = T(f_1) = T(f_2) = g_2$; por lo tanto, $T(f)$ es cancelable a la izquierda y así, $T(f)$ es un monomorfismo. Análogamente, se prueba que $T(f)$ que es epimorfismo si f también lo es.

III. Metodología

En el ámbito de la matemática, la metodología se rige a procesos de análisis y demostración matemática.

La presente investigación es del tipo aplicada, pues hemos determinado la equivalencia de categorías de bimódulos a través de la aplicación del Teorema Factorización de Kronecker y la noción general de bimódulo dada por Eilenberg. Además, se ha usado dicho teorema para clasificar a los bimódulos asociativos irreducibles unitarios sobre el álgebra de las matrices $M_n(F)$.

Esta investigación es del tipo básica puesto que está orientada a lograr un nuevo conocimiento, de manera sistemática y metódica, con el único objetivo de ampliar el conocimiento y de acuerdo a la técnica de contrastación, es descriptiva, ya que el investigador no se apoya bajo ninguna hipótesis.

La tesis conllevó la demostración del Teorema de Factorización de Kronecker (teorema 4.1.1), para ello se usó elementos básicos de la teoría de las álgebras asociativas y de la álgebra matricial.

Además, la demostración del teorema 4.1.2 hace uso del teorema 4.1.1 y de los conceptos de equivalencia de categorías.

Finalmente, la demostración del corolario 4.1.3 también hace uso del teorema 4.1.1.

IV. Resultados de la investigación

4.1. El teorema de factorización de Kronecker

En el capitulo anterior ya hemos definido a los e_{ij} como las matrices con 1 en la entrada (i, j) y 0 en las otras. Llamamos al conjunto de estos elementos, un **sistema de matrices unitarias** que satisfacen

$$e_{ij}e_{rs} = \delta_{jr}e_{is}, \quad \sum e_{ij} = 1$$

donde δ es la delta de Kronecker.

Si A es una álgebra, sabemos que $(x, y, z) := (xy)z - x(yz) = 0$ para cualesquiera $x, y, z \in A$. Entonces, al considerar el corchete de Lie

$$[x, y] = xy - yx$$

resulta

$$\begin{aligned}
x[y, z] + [x, z]y &= x(yz - zy) + (xz - zx)y \\
&= x(yz) - x(zy) + (xz)y - (zx)y \\
&= x(yz) - (zx)y + (x, z, y) \\
&= x(yz) - (zx)y \\
&= x(yz) - (xy)z + (xy)z - (zx)y + z(xy) - z(xy) \\
&= -(x, y, z) + (xy)z - (z, x, y) - z(xy) \\
&= (xy)z - z(xy) \\
&= [xy, z].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en A se cumple la identidad $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Factorización de Kronecker) Sea A una álgebra con elemento identidad 1 tal que A contiene un sistema de n^2 elementos de matrices unitarias. Entonces, $A \cong M_n(B)$ para una cierta subálgebra B de A.

Demostración: Fijemos $i, j, k, r, s \in \{1, 2, ..., n\}$ y consideremos el conjunto

$$B = \{a \in A : [a, e_{ij}] = 0, \forall i, j\}.$$

Primero vamos a probar que B es una subálgebra de A, para ello consideraremos el hecho de que A satisface la identidad $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$. Sean $a, b \in B$, luego $[a, e_{ij}] = 0$ y $[b, e_{ij}] = 0$ para todo i, j. Entonces, $[ab, e_{ij}] = a[b, e_{ij}] + [a, e_{ij}]b = a \cdot 0 + 0 \cdot b = 0$. Por tanto, $ab \in B$ y B es una subálgebra de A. Sea $a \in A$ y defina $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}$.

Entonces

$$a_{ij}e_{rs} = \left(\sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}\right) e_{rs} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki}a(e_{jk}e_{rs}) = e_{ri}ae_{js},$$

$$e_{rs}a_{ij} = e_{rs}\left(\sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{n} (e_{rs}e_{ki})ae_{jk} = e_{ri}ae_{js}.$$

Luego $[a_{ij}, e_{rs}] = 0$, y así, $a_{ij} \in B$.

Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij} &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}\right) e_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}e_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_{ii}ae_{jj} \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{ii}\right) a \left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{jj}\right) \\
&= a.
\end{aligned}$$

Luego, $a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij}$ con $a_{ij} \in B$.

