UNIVERSIDAD NACIONAL
"SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO"

ESCUELA DE POSTGRADO

BÚSQUEDA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES NO LINEALES EN ESPACIOS DE BANACH MEDIANTE ALGUNAS VARIANTES DEL MÉTODO DE NEWTON

Tesis para optar el grado de maestro
en Matemática

SEGUNDO OSCAR MINAYA SALINAS

Asesor: Dr. BIBIANO MARTÍN CERNA MAGUIÑA

Huaraz – Ancash – Perú

2023

Nº. Registro: **T0865**

UNIVERSIDAD NACIONAL
"SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO"
ESCUELA DE POSTGRADO

ACTA VIRTUAL DE SUSTENTACION DE TESIS

Los miembros del Jurado de Sustentación de Tesis, que suscriben, reunidos en acto público en la Plataforma Microsoft Teams, de la Universidad Nacional "Santiago Antúnez de Mayolo" para calificar la Tesis presentada por el:

Bachiller : **SEGUNDO OSCAR MINAYA SALINAS**

Título : ***"BÚSQUEDA DE ECUACIONES NO LINEALES EN ESPACIOS DE BANACH MEDIANTE ALGUNAS VARIANTES DEL MÉTODO DE NEWTON"***

Después de haber escuchado la sustentación, las respuestas a las preguntas y observaciones finales, la declaramos:

APROBADO, con el calificativo de **DIECISEIS** (16)

De conformidad al Reglamento General a la Escuela de Postgrado y al Reglamento de Normas y Procedimientos para optar los Grados Académicos de Maestro y Doctor, queda en condición de ser aprobado por el Consejo de la Escuela de Postgrado y recibir el Grado Académico de Maestro en **MATEMATICA,** a otorgarse por el Honorable Consejo Universitario de la UNASAM.

Huaraz, 12 de enero del 2022

Mag. Perpetua María Alayo de Vásquez
PRESIDENTE

Mag. Dik Dani Lujerio Garcia
SECRETARIO

Dr. Bibiano Martin Cerna Maguiña
VOCAL

NOMBRE DEL TRABAJO

T033_41175727_M.docx

AUTOR

Segundo Oscar Minaya Salinas

RECUENTO DE PALABRAS

10851 Words

RECUENTO DE CARACTERES

54626 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

85 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.6MB

FECHA DE ENTREGA

Mar 24, 2023 3:18 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Mar 24, 2023 3:20 PM GMT-5

12% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base c

- 6% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 6% Base de datos de trabajos entregados
- 11% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossr

MIEMBROS DEL JURADO

Magíster Perpetua María Alayo Meregildo Presidente

Magíster Dik Dani Lujerio García Secretario

Doctor Bibiano Martín Cerna Maguiña Vocal

ASESOR

Doctor Bibiano Martín Cerna Maguiña

AGRADECIMIENTO

Agradezco de manera especial a mi familia, a mi asesor el Doctor Bibiano Cerna Maguiña y a todas las personas que hicieron posible la elaboración y culminación de esta tesis.

A mi familia, a mis amigos

y a aquellas personas que han

influido en el curso de mi vida.

ÍNDICE

Resumen

El propósito fundamental de la presente investigación fue encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones no lineales en espacios de Banach mediante algunas variantes del método de Newton. Esta investigación es de tipo exploratorio y descriptivo con un enfoque cualitativo; tuvo como objetivo buscar soluciones aproximadas de ecuaciones no lineales en espacios de Banach mediante los métodos de: Newton-Kantorovich, Newton-Like y Newton-Tikhonov; los resultados indicaron que sí era posible obtener soluciones mediante las variantes del método Newton mencionadas, además que se analizó la rapidez y la exactitud de estos métodos.

Palabras Clave: Método Newton, Operador lineal, espacio Banach, continuidad, diferenciabilidad.

Abstract

The main purpose of this research was to find approximate solutions of nonlinear equations in Banach spaces by means of some variants of Newton's method. This research is exploratory and descriptive with a qualitative approach; its objective was to find approximate solutions of nonlinear equations in Banach spaces using the methods of: Newton-Kantorovich, Newton-Like and Newton-Tikhonov; the results indicated that it was possible to obtain solutions through the variants of the Newton method mentioned, in addition to analyzing the speed and accuracy of these methods.

Keywords: Newton method, linear operator, Banach space, continuity, differentiability.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el Análisis Funcional ha incrementado su demanda como base teórica en la teoría de Ecuaciones Diferenciales, Métodos Numéricos, Optimización y otras áreas de la Matemática bastante útiles y aplicadas por profesionales de distintas ramas de la ciencias e ingenierías, debido a que muchos problemas de la naturaleza son modelados mediante ecuaciones, específicamente por ecuaciones no lineales y estas a su vez son descritas por operadores, un tema principal del Análisis Funcional. En este contexto el problema que originó esta investigación es responder a preguntas como: ¿si al modelar un fenómeno de la naturaleza, se encuentra una ecuación no lineal, esta ecuación podrá ser resuelta?, ¿bajo qué condiciones la ecuación podrá ser resuelta?, con los métodos que se han estudiado en esta investigación, se pretende responder a estas preguntas, e incluso abarcar mucho más, para poder responder preguntas como: ¿cuál de los métodos es más eficiente? o ¿cuál de ellos tiene una solución más exacta?.

Modelado un problema específico de la naturaleza, mediante la ecuación $F(X) = 0$, donde *F* es un operador no lineal con dominio en un espacio de Banach *X* e imagen en otro espacio de Banach *Y*; el objetivo a seguir es resolver esta ecuación, es decir hallar $x \in X$ que haga que la ecuación se convierta en una identidad, esta *x* es conocida como raíz de la ecuación. Para resolver estas ecuaciones disponemos de métodos aproximados, entre estos métodos tenemos las variantes del método Newton, todos ellos basados en el método de Newton clásico y alcanzados mediante la generalización de conceptos como la derivada, sucesiones o secuencias, etc. en espacios matemáticos generales.

A partir de los resultados obtenidos mediante el estudio detallado de algunas variantes del método de Newton para espacios vectoriales mucho más generales, y presentando ejemplos de estos métodos, se responde de manera fundamentada a las preguntas planteadas en un párrafo anterior.

I. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Cuando se modela un problema específico de la naturaleza, mediante una ecuación $F(X)=0$, donde F es un operador no lineal que se define de un espacio de Banach X a otro espacio de Banach Y; el objetivo que se plantea es resolver esta ecuación, es decir, hallar un $x \in X$ que satisfaga la ecuación. Para resolver ecuaciones con las condiciones presentadas existen métodos aproximados, entre ellos las variantes del método Newton, todos ellos basados en el método de Newton clásico; aunque existen diversas variantes del método de Newton nos proponemos a estudiar las variantes más importantes desarrolladas en espacios de Banach.

1.2. Objetivos

Objetivo General:

Buscar soluciones aproximadas de ecuaciones no lineales en espacios de Banach mediante los métodos de: Newton-Kantorovich, Newton-Like y Newton-Tikhonov.

Objetivos Específicos:

- Estudiar y comprender los conceptos matemáticos básicos en los cuales se fundamenta las ecuaciones no lineales en espacios de Banach.
- Comprender la teoría en la cual se basan los métodos de: Newton-Kantorovich, Newton-Like, Newton-Tikhonov.
- Estudiar y comprender el funcionamiento de los algoritmos de cada uno los métodos en estudio.
- Comparar la rapidez y exactitud de los métodos, mediante sus algoritmos y las cotas de sus errores, para luego realizar esta comparación con ejemplos apropiados.

1.3. Formulación interrogativa del problema

¿Es posible hallar soluciones aproximadas de ecuaciones no lineales en espacios de Banach mediante los métodos de: Newton-Kantorovich, Newton-Like o Newton-Tikhonov?

1.4. Justificación

Una de las motivaciones principales de los investigadores en ciencias puras y ciencias aplicadas es poder dar solución a problemas que se presentan en la realidad; en el caso de una ciencia como la Matemática existes diversas investigaciones aplicadas que han llevado a un creciente avance en la modelización de problemas reales; en consecuencia, áreas de la matemática que sólo planteaban problemas teóricos ahora brindan soluciones a problemas reales, este es el caso del Análisis Funcional y específicamente de los operadores no lineales en espacios de Banach que modelan ecuaciones no lineales; en la presente tesis se desarrolla el estudio de las soluciones de dichas ecuaciones no lineales mediante las variantes del método de Newton en los espacios de Banach.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Internacional

- Isaac Newton (1736) en su libro *Método de las fluxiones y series infinitas* presenta los fundamentos del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones, en este libro presenta un método de solución para ecuaciones polinómicas el cual consiste en usar la derivada para ir aproximando las soluciones mediante rectas, este método iterativo se ha convertido en uno de los más utilizados para obtener soluciones no sólo de ecuaciones polinómicos sino en forma general de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ donde f es una función real derivable.
- Maurice René Fréchet (1928) en su obra *Les Espaces abstraits*, desarrolla una derivada generalizada para operadores en espacios métricos completos, esto lo logra siguiendo las mismas ideas de derivadas de funciones reales, es decir utilizando el concepto de límite e identificando además que la derivada de un operador no necesariamente lineal, resulta también un operador lineal que aplicado en un punto específico se obtiene la diferencial del operador; esta generalización de la derivada es parte esencial en cualquier variante del método de Newton clásico, tal como la que presentó luego Kantorovich.
- Leonid V. Kantorovich (1949) generaliza el método de Newton de ecuaciones en números reales a ecuaciones en espacios de Banach, esto lo logra combinando técnicas de análisis funcional y de análisis numérico, motivado por la necesidad de resolver problemas modelados con ecuaciones de más de una variable o por ampliaciones teóricas en espacios matemáticos generales; para la generalización del método presentado por Kantorovich fue necesaria la generalización misma de conceptos matemáticos tales como ecuaciones, sucesiones, entre otros.

- Andréi Nikoláyevic Tikhonov (1963) propone un método para el mejoramiento del cálculo aproximado de operadores lineales, mediante su llamado método de regularización que es aplicable para operadores en espacios de Hilbert que son un tipo particular de espacios métricos completos.
- John Emory Dennis (1968) plantea una variante del Método de Newton que resuelve las dificultades que se presentan para calcular la derivada del operador en una ecuación no lineal, ya sea porque requiere de muchos cálculos o es imposible calcular dicha derivada; esta variante consiste en aproximar la misma derivada del operador mediante otro operador lineal, que bajo ciertas condiciones aproxima eficientemente la derivada requerida.
- Richard A. Tapia (1971) detalla pruebas alternativas al teorema de Newton-Kantorovich, a su vez que detalla el procedimiento para resolver ecuaciones en espacios de Banach que involucran operadores no lineales, esta forma de resolución la logra aproximando los operadores no lineales mediante otros operadores lineales que son obtenidos mediante la derivada de Fréchet; la linealidad de un operador permite hacer suposiciones para un cálculo más sencillo de los resultados.
- Ahmet Yasar Ozban (2004) desarrolla variantes de los métodos de Newton haciendo otras suposiciones para la convergencia a las raíces aproximadas de la ecuación, así como condiciones para los valores iniciales de las aproximaciones, lo cual es llamada convergencia semilocal de las raíces de una ecuación.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Secuencias y series en espacios métricos Las definiciones y teoremas de este sub capítulo son tomadas de Chumpitaz (1990).

Definición. Sea (X,d) un espacio métrico, decimos que la secuencia $\{x_n\} \subset X$ *converge* a $x \in X$, si $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$; equivalentemente la secuencia $\{x_n\}$ *converge*, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x,x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N_0$.

Observación 2.2.1. Existen tres tipos de convergencia en un espacio métrico, descritos en términos simples tenemos que la convergencia local implica que existe un conjunto de estimaciones iniciales que están próximas a la solución las cuales luego convergen a dicha solución (condiciones sobre la solución). La convergencia semilocal implica que para un conjunto de estimaciones iniciales se puede garantizar la convergencia a la solución (condiciones sobre las aproximaciones iniciales). Por último, la convergencia global asegura que para un conjunto grande de estimaciones iniciales se converge a la solución esperada (condiciones sobre la imagen del operador con el cual se define una ecuación en el cual se busca la convergencia de su solución).

Definición.- Sea (X,d) un espacio métrico; decimos que la secuencia $\{x_n\} \subset X$ es una *secuencia de Cauchy*, si $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_n,x_m)=0$; equivalentemente la secuencia $\{x_n\}$ es de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ para todo $n,m \geq N_0$.

Proposición 2.2.2. Toda secuencia convergente es una secuencia de Cauchy.

Teorema 2.2.3. Supongamos que $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ es una secuencia de números reales monótona creciente o decreciente, $\{x_n\}$ converge si y sólo si es acotada.

Definición. Sea (X,d) un espacio métrico, la sumatoria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ donde $x_k \in X$ para todo *k*, es llamada *serie infinita* o simplemente *serie*.

Definición. Decimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *converge*, si la secuencia de sumas parciales $\{S_n\}$ donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, converge en el espacio métrico (X,d). Si $\{S_n\}$ converge a *x* escribiremos $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, donde *x* es llamada *suma de la serie*.

Teorema 2.2.4. Si $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es una serie convergente en $\mathbb{R}$ entonces $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

Teorema 2.2.5. (Teorema de Taylor) Sea la función real $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, si f tiene derivadas continuas hasta el orden $n+1$ en $\langle a,b\rangle$, entonces para cualquier $x\in\langle a,b\rangle$ si $x_0\in\langle a,b\rangle$ se cumple que $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$, donde $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt$.

Observación 2.2.6. Sea $y\in\langle c,d\rangle$ tal que $y=u(x)$ donde $u(x)$ es una función continua en $\langle a,b\rangle$ para cualquier $y\in\langle c,d\rangle$ si $y_0\in\langle c,d\rangle$ tal que $y_0=u(x_0)$, entonces para $f(y)$ en el teorema 2.2.5 tenemos

$$f(u(x))=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(u(x_0))}{k!}(u(x)-u(x_0))^k+R_n(u(x)),\ \text{con}\ R_n(u(x))\to 0\ \text{si}\ n\to\infty.$$

Ejemplo.- Sea la función $f(y)=e^y$ con $y=u(x)$ entonces de acuerdo a la observación podemos expresar $e^{u(x)}$, como $e^{u(x)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{u(x)^k}{k!}+R_n(u(x))$ para una vecindad del punto $y_0=u(x_0)=0$, además como $R_n(u(x))\to 0$ cuando $n\to\infty$ tenemos entonces que $e^{u(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u(x)^k}{k!}$.

2.2.2. Espacios métricos completos Las definiciones de este sub capítulo son tomadas de Pisarievski, B. et al. (1987).

Definición. Sea (X,d) *un espacio métrico*, decimos que (X,d) es *completo*, si toda secuencia de Cauchy $\{x_n\}$ converge a un $x \in X$.

<u>Ejemplo</u>. $(\mathbb{R},d)$ con la métrica $d = |\ |$, es un espacio métrico completo.

Definición. (Espacio de Banach) Sea X un espacio normado, si (X,d) es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma entonces decimos que X es un *espacio de Banach*.

<u>Ejemplo</u>. Sea $X = C[a,b]$, con su norma $\| f \|_{C[a.b]} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ y la métrica inducida por ésta, es un espacio de Banach.

Definición. (Espacio de Hilbert) Sea $\left(X, \langle\ ,\ \rangle\right)$ un espacio con producto interno, si X con la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ es completo entonces decimos que X es un *espacio de Hilbert*.

<u>Ejemplo</u>. Sea $X = l_2$, con su norma $\|x\|_{l_2} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{1/2}$ y el producto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$, es un espacio de Hilbert.

2.2.3. Operadores lineales Las definiciones, teoremas y corolario de este sub capítulo son tomadas de Groetsch (1980).

Definición. Sean X, Y espacios normados sobre el mismo cuerpo **K**; un operador $A: X \to Y$ con dominio $D(A) \subset X$ es llamado *Lineal*, si $D(A)$ es una variedad lineal y para cualesquiera $x, y \in D(A)$, cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ se cumple $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Nota. Cuando $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{C}$, un operador lineal es llamado *funcional lineal*.

Definición. (Núcleo) El conjunto $N(A) = \ker(A) = \{x \in D(A) / A(x) = 0\}$ es llamado el *núcleo* del operador A.

Teorema 2.2.7. Un operador lineal $A: X \to Y$ con dominio $D(A) = X$ y continuo en el punto $0 \in X$ es continuo en cualquier punto $x \in X$.

Demostración. Como A es continuo en $x_0 = 0$ tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que, si $\|x\| < \delta$ entonces

$$\|A(x)\| < \varepsilon, \tag{2.1}$$

si tomamos $z \in B(x, \delta)$ entonces $\|x - z\| < \delta$, dado que $z - x = (z - x) + x_0 - x_0$ tenemos $\|[(z - x) + x_0] - x_0\| < \delta$ de esta desigualdad $(z - x) + x_0 \in B(x_0, \delta)$, con lo cual en (2.1) tenemos

$$\|A((z - x) + x_0) - A(x_0)\| < \varepsilon$$

$$\|A(z) - A(x) + A(x_0) - A(x_0)\| < \varepsilon,$$

entonces $\|A(z) - A(x)\| < \varepsilon$; por lo tanto, A es continuo para todo $x \in X$. Θ

Observación 2.2.8. Del teorema 2.2.7 se deduce que un operador lineal $A: X \to Y$ con $D(A) = X$, para que sea continuo bastará que sólo sea continuo en $0 \in X$.

Definición. Un operador lineal es llamado *acotado*, si existe $c > 0$ tal que para cualquier $x \in \bar{B}(0,1)$ es válida la desigualdad $\|A(x)\| \leq c$.