A continuación se mostrará que a puede ser escrito de una única forma, tal como está escrito anteriormente, para ello supongamos que existen otros

$c_{ij} \in B$ tales que

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} \quad \text{y} \quad a = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} e_{ij},$$

de donde

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} e_{ij},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} - \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} e_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - c_{ij})\, e_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} e_{ij} = 0,$$

con $b_{ij} = a_{ij} - c_{ij} \in B$. Luego

$$0 = \sum_{k=1}^{n} e_{kp} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} e_{ij} \right) e_{qk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} e_{kp} b_{ij} e_{ij} e_{qk} = \sum_{k=1}^{n} b_{pq} e_{kk} = b_{pq}$$

para todo $p, q = 1, 2, ..., n$, entonces $a_{ij} = c_{ij}$. Esto muestra que los elementos de A pueden ser escritos de una única forma $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}$, con $a_{ij} \in B$, para todo i, j. La aplicación $f : A \longrightarrow M_n(B)$ definida por

$$f(a) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es inyectiva, pues $a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}$ puede ser escrito de una única manera.

Sea $C \in M_n(B)$, entonces

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

con $b_{ij} \in B$.

Consideremos el elemento $b \in A$ escrito de la siguiente forma $b = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} e_{ij}$. Entonces, es claro que $f(b) = C$. Luego f es sobreyectiva. Por lo tanto, f es biyectiva de A sobre $M_n(B)$.

Finalmente, mostraremos que f es un homomorfismo. Sean

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} \quad \text{y} \quad b = \sum_{r,s=1}^{n} b_{rs} e_{rs}$$

con $a_{ij}, b_{rs} \in B$, entonces

$$\begin{aligned} ab &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} \right) \left(\sum_{r,s=1}^{n} b_{rs} e_{rs} \right) = \sum_{i,j,r,s=1}^{n} a_{ij} e_{ij} b_{rs} e_{rs} \\ &= \sum_{i,j,s=1}^{n} a_{ij} b_{js} e_{is} = \sum_{i,s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{js} \right) e_{is}, \end{aligned}$$

luego

$$f(ab) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{jn} \end{bmatrix}.$$

Además,

$$f(a) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(b) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

de los cuales

$$f(a)f(b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & \dots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{bmatrix} = f(ab)$$

y concluímos que $f(ab) = f(a)f(b)$. Por lo tanto, $A \cong M_n(B)$. ■

A continuación, enunciamos y probamos el resultado más importante de la tesis. El resultado es una equivalencia de categorías. Ciertamente, es un análogo de la Proposición 2.2.65 para bimódulos y se da usando el Teorema de Factorización de Kronecker.

Teorema 4.1.2 Las categorías **Bimod** $- B$ y **Bimod** $- M_n(B)$ de bimódulos sobre B y $M_n(B)$, respectivamente, son equivalentes.

Demostración: Sabemos que **Bimod** $- B$ es la categoría de los bimódulos asociativos unitarios sobre B y **Bimod** $- M_n(B)$ es la categoría de los bimódulos asociativos unitarios sobre $M_n(B)$. Entonces, deseamos demostrar que

$$\mathbf{Bimod} - B \cong \mathbf{Bimod} - M_n(B).$$

Sea $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod} - B)$, y considere la extensión de división nula $E = B \oplus N$ del álgebra asociativa B por el bimódulo N. Como E es un álgebra asociativa podemos formar el álgebra matricial $K = M_n(E)$ que contiene a $M_n(B)$ como un subálgebra. Así, K contiene el ideal $M = M_n(N) \cap K = M_n(N)$ que es el conjunto de las matrices de K cuyas entradas están en el ideal N de E. En consecuencia, M es un bimódulo asociado unitario para $M_n(B)$ relativo a la multiplicación definida en $M_n(E)$. Por lo tanto, $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod} - M_n(B))$ y será el $M_n(B)-$ bimódulo **asociado** con el dado bimódulo N de B. Así, tenemos una aplicación $N \mapsto M = M_n(N)$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod} - B)$ en $\mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod} - M_n(B))$. Si $f : N \longrightarrow N'$ es un homomorfismo de bimódulos sobre B, entonces la aplicación

$$\widetilde{f} : \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f(a_{11}) & \dots & f(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(a_{n1}) & \dots & f(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

es un homomorfismo de $M_n(B)-$bimódulos de M en M'. Las aplicaciones $N \mapsto M = M_n(N)$ y $f \mapsto \widetilde{f}$ constituyen un functor

$$\mathbf{T} : \mathbf{Bimod} - B \longrightarrow \mathbf{Bimod} - M_n(B).$$

Si $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod} - B)$, denote

$$M = \mathbf{T}(N).$$

Como $E = B \oplus N$ tenemos que $K = M_n(B) \oplus M$. El hecho que, $N^2 = 0$ en E, implica que $M^2 = 0$ en K, así K es la extensión de división nula de $M_n(B)$ por su bimodulo M.

Como ya fue indicado, se puede verificar fácilmente que $\mathbf{T}$ es realmente un functor de la categoría $\mathbf{Bimod}-B$ en la categoría $\mathbf{Bimod}-M_n(B)$. Además, para cada par de objetos N y N' de $\mathbf{Bimod} - B$, la siguiente igualdad es válida

$$\mathbf{T}(hom(N, N')) = hom(\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(N'))$$

Por tanto, N y N' son isomorfos, si y solamente si, $\mathbf{T}(N)$ y $\mathbf{T}(N')$ son isomorfos.

Similarmente, el functor $\mathbf{T}$ ofrece un isomorfismo reticulado del reticulado de los submódulos de N relativo a B sobre el reticulado de los submódulos de M sobre $M_n(B)$.

Para completar la reducción de la teoría de los bimódulos para $M_n(B)$ a la de los bimódulos para B, mostraremos que cada $M_n(B)-$bimódulo unitario es isomorfo a algún bimódulo asociado con un bimódulo unitario para B. Consideremos un bimódulo unitario V para $M_n(B)$, y sea

$$A = M_n(B) \oplus V$$

la extensión de división nula de $M_n(B)$ por V. Así, A es una álgebra asociativa (con elemento identidad 1, la identidad de $M_n(B)$) que contiene la álgebra matricial $M_n(B)$ como una subálgebra unitaria, entonces por el Teorema de Factorización de Kronecker, existe una álgebra asociativa unitaria D tal que $A = M_n(D)$, así

$$M_n(D) = M_n(B) \oplus V.$$

Sea W el conjunto de los elementos de D que aparece en las entradas de las matrices de V. Luego

$$V := M_n(W),$$

donde $W \lhd D$ y $W^2 = 0$ en D pues $V \lhd A$ y $V^2 = 0$ en A, y así $D = B \oplus W$. Luego D es la extensión de división nula de B por su bimódulo W, entonces W es un bimódulo asociativo unitario sobre B. Por tanto, $\mathbf{T}(W) = V$. ■

Finalizamos la investigación clasificando a los bimódulos asociativos irreducibles.

Corolario 4.1.3 Todo bimódulo asociativo unitario irreducible para $M_n(F)$ es isomorfo al bimódulo regular $\mathrm{Reg}(M_n(F))$.

Demostración: Considere un bimódulo asociativo unitario irreducible V para $M_n(F)$. Luego, $E = M_n(F) \oplus V$ es una álgebra asociativa unitaria que contiene $M_n(F)$, con el mismo elemento identidad. Por lo tanto, por el Teorema de Factorización de Kronecker (Teorema 4.1.1), existe una subálgebra B de E tal que $E = M_n(B)$. A partir de $E = M_n(B)$, considere el conjunto D de los elementos de B que aparecen en las entradas de las matrices de V. En consecuencia, $V = M_n(D)$, donde $D \lhd B$ y $D^2 = 0$, pues $V \lhd E$ y $V^2 = 0$ en E. Así, $B = F \cdot 1 \oplus D$ es la extensión de división nula de $F \cdot 1$ por D, esto es, D es un F-bimódulo asociativo irreducible, pues V lo es. Por lo tanto, $D = F \cdot 1$, el cual implica que, $V = \mathrm{Reg}(M_n(F))$. ■

V. Conclusiones

Esta investigación tuvo como objetivo general obtener una equivalencia de categorías por medio del Teorema de Factorización de Kronecker. Con base en el teorema 4.1.1, se puede concluir que el teorema principal (Teorema 4.1.2) establece la equivalencia entre las categorías $\mathbf{Bimod}-B$ y $\mathbf{Bimod}-M_n(B)$ de bimódulos sobre B y $M_n(B)$, respectivamente. Además, los resultados indican que el Teorema de Factorización de Kronecker es esencial para clasificar a los bimódulos irreducibles unitarios sobre $M_n(F)$.