Teorema 2.2.9. Un operador lineal $A: X \to Y$ con $D(A) = X$ es acotado, si y sólo si para cualquier $x \in X$ y $c > 0$ se cumple la desigualdad $\|A(x)\| \leq c\|x\|$

Demostración

$\Rightarrow$) Como A es acotado existe $c > 0$ tal que $\|A(x)\| \leq c$ para cualquier $x \in \bar{B}(0,1)$, sea $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ definido de esta forma $u \in \bar{B}(0,1)$, entonces $\left\|A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq c$ luego $\dfrac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq c$; por lo tanto $\|A(x)\| \leq c\|x\|$. Θ

$\Leftarrow$) Si $\|A(x)\| \leq c\|x\|$ entonces $\dfrac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq c$ luego $\left\| A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq c$, si tomamos $u = \dfrac{x}{\|x\|}$

tenemos por lo tanto $\|A(u)\| \leq c$ para cualquier $u \in \overline{B}(0,1)$. Θ

Corolario 2.2.10. Un operador lineal $A: X \to Y$ con $D(A) = X$ es continuo, si y sólo si es acotado.

Demostración

$\Rightarrow$) Como A es continuo entonces A es continuo en $x_0 = 0$, es decir dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $y \in D(A)$ y $\|y\| < \delta$ entonces $\|A(y)\| < \varepsilon$; sean $u, x \in D(A)$ tal que $u = \dfrac{\delta x}{2\|x\|}$ entonces $\|u\| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, lo cual implica que $\|A(u)\| = \left\| A\left(\dfrac{\delta x}{2\|x\|}\right) \right\| < \varepsilon$, de la desigualdad anterior $\|A(x)\| < \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|$ para todo $x \in X$; por lo tanto haciendo $c = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$ tenemos que A es acotado. Θ

$\Leftarrow$) Por el teorema 2.2.9 si A es acotado, existe $c > 0$ tal que $\|A(x)\| \leq c\|x\|$; si tomamos $\|x\| < \delta$ tenemos $\|A(x)\| \leq c\|x\| < c\delta = \varepsilon$, luego basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$ para que $\|A(x)\| < \varepsilon$, entonces A es continuo en $x_0 = 0$; por lo tanto A es continuo. Θ

2.2.4. Espacio de operadores lineales acotados Las definiciones y teoremas de este sub capítulo son tomadas de Pisarievski, B. et al. (1987).

Definición. Sean *X*, *Y* espacios normados sobre el mismo cuerpo **K** y *A*, *B* operadores lineales acotados definidos en todo *X* con valores en *Y*, al suponer según la definición que:

a) $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$ para todo $x \in X$.

b) $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$ para todo $x \in X$ y cualquier $\lambda \in$ **K**.

c) $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|_X=1}\|A(x)\|$,

obtenemos un espacio vectorial normado llamado *espacio de operadores lineales acotados* el cual es denotado por $L(X,Y)$.

El espacio $L(X,X)$ es denotado solamente por $L(X)$.

Nota. Como consecuencia de la suposición c) tenemos $\|A(u)\|\le\|A\|$ para $\|u\|=1$; sea $u=\dfrac{x}{\|x\|}$ entonces $\left\|A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\left\|\dfrac{1}{\|x\|}A(x)\right\|=\dfrac{1}{\|x\|}\|A(x)\|\le\|A\|$ es decir obtenemos

$$\|A(x)\|\le\|A\|\|x\| \text{ para todo } x\in X .$$

<u>Ejemplo</u>. Sea el operador $A:C^1[0,1]\to C[0,1]$ tal que $A(x(t))=\dfrac{d(x(t))}{dt}$; entonces A es un operador lineal, continuo y $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|A(x(t))\|=1$.

Definición. En el espacio $L(X,Z)$ definimos $(AB)(x)=[A(B)](x)=A(B(x))$ para todo $x\in X$, $A\in L(Y,Z)$ y $B\in L(X,Y)$.

Además, como $\|[A(B)](x)\|=\|A(B(x))\|\le\|A\|\|B(x)\|\le\|A\|\|B\|\|x\|$, si tomamos supremo cuando $\|x\|=1$ obtenemos que $\|A(B)\|\le\|A\|\|B\|$.

Nota. Como consecuencia de la definición anterior, en $L(X)$ tenemos:

a) $(AA)(x)=A(A(x))$ para todo $x\in X$ es denotado por $A^2(x)$, en general $(AA...A)(x)=A(A(...(A(x))))$ para todo $x\in X$ es denotado por $A^n(x)$.

b) $A^0(x)=x$ para todo $x\in X$ es denotado por $I(x)$.

Teorema 2.2.12. Si Y es un espacio de Banach entonces el espacio $L(X,Y)$ también es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{T_n\}$ una secuencia de Cauchy en $L(X,Y)$, entonces tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \text{ para todo } n,m \geq N_0, \tag{2.2}$$

en (2.2) por la definición de norma tenemos

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y < \varepsilon \text{ para todo } n,m \geq N_0 \text{ y } \|x\|_X = 1, \tag{2.3}$$

de (2.3) $\{T_n(x)\}$ para un x fijo es una secuencia de Cauchy en Y, siendo Y un espacio de Banach existe $T(x) \in Y$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} T_m(x) = T(x), \tag{2.4}$$

de (2.3) y (2.4) cuando $m \to \infty$ obtenemos $\|T_n(x) - T(x)\|_Y < \varepsilon$ para todo $n \geq N_0$ y $\|x\|_X = 1$, tomando supremo a ambos lados de la desigualdad en $\|T_n(x) - T(x)\|_Y < \varepsilon$ cuando $\|x\|_X = 1$ obtenemos

$$\|T_n - T\| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_0, \tag{2.5}$$

de (2.5) $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ utilizando la norma de $L(X,Y)$.

Nos falta demostrar que T es lineal y continuo; usando (2.4) para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbf{K}$

$\lim_{m\to\infty} T_m[\lambda x + y] = \lim_{m\to\infty}[\lambda T_m(x) + T_m(y)] = \lambda \lim_{m\to\infty}[T_m(x)] + \lim_{m\to\infty}[T_m(y)]$ entonces

$$T[\lambda x + y] = \lambda T(x) + T(y)$$

con lo cual T es lineal.

Como T_n es continuo para todo n, entonces existe $M > 0$ tal que $\|T_n(x)\| \leq M\|x\|$ para cualquier $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \to \infty$ tenemos que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ entonces T es continuo; por lo tanto $T \in L(X,Y)$. Θ

Definición. El espacio $L(X,Y)$ tal que $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{C}$ de funcionales lineales y continuas es llamado *dual topológico de X* y es denotado por X^*.

Definición. (Adjunto de un operador) Dados H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y un operador $A \in L(H_1, H_2)$, el único operador $A^* \in L(H_2, H_1)$ que satisface la igualdad $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$ para todo $x \in H_1$ y todo $y \in H_2$ es llamado el *adjunto de A.*

2.2.5. Operadores inversos Las definiciones y teoremas de este sub capítulo son tomadas de Groetsch (1980).

Definición. Sean *X*, *Y* espacios normados y el operador lineal $A: X \to Y$ que aplica biunívocamente $D(A)$ sobre su imagen $R(A)$, entonces existe el *operador inverso* $A^{-1}: Y \to X$ que aplica $R(A)$ sobre $D(A)$ biunívocamente y que también es lineal.

Definición. Un operador lineal $A: X \to Y$ es llamado *continuamente invertible* si $R(A) = Y$, A^{-1} existe y es acotado; es decir $A^{-1} \in L(Y, X)$.

Teorema 2.2.13. El operador A^{-1} existe y es acotado en $R(A)$ si y sólo si para una constante $m > 0$ y cualquier $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $\|A(x)\| \geq m\|x\|$.

Demostración

$\Rightarrow$) Como $A^{-1}: R(A) \to D(A)$, por ser acotado existe $c > 0$ tal que $\|A^{-1}(y)\| \leq c\|y\|$ para cualquier $y \in Y$; sea $A^{-1}(y) = x$ luego $A(A^{-1}(y)) = A(x) = I(y) = y$, reemplazando en la desigualdad anterior $\|A^{-1}(y)\| = \|x\| \leq c\|A(x)\|$ implica que $\frac{1}{c}\|x\| \leq \|A(x)\|$ para cualquier $x \in D(A)$; luego si tomamos $m = \frac{1}{c}$ tenemos por lo tanto que $\|A(x)\| \geq m\|x\|$ para cualquier $x \in D(A)$ y $m > 0$. Θ

$\Leftarrow$) Sea $x \in \ker(A)$ entonces $A(x) = 0$, luego $\|A(x)\| = 0 \geq m\|x\| \geq 0$ implica que $m\|x\| = 0$, como $m > 0$ entonces $\|x\| = 0$ luego $x = 0$; así tenemos que $\ker(A) = \{0\}$ por lo tanto existe A^{-1}; además sea $A(x) = y$ entonces $x = A^{-1}(y)$ luego

$\|A(x)\| = \|y\| \geq m\|A^{-1}(y)\|$ implica $\|A^{-1}(y)\| \leq \dfrac{1}{m}\|y\|$; por lo tanto para $c = \dfrac{1}{m}$ tenemos que A^{-1} es acotado. Θ

<u>Ejemplo</u>. Sea el operador $A: C[0,1] \to C[0,1]$ tal que $A(x(t)) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$; entonces A es un operador continuamente invertible, $\ker(A) = \{0\}$ y se verifica que el operador $A^{-1}: C[0,1] \to C[0,1]$ es $A^{-1}(y(t)) = y(t) - \int_0^t e^{\tau - t} y(\tau)d\tau$.

Teorema 2.2.14. Sean X, Y, Z espacios normados sobre el mismo cuerpo **K** y $A: Y \to Z$, $B: X \to Y$ operadores lineales continuamente invertibles; entonces $A(B)$ es continuamente invertible, además $\left[A(B)\right]^{-1} = B^{-1}(A^{-1})$**.**

Demostración. Tenemos que $\underbrace{X \xrightarrow{B} Y \xrightarrow{A} Z}_{A(B)}$ entonces $A(B): X \to Z$, para que $A(B)$ sea continuamente invertible probaremos primero que $R(A(B)) = Z$, es decir si tomamos $z \in Z$ debemos probar que existe $x \in X$ tal que $[A(B)](x) = z$. Como A es continuamente invertible entonces $R(A) = Z$, es decir para todo $z \in Z$ existe $y \in Y$ tal que $A(y) = z$ siempre que $y = A^{-1}(z)$; además como B también es continuamente invertible entonces $R(B) = Y$, es decir para todo $y \in Y$ existe $w \in X$ tal que $B(w) = y$, siempre que $w = B^{-1}(y)$; si reemplazamos $y = B(w)$ en $A(y) = z$ tenemos que $A(B(w)) = z$ y de aquí $[A(B)](w) = z$, luego basta tomar $x = w$ para que $[A(B)](x) = z$; por lo tanto $R(A(B)) = Z$.

Luego si A y B son continuamente invertibles entonces $\|A(y)\| \geq m_A\|y\|$ para cualquier $y \in D(A)$ y $m_A > 0$, como $R(B) = Y$ tenemos que $y = B(x)$ para todo $x \in D(B)$, luego $\|A(B(x))\| \geq m_A\|B(x)\|$, $B(x) \in D(A)$; además $\|B(x)\| \geq m_B\|x\|$ para cualquier $x \in D(B)$ y $m_B > 0$, reemplazando en $\|A(B(x))\| \geq m_A\|B(x)\|$

$$\|A(B(x))\| \geq m_A \|B(x)\| \geq m_A m_B \|x\|,\ x \in D(B) \wedge B(x) \in D(A)$$

$\|A(B(x))\| \geq m_A m_B \|x\|,\ x \in D(A(B))$, si tomamos $m = m_A m_B$

$\|A(B(x))\| \geq m\|x\|$ para cualquier $x \in D(A(B))$ y $m > 0$;

por lo tanto, por el teorema 2.2.13 $[A(B)]^{-1}$ existe y es acotado en $R(A(B)) = Z$.

Sólo nos falta probar que se cumpla $[A(B)]^{-1} = B^{-1}(A^{-1})$, como para todo operador

$[A(B)][A(B)]^{-1} = [A(B)]^{-1}[A(B)] = I$, usando $[A(B)][A(B)]^{-1} = I$ tenemos

$$A\left(B[A(B)]^{-1}\right) = I$$

$$A^{-1}\left[A\left(B[A(B)]^{-1}\right)\right] = A^{-1}$$

$$\left[A^{-1}(A)\right]\left(B[A(B)]^{-1}\right) = A^{-1}$$

$$B[A(B)]^{-1} = A^{-1}$$

$$B^{-1}\left(B[A(B)]^{-1}\right) = B^{-1}(A^{-1})$$

$$\left[B^{-1}(B)\right][A(B)]^{-1} = B^{-1}(A^{-1});$$

por lo tanto, tenemos $[A(B)]^{-1} = B^{-1}(A^{-1})$. Θ

Teorema 2.2.15. Sean *X*, *Y* espacios de Banach, $A \in L(X,Y)$, $R(A) = Y$ y A invertible, es decir existe A^{-1}; entonces *A* es continuamente invertible.

Teorema 2.2.16. Sean *X* un espacio de Banach, $C \in L(X)$ tal que $\|C\| < 1$; entonces el operador $(I - C)$ es continuamente invertible y se cumple $\|(I - C)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|C\|}$.

Demostración. Desde que $C \in L(X)$ entonces

$$\|C(x)\| \leq \|C\|\|x\|, \tag{2.6}$$

como $\|x\| = \|x - C(x) + C(x)\| \leq \|x - C(x)\| + \|C(x)\|$ luego $\|x\| - \|C(x)\| \leq \|x - C(x)\|$, dado que $x - C(x) = (I - C)(x)$ entonces

$$\|x\| - \|C(x)\| \leq \|(I - C)(x)\|, \tag{2.7}$$

de (2.6) y (2.7) obtenemos $\|(I - C)(x)\| \geq \|x\| - \|C(x)\| \geq \|x\| - \|C\|\|x\|$ del cual se deduce que $\|(I - C)(x)\| \geq (1 - \|C\|)\|x\|$, dado que $\|C\| < 1$ entonces $1 - \|C\| > 0$, sea $m = 1 - \|C\|$, por el teorema 2.2.13 $(I - C)^{-1}$ existe y es acotado en $R(I - C)$; por definición de operador inverso para $Y = X$ tenemos que $(I - C)^{-1}$ aplica biunívocamente $R(I - C)$ sobre $D(I - C)$ con lo cual $R(I - C) = X$; por lo tanto el operador $I - C$ es continuamente invertible.

Nos falta probar que $\|(I - C)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|C\|}$, sea $A_n = \sum_{k=0}^{n} C^k$ con $A_n \in L(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; para $n > m$, $\|A_n - A_m\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} C^k - \sum_{k=0}^{m} C^k\right\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} C^k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|C^k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|C\|^k$,

como $\sum_{k=m+1}^{n} \|C\|^k = \|C\|^{m+1}\left(\dfrac{1 - \|C\|^{n-m}}{1 - \|C\|}\right) = \dfrac{\|C\|^{m+1} - \|C\|^{n+1}}{1 - \|C\|}$ entonces

$$\|A_n - A_m\| \leq \frac{\|C\|^{m+1} - \|C\|^{n+1}}{1 - \|C\|},$$

dado que $\|C\| < 1$ en la desigualdad anterior tenemos que $\|A_n - A_m\| \to 0$ cuando $m \to \infty$ y $n \to \infty$, con lo cual se cumple que $\{A_n\}$ es una secuencia de Cauchy en $L(X)$; como X es un espacio de Banach por el teorema 2.2.12 tenemos que $L(X)$ es un espacio de Banach, entonces existe $A \in L(X)$ tal que $A = \lim_{n \to \infty} A_n = \sum_{k=0}^{\infty} C^k$, luego haciendo los cálculos respectivos tenemos para $A(I - C) = (I - C)A$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C^k\right)(I-C)=(I-C)\left(\sum_{k=0}^{n} C^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{n} C^k-\sum_{k=0}^{n} C^{k+1}\right)=I-C^{n+1},$$

tomando límite cuando $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C^k\right)(I-C)=\lim_{n\to\infty}(I-C)\left(\sum_{k=0}^{n} C^k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(I-C^{n+1}\right),$$

como $C^{n+1}=\left(\sum_{k=0}^{n+1} C^k-\sum_{k=0}^{n} C^k\right)$, tomando límite cuando $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} C^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n+1} C^k-\sum_{k=0}^{n} C^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty} C^k-\sum_{k=0}^{\infty} C^k\right)=A-A=0,$$

entonces $A(I-C)=(I-C)A=I$, de esta igualdad $(I-C)^{-1}=A$, luego

$$\left\|(I-C)^{-1}\right\|=\|A\|=\left\|\lim_{n\to\infty} A_n\right\|=\lim_{n\to\infty}\|A_n\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n} C^k\right\|\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\|C^k\right\|\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\|C\|^k,$$

como $\|C\|<1$ tenemos que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\|C\|^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\|C\|^{n+1}}{1-\|C\|}=\frac{1}{1-\|C\|}$; por lo tanto,

obtenemos que $\left\|(I-C)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|C\|}$. Θ

2.2.6. Solución de una ecuación mediante aproximaciones sucesivas La descripción del método de Newton y los lemas de este sub capítulo son tomadas de Haaser, J; La Salle, J. y Sullivan, J. (2001).

Método de Newton. Sea la función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, si existen $x_1,x_2\in[a,b]$ tales que $f(x_1)f(x_2)<0$, entonces por el corolario del teorema del valor intermedio para funciones continuas existe un $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=0$. Suponiendo que r es la solución de la ecuación $f(x)=0$; sea x_n una aproximación a esta solución, intentaremos encontrar otra aproximación x_{n+1}, mediante el reemplazo de la gráfica de f en la vecindad del punto $(x_n, f(x_n))$ por una línea recta, la pendiente de esta recta debe escogerse de modo que la intersección de ésta con el eje X sea una mejor aproximación a r, la abscisa de este punto de intersección será x_{n+1}.

Si m es la pendiente de la recta tenemos $m = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$ luego $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$, según el método de Newton podemos usar como pendiente de la recta tangente, a la derivada de la función en $(x_n, f(x_n))$, es decir $m = f'(x_n)$, entonces tenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.8}$$

Lema 2.2.17. Supongamos que $p(x)$ es un polinomio cuadrático con raíces positivas $0 < r_1 \le r_2$, sea $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$ la fórmula dada por (2.8) para este polinomio; entonces se cumple que $x_n \le x_{n+1}$ y $x_n \to r_1$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Sea $p(x) = Ax^2 + bx + c = 0$ este puede ser escrito para sus raíces r_1, r_2 como $p(x) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0$, además la derivada del polinomio es $p'(x) = 2x - (r_1 + r_2)$ entonces reemplazando en (2.8) y despejando tenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - (r_1 + r_2)x_n + r_1 r_2}{2x_n - (r_1 + r_2)}$$

$$2x_n x_{n+1} - (r_1 + r_2)x_{n+1} = x_n^2 - r_1 r_2$$

$$r_1 r_2 - (r_1 + r_2)x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n x_{n+1},$$

sumando x_{n+1}^2 a ambos lados de esta última igualdad obtenemos que $x_{n+1}^2 - (r_1 + r_2)x_{n+1} + r_1 r_2 = (x_n - x_{n+1})^2$, como se cumple que $(x_n - x_{n+1})^2 \ge 0$ entonces $x_{n+1}^2 - (r_1 + r_2)x_{n+1} + r_1 r_2 \ge 0$ implica que $(x_{n+1} - r_1)(x_{n+1} - r_2) \ge 0$; de esta última desigualdad y las condiciones del lema tenemos que $x_{n+1} \leq r_1 \vee x_{n+1} \geq r_2$; supongamos que $x_{n+1} \geq r_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x_n \geq r_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$; para $n = 0$ tenemos $x_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \geq r_2$ entonces $r_1 \geq r_1 + r_2$ luego $0 \geq r_2$, lo cual es falso, la única posibilidad es que $x_{n+1} \leq r_1$, entonces $x_n \leq r_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica que x_n está acotada superiormente.

De $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - (r_1 + r_2)x_n + r_1 r_2}{2x_n - (r_1 + r_2)}$ tenemos $x_{n+1} = x_n - \frac{\overbrace{(x_n - r_1)}^{(-)}\overbrace{(x_n - r_2)}^{(-)}}{\underbrace{(x_n - r_1)}_{(-)} + \underbrace{(x_n - r_2)}_{(-)}}$, sea $y_n = -\frac{(x_n - r_1)(x_n - r_2)}{(x_n - r_1) + (x_n - r_2)}$ entonces $y_n \geq 0$ luego la secuencia se puede escribir como $x_{n+1} = x_n + y_n$, con lo cual $x_{n+1} \geq x_n$.

Entonces por el teorema 2.2.3 como la secuencia es creciente y es acotada, la secuencia es convergente; por lo tanto, tenemos que $\lim_{n \to \infty} x_n = r_1$. Θ

Lema 2.2.18. Sean b, K, η números positivos tales que $bK\eta \leq 1/2$, además $t_0 = 0$ y $t_{n+1} = t_n - \frac{\left(\frac{bK}{2}\right)t_n^2 - t_n + \eta}{bKt_n - 1}$ obtenido aplicando la fórmula (2.8) en la ecuación cuadrática $\left(\frac{bK}{2}\right)t^2 - t + \eta = 0$; entonces $\frac{bK(t_n - t_{n-1})^2}{2(1 - bkt_n)} = t_{n+1} - t_n$.

Demostración. Del dato y dándole la forma obtenemos

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\left(\frac{bK}{2}\right)t_n^2 - t_n + \eta}{bKt_n - 1} = t_n - \frac{\left(\frac{bK}{2}\right)\left[t_n^2 - \frac{2}{bK}t_n + \frac{2\eta}{bK}\right]}{\left(\frac{bK}{2}\right)\left(2t_n - \frac{2}{bK}\right)}$$

$$t_{n+1}-t_n=\frac{t_n^2-\dfrac{2}{bK}t_n+\dfrac{2\eta}{bK}}{\dfrac{2}{bK}-2t_n}, \tag{2.9}$$

luego $(t_{n+1}-t_n)\left(\dfrac{2}{bK}-2t_n\right)=t_n^2-\dfrac{2}{bK}t_n+\dfrac{2\eta}{bK}$ entonces $t_n^2-2t_nt_{n+1}=\dfrac{2\eta}{bK}-\dfrac{2}{bK}t_{n+1}$,

sumando t_{n+1}^2 a ambos lados de la igualdad $t_{n+1}^2-\dfrac{2}{bK}t_{n+1}+\dfrac{2\eta}{bK}=t_{n+1}^2-2t_nt_{n+1}+t_n^2$, es decir $t_{n+1}^2-\dfrac{2}{bK}t_{n+1}+\dfrac{2\eta}{bK}=(t_{n+1}-t_n)^2$ para todo $n\in\mathbb{N}$; si hacemos $n=n-1$ en la igualdad anterior obtenemos

$$t_n^2-\frac{2}{bK}t_n+\frac{2\eta}{bK}=(t_n-t_{n-1})^2 \text{ para todo } n\in\mathbb{N},$$

reemplazando en (2.9) $t_{n+1}-t_n=\dfrac{(t_n-t_{n-1})^2}{\dfrac{2}{bK}-2t_n}=\dfrac{(t_n-t_{n-1})^2}{\dfrac{2}{bK}(1-bKt_n)}=\dfrac{bK(t_n-t_{n-1})^2}{2(1-bKt_n)}$; por lo tanto, obtenemos que $\dfrac{bK(t_n-t_{n-1})^2}{2(1-bKt_n)}=t_{n+1}-t_n$. Θ

2.2.7. Continuidad de operadores no lineales Las definiciones de este sub capítulo son tomadas de Chumpitaz, M. (1990).

Operadores no lineales acotados

Definición. Sean *X*, *Y* espacios de Banach; un operador no lineal $F:X\to Y$ con $D(F)\subset X$ y $M\subset D(F)$, es llamado *acotado en M*, si $\sup\limits_{x\in M}\|F(x)\|<\infty$.

Continuidad de operadores no lineales

Definición. Sean *X*, *Y* espacios de Banach; un operador no lineal $F:X\to Y$ con dominio $D(F)\subset X$ es llamado *continuo* en el punto $x_0\in D(F)$; si para la secuencia $\{x_n\}\subset D(F)$ tenemos que $\|x_n-x_0\|\to 0$ cuando $n\to\infty$, entonces $\|F(x_n)-F(x_0)\|\to 0$ cuando $n\to\infty$.

F es llamado *continuo* en $D(F)$, si es continuo en cada punto $x_0 \in D(F)$.

Ejemplo. Sea $A: l_2 \to l_2$ tal que $A(x) = (x_1, x_2^2, x_3^3, ...)$ para $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$, comprobar si A es continuo.

Solución

Antes de comprobar si el operador A es continuo, veamos si A esta bien definido. Por definición para $x \in l_2$ tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, por el teorema 2.2.4 $\lim_{k\to\infty} |x_k| = 0$; luego dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k| < \frac{1}{2}$ para todo $k \geq k_0$, entonces tenemos que $|x_k^k| \leq |x_k|$ también para todo $k \geq k_0$, luego se cumple que $\sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k^k|^2 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$; como $\sum_{k=1}^{k_0-1} |x_k^k|^2 < \infty$ entonces también tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^k|^2 = \sum_{k=1}^{k_0-1} |x_k^k|^2 + \sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k^k|^2 < \infty$, lo cual implica que $A(x) \in l_2$; por lo tanto el operador A esta bien definido.

Ahora comprobaremos la continuidad del operador A; sean $x_n, x_0 \in l_2$ tal que

$$\|x_n - x_0\|_{l_2} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty, \tag{2.10}$$

en este caso $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, ...)$ y $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, ...)$ luego

$$\|A(x_n) - A(x_0)\|_{l_2}^2 = \left\|(x_{1,n}, x_{2,n}^2, x_{3,n}^3, ...) - (x_{1,0}, x_{2,0}^2, x_{3,0}^3, ...)\right\|_{l_2}^2$$

$$\|A(x_n) - A(x_0)\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_{k,n}^k - x_{k,0}^k\right|^2, \tag{2.11}$$

de (2.10) se deduce que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_{l_2}^2 = 0$, es decir dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_0\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{k,0}|^2 < \varepsilon$ para todo $n \geq N_0$; por el teorema 2.2.4 tenemos que $\lim_{k\to\infty}\left|x_{k,n}-x_{k,0}\right|=0$ para todo $n\geq N_0$, lo cual implica que $\lim_{k\to\infty}x_{k,n}=\lim_{k\to\infty}x_{k,0}$ para todo $n\geq N_0$, luego por propiedades de límite $\lim_{k\to\infty}x_{k,n}^k=\lim_{k\to\infty}x_{k,0}^k$ también para todo $n\geq N_0$; además como $A(x)\in l_2$, $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^k\right|^2<\infty$, para $A(x_n)$ y $A(x_0)$ tenemos $\left|x_{k,n}^k\right|<\infty$ y $\left|x_{k,0}^k\right|<\infty$ para todo *k*, entonces se deduce que $\lim_{k\to\infty}\left|x_{k,n}^k-x_{k,0}^k\right|=0$ para todo $n\geq N_0$, es decir existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que para $\varepsilon_1=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^{k-k_0+2}}}>0$, luego

$$\left|x_{k,n}^k-x_{k,0}^k\right|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^{k-k_0+2}}}\text{ para todo }k\geq k_0, \tag{2.12}$$

de $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-x_0\right\|_{l_2}^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_{k,n}-x_{k,0}\right|^2=0$ se deduce que $\lim_{n\to\infty}\left|x_{k,n}-x_{k,0}\right|^2=0$ para todo *k*, lo cual implica que $\lim_{n\to\infty}x_{k,n}=x_{k,0}$ para todo *k*, luego por propiedades de límite $\lim_{n\to\infty}x_{k,n}^k=x_{k,0}^k$ también para todo *k*; además como $A(x_n),A(x_0)\in l_2$ entonces se deduce que $\lim_{n\to\infty}\left|x_{k,n}^k-x_{k,0}^k\right|^2=0$ para todo *k*; luego para $k_0<\infty$ tenemos $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_0-1}\left|x_{k,n}^k-x_{k,0}^k\right|^2=0$, es decir dado $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}>0$ existe $N_0^*\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}\left|x_{k,n}^k-x_{k,0}^k\right|^2<\frac{\varepsilon}{2}\text{ para todo }n\geq N_0^*, \tag{2.13}$$

sea $N_1=\max\left\{N_0^*,N_0\right\}$ entonces de (2.11), (2.12) y (2.13) para todo $n\geq N_1$

$$\left\|A(x_n)-A(x_0)\right\|_{l_2}^2=\sum_{k=1}^{k_0-1}\left|x_{k,n}^k-x_{k,0}^k\right|^2+\sum_{k=k_0}^{\infty}\left|x_{k,n}^k-x_{k,0}^k\right|^2<\varepsilon_2+\sum_{k=k_0}^{\infty}\varepsilon_1^2$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k-k_0+2}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^{2-k_0}}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^{2-k_0}}\frac{1}{2^{k_0}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right)$$

$$\|A(x_n)-A(x_0)\|_{l_2}^2 < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}(2)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\|A(x_n)-A(x_0)\|_{l_2} < \sqrt{\varepsilon}=\tilde{\varepsilon}$ para todo $n \geq N_1$, entonces $\|A(x_n)-A(x_0)\|_{l_2} < \tilde{\varepsilon}$ para todo $n \geq N_1$, es decir *A* es continuo en $x_0 \in l_2$; por lo tanto, *A* es continuo en l_2.

Supongamos además que $\|A(x)\|_{l_2} \leq M < \infty$ para todo $x \in \bar{B}(0,r)$ con $r>1$, entonces $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^k\right|^2\right)^{1/2} \leq M$ para todo $x \in \bar{B}(0,r)$; tomando $x=(\underbrace{0,...,0}_{k-1 \text{ ceros}},r,0,...)$ tenemos que $x \in \bar{B}(0,r)$, como $A(x)=(0^1,0^2,...,r^k,0^{k+1},0^{k+2},...)$, $\|A(x)\|_{l_2}=r^k$ entonces según la suposición $r^k \leq M$ para todo *k*; luego si $r>1$ cuando $k \to \infty$ tenemos que $\infty \leq M$, lo cual es una contradicción; por lo tanto $\sup\limits_{x\in \bar{B}(0,r)} \|A(x)\|_{l_2}=\infty$ para $r>1$, es decir el operador *A* no es acotado si $r>1$.

Observación 2.2.19. Un operador no lineal continuo no siempre es acotado, así también un operador no lineal acotado no siempre es continuo.

2.2.8. Diferenciación de operadores Las definiciones y teoremas de este sub capítulo son tomadas de Groetsch (1980).

Diferenciación en espacios normados

Definición. Un operador no lineal $f(x)$ definido en una vecindad *S* de un punto x_0 de un espacio normado *X* y con valores en un espacio normado *Y*, es llamado *diferenciable en el punto* x_0 *en el sentido de Fréchet* o simplemente *diferenciable en* x_0, si existe un operador lineal $A \in L(X,Y)$, tal que se cumple que

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\omega(x-x_0) \text{ para todo } x \in S,$$

donde ω es un operador no lineal tal que $\dfrac{\|\omega(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \to 0$ cuando $\|x-x_0\| \to 0$.

El operador A denotado por $f'(x_0)$ es llamado la *derivada de Fréchet del operador* f *en* x_0 o simplemente *derivada de Fréchet de* f *en* x_0.

Nota. Aunque la notación $f'(x_0)$ puede prestarse a confusión, no significa que el operador f se está aplicando en x_0; se denota de esta manera por su relación con la derivada de una función real de variable real.

La siguiente definición es equivalente a la definición enunciada.

Definición. Sean *X*, *Y* espacios normados y *D* un subconjunto abierto de *X*, un operador $f : D \subset X \to Y$ es llamado *diferenciable en* $x_0 \in D$ si existe un operador lineal acotado $f'(x_0) : X \to Y$ tal que $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \dfrac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)\|}{\|h\|} = 0$.

La expresión $f'(x_0)(h)$ es llamada *diferencial de Fréchet del operador* f *en* x_0 *para el incremento* h o simplemente *diferencial de* f *en* x_0.

Teorema 2.2.20. Si el operador f es diferenciable en x_0 entonces el operador lineal $f'(x_0)$ es único.

Demostración. Si L_1 y L_2 son dos operadores lineales acotados que satisfacen la definición de diferenciabilidad, entonces para cualquier $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tenemos para $h = tx$ con $t \in \mathbb{R}$, que $\|h\| = |t|\|x\| = |t|$; cuando $|t| \to 0$, $\|h\| \to 0$, luego

$$\|L_1x - L_2x\| = \frac{\|L_1(tx) - L_2(tx)\|}{|t|} = \frac{\|L_1(h) - L_2(h)\|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) + L_1(h) - L_2(h)\|}{\|h\|}$$

$$\|L_1x - L_2x\| \le \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - L_1(h)\|}{\|h\|} + \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - L_2(h)\|}{\|h\|},$$

tomando límite a ambos lados de la desigualdad cuando $\|h\| \to 0$ obtenemos $\lim_{\|h\|\to 0} \|L_1 x - L_2 x\| \leq 0 + 0 = 0$; puesto que L_1 y L_2 satisfacen la definición, entonces $0 \leq \|L_1 x - L_2 x\| \leq 0$, lo cual implica que $\|L_1 x - L_2 x\| = 0$; por lo tanto $L_1 = L_2$. Θ

Teorema 2.2.21. Si f es diferenciable en x_0 entonces f es continuo en x_0.

Teorema 2.2.22. Si f y g son diferenciables en x_0 y $\alpha \in$ **K,** entonces $f+g$ y αf son diferenciables en x_0, además:

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$

Demostración

a) Si f y g son diferenciables en x_0 entonces

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)\|}{\|h\|} = 0, \tag{2.14}$$

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\| g(x_0+h) - g(x_0) - g'(x_0)(h)\|}{\|h\|} = 0, \tag{2.15}$$

Además, tenemos

$$\|(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0) - (f+g)'(x_0)(h)\|$$

$$= \| f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0)) - (f+g)'(x_0)(h)\|$$

Dando la forma

$$\| f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0)) - (f+g)'(x_0)(h)\|$$

$$= \| f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h) + f'(x_0)(h)$$

$$+ g(x_0+h) - g(x_0) - g'(x_0)(h) + g'(x_0)(h) - (f+g)'(x_0)(h)\|$$

$$= \| f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h) + g(x_0+h) - g(x_0) - g'(x_0)(h)$$

$$+f'(x_0)(h)+g'(x_0)(h)-(f+g)'(x_0)(h)\|$$

Aplicando la desigualdad triangular al numerador y dividiendo entre $\|h\|$

$$\frac{\|(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)-(f+g)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}\leq\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)(h)\|}{\|h\|}$$

$$+\frac{\|g(x_0+h)-g(x_0)-g'(x_0)(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|f'(x_0)(h)+g'(x_0)(h)-(f+g)'(x_0)(h)\|}{\|h\|},$$

tomando límite cuando $\|h\|\to 0$ y usando (2.14), (2.15) obtenemos

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)-(f+g)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f'(x_0)(h)+g'(x_0)(h)-(f+g)'(x_0)(h)\|}{\|h\|},$$

si tomamos $(f+g)'(x_0)(h)=f'(x_0)(h)+g'(x_0)(h)$

$$0\leq\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)-(f+g)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}\leq\lim_{\|h\|\to 0}\frac{0}{\|h\|}=0,$$

lo cual implica que $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{\|(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)-(f+g)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}=0$; por lo tanto $f+g$ es diferenciable en x_0 y además se cumple que

$$(f+g)'(x_0)(h)=f'(x_0)(h)+g'(x_0)(h),$$

es decir $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$. Θ

b) Si f es diferenciables en x_0 entonces

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)(h)\|}{\|h\|}=0, \qquad (2.16)$$

Además, tenemos

$$\|(\alpha f)(x_0+h)-(\alpha f)(x_0)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|=\|\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|$$

Dando la forma

$$\|\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|$$

$$=\|\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)-\alpha f'(x_0)(h)+\alpha f'(x_0)(h)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|$$

$$=\|\alpha(f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)(h))+\alpha f'(x_0)(h)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|$$

Aplicando la desigualdad triangular al numerador y dividiendo entre $\|h\|$

$$\frac{\|\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}\leq\frac{|\alpha|\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)(h)\|}{\|h\|}$$

$$+\frac{\|\alpha f'(x_0)(h)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|}{\|h\|},$$

tomando límite cuando $\|h\|\to 0$ y usando (2.16) obtenemos

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}\leq\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\alpha f'(x_0)(h)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}$$

si tomamos $(\alpha f)'(x_0)(h)=\alpha f'(x_0)(h)$

$$0\leq\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}\leq\lim_{\|h\|\to 0}\frac{0}{\|h\|}=0,$$

lo cual implica que $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)-(\alpha f)'(x_0)(h)\|}{\|h\|}=0$; por lo tanto αf es diferenciable en x_0 y además se cumple que $(\alpha f)'(x_0)(h)=\alpha f'(x_0)(h)$, es decir $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$. Θ

Teorema 2.2.23. (Regla de la Cadena) Supongamos que $g:X\to Y$ es diferenciable en x_0 y $f:Y\to Z$ es diferenciable en $g(x_0)$; si $F:X\to Z$ se define como $F(x)=f(g(x))$, entonces F es diferenciable en x_0 y además se cumple que $F'(x_0)=f'(g(x_0))(g'(x_0))$.