- Se han establecido las definiciones básicas de la teoría de categorías, estos acompañados de ejemplos concretos.

- Se ha enunciado y demostrado el clásico Teorema de Factorización de Kronecker (Teorema 4.1.1) de manera completa y detallada. La esencia del teorema fue la construcción de un isomorfismo de álgebras, para garantizar que toda álgebra asociativa unitaria que contiene a la álgebra de las matrices cuadradas de orden n, con el mismo elemento identidad, sea también una álgebra de matrices.

- A través del uso del Teorema de Factorización de Kronecker 4.1.1 se ha obtenido la clasificación de los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre $M_n(F)$ (corolario 4.1.3). El resultado afirma que existe un único bimódulo irreducible para $M_n(F)$, el bimódulo regular $\mathrm{Reg}(M_n(F))$.

VI. Recomendaciones

El trabajo de un matemático no solo se basa en la enseñanza de la matemática (básica o superior), también debe de dedicarse a la investigación y como tal, la teoría de categorías es la base esencial que todo matemático ha de aprender y comprender lo más pronto posible para relacionar estructuras matemáticas(algebraicas, topológicas, geométricas, etc). Es imposible realizar investigaciones competentes cuando aún no se ha alcanzado la abstracción necesaria que todo matemático ha de tener; por lo tanto, recomendamos estudiar la teoría de categorías para comprender la naturaleza general de las diferentes estructuras matemáticas, tal como lo entienden los grandes matemáticos activos.

Por otro lado, el Teorema de Factorización de Kronecker es un resultado clásico de las álgebras asociativas, el cual permite estudiar las birepresentaciones del álgebra de matrices cuadradas. Recomendamos obtener análogos de dicho teorema en otras estructuras algebraicas, tales como en las (super)álgebras: Lie-binárias, de Malcev, de Novikov, etc, para luego ser usados en el estudio de las birepresentaciones de las álgebras simples de dimensiones finitas en dichas variedades de álgebras, conjuntamente con la teoría de categorías.

Referencias

Artin, M. (1991). Algebra.

Bhattacharya, P. B., Jain, S. K., y Nagpaul. (1994). *Basic abstract algebra.* Cambridge University Press.

Fuller, K. R. (1974). Density and equivalence. *Journal of Algebra*, *29*(3), 528–550.

Hungerford, T. W. (2012). *Algebra* (Vol. 73). Springer Science & Business Media.

Jacobson, N. (1954). A kronecker factorization theorem for cayley algebras and the exceptional simple jordan algebra. *American Journal of Mathematics*, *76*(2), 447–452.

Jacobson, N. (1968). Estructure and representationes of jordan algebras. , *39*.

Jacobson, N. (2009). *Basic algebra ii, 2a edição.* Dover, New York.

Martínez, C., Shestakov, I., y Zelmanov, E. (2010). Jordan bimodules over the superalgebras $p(n)$ and $q(n)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, *362*(4), 2037–2051.

Martínez, C., y Zelmanov, E. (2003). A kronecker factorization theorem for the exceptional jordan superalgebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, *177*(1), 71–78.

Morita, K. (1958). Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*, *6*(150), 83–142.

Morita, K. (1965). Adjoint pairs of functors and frobenius extensions. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*, *9*(202/208), 40–71.

Pchelintsev, S., Shashkov, O., y Shestakov, I. (2021). Right alternative bimodules over cayley algebra and coordinatization theorem. *Journal of Algebra*, *572*, 111–128.

Popov, Y. (2020). Representations of simple noncommutative jordan superalgebras i. *Journal of Algebra*, *544*, 329–390.

Smith, J. D. (2015). *Introduction to abstract algebra* (Vol. 31). CRC Press.

Solís, V. H. L. (2019). Kronecker factorization theorems for alternative superalgebras. *Journal of Algebra*, *528*, 311–338.

Solís, V. H. L. (2022). Kronecker factorization theorems for the exceptional malcev algebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*.

Solís, V. H. L., y Shestakov, I. P. (2021). On a problem by nathan jacobson. *Revista Matemática Iberoamericana*.

Wisbauer, R. (2010). *Modules and algebras.* University of Düsseldorf.