Nota. Tomamos en cuenta que los paréntesis en $(g'(x_0))$ indican que el operador $f'(g(x_0))$ se está aplicando en $g'(x_0)$ y no que se están multiplicando.

Demostración. Sean

$$\gamma(h) = g(x_0 + h) - g(x_0) - g'(x_0)(h), \tag{2.17}$$

$$\phi(h_1) = f(g(x_0) + h_1) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0))(h_1), \tag{2.18}$$

entonces por las condiciones del teorema tenemos de (2.17) y (2.18)

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|\gamma(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0 \ \wedge \ \lim_{\|h_1\|_Y \to 0} \frac{\|\phi(h_1)\|_Z}{\|h_1\|_Y} = 0,$$

de estos dos límites tenemos que dado $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que, si $0 < \|h\|_X < \delta \ \wedge \ 0 < \|h_1\|_Y < \delta_1$ entonces $\frac{\|\gamma(h)\|_Y}{\|h\|_X} < \varepsilon_1 \ \wedge \ \frac{\|\phi(h_1)\|_Z}{\|h_1\|_Y} < \varepsilon_2$, luego si $0 < \|h\|_X < \delta \wedge 0 < \|h_1\|_Y < \delta_1$ entonces

$$\|\gamma(h)\|_Y < \varepsilon_1 \|h\|_X \ \wedge \ \|\phi(h_1)\|_Z < \varepsilon_2 \|h_1\|_Y \tag{2.19}$$

Además $F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)(h) = f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) - F'(x_0)(h)$, de (2.17) tenemos que $g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)(h) + \gamma(h)$, reemplazando en la igualdad anterior

$$\begin{aligned} &F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)(h) \\ &\qquad = f(g(x_0) + g'(x_0)(h) + \gamma(h)) - f(g(x_0)) - F'(x_0)(h) \end{aligned} \tag{2.20}$$

en (2.18) y puesto que $f'(g(x_0))$ es lineal

$$\begin{aligned} \phi(g'(x_0)(h) + \gamma(h)) &= f(g(x_0) + g'(x_0)(h) + \gamma(h)) - f(g(x_0)) \\ &\quad - f'(g(x_0))[g'(x_0)(h) + \gamma(h)] \\ &= f(g(x_0) + g'(x_0)(h) + \gamma(h)) - f(g(x_0)) \\ &\quad - f'(g(x_0))(g'(x_0)(h)) - f'(g(x_0))(\gamma(h)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(g'(x_0)(h) + \gamma(h)) + f'(g(x_0))(\gamma(h)) &= f(g(x_0) + g'(x_0)(h) + \gamma(h)) - f(g(x_0)) \\ &\quad - [f'(g(x_0))(g'(x_0))](h), \end{aligned}$$

si tomamos $F'(x_0)(h) = [f'(g(x_0))(g'(x_0))](h)$ tenemos

$$\phi(g'(x_0)(h)+\gamma(h)) + f'(g(x_0))(\gamma(h)) = f(g(x_0)+g'(x_0)(h)+\gamma(h))$$

$$-f(g(x_0)) - F'(x_0)(h),$$

reemplazando en (2.20)

$$F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)(h) = \phi(g'(x_0)(h)+\gamma(h)) + f'(g(x_0))(\gamma(h))$$

hallando la norma en ambos lados de la igualdad

$$\|F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)(h)\|_Z = \|\phi(g'(x_0)(h)+\gamma(h)) + f'(g(x_0))(\gamma(h))\|_Z,$$

por (2.19) y puesto que $f'(g(x_0))$, $g'(x_0)$ son operadores lineales acotados

$$\|\phi(g'(x_0)(h)+\gamma(h)) + f'(g(x_0))(\gamma(h))\|_Z \leq \|\phi(g'(x_0)(h)+\gamma(h))\|_Z$$

$$+\|f'(g(x_0))(\gamma(h))\|_Z$$

$$< \varepsilon_2 \|g'(x_0)(h)+\gamma(h)\|_Y + m\|\gamma(h)\|_Y$$

$$< \varepsilon_2 (\|g'(x_0)(h)\|_Y + \|\gamma(h)\|_Y) + m.\varepsilon_1 \|h\|_X$$

$$\|\phi(g'(x_0)(h)+\gamma(h)) + f'(g(x_0))(\gamma(h))\|_Z < \varepsilon_2 (m_1\|h\|_X + \varepsilon_1\|h\|_X) + m.\varepsilon_1\|h\|_X,$$

es decir, obtenemos $\|F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)(h)\|_Z < (\varepsilon_2(m_1+\varepsilon_1) + m.\varepsilon_1)\|h\|_X$, si hacemos $\varepsilon = (\varepsilon_2(m_1+\varepsilon_1) + m.\varepsilon_1)$ obtenemos

$$\|F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)(h)\|_Z < \varepsilon\|h\|_X,$$

luego si $0 < \|h\|_X < \delta$ entonces $\dfrac{\|F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)(h)\|_Z}{\|h\|_X} < \varepsilon$, lo cual implica que $\lim\limits_{\|h\|_X \to 0} \dfrac{\|F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)(h)\|_Z}{\|h\|_X} = 0$; por lo tanto F es diferenciable en x_0 y además se cumple que $F'(x_0)(h) = [f'(g(x_0))(g'(x_0))](h)$, es decir $F'(x_0) = f'(g(x_0))(g'(x_0))$. Θ

Observación 2.2.24

a) En el caso que f es una función real de variable real, la derivada $f'(x_0)$ es la funcional lineal en $\mathbb{R}$ definida por $f'(x_0)(h) = m(x_0)h$, es decir $f'(x_0) = m(x_0)$, donde $m(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Nota. El operador $f'(x_0)$ es un número real que está multiplicando a *h*, esto es consecuencia de la definición de operadores lineales en números reales; en espacios generales un operador lineal aplicado a un x_0 se puede definir como la multiplicación del operador por x_0, por esta razón algunos autores omiten los paréntesis para indicar que el operador lineal se está aplicando en ese elemento.

b) Si $f : X \to Y$ es un operador lineal acotado entonces $f'(x_0) = f$ para todo $x_0 \in X$, puesto que $\lim_{\|h\| \to 0} \dfrac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)\|}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} \dfrac{\|f(h) - f'(x_0)(h)\|}{\|h\|}$, si tomamos $f'(x_0)(h) = f(h)$ tenemos que $\lim_{\|h\| \to 0} \dfrac{\|f(h) - f'(x_0)(h)\|}{\|h\|} = 0$, entonces $f'(x_0)(h) = f(h)$; por lo tanto $f'(x_0) = f$.

<u>Ejemplo</u>. Sea el operador $F : C[0,1] \to C[0,1]$ tal que $[F(u)](x) = u(x) - e^{x\,u(x)}$, hallar la derivada de Fréchet en el punto $u_0(x) = 0$.

<u>Solución</u>

$$|[F(u_0 + h)](x) - [F(u_0)](x) - [F'(u_0)(h)](x)|$$

$$= |(u_0 + h)(x) - e^{x[(u_0+h)(x)]} - u_0(x) + e^{x\,u_0(x)} - [F'(u_0)(h)](x)|$$

$$= |u_0(x) + h(x) - e^{x\,u_0(x) + x\,h(x)} - u_0(x) + e^{x\,u_0(x)} - [F'(u_0)(h)](x)|,$$

dado que $u_0(x) = 0$

$$|[F(u_0 + h)](x) - [F(u_0)](x) - [F'(u_0)(h)](x)| = |h(x) - (e^{x\,h(x)} - 1) - [F'(u_0)(h)](x)|,$$

por la observación 2.2.6 y su ejemplo tenemos que

$$e^{x\,h(x)} = 1 + xh(x) + \frac{x^2(h(x))^2}{2!} + \frac{x^3(h(x))^3}{3!} + \dots,$$

reemplazando en la igualdad anterior

$$\left|[F(u_0+h)](x) - [F(u_0)](x) - [F'(u_0)(h)](x)\right|$$

$$= \left| h(x) - \left(1 + xh(x) + \frac{x^2(h(x))^2}{2!} + \frac{x^3(h(x))^3}{3!} + \dots - 1 \right) - [F'(u_0)(h)](x) \right|$$

$$= \left| h(x) - xh(x) - \frac{x^2(h(x))^2}{2!} - \frac{x^3(h(x))^3}{3!} - \dots - [F'(u_0)(h)](x) \right|,$$

si tomamos $[F'(u_0)(h)](x) = h(x) - xh(x)$, se verifica que es lineal y continuo para cualquier $h \in C[0,1]$, entonces

$$\left|[F(u_0+h)](x) - [F(u_0)](x) - [F'(u_0)(h)](x)\right| = \left| \frac{x^2(h(x))^2}{2!} + \frac{x^3(h(x))^3}{3!} + \dots \right|$$

$$\leq \frac{|x|^2 |h(x)|^2}{2!} + \frac{|x|^3 |h(x)|^3}{3!} + \dots, \quad x \in [0,1]$$

$$\left|[F(u_0+h)](x) - [F(u_0)](x) - [F'(u_0)(h)](x)\right| \leq \frac{|h(x)|^2}{2!} + \frac{|h(x)|^3}{3!} + \dots, \quad x \in [0,1]$$

tomando supremo a ambos lados de la desigualdad cuando $x \in [0,1]$

$$\left\| F(u_0+h) - F(u_0) - [F'(u_0)](h) \right\| \leq \frac{\|h\|^2}{2!} + \frac{\|h\|^3}{3!} + \dots,$$

dividiendo entre $\|h\|$

$$\frac{\left\| F(u_0+h) - F(u_0) - [F'(u_0)](h) \right\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|}{2!} + \frac{\|h\|^2}{3!} + \dots,$$

tomando límite cuando $\|h\| \to 0$ tenemos

$$0 \leq \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\left\| F(u_0+h) - F(u_0) - F'(u_0)(h) \right\|}{\|h\|} \leq 0,$$

lo cual implica que $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|F(u_0+h)-F(u_0)-F'(u_0)(h)\|}{\|h\|}=0$, entonces tenemos que $[F'(u_0)(h)](x)=h(x)-xh(x)=(1-x)h(x)$; por lo tanto, la derivada de Fréchet en el punto $u_0(x)=0$ es

$$[F'(u_0)(.)](x)=(1-x)(\ .\ (x)).$$

En este caso tenemos una multiplicación de funciones continuas, el punto representa un elemento del espacio $C[0,1]$ y puede ser reemplazado por cualquier $h\in C[0,1]$ tal que $\|h\|\to 0$.

III. METODOLOGÍA

3.1. Tipo de investigación

La presente investigación es de tipo descriptivo, exploratorio y de enfoque cualitativo, investigación relacionada al diseño de la indagación, para lo cual se tomaron ciertos puntos de la teoría fundamentada. De esta manera se busca indagar una teoría que explique en un grado conceptual una acción, una relación o un área específico; a diferencia de la teoría formal (llamada de esta forma por Glaser y Strauss), esta teoría es de naturaleza local al estar circunscrita en un entorno y situación definida, por lo cual su descripción está supeditada a un entorno delimitado (Baptista, Fernández y Hernández, 2010). Por consiguiente, la especificación dada por definida teoría sustantiva no se considera teoría formal, empero sí tiene un elevado costo interpretativo y aportan novedosas visiones a un fenómeno definido (Aguilar, 1994). Entonces, se afirma que la teoría fundamentada da una comprensión sólida del fenómeno, debido a que se enmarca en el caso de análisis, cuenta con un trabajo practico y concreto, es sensible con los sujetos de análisis y posibilita entender la dificultad misma del fenómeno estudiado (Creswell, 2009 en Baptista, Fernández y Hernández, 2010).

3.2. Métodos de investigación

3.2.1. Método inductivo

Para la aplicación de este procedimiento o método, se partió del caso especial de la averiguación para llegar a lo general. Este procedimiento implica el estudio, la intuición, la observación, la experimentación, la comparación y la abstracción, su proceso consiste inicialmente con la observación de los casos o hechos en los cuales se muestra el fenómeno, luego consiste en buscar la causa que establece la existencia del fenómeno en los casos vigilados través de la comparación, experimentación, etcétera.; para ir luego a abstraer la ley o inicio que rige a dicho fenómeno y al final se generaliza si es aplicable al cosmos de casos. (Aguilar, 1994)

3.2.2. Método deductivo

Este procedimiento se utilizó partiendo de la utilidad y facilidad de encontrar las fuentes, se realiza partiendo de lo general para llegar a lo particular. Para ejercer este procedimiento en primera instancia se debe hacer la indagación de las definiciones, resumirlas e implantar interacciones. En el procedimiento deductivo se pasa de lo general a lo especial, de manera que, partiendo de unos enunciados de carácter general, se infieren enunciados particulares, logrando ser axiomático-deductivo, teniendo en cuenta que las conjeturas de partida permanecen conformadas por axiomas, o sea, proposiciones no demostrables, o hipotéticos-deductivos, si las premisas de partida son premisas contrastables. (Aguilar, 1994)

3.2.3. Método descriptivo

El método descriptivo se utiliza para recoger, organizar, resumir, presentar, analizar y generalizar resultados de observaciones. Este método implica la recopilación y presentación sistemática de datos para dar una idea clara de una determinada situación. En el estudio descriptivo el propósito del investigador es describir situaciones y eventos. Esto es, decir cómo es y se manifiesta determinado fenómeno (Zorrilla, 1986).

3.3. Diseño de investigación

No experimental.

3.4. Técnicas e instrumentos

Dada que la presente tesis es una investigación documental, se utilizó la sistematización bibliográfica a partir de fuentes como artículos de investigación y libros especializados en Análisis Funcional.

IV. RESULTADOS

4.1. Descripción de los métodos

4.1.1. Método de Newton-Kantorovich. El Método de Newton-Kantorovich para hallar la raíz de una ecuación no lineal en espacios de Banach, es generalizado por analogía con el método de Newton para funciones reales de variable real, obteniéndose en este proceso también una secuencia de Newton para aproximar la raíz de esta ecuación, en el siguiente sub capítulo presentaremos el teorema de Newton-Kantorovich, el cual nos proporciona las condiciones para la convergencia de esta secuencia a la raíz de la ecuación, a su vez este teorema delimita las regiones donde se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución que se obtenga.

Deducción de la Secuencia de Newton

Deseamos aproximar una solución x^* de la ecuación:

$$F(x) = 0, \tag{4.1}$$

donde F es un operador no lineal entre espacios de Banach.

La idea básica es reemplazar (4.1) por una ecuación lineal en la vecindad de la solución x^*; específicamente si x_0 es una aproximación de x^* y F es diferenciable en x_0 entonces $F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + r(x, x_0)$, donde r es un operador no lineal tal que $\dfrac{\|r(x, x_0)\|}{\|x - x_0\|} \to 0$ cuando $x \to x_0$.

Si $x = x^*$ tenemos que $0 = F(x^*) = F(x_0) + F'(x_0)(x^* - x_0) + r(x^*, x_0)$ entonces escogemos como una nueva aproximación al vector x_1 que satisface la ecuación, es decir $0 = F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0)$; esta ecuación de hecho es más simple que la ecuación (4.1) y podemos resolverlo asumiendo que $F'(x_0)$ es invertible, entonces

$$F'(x_0)(x_1 - x_0) = -F(x_0)$$

$$\left[F'(x_0)\right]^{-1}(F'(x_0)(x_1-x_0))=\left[F'(x_0)\right]^{-1}(-F(x_0))$$

$$\left[\left[F'(x_0)\right]^{-1}(F'(x_0))\right](x_1-x_0)=-\left[F'(x_0)\right]^{-1}(F(x_0))$$

$$x_1-x_0=-\left[F'(x_0)\right]^{-1}(F(x_0))$$

$$x_1=x_0-[F'(x_0)]^{-1}(F(x_0)).$$

Asumiendo que las derivadas apropiadas son invertibles este proceso puede ser continuado para generar la *secuencia de Newton*

$$x_{k+1}=x_k-[F'(x_k)]^{-1}(F(x_k)),\ k\geq 0 \tag{4.2}$$

4.1.2. Método de Newton-Like de 2 pasos (Argyros 2008) detalla este método junto con un análisis de convergencia semilocal para un método de Newton de dos pasos cúbicamente convergente, convergencia introducida por H. Homeier en (Homeier, 2003) y (Homeier, 2004), también estudiado por A. Ozban en (Ozban, 2004), así también analiza la convergencia local del método en espacios de Banach, en lugar del caso local para los espacios real y complejo, en dicho análisis usando la misma información hace una comparación con el método de Newton de dos pasos; la descripción de este método y el análisis de su convergencia desarrollados en el trabajo de Argyros (Argyros 2008) son detallados en siguientes sub capítulos correspondientes a este método.

Argyros estudia el problema de aproximación local a la única solución de la ecuación no lineal $F(x)=0$, donde F es un operador definido es un espacio de Banach *X* con valores en un espacio de Banach *Y*, el cual es Fréchet diferenciable en la cerradura $\overline{B(x_0,R)}$ de la bola abierta

$$B(x_0,R)=\left\{x\in X\ /\left\|x-x_0\right\|<R\right\}.$$

con lo cual en todos los casos tendremos que la cerradura $\overline{B(x_0,R)}\equiv\bar{B}(x_0,R)$.

La convergencia local del método de Newton de 2 pasos el cual converge cúbicamente ha sido estudiada por (Ozban, 2004), (Homeier, 2003) y (Homeier, 2004), estas fórmulas son

$$\begin{gathered} y_n = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n),\ n \geq 0,\ x_0 \in D \\ x_{n+1} = x_n - F'(z_n)^{-1} F(x_n),\ z_n = \frac{x_{n+} y_n}{2} \end{gathered} \tag{4.3}$$

Para en el caso cuando $X = Y = \mathbb{R}$ o $X = Y = \mathbb{C}$ y $n \geq 0$ en (Hernandez y Salanova, 2000) y (Kantorovich y Akilov, 1982) han demostrado experimentalmente que el método dado por las fórmulas (4.3) puede competir en eficiencia con otros métodos usando la misma información.

La convergencia semilocal del método (4.3) es estudiada por Argyros en el caso de un espacio de Banach, motivado por la eficiencia del método cuando $X = Y = \mathbb{R}$ o $X = Y = \mathbb{C}$, usando una aproximación precisa, mayorizando secuencias de manera muy similar a como se hace en algunas variantes del método de Newton, en especial en el método de Newton-Kantorovich.

Asumiendo que para algún $x_0 \in D$, $F'(x_0)^{-1} \in L(X,Y)$ y para todo $x, y \in B(x_0, R)$

$$\left\| F'(x_0)^{-1} \left[F'(x) - F'(x_0) \right] \right\| \leq w_0 \left(\left\| x - x_0 \right\| \right) \tag{4.4}$$

$$\left\| F'(x_0)^{-1} \left[F'(x) - F'(y) \right] \right\| \leq w \left(\left\| x - y \right\| \right) \tag{4.5}$$

donde w_0, w son funciones estrictamente decrecientes en el intervalo $[0, R]$ tal que

$$\lim_{r \to 0} w_0(r) = \lim_{r \to 0} w(r) = 0 \tag{4.6}$$

Condiciones de la forma (4.4), (4.5) y (4.6) están relacionadas con el estudio del método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n),\ n \geq 0,\ x_0 \in D$$

para el caso particular cuando $w_0(r) = w(r)$ para todo $r \in [0, R]$.

La ventaja de la introducción de esta función w_0 en el método Newton-Like ha sido explicada en (Argyros, 2004), (Argyros, 2008); entonces bajo las mismas condiciones o aún con hipótesis más débiles se pueden obtener las acotaciones de errores sobre las distancias $\|y_n - x_n\|$, $\|x_{n+1} - x_n\|$, $\|y_n - x*\|$, $\|x_n - x*\|$ con $n \geq 0$, que son mucho más finas y con una precisión mínima de información sobre la localización de la solución $x*$.

Comparando con el método de Newton-Like de dos pasos

$$\begin{gathered} y_n = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n),\ n \geq 0,\ x_0 \in D \\ x_{n+1} = x_n - F'(y_n)^{-1} F(x_n) \end{gathered} \tag{4.7}$$

tenemos que ambos métodos (4.3) y (4.7) usan 2 inversas y una función, en la evaluación de cada paso.

4.1.3. Método de Newton-Like sin inversas (Argyros, 2006) desarrolla el estudio del problema de aproximación local a la solución única de la ecuación no lineal $F(x) = 0$, donde F es un operador Fréchet diferenciable definido sobre un subconjunto convexo *D* de un espacio de Banach *X* con valores en un espacio de Banach *Y*; la descripción del método utilizado en la aproximación y el análisis de su convergencia desarrollados por Argyros en (Argyros 2006) son detallados en siguientes sub capítulos correspondientes a este método.

El método más conocido para generar una secuencia de aproximación *x*, está dada por el método iterativo Newton-Like en la forma

$$x_{n+1} = x_n - G(x_n) F(x_n),\ n \geq 0,\ x_0 \in D \tag{4.8}$$

donde $G(x) \in L(Y, X)$ para $x \in D$, aproxima a la inversa de la derivada de Fréchet del operador *F*.

La ventaja de este método sobre el método de Newton-Like de la forma

$$y_{n+1} = y_n - A(y_n)^{-1} F(y_n),\ n \geq 0,\ y_0 \in D \tag{4.9}$$

se presenta en el hecho que en la relación (4.9) la inversa $A(y_n)^{-1} \in L(Y,X)$ debe ser calculada en cada caso.

El análisis local y semilocal de la convergencia de los métodos (4.8) y (4.9) ha sido ampliamente estudiada por diversos investigadores y bajo distintas condiciones. Un estudio general de tales resultados puede ser hallado en el trabajo de Altman (Altman, 1980) o de Argyros (Argyros, 2004) y (Argyros, 2005); en el siguiente sub capítulo se mostrará algunos detalles del trabajo de Argyros para el análisis de convergencia del método (4.8), bajo condiciones de continuidad p-Hölder, donde además se muestra que el orden de convergencia del método es $1+p$, $p \in [0,1]$.

4.1.4. Método de Newton-Tikhonov (Monnanda y Santhosh, 2003) desarrollan el caso particular del método de Newton-Tikhonov, el cual consiste de un método de regularización de proyecciones, para ecuaciones no lineales de tipo operador mal condicionado de Hammerstein; la descripción del método y el análisis de su convergencia desarrollados por Monnanda y Santhosh en (Monnanda y Santhosh, 2003) son detallados en siguientes sub capítulos correspondientes a este método.

Monnanda y Santhosh consideran un esquema de proyección iterativo regularizado para la ecuación tipo operador mal condicionado de Hammerstein de la forma $KF(x) = f$, donde $F : D(F) \subseteq X \to X$ es un operador no lineal, $K : X \to Y$ es un operador acotado y *X*, *Y* son 2 espacios de Hilbert; el método es una combinación de la regularización discretizada de Tikhonov y el método modificado de Newton; ellos asumen que la derivada de Fréchet de *F* en x_0 es invertible, es decir el mal condicionamiento del operador *KF* es debido al mal condicionamiento del operador *K*, en este caso x_0 es una aproximación inicial a la solución $\hat{x}$ de $KF(x) = f$; consideran además una alternativa adaptativa del parámetro sugerido por Perverzev y Schock, para la selección del parámetro de regularización α.

Monnanda y Santhosh centran su estudio en la aproximación finito dimensional de la ecuación operador mal condicionado de la forma

$$KF(x) = f \tag{4.10}$$

donde $F : D(F) \subseteq X \to X$ es un operador no lineal, $K : X \to Y$ es un operador acotado, $D(F)$ es el dominio de F y además X, Y son dos espacios de Hilbert con su correspondiente producto interno $\langle .,. \rangle$ y norma $\|.\|$.

Sea $B(x,r)$ la bola abierta con centro $x \in X$ y de radio $r > 0$, la ecuación (4.10) es llamada ecuación tipo operador mal condicionado de Hammerstein y está mal condicionada en el sentido que la solución no depende continuamente de los valores de f, asumiendo que los valores de $f^{\delta} \in Y$ se pueden obtener para

$$\left\| f - f^{\delta} \right\| \leq \delta \tag{4.11}$$

La solución numérica del problema mal condicionado (4.10) con la condición (4.11) requieren la aplicación de métodos iterativos de regularización especiales, en este caso consideraremos el siguiente método iterativo de regularización para la aproximación de la solución de (4,10) con (4.11):

$$y_{n,\alpha}^{h,\delta} = x_{n,\alpha}^{h,\delta} - P_h F'(x_{0,\alpha}^{h,\delta})^{-1} P_h \left[F(x_{n,\alpha}^{h,\delta}) - z_{\alpha}^{h,\delta} \right], \tag{4.12}$$

$$x_{n+1,\alpha}^{h,\delta} = y_{n,\alpha}^{h,\delta} - P_h F'(x_{0,\alpha}^{h,\delta})^{-1} P_h \left[F(y_{n,\alpha}^{h,\delta}) - z_{\alpha}^{h,\delta} \right] \tag{4.13}$$

donde $x_{0,\alpha}^{h,\delta}$ se define como $x_{0,\alpha}^{h,\delta} := P_h x_0$ y $z_{\alpha}^{h,\delta}$ es la solución discretizada regularizada de Tikhonov $Kz = f^{\delta}$ que está dada por

$$\left(P_h K^* K P_h + \alpha P_h \right) \left(z_{\alpha}^{h,\delta} - P_h F(x_0) \right) = P_h K^* \left[f^{\delta} - KF(x_0) \right] \tag{4.14}$$

en la que $P_h : X \to X_h$ es una proyección ortogonal de X en un subespacio finito X_h, asumiendo que F posee una derivada de Fréchet acotada uniformemente para todo $x \in D(F)$, es decir $\|F'(x)\| \leq M$ para algún $M > 0$ y $\|F'(x_0)^{-1}\| := \beta_1$.

Consideremos que $P_h \to I$ para todo $x \in X$ y que K, $F'(x)$ son dos operadores compactos, sean entonces $\varepsilon_h := \|K(I - P_h)\|$, $\tau_h := \|F'(x)(I - P_h)\|$, $\forall x \in D(F)$ y $\{b_h : h > 0\}$ tal que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|(I - P_h)x_0\|}{b_h} = 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|(I - P_h)F(x_0)\|}{b_h} = 0$ y $\lim\limits_{h \to 0} b_h = 0$, luego $\varepsilon_h \to 0$ y $\tau_h \to 0$ cuando $h \to 0$; en los siguientes teoremas también será necesario asumir que $\varepsilon_h < \varepsilon_0$, $\tau_h \leq \tau_0$ y $b_h \leq b_0$.

Para garantizar la tasa de convergencia $\left\|x_{n,\alpha}^{h,\delta} - \hat{x}\right\|$, usaremos la condición principal para $F(\hat{x}) - F(x_0)$ indicada en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. Existe una función continua monótona estrictamente decreciente $\varphi : \langle 0, a] \to \langle 0, \infty \rangle$ con $a \geq \|K\|^2$, que satisface

(i) $\lim\limits_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = 0$ (ii) $\sup\limits_{\lambda > 0} \dfrac{\alpha \varphi(\lambda)}{\lambda + \alpha} \leq \varphi(\alpha)$, $\forall \lambda \in \langle 0, a]$

(iii) $F(\hat{x}) - F(x_0) = \varphi(K^* K) w$, para algún $w \in X$ tal que $\|w\| \leq 1$.

Teorema 4.1.2. Sea $z_\alpha^{h,\delta}$ que satisface (4.14), si $b_h \leq \dfrac{\delta + \varepsilon_h}{\sqrt{\alpha}}$ y usando la proposición 4.1.1, entonces se cumple que

$$\left\|F(\hat{x}) - z_{\alpha,h}^{\delta}\right\| \leq C\left(\varphi(\alpha) + \left(\frac{\delta + \varepsilon_h}{\sqrt{\alpha}}\right)\right), \text{ donde } C = \max\{M\rho, 1\} + 1.$$

Para el teorema 4.1.3, consideremos que

$$l := \max\left\{ i \,/\, \varphi(\alpha_i) \leq \frac{\delta + \varepsilon_h}{\sqrt{\alpha_i}} \right\} < N, \qquad (4.15)$$

$$k = \max\left\{ i / \alpha_i \in D_N^+ \right\} \tag{4.16}$$

donde $D_N^+ = \left\{ \alpha_i \in D_N / \left\| z_{\alpha_i}^{\delta} - z_{\alpha_j}^{\delta} \right\| \le \dfrac{4C(\delta + \varepsilon_h)}{\sqrt{\alpha_j}},\ j = \overline{0, i-1} \right\}$.

Teorema 4.1.3. Sea l definido como en la fórmula (4.15), k como en la fórmula (4.16) y $z_{\alpha_k}^{h,\delta}$ que satisface (4.14), con $\alpha = \alpha_k$; entonces $l \le k$ y

$$\left\| F(\hat{x}) - z_{\alpha_k}^{h,\delta} \right\| \le C\left(2 + \frac{4\mu}{\mu - 1} \right) \mu \psi^{-1}\left(\delta + \varepsilon_h \right).$$

4.2. Análisis de convergencia de los métodos

4.2.1. Convergencia del método de Newton-Kantorovich. La convergencia de este método será mostrada en el teorema 4.2.3.

Lema 4.2.1. Supongamos que C es un subconjunto convexo abierto de un espacio normado X, Y es un espacio de Banach y $F : C \to Y$ es diferenciable en C, si $\left\| F'(x) - F'(y) \right\| \le K \left\| x - y \right\|$ para todo $x, y \in C$, entonces

$$\left\| F(x) - F(y) - F'(x)(x - y) \right\| \le K \frac{\left\| x - y \right\|^2}{2} \text{ para todo } x, y \in C.$$

Lema 4.2.2.- Supongamos que $\{x_k\}$ es una secuencia en un espacio de Banach X y $\{t_k\}$ es una secuencia no decreciente de números reales no negativos que *mayorizan* $\{x_k\}$, esto es $\left\| x_{k+1} - x_k \right\| \le t_{k+1} - t_k$, $k \ge 0$. Si $t_k \to t$ cuando $k \to \infty$, entonces existe un $x \in X$ tal que $x_k \to x$ y $\left\| x - x_k \right\| \le t - t_k$ para $k \ge 0$.

Demostración. Puesto que $\left\| x_{k+p} - x_k \right\| \le \sum_{i=1}^{p} \left\| x_{k+i} - x_{k+i-1} \right\| \le \sum_{i=1}^{p} (t_{k+1} - t_{k+i-1}) = t_{k+p} - t_k$

tenemos que $\left\| x_{k+p} - x_k \right\| \le t_{k+p} - t_k$, como $\{t_k\}$ es convergente entonces por la proposición 2.2.2 es una secuencia de Cauchy, es decir dado $\varepsilon > 0$ existe $K_0 \in \mathbb{N}$

tal que $t_{k+p} - t_k < \varepsilon$ para todo $k+p \geq K_0$ y $k \geq K_0$; luego en la desigualdad $\|x_{k+p} - x_k\| \leq t_{k+p} - t_k$ tenemos que $\|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon$ para todo $k+p \geq K_0$ y $k \geq K_0$, es decir $\{x_k\}$ es una secuencia de Cauchy; por lo tanto existe un $x \in X$ tal que $x_k \to x$ cuando $k \to \infty$, además si $p \to \infty$ tenemos que $k+p \to \infty$ entonces obtenemos $\|x - x_k\| \leq t - t_k$ para $k \geq 0$. Θ

Teorema 4.2.3. (Teorema de Newton-Kantorovich) Sean X e Y espacios de Banach, supongamos que C es un subconjunto convexo abierto de X; sea $F : C \to Y$ diferenciable para todo $x \in C$ tal que satisface $\|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|$ para todo $x, y \in C$, asumimos que para algún $x_0 \in C$, $G_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ existe, $\|G_0\| \leq b$ y $\|G_0(F(x_0))\| \leq \eta$; sea $t^* = \eta \dfrac{(1-\sqrt{1-2h})}{h}$ donde $h = b\eta K \leq \dfrac{1}{2}$ y supongamos también que $S = \{x \in X / \|x - x_0\| \leq t^*\} \subset C$, entonces la secuencia de Newton (4.2) está definida en S y converge a una raíz x^* de F; además

$$\|x^* - x_k\| \leq \eta \frac{\left[1-\sqrt{1-2h}\right]^{2^k}}{h\ 2^k},\ k \geq 0.$$

Demostración. Sea $Q = \{x \in X / \|x - x_0\| < \eta / h\} \cap C$, si $x \in Q$ entonces $F'(x)$ existe y se cumple que $\|F'(x) - F'(x_0)\| \leq K\|x - x_0\| < K\eta / h$, luego tenemos $\|I - G_0(F'(x))\| = \|G_0(G_0^{-1}) - G_0(F'(x))\| \leq \|G_0(G_0^{-1} - F'(x))\|$; por ser operadores lineales tenemos que $\|I - G_0(F'(x))\| \leq \|G_0\|\|F'(x_0) - F'(x)\|$

$$\|I - G_0(F'(x))\| \leq bK\|x - x_0\|, \tag{4.17}$$

$\|I - G_0(F'(x))\| < bK\eta / h = bK\eta / bK\eta = 1$, es decir se cumple

$$\|I - G_0(F'(x))\| < 1 \text{ para todo } x \in Q,$$

si hacemos $C = I - G_0(F'(x))$ tenemos que $C \in L(X)$ y $\|C\| < 1$, por el teorema 2.2.16 se cumple que $I - C = G_0(F'(x))$ es continuamente invertible entonces existe $[G_0(F'(x))]^{-1}$ para todo $x \in Q$, luego por el teorema 2.2.14 tenemos $[G_0(F'(x))]^{-1} = [F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})$, de esta igualdad $[F'(x)]^{-1}$ existe para todo $x \in Q$ y además $\left\|[G_0(F'(x))]^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - G_0(F'(x_0))\|}$, luego

$$\left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - G_0(F'(x_0))\|}, \tag{4.18}$$

de (4.17) se deduce que $\frac{1}{1 - \|I - G_0(F'(x))\|} \leq \frac{1}{1 - bK\|x - x_0\|}$ entonces en (4.18)

$$\left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - G_0(F'(x_0))\|} \leq \frac{1}{1 - bK\|x - x_0\|}$$

$$\left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\| \leq \frac{1}{1 - bK\|x - x_0\|}, \tag{4.19}$$

además, por ser operadores lineales se cumple que

$$\left\|\left\{[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\}(G_0)\right\| \leq \left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\|\|G_0\|$$

$$\left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1}(G_0))\right\| \leq \left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\|\|G_0\|$$

$$\left\|[F'(x)]^{-1}\right\| \leq \left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\|\|G_0\|,$$

por (4.19) y la condición $\|G_0\| \leq b$

$$\left\|[F'(x)]^{-1}\right\| \leq \left\|[F'(x)]^{-1}(G_0^{-1})\right\|\|G_0\| \leq \frac{1}{1 - bK\|x - x_0\|}b,$$

entonces tenemos que $[F'(x)]^{-1}$ existe y

$$\left\|[F'(x)]^{-1}\right\| \leq \frac{b}{1 - bK\|x - x_0\|} \text{ para todo } x \in Q \tag{4.20}$$

Definimos $N : Q \to X$ por $N(x) = x - [F'(x)]^{-1}(F(x))$ entonces se deducen:

$$x - N(x) = [F'(x)]^{-1}(F(x)), \tag{4.21}$$

$$F(x) + F'(x)(N(x) - x) = 0, \tag{4.22}$$

asumiendo que $N(x) \in Q$ en (4.21) $N(x) - N(N(x)) = [F'(N(x))]^{-1}(F(N(x)))$,

entonces tenemos que

$$\|N(x) - N(N(x))\| = \left\| [F'(N(x))]^{-1}(F(N(x))) \right\| \leq \left\| [F'(N(x))]^{-1} \right\| \|F(N(x))\|,$$

usando (4.20), (4.22) y el lema 4.2.1. respectivamente tenemos

$$\|N(x) - N(N(x))\| \leq \frac{b\|F(N(x))\|}{1 - bK\|x - x_0\|}$$

$$\leq \frac{b\|F(N(x)) - F(x) - F'(x)(N(x) - x)\|}{1 - bK\|x - x_0\|}$$

$$\|N(x) - N(N(x))\| \leq \frac{bK\|N(x) - x\|^2}{2(1 - bK\|x - x_0\|)} \tag{4.23}$$

Notamos de las condiciones del teorema que t^* es la raíz más pequeña de la ecuación cuadrática $\left(\frac{bK}{2}\right)t^2 - t + \eta = 0$, por lo tanto, si $t_0 = 0$ y los t_k son generados por el método Newton clásico para esta ecuación, es decir

$$t_{k+1} = t_k - \frac{\left\{\left(\frac{bK}{2}\right)t_k^2 - t_k + \eta\right\}}{bKt_k - 1}, \tag{4.24}$$

entonces por el lema 2.2.17 $t_k \leq t_{k+1}$ y $t_k \to t^*$ cuando $k \to \infty$.

Ahora demostraremos que la secuencia $\{x_k\}$ es mayorizada por la secuencia $\{t_k\}$; la aproximación $\{x_1\}$ existe por suposición, entonces de (4.2) y por condición del teorema $\|x_1 - x_0\| = \|G_0(F(x_0))\| \leq \eta = t_1 - t_0 \leq t^*$ pues $\{t_k\}$ es creciente y $t_k \to t^*$

cuando $k \to \infty$, supongamos ahora que $x_1, ..., x_k$ están definidos y que $\|x_i - x_{i-1}\| \le t_i - t_{i-1}$ para $i = \overline{1,k}$, entonces para $1 \le j \le k$

$$\|x_j - x_0\| \le \sum_{i=1}^{j} \|x_{j-i+1} - x_{j-i}\| \le \sum_{i=1}^{j} (t_{j-i+1} - t_{j-i}) = t_j - t_0 \le t^*$$

$$\|x_j - x_0\| \le t_j - t_0 \le t^*, \tag{4.25}$$

es decir $x_1, x_2, ..., x_k \in S$, dado que $S \subset Q$ por (4.20) también existen $[F'(x_k)]^{-1}$, por (4.2) x_{k+1} también está definido; además por definición de *N*, como $S \subset Q$ y por (4.2) tenemos que $N(x_{k-1}) = x_k$ para $x_k \in Q$; luego por (4.23), la suposición que $\|x_k - x_{k-1}\| \le t_k - t_{k-1}$, la deducción de (4.25) y el lema 2.2.18 respectivamente

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|N(N(x_{k-1})) - N(x_{k-1})\|$$

$$\le \frac{bK\|N(x_{k-1}) - x_{k-1}\|^2}{2(1 - bK\|x_k - x_0\|)}$$

$$\le \frac{bK\|x_k - x_{k-1}\|^2}{2(1 - bK\|x_k - x_0\|)}$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le \frac{bK(t_k - t_{k-1})^2}{2(1 - bK(t_k - t_0))} = \frac{bK(t_k - t_{k-1})^2}{2(1 - bKt_k)} = t_{k+1} - t_k$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le t_{k+1} - t_k, \tag{4.26}$$

para $j = k+1$, $\|x_{k+1} - x_0\| \le \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_k - x_0\|$, por (4.25) y (4.26) tenemos

$$\|x_{k+1} - x_0\| \le (t_{k+1} - t_k) + (t_k - t_0)$$

$$\|x_{k+1} - x_0\| \le t_{k+1} - t_0 \le t^*,$$

luego también $x_{k+1} \in S$, por inducción matemática vemos que la secuencia $\{x_k\}$ está definida para todo $k \in \mathbb{N}$, está contenida en *S* y por (4.26) es mayorizada por la secuencia $\{t_k\}$; entonces del lema 4.2.2 se deduce que existe un $x^* \in S$ tal que

$$\|x^*-x_k\| \le t^*-t_k \to 0 \text{ cuando } k \to \infty, \tag{4.27}$$

De (4.2) despejamos $F(x_k)$ entonces $-F(x_k) = F'(x_k)(x_{k+1}-x_k)$, luego por ser un operador lineal y por las condiciones del teorema respectivamente tenemos

$$\|F(x_k)\| = \|F'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\| \le \|F'(x_k)\|\|x_{k+1}-x_k\|$$

$$\le \|F'(x_k)-F'(x_0)+F'(x_0)\|\|x_{k+1}-x_k\|$$

$$\le \left[\|F'(x_0)\|+\|F'(x_k)-F'(x_0)\|\right]\|x_{k+1}-x_k\|$$

$$\le \left[\|F'(x_0)\|+K\|x_k-x_0\|\right]\|x_{k+1}-x_k\|, \text{ por (4.18)}$$

$$\|F(x_k)\| \le \left[\|F'(x_0)\|+Kt^*\right]\|x_{k+1}-x_k\|,$$

tomando límite cuando $k \to \infty$, por (4.27) y dado que F es continuo tenemos

$$0 \le \|F(x^*)\| \le \left[\|F'(x_0)\|+Kt^*\right]\|x^*-x_k\| \le \left[\|F'(x_0)\|+Kt^*\right]0 = 0,$$

entonces $\|F(x^*)\| = 0$; por lo tanto $F(x^*) = 0$.

Finalmente obtenemos la cota del error; desde que t^* es una raíz de la ecuación $\left(\frac{bK}{2}\right)t^2 - t + \eta = 0$ para $h = b\eta K$ tenemos $ht^2 - 2\eta t + 2\eta^2 = 0$ entonces para t^*

$$h(t^*)^2 - 2\eta t^* + 2\eta^2 = 0$$

$$h\left\{(t^*)^2 - 2t^* t_k + t_k^2\right\} = 2\eta t^* - 2\eta^2 - 2ht^* t_k + ht_k^2$$

$$h(t^*-t_k)^2 - 2t^*(\eta - ht_k) = ht_k^2 - 2\eta^2, \tag{4.28}$$

también en (4.24) tenemos $t_{k+1} = t_k - \dfrac{ht_k^2 - 2\eta t_k + 2\eta^2}{2(ht_k - \eta)}$, del cual se despeja

$$2t_{k+1}(ht_k - \eta) = ht_k^2 - 2\eta^2, \tag{4.29}$$

de (4.28) y (4.29) tenemos $2t_{k+1}(ht_k - \eta) = h(t^*-t_k)^2 - 2t^*(\eta - ht_k)$, luego

$2t^*(\eta - ht_k) - 2t_{k+1}(\eta - ht_k) = h(t^*-t_k)^2$ entonces

$$t^*-t_{k+1}=\frac{h(t^*-t_k)^2}{2(\eta-ht_k)}, \tag{4.30}$$

también para $h=b\eta K$ en el lema 2.2.18 tenemos que $ht_{k+1}-ht_k=\frac{(ht_k-ht_{k-1})^2}{2(\eta-ht_k)}$; por lo tanto si ht_k-ht_{k-1} y ht_k como funciones de *h* se incrementan, entonces así también lo hacen $ht_{k+1}-ht_k$ y ht_{k+1}, esto se observa claramente para el caso cuando $k=1$, luego ht_k es una función creciente de *h* para todo *k*; si $h=\frac{1}{2}$ en las condiciones del teorema tenemos $t^*=2\eta$, reemplazando en (4.30) y operando obtenemos $2\eta-t_{k+1}=\frac{2\eta-t_k}{2}$, luego

$$\frac{2\eta-t_k}{2}=\frac{2\eta-t_{k-1}}{2^{1+1}}=\ldots=\frac{2\eta-t_{k-k}}{2^{1+k}}=\frac{2\eta-t_0}{2^{1+k}}=\frac{2\eta}{2^{1+k}}=\frac{\eta}{2^k},$$

entonces $\eta-ht_k=\frac{\eta}{2^k}$, dado que ht_k se incrementa por *h*, tenemos entonces para cualquier *k* positivo y $h\le 1/2$ que $(\eta-ht_k)^{-1}\le\frac{2^k}{\eta}$; luego reemplazando en (4.30) $t^*-t_{k+1}\le\frac{h}{\eta}2^{k-1}(t^*-t_k)^2$, entonces se sigue que $t^*-t_{k+1}\le\frac{\eta[\alpha(h)]^{2^{k+1}}}{h2^{k+1}}$ siempre que

$$t^*-t_k\le\frac{\eta[\alpha(h)]^{2^k}}{h2^k}, \tag{4.31}$$

y $\alpha(h)$ sea alguna función positiva de *h*; como para $k=0$ tenemos $t^*-t_0=t^*=\frac{\eta(1-\sqrt{1-2h})}{h}$ entonces podemos tomar $\alpha(h)=1-\sqrt{1-2h}$, de (4.27) y (4.31) obtenemos $\|x^*-x_k\|\le t^*-t_k\le\frac{\eta[\alpha(h)]^{2^k}}{h2^k}$, dado que podemos tomar $\alpha(h)=1-\sqrt{1-2h}$; por lo tanto tenemos $\|x^*-x_k\|\le\frac{\eta\left[1-\sqrt{1-2h}\right]^{2^k}}{h2^k}$. Θ

4.2.2. Convergencia semilocal del método de Newton-Like de 2 pasos. De acuerdo a lo mencionado en el sub capítulo anterior el análisis de la convergencia de este método es desarrollado por Argyros en (Argyros 2008); este análisis será presentado en el teorema 4.2.4, previamente presentamos los siguientes resultados que se usarán para la demostración de dicho teorema.

Sea $\eta \geq 0$, definimos las secuencias escalares $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ para $n \geq 0$, mediante

$$t_0 = 0,\ s_0 = \eta,\ t_1 = s_0 + \frac{s_0}{1 - w_0\left(\frac{s_0 + t_0}{2}\right)} \text{ y para todo } n \geq 0$$

$$s_{n+1} = t_{n+1} + \frac{\int_0^1 w\big(t(t_{n+1} - t_n)\big)(s_n - t_n)dt + [1 + w_0(t_n)](t_{n+1} - s_n)}{1 - w_0(t_{n+1})} \tag{4.32}$$

$$t_{n+2} = t_{n+1} + \frac{\int_0^1 w\left(\frac{1}{2}(s_n - t_n) + t(t_{n+1} - t_n)\right)(t_{n+1} - t_n)dt}{1 - w_0\left(\frac{t_{n+1} + s_{n+1}}{2}\right)} \tag{4.33}$$

Se sigue de la forma como se definen $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ que si existe $\alpha \in [0, R]$ tal que $s_n \leq t_{n+1} \leq \alpha < w_0^{-1}(1)$ para todo $n \geq 0$; entonces ambas secuencias son monótonas decrecientes, acotadas por α y que ambas convergen a un límite común t^* tal que

$$t_n \leq s_n \leq t_{n+1}\ ,\ n \geq 0 \text{ y } t^* \leq \alpha$$

El siguiente teorema de convergencia local para el método de Newton-Like (4.3) se demuestra justamente usando las secuencias mayorizantes $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$.

Teorema 4.2.4. Bajo las condiciones dadas por (4.4), (4.5) y (4.32) para $\left[F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right] \leq \eta$ y $\left\|F'(z_0)^{-1}F(x_0)\right\| \leq t_1$; la secuencia $\{x_n\}$ con $n \geq 0$ generada por el método de Newton-Like (4.3) está bien definida, todos sus valores se encuentran en $\bar{B}(x_0, t^*)$ para todo $n \geq 0$ y converge a la única solución x^* de la ecuación $F(x)=0$ en $\bar{B}(x_0,t^*)$, aún más las siguientes estimaciones se cumplen para todo $n\geq 0$

$$\begin{aligned} \|y_n-x_n\| &\leq s_n-t_n, \quad \|x_{n+1}-x_n\|\leq t_{n+1}-t_n \\ \|y_n-x^*\| &\leq t^*-s_n, \quad \|x_n-x^*\|\leq t^*-t_n \end{aligned} \tag{4.34}$$

Adicionalmente si existe $R_0\in\langle t^*,R]$, tal que

$$\int_0^1 w\left[tt^*+(1-t)R_0\right]dt<1, \tag{4.35}$$

entonces la solución x^* es única en $B(x_0,R_0)$.

Demostración. Debemos demostrar que

$$\|x_k-y_k\|\leq s_k-t_k\,; \quad \|x_{k+1}-x_k\|\leq t_{k+1}-t_k\,; \tag{4.36}$$

$$\bar{B}(y_k,t^*-s_k)\subseteq\bar{B}(x_k,t^*-s_k) \text{ y } \bar{B}(x_{k+1},t^*-t_{k+1})\subseteq\bar{B}(x_k,t^*-t_k) \tag{4.37}$$

Como para cada $z\in\bar{B}(y_0,t^*-s_0)$ tenemos que

$$\|z-y_0\|\leq\|z-y_0\|+\|y_0-x_0\|\leq t^*-s_0+s_0=t^*=t^*-s_0$$

lo cual implica que $z\in\bar{B}(y_0,t^*-t_0)$.

Similarmente para cada $w\in\bar{B}(x_1,t^*-t_1)$

$$\|w-x_0\|\leq\|w-x_1\|+\|x_1-x_0\|\leq t^*-t_1+t_1=t^*$$

lo cual implica que $w\in\bar{B}(x_0,t^*-t_0)$.

Por las condiciones iniciales para las secuencias tenemos que las condiciones (4.34) y (4.35) son verdaderas para $k=0$; luego asumimos las estimaciones dadas por (4.34), (4.35) y (4.36) dados para $n=\overline{0,k}$, entonces

$$\|y_k-x_0\|\leq\|y_k-x_k\|+\sum_{i=1}^{k}\|x_i-x_{i-1}\|\leq s_k-t_k+t_k-t_0=s_k-t_0\leq t^*$$

$$\|x_{k+1}-x_0\|\leq\sum_{i=1}^{k+1}\|x_i-x_{i-1}\|\leq\sum_{i=1}^{k+1}(t_i-t_{i-1})=t_{k+1}-t_0\leq t^*$$

$$\left\| \frac{y_k + x_k}{2} - x_0 \right\| \le \frac{1}{2}\left[\|y_k - x_0\| + \|x_k - x_0\| \right] \le \frac{1}{2}(s_k + t_k) \le \frac{1}{2}(t^* + t^*) = t^*$$

$$\|x_k + t(x_{k+1} - x_k) - x_0\| \le t_k + t(t_{k+1} - t_k) \le t^* \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Sea $u \in \bar{B}(x_0, t^*)$ entonces usando (4.4) y la hipótesis de inducción obtenemos

$$\left\| F'(x_0)^{-1}\left[F'(u) - F'(x_0) \right] \right\| \le w_0\left(\|u - x_0\| \right) \le w_0(t^*) < 1$$

De (4.37) y el lema de Banach para operadores invertibles tenemos que $F'(u)^{-1}$ existe y se cumple que

$$\left\| F'(u)^{-1} F'(x_0) \right\| \le \left[1 - w_0\left(\|u - x_0\| \right) \right]^{-1} \tag{4.38}$$

Usando (4.3) obtenemos la identidad

$$F(x_{k+1}) = F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)(y_k - x_k)$$

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) = \int_0^1 \left[F'\left(x_k + t(x_{k+1} - x_k) \right) - F'(x_k) \right](x_{k+1} - x_k)dt \\ + \left[F'(x_k) - F'(x_0) \right](x_{k+1} - y_k) + F'(x_0)(x_{k+1} - y_k) \end{aligned}, \tag{4.39}$$

por la composición con $F'(x_0)^{-1}$ y usando (4.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| F'(x_0)^{-1} F(x_{k+1}) \right\| &= \left\| \int_0^1 F'(x_0)^{-1}\left[F'(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - F'(x_k)) \right](x_{k+1} - x_k)dt \right\| \\ &+ \left\| F'(x_0)^{-1}\left[F'(x_k) - F'(x_0) \right](x_{k+1} - y_k) \right\| + \|x_{k+1} - y_k\| \\ &\le \int_0^1 w\|t(x_{k+1} - x_k)\| \|x_{k+1} - x_k\| dt + w_0\left(\|x_k - x_0\| \right)\|x_{k+1} - y_k\| \\ &+ \|x_{k+1} - y_k\| \end{aligned}$$

$$\left\| F'(x_0)^{-1} F'(x_{k+1}) \right\| \le \int_0^1 w(t(t_{k+1} - t_k))(t_{k+1} - t_k)dt + w_0(t_k)(t_{k+1} - s_k) + (t_{k+1} - s_k) \tag{4.40}$$

Similarmente de (4.3) obtenemos la identidad

$$F(x_{k+1}) = F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'\left(\frac{x_k + y_k}{2} \right)(x_{k+1} - x_k) \tag{4.41}$$

$$F(x_{k+1}) = \int_0^1 \left[F'(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)\right](x_{k+1} - x_k)dt$$

Por lo tanto, usando otra vez (4.39) y (4.5), obtenemos que

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{k+1})\right\| \le \int_0^1 w\left[\left\|x_k + t(x_{k+1} - x_k)\right\| - \frac{x_k + y_k}{2}\right]\left\|x_{k+1} - x_k\right\| dt$$

$$\le \int_0^1 w\left[\frac{1}{2}\left\|y_k - x_k\right\| + t\left\|x_{k+1} - x_k\right\|\right]\left\|x_{k+1} - x_k\right\| dt$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{k+1})\right\| \le \int_0^1 w\left[\frac{1}{2}(s_k - t_k) + t(t_{k+1} - t_k)\right](t_{k+1} - t_k)dt$$

Usando (4.3) para $u = x_{k+1}$ y (4.37) para $u = \frac{x_{k+1} + y_{k+1}}{2}$, (4.38) y (4.40), obtenemos

$\left\|y_{k+1} - x_{k+1}\right\| \le \left\|F'(x_{k+1})^{-1}F'(x_0)\right\|\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{k+1})\right\| \le s_{k+1} - t_{k+1}$ y

$\left\|x_{k+2} - x_{k+1}\right\| \le t_{k+2} - t_{k+1}$,

lo cual demuestra (4.34) y (4.35) para todo $n \ge 0$.

Luego para cada $w \in \bar{B}(x_{k+2}, t^* - t_{k+2})$, tenemos

$$\left\|w - x_{k+1}\right\| \le \left\|w - x_{k+2}\right\| + \left\|x_{k+2} - x_{k+1}\right\| \le t^* - t_{k+2} + t_{k+2} - t_{k+1} = t^* - t_{k+1} \qquad (4.42)$$

lo cual implica que $z \in \bar{B}\left(x_{k+1}, t^* - t_{k+1}\right)$.

Similarmente para cada $z \in \bar{B}\left(y_{k+1}, t^* - s_{k+1}\right)$ obtenemos que $z \in \bar{B}\left(y_k, t^* - s_k\right)$, con ello completamos la validez de las estimaciones en (4.34), (4.35) y (4.36).

Por (4.32), (4.33) y las estimaciones en (4.34), (4.35), (4.36), las secuencias $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son secuencias de Cauchy en un espacio de Banach *X*, tales que convergen a un límite común $x^* \in \bar{B}(x_0, t^*)$ puesto que $\bar{B}(x_0, t^*)$ es un conjunto cerrado; luego haciendo que $k \to \infty$ en (4.41), obtenemos que $F(x^*) = 0$.

Para demostrar la unicidad de x^* primero en $\bar{B}(x_0,t^*)$, sea y^* una solución de la ecuación $F(x)=0$ en $\bar{B}(x_0,t^*)$, usando (4.4) y (4.32) obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|F'(x_0)^{-1}\int_0^1\left[F'(y^*+t(x^*-y^*))-F'(x_0)\right]dt\right\| \\ \leq \int_0^1 w_0\left[t\|x^*-x_0\|+(1-t)\|y^*-x_0\|\right]dt \leq w_0(t^*)<1\end{aligned} \tag{4.43}$$

Se sigue de (4.42) y el lema de Banach para operadores invertibles, que el operador lineal *L* dado por $L=\int_0^1 F'(y^*+t(x^*-y^*))dt$ es invertible.

Luego usando la identidad

$$0=F(x^*)-F(y^*)=L(x^*-y^*),$$

tenemos que $L(x^*-y^*)=0$, como *L* es invertible, $x^*-y^*=0$ entonces $x^*=y^*$.

Finalmente, para demostrar la unicidad de x^* en $B(x_0,R_0)$ usando otra vez (4.42), y tomando en cuenta la forma como se define *L*, obtenemos

$$\|F'(x_0)^{-1}(L-F'(x_0))\| \leq \int_0^1 w_0(tt^*+(1-t)R_0)dt<1,$$

luego junto con (4.43) y de manera similar al caso en $\bar{B}(x_0,t^*)$, obtenemos de nuevo que $x^*=y^*$, lo cual completa la demostración del teorema. Θ

4.2.3. Convergencia del método de Newton-Like sin inversas. El siguiente teorema de convergencia semilocal para el método (4.8) fue desarrollado por Argyros en (Argyros 2006); algunos detalles de este teorema se presentan a continuación.

Teorema 4.2.5.- Asumiendo que *F* es p-Hölder continuamente diferenciable sobre el conjunto *D*, es decir

$$\|F'(x)-F'(y)\| \leq a\|x-y\|^p, \text{ para algún } p\in[0,1] \text{ y } x,y\in D \tag{4.44}$$

entonces para cada $x\in D$ existen 2 constantes no negativas b,c y un operador $G(x)\in L(Y,X)$ y una constante $q\geq p$ tal que

$$\|F'(x)G(x)-I\| \le b\|F(x)\|^q \tag{4.45}$$

$$\|G(x)\| \le c \tag{4.46}$$

además, existe $x_0 \in D$ tal que

$$\alpha = d\|F(x_0)\| < 1 \tag{4.47}$$

donde

$$d^p = b\|F(x_0)\|^{q-p} + \frac{ac^{1+p}}{1+p} \tag{4.48}$$

estableciendo la inclusión $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X / \|x - x_0\| \le r\} \subseteq D$, donde

$$r = \left(\frac{c}{d} + \beta\alpha^p\right)\alpha \text{ y } \beta = \frac{c}{d(1-\alpha^{1+p})} \tag{4.49}$$

Entonces la secuencia $\{x_n\}$ para $n \ge 0$ generada por el método de Newton-Like (4.8) está bien definida sobre $\bar{B}(x_0, r)$ para todo $n \ge 0$ y converge a una solución $x^* \in \bar{B}(x_0, r)$ de la ecuación $F(x) = 0$; la solución x^* es única en $\bar{B}(x_0, r_0)$ para $r_0 \ge r$ siempre que

$$\frac{ca}{1+p} r_0^p + \frac{b\alpha^q}{d^q} \le 1 \text{ y } \bar{B}(x_0, r_0) \subseteq D, \tag{4.50}$$

más aún se cumplen las siguientes estimaciones para todo $n \ge 0$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le c\|F(x_n)\| \tag{4.51}$$

$$\|F(x_n)\| \le \frac{\alpha^{(1+p)^n}}{d} \tag{4.52}$$

$$\|x_n - x^*\| \le \beta\alpha^{(1+p)^n}$$

Demostración. Usando inducción matemática, se demuestra que las estimaciones (4.51), (4.52) y $x_n \in B(x_0, r)$ se cumplen para todo $n \ge 0$; se sigue de (4.8), (4.47) y (4.49) que (4.51), (4.52) se cumplen para $n = 0$ y $x_1 \in B(x_0, r)$ puesto que

$$\|x_1 - x_0\| = \|G(x_0)F(x_0)\| \leq \|G(x_0)\|\|F(x_0)\| \leq c\|F(x_0)\| \leq r$$

Asumiendo que las condiciones (4.51), (4.52) se cumplen para $n=\overline{0,k}$ y que $x_n \in B(x_0, r)$ luego de (4.8) obtenemos la aproximación

$$\begin{aligned} F(x_k) = &-\left[F'(x_{k-1})G(x_{k-1}) - I\right]F(x_{k-1}) + F(x_k) \\ &- F(x_{k-1}) - F'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \end{aligned} \tag{4.53}$$

Usando (4.44), (4.45), (4.47), (4.48), (4.53) y la hipótesis de inducción tenemos

$$\|F(x_k)\| \leq b\|F(x_{k-1})\|^{1+q} + \frac{a}{1+p}\|x_k - x_{k-1}\|^{1+p}$$

$$\leq b\|F(x_{k-1})\|^{1+q} + \frac{a}{1+p}c^{1+p}\|F(x_{k-1})\|^{1+p}$$

$$\leq \left[b\|F(x_{k-1})\|^{q-p} + \frac{ac^{1+p}}{1+p}\right]\|F(x_{k-1})\|^{1+p}$$

$$\|F(x_k)\| \leq d^p\|F(x_{k-1})\|^{1+p}$$

del cual se deduce también que

$$d\|F(x_k)\| \leq \left[d\|F(x_{k-1})\|\right]^{(1+p)^1} \leq \left[d\|F(x_{k-2})\|\right]^{(1+p)^2} \leq \ldots \leq \left[d\|F(x_0)\|\right]^{(1+p)^k} \tag{4.54}$$

con esto se cumple (4.52); lo siguiente a demostrar es que $x_{k+1} \in \overline{B}(x_0, r)$, en efecto

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq c\left[\|F(x_k)\| + \|F(x_{k-1})\| + \ldots + \|F(x_0)\|\right]$$

$$\leq \frac{c}{d}\left[\alpha^{(1+p)^k} + \ldots + \alpha^{(1+p)^1}\right] + c\|F(x_0)\|$$

$$\leq \frac{c}{d}\left[\alpha^{(1+p)k} + \ldots + \alpha^{(1+p)}\right] + c\|F(x_0)\|$$

$$\leq \frac{c}{d}\left[\frac{1-\alpha^{(1+p)(k+1)}}{1-\alpha^{(1+p)}} - 1\right] + c\|F(x_0)\|$$

$$\leq \frac{c\alpha^{(1+p)}}{d(1-\alpha^{(1+p)})} + c\|F(x_0)\|$$

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \beta\alpha^{(1+p)} + c\|F(x_0)\| = r \tag{4.55}$$

lo cual implica que $x_{k+1} \in \overline{B}(x_0, r)$, entonces de (4.8) y (4.46) tenemos que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq c\|F(x_k)\| \tag{4.56}$$

lo cual demuestra (4.51).

Para demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ converge a una solución $x^* \in \overline{B}(x_0, r)$ de la ecuación $F(x) = 0$ consideremos lo siguiente, sea $m \geq 0$, entonces usando las desigualdades (4.55) y (4.56)

$$\|x_{k+m} - x_k\| \leq \|x_{k+m} - x_{k+m-1}\| + \|x_{k+m-1} - x_{k+m-2}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\|$$

$$\leq c\left[\|F(x_{k+m-1})\| + \|F(x_{k+m-2})\| + \ldots + \|F(x_k)\|\right]$$

$$\leq \frac{c}{d}\left[\alpha^{(1+p)^{k+m-1}} + \ldots + \alpha^{(1+p)^k}\right]$$

$$\leq \frac{c}{d}\left[\alpha^{(1+p)(m-1)} + \ldots + 1\right]\alpha^{(1+p)k}$$

$$\|x_{k+m} - x_k\| \leq \frac{c}{d}\left[\frac{1-\alpha^{m(1+p)}}{1-\alpha^{(1+p)}}\right]\alpha^{(1+p)^k}$$

cuando $m \to \infty$ tenemos

$$\|x_{k+m} - x_k\| \leq \beta\alpha^{(1+p)^k} \tag{4.57}$$

Se sigue de (4.57) que la secuencia $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio de Banach *X*, entonces converge a algún $x^* \in \overline{B}(x_0, r)$ puesto que $\overline{B}(x_0, r)$ es un conjunto cerrado, haciendo que $k \to \infty$ en (4.54) obtenemos $F(x^*) = 0$.

Finalmente, para demostrar la unicidad de x^*, sea $y^* \in \overline{B}(x_0, r_0)$ una solución de la ecuación $F(x) = 0$; usando (4.8) obtenemos la aproximación

$$x_{k+1} - y^* = -G(x_k)\left[F(x_k) - F(y^*) - F'(x_k)(x_k - y^*)\right] \\ -\left[G(x_k)F'(x_k) - I\right](x_k - y^*) \tag{4.58}$$

Luego usando (4.44), (4.45), (4.46) y (4.50) tenemos

$$\|x_{k+1} - y^*\| \leq \frac{ca}{1+p}\|x_k - y^*\|^{1+p} + b\|F(x_k)\|^q \|x_k - y^*\|$$

$$\leq \left[\frac{ca}{1+p}\|x_k - y^*\|^p + b\|F(x_k)\|^q\right]\|x_k - y^*\|$$

$$< \left[\frac{ca}{1+p}\|x_0 - y^*\|^p + b\|F(x_0)\|^q\right]\|x_k - y^*\|$$

$$\|x_{k+1} - y^*\| \leq \left[\frac{ca}{1+p}r_0^p + b\|F(x_0)\|^q\right]\|x_k - y^*\|$$

es decir, para todo k tenemos

$$\|x_{k+1} - y^*\| < \|x_k - y^*\| \tag{4.59}$$

con lo cual obtenemos $\lim_{k\to\infty} x_k = y^*$ pero como sabemos que $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, se deduce entonces que $x^* = y^*$, lo cual completa la demostración del teorema. Θ

Observación 4.2.6. Si $p = q = 1$ entonces $a = 2M$, $b = M$ y $c = M$.

En el siguiente teorema se muestra la convergencia local para el método (4.8).

Teorema 4.2.7. Bajo la hipótesis (4.44), (4.45), (4.46) y (4.47) asumimos además que existe una solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$ y que $\bar{B}(x^*, r) \subseteq D$ donde r está dado como en (4.49) y satisface en (4.50) como igualdad; entonces la secuencia $\{x_n\}$ para $n \geq 0$, generada por el método de Newton-Like (4.8) está bien definida, todos sus valores pertenecen a $\bar{B}(x^*, r)$ para todo $n \geq 0$ y converge a x^*.

Demostración. Usando (4.58) y reemplazando y^* por x^* en (4.59) obtenemos

$$\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\| \leq r$$

esto implica que $x_k \in \bar{B}(x^*, r)$ para todo k y $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, lo cual completa la demostración del teorema. Θ

4.2.4. Convergencia del método de Newton-Tikhonov. Los resultados previos usados para establecer la convergencia del método de Newton-Tikhonov presentados en los teoremas 4.2.12, 4.2.14 y 4.2.15 tal como ya se ha mencionado han sido de desarrollados por Monnanda y Santhosh en (Monnanda y Santhosh, 2003); algunos detalles de estos resultados se presentan a continuación.

Proposición 4.2.8. Existe $k_0 \geq 0$ tal que para $x, u \in \left(B(x_0, r) \bigcup B(\hat{x}, r)\right) \subseteq D(F)$ y $v \in X$, existe un $\phi(x,u,v) \in X$ tal que

$$\left[F'(x) - F'(u)\right]v = F'(u)\phi(x,u,v)\,, \; \|\phi(x,u,v)\| \leq k_0 \|v\| \|x-u\|\,.$$

Usando la proposición 4.2.8 podemos probar que $F'(P_h x_0)^{-1}$ existe y es acotado, para ello sin pérdida de generalidad asumimos que

$$\left\|F'(P_h x_0)^{-1}\right\| \leq \beta\,, \text{ para algún } \beta > 0 \tag{4.60}$$

Lema 4.2.9. Sea $b_0 < \dfrac{1}{k_0}$ y consideremos la desigualdad (4.60), entonces se cumple que $\left\|P_h F'(P_h x_0)^{-1} P_h F'(P_h x_0)\right\| \leq 1 + \beta\tau_0$; sea también

$$e_{n,\alpha_k}^{h,\delta} := \left\|y_{n,\alpha_k}^{h,\delta} - x_{n,\alpha_k}^{h,\delta}\right\|, \; \forall n \geq 0 \tag{4.61}$$

Por conveniencia asumamos que $k_0 < \dfrac{1}{4\beta(1+\beta\tau_0)}$ y

$$\delta_0 + \varepsilon_0 < \frac{1}{4\beta k_0(1+\beta\tau_0)(M+1+C_{M_\rho})}\sqrt{\alpha_0}\,, \text{ donde } C_{M_\rho} = \frac{1}{2}\max\left\{M_\rho, 1\right\}.$$

Sea $\|\hat{x} - x_0\| \leq \rho$ con $\rho < \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{1}{4\beta k_0(1+\beta\tau_0)} - (M+1+C_{M_\rho})\dfrac{\delta_0+\varepsilon_0}{\sqrt{\alpha_0}}\right]$,

$$\gamma_\rho := \beta\left[M\rho + (M+1+C_{M_\rho})\frac{\varepsilon_0+\delta_0}{\sqrt{\alpha_0}}\right] \le \frac{1}{4k_0(1+\beta\tau_0)} \tag{4.62}$$

y sea también

$$q := (1+\beta\tau_0)k_0 r\,,\ r \in \langle r_1, r_2\rangle \tag{4.63}$$

con $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4k_0(1+\beta\tau_0)\gamma_\rho}}{2k_0(1+\beta\tau_0)}$ y $r_2 = \min\left\{\dfrac{1}{k_0(1+\beta\tau_0)}, \dfrac{1+\sqrt{1-4k_0(1+\beta\tau_0)\gamma_\rho}}{2k_0(1+\beta\tau_0)}\right\}$,

notamos por (4.62) que r está bien definido y $q<1$.

Lema 4.2.10. Sea $z^{h,\delta}_{\alpha_k}$ definido como en (4.14) con $\alpha=\alpha_k$ y $e^{h,\delta}_{0,\alpha_k}$ definido como en (4.61), supongamos que (4.60) está dado y $b_h \le \dfrac{\delta+\varepsilon_h}{\sqrt{\alpha_k}}$; entonces para los $e^{h,\delta}_{0,\alpha_k}$ se cumple que $e^{h,\delta}_{0,\alpha_k} \le \gamma_\rho$.

Lema 4.2.11. Sean $e^{h,\delta}_{n,\alpha_k}$ definido en (4.61), q en (4.63), sean también las secuencias $\{y^{h,\delta}_{n,\alpha_k}\}$, $\{x^{h,\delta}_{n,\alpha_k}\}$, como en (4.12), (4.13) respectivamente con $\alpha=\alpha_k$, $\delta\in\langle 0,\delta_0]$ y $\varepsilon_h \in \langle 0, \varepsilon_0]$; entonces bajo las suposiciones del teorema 4.1.3 y el lema 4.2.9; se cumple lo siguiente para todo $n\ge 0$.

a) $\left\|x^{h,\delta}_{n,\alpha_k} - x^{h,\delta}_{n-1,\alpha_k}\right\| \le (1+q)\left\|y^{h,\delta}_{n-1,\alpha_k} - x^{h,\delta}_{n-1,\alpha_k}\right\|$ b) $\left\|y^{h,\delta}_{n,\alpha_k} - x^{h,\delta}_{n,\alpha_k}\right\| \le q^2\left\|y^{h,\delta}_{n-1,\alpha_k} - x^{h,\delta}_{n-1,\alpha_k}\right\|$

c) $e^{h,\delta}_{n,\alpha_k} \le q^{2n}\gamma_\rho$ d) $x^{h,\delta}_{n,\alpha_k}, y^{h,\delta}_{n,\alpha_k} \in B(P_h x_0, r)$, $\forall n\ge 0$

Teorema 4.2.12. Sean $y^{h,\delta}_{n,\alpha_k}$, $x^{h,\delta}_{n,\alpha_k}$, definidos en (4.12), (4.13) respectivamente, con $\alpha=\alpha_k$; si el lema 4.2.11 se cumple entonces $\{x^{h,\delta}_{n,\alpha_k}\}$ es una secuencia de Cauchy en $B(P_h x_0, r)$ y converge a $x^{h,\delta}_{\alpha_k} \in \bar{B}(P_h x_0, r)$; adicionalmente se cumple que

$$P_h F\left(x^{h,\delta}_{\alpha_k}\right) = z^{h,\delta}_{\alpha_k} \text{ y } \left\|x^{h,\delta}_{n,\alpha_k} - x^{h,\delta}_{\alpha_k}\right\| \le C_0 q^{2n}$$

donde $C_0 = \dfrac{\gamma_\rho}{1-q}$.

Observación 4.2.13. Observamos que $0<q<1$, con lo cual la secuencia $\left\{x_{n,\alpha_k}^{h,\delta}\right\}$ converge linealmente a $x_{\alpha_k}^{h,\delta}$.

Teorema 4.2.14. Sea $b_h+\rho<r$ y por la proposición 4.1.1, tenemos que

$$\left\|\hat{x}-x_{\alpha_k}^{h,\delta}\right\|\leq\frac{\beta}{(1-q)}\left\|F(\hat{x})-z_{\alpha_k}^{h,\delta}\right\|.$$

El siguiente teorema es consecuencia del teorema 4.2.12 y del teorema 4.2.14.

Teorema 4.2.15. Sea $x_{n,\alpha_k}^{h,\delta}$ definido en (4.13), haciendo las suposiciones en el teorema 4.2.12 y el teorema 4.2.14, tenemos que

$$\left\|\hat{x}-x_{n,\alpha_k}^{h,\delta}\right\|\leq C_0q^{2n}+\frac{\beta}{(1-q)}\left\|F(\hat{x})-z_{\alpha_k}^{h,\delta}\right\|$$

donde C_0 está dado como en el enunciado del teorema 4.2.12.

4.3. Aplicación de los métodos

4.3.1. Aplicación 1. Sea la ecuación $x(t)+\int_0^1 k(s,t)f(s,x(s))ds=0$, donde $x\in C[0,1]$, $k\in C([0,1]\times[0,1])$ y $f\in C^2([0,1]\times\mathbb{R})$; verificar si se puede aplicar el método de Newton-Kantorovich y hallar la secuencia de Newton que aproxima la solución de la ecuación.

<u>Solución</u>

Definimos $F:C[0,1]\to C[0,1]$ tal que:

$$[F(x)](t)=x(t)+\int_0^1 k(s,t)f(s,x(s))ds \tag{4.64}$$

Si $x_0\in C[0,1]$ es una aproximación inicial de la solución, hallaremos primero la diferencial de F en x_0.

Sean los operadores *H*, *K* y *G* tales que

$$\underbrace{C[0,1]\xrightarrow{K}C[0,1]\xrightarrow{H}C[0,1]}_{G}$$

donde $[G(x)](t)=\int_0^1 k(s,t)f(s,x(s))ds$, $[H(z)](t)=\int_0^1 k(s,t)z(s)ds$ y

$$[K(x)](s)=f(s,x(s)),$$

para $z(s)=[K(x)](s)$ tenemos

$$[H(K(x))](t)=\int_0^1 k(s,t)\{[K(x)](s)\}ds=\int_0^1 k(s,t)f(s,x(s))ds=[G(x)](t),$$

entonces en (4.64) tenemos $[F(x)](t)=[I+G](x(t))$, dado que I es un operador lineal acotado entonces por la observación 2.2.24 ítem b

$$[I'(x_0)(h)](t)=[I(h)](t), \tag{4.65}$$

luego por el teorema 2.2.23 para $G(x)$ tenemos

$$G'(x)=H'(K(x))(K'(x)), \tag{4.66}$$

observamos que H es lineal dado que para $z_1,z_2\in C[0,1]$ y $\lambda\in\mathbf{K}$ tenemos

$$[H(z_1+\lambda z_2)](t)=\int_0^1 k(s,t)(z_1+\lambda z_2)(s)ds=\int_0^1 k(s,t)(z_1(s)+\lambda z_2(s))ds$$

$$=\int_0^1 k(s,t)z_1(s)ds+\lambda\int_0^1 k(s,t)z_2(s)ds$$

$$[H(z_1+\lambda z_2)](t)=[H(z_1)](t)+\lambda[H(z_2)](t),$$

Verificamos ahora si H es continuo

$$|[H(z)](t)|=\left|\int_0^1 k(s,t)z(s)ds\right|$$

$$\leq\int_0^1 |k(s,t)||z(s)|ds,\ z\in C[0,1]$$

$$|[H(z)](t)|\ \leq\ \|z\|\int_0^1 |k(s,t)|ds,$$

como $[0,1]$ es compacto y el producto cartesiano de espacios métricos compactos sigue siendo un espacio métrico compacto entonces $[0,1]\times[0,1]$ es compacto, además como $k:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ es una función continua entonces para un

$(s_0,t_0)\in([0,1]\times[0,1])$ existe $M=|k(s_0,t_0)|$ tal que $|k(s,t)|\leq M$ para todo $(s,t)\in([0,1]\times[0,1])$, entonces tenemos

$|[H(z)](t)|\leq\|z\|\int_0^1 M\,dt=M\|z\|$

$|[H(z)](t)|\leq M\|z\|$ para todo $t\in[0,1]$,

tomando supremo cuando $t\in[0,1]$ tenemos $\|H(z)\|\leq M\|z\|$, con lo cual H también es continuo, entonces por la observación 2.2.24 ítem b tenemos $H'(z_0)=H$, en (4.66) para $x_0,h\in C[0,1]$ tenemos

$$G'(x_0)(h)=H'(K(x_0))(K'(x_0)(h))=H(K'(x_0)(h)),$$

luego $G'(x_0)(h)=\int_0^1 k(s,.)\{[k'(x_0)(h)](s)\}\,ds$, con lo cual

$$[G'(x_0)(h)](t)=\int_0^1 k(s,t)\{[k'(x_0)(h)](s)\}\,ds, \tag{4.67}$$

Hallando $[K'(x_0)(h)](s)$ tenemos

$$|[K(x_0+h)](s)-[K(x_0)](s)-[K'(x_0)(h)](s)|$$

$$=|f(s,x_0(s)+h(s))-f(s,x_0(s))-[K'(x_0)(h)](s)|,$$

del cálculo diferencial sabemos que

$$f(s,x_0(s)+h(s))-f(s,x_0(s))\cong h(s)f_2^{'}(s,x_0(s)),$$

donde $f_2^{'}$ es su derivada parcial con respecto a la segunda variable, si tomamos

$$[K'(x_0)(h)](s)=f_2^{'}(s,x_0(s))h(s)$$

entonces tenemos

$$|[K(x_0+h)](s)-[K(x_0)](s)-[K'(x_0)(h)](s)|\cong 0,$$

luego $\frac{\left|[K(x_0+h)](s)-[K(x_0)](s)-[K'(x_0)(h)](s)\right|}{|h(s)|}\cong 0$, tomando supremo cuando $s\in[0,1]$ y tomando límite cuando $\|h\|\to 0$ tenemos

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|K(x_0+h)-K(x_0)-K'(x_0)(h)\|}{\|h\|}=0$$

entonces $[K'(x_0)(h)](s)=f_2^{'}(s,x_0(s))h(s)$ reemplazando en (4.67)

$$[G'(x_0)(h)](t)=\int_0^1 k(s,t)\,f_2^{'}(s,x_0(s))h(s)ds\,, \qquad (4.68)$$

luego de (4.65) y (4.68) para cualquier $y\in C[0,1]$ tenemos

$$[F'(x_0)(y)](t)=[I+G'(x_0)](y(t)) \qquad (4.69)$$

Supongamos entonces que $I+G'(x_0)$ es invertible y $\left\|\left[I+G'(x_0)\right]^{-1}\right\|\le b$, luego

$$\|F'(x)-F'(x_0)\|=\|I+G'(x)-I-G'(x_0)\|$$

$$\|F'(x)-F'(x_0)\|=\|G'(x)-G'(x_0)\|\,, \qquad (4.70)$$

como tenemos que

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right|=\left|\int_0^1 k(s,t)\,f_2^{'}(s,x(s))h(s)ds\right.$$

$$\left.-\int_0^1 k(s,t)\,f_2^{'}(s,x_0(s))h(s)ds\right|$$

$$=\left|\int_0^1 k(s,t)h(s)\left[\,f_2^{'}(s,x(s))-f_2^{'}(s,x_0(s))\right]ds\right|$$

$$\le\int_0^1 |k(s,t)||h(s)|\left|\,f_2^{'}(s,x(s))-f_2^{'}(s,x_0(s))\right|ds$$

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right|\le\|h\|\int_0^1 |k(s,t)|\left|\,f_2^{'}(s,x(s))-f_2^{'}(s,x_0(s))\right|ds\,, \quad (4.71)$$

del cálculo diferencial sabemos que

$$f'(s,x(s))-f'(s,x_0(s))\cong(x(s)-x_0(s))\,f_2^{''}(s,x_0(s))\,,$$

donde $f_2^{"}$ es su derivada parcial de segundo orden con respecto a la segunda variable, tenemos entonces para $x(s)$

$$f'(s,x_0(s)) - f'(s,x(s)) \cong (x_0(s)-x(s))\, f_2^{"}(s,x(s))\,,$$

luego podemos tomar

$$f'(s,x(s)) - f'(s,x_0(s)) = (x(s)-x_0(s))\, f_2^{"}(s,x(s))\,,$$

reemplazando en (4.71) tenemos

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right| \le \|h\| \int_0^1 |k(s,t)| \left|(x(s)-x_0(s))\, f_2^{"}(s,x(s))\right| ds$$

$$\le \|h\| \int_0^1 |x(s)-x_0(s)| |k(s,t)| \left| f_2^{"}(s,x(s))\right| ds$$

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right| \le \|h\| \|x-x_0\| \int_0^1 |k(s,t)| \left| f_2^{"}(s,x(s))\right| ds\,,$$

para un $\delta > 0$ sea

$$K_\delta = \sup\left\{ \left|k(s,t)\, f_2^{"}(s,u)\right| / (s,t) \in ([0,1]\times[0,1]), |u-x_0(s)| \le \delta \right\}$$

si $u = x(s)$ tenemos

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right| \le \|h\| \|x-x_0\| \int_0^1 K_\delta ds$$

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right| \le \|h\| \|x-x_0\| K_\delta\,,$$

tomando supremo cuando $t \in [0,1]$ y $\|h\| = 1$

$$\|G'(x)-G'(x_0)\| \le K_\delta \|x-x_0\|\,, \qquad (4.72)$$

de (4.70) y (4.72) tenemos que

$$\|F'(x)-F'(x_0)\| \le K_\delta \|x-x_0\|$$

entonces de la desigualdad anterior K_δ sirve como la constante de Lipschitz en el conjunto $S_\delta = \left\{ x \in C[0,1] / \|x-x_0\| \le \delta \right\}$; si $\|F(x_0)\| \le p$ entonces

$$\left\| [F'(x_0)]^{-1} (F(x_0)) \right\| = \left\| [I+G'(x_0)]^{-1} (F(x_0)) \right\| \le \left\| [I+G'(x_0)]^{-1} \right\| \|F(x_0)\| \le bp = \eta$$

luego si $h_1 = bK_\delta bp = b^2 K_\delta p \le \dfrac{1}{2}$ y $\delta \ge \left(bK_\delta\right)^{-1}$ tenemos que $t^* \le \delta$ puesto que

$$t^* = \eta \frac{(1-\sqrt{1-2K_\delta b^2 p})}{K_\delta b^2 p} \le \frac{\eta}{K_\delta b^2 p} = \frac{bp}{K_\delta b^2 p} = \frac{1}{K_\delta b} = \left(bK_\delta\right)^{-1} \le \delta$$

entonces el conjunto $S = \left\{x \in C[0,1] / \|x - x_0\| \le t^*\right\} \subset S_\delta$; por lo tanto, con estas suposiciones el teorema 4.2.3 nos garantiza que podemos aplicar el método de Newton-Kantorovich.

Sea $x_{n+1} = x_n + y_n$ donde $y_n = -\left[F'(x_n)\right]^{-1}(F(x_n))$ entonces $F'(x_n)(y_n) = -F(x_n)$ de (4.64), (4.68) y (4.69) tenemos

$$y_n(t) + \int_0^1 k(s,t) f_2'(s, x_n(s)) y_n(s) ds = -x_n(t) - \int_0^1 k(s,t) f(s, x_n(s)) ds ,$$

los y_n se obtienen de las soluciones de esta ecuación integral lineal.

4.3.2. Aplicación 2. Si en la aplicación anterior tomamos:

$$x_0(t) = \frac{t}{32}, \; k(s,t) = \begin{cases} s(1-t) \;, & 0 \le s \le t \\ t(1-s) \;, & \text{t} \le s \le 1 \end{cases} \text{ y } \; f(s, x(s)) = (x(s)-s)^2 ,$$

verificar si se puede aplicar el método de Newton-Kantorovich.

<u>Solución</u>

Hallando $f_2'(s, x_0(s))$ obtenemos $f_2'(s, x_0(s))h(s) = 2(x_0(s) - s)h(s)$, es decir $f_2'(s, x_0(s)) = 2(x_0(s) - s)$, si reemplazamos en (4.71)

$$\left|[G'(x)(h)](t) - [G'(x_0)(h)](t)\right| \le \|h\| \int_0^1 |k(s,t)| \left|2(x(s)-s) - 2(x_0(s)-s)\right| ds$$

$$\le 2\|h\| \int_0^1 |k(s,t)| \left|x(s) - x_0(s)\right| ds$$

$$\left|[G'(x)(h)](t) - [G'(x_0)(h)](t)\right| \le 2\|h\| \|x - x_0\| \int_0^1 |k(s,t)| ds ,$$

reemplazando $k(s,t)$, para $s,t \in [0,1]$

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right| \le 2\|h\|\|x-x_0\|\left|\int_0^t s(1-t)ds+\int_t^1 t(1-s)ds\right|$$

$$\le 2\|h\|\|x-x_0\|\int_0^t |s(1-t)|\,ds+\int_t^1 |t(1-s)|\,ds\ ,$$

$$\le 2\|h\|\|x-x_0\|\left\{(1-t)\int_0^t sds+t\int_t^1 (1-s)ds\right\}$$

$$\le 2\|h\|\|x-x_0\|\left\{(1-t)\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^t+t\left.\left(s-\frac{s^2}{2}\right)\right|_t^1\right\}$$

$$\le 2\|h\|\|x-x_0\|\left\{\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{2}+\frac{t}{2}-t^2+\frac{t^3}{2}\right\}$$

$$\left|[G'(x)(h)](t)-[G'(x_0)(h)](t)\right| \le 2\|h\|\|x-x_0\|\left\{\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\right\},$$

tomando supremo cuando $t\in[0,1]$

$$\|G'(x)(h)-G'(x_0)(h)\| \le 2\|h\|\|x-x_0\|\sup_{0\le t\le 1}\left\{\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\right\}$$

como $\sup_{0\le t\le 1}\left\{\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\right\}=\frac{1}{8}$

$$\|G'(x)(h)-G'(x_0)(h)\| \le 2\|h\|\|x-x_0\|\left(\frac{1}{8}\right),$$

tomando supremo cuando $\|h\|=1$ tenemos que

$$\|G'(x)-G'(x_0)\| \le \frac{1}{4}\|x-x_0\|$$

como $\|F'(x)-F'(x_0)\|=\|G'(x)-G'(x_0)\|$ entonces $K_\delta=0.25$.

Si reemplazamos $x_0(t)$ en $f_2'(s,x_0(s))$ obtenemos

$$f_2'(s,x_0(s))=2\left(\frac{s}{32}-s\right)=-\frac{31s}{16}\ ,$$

entonces en (4.68)

$$\left[G'(x_0)(h)\right](t)=\int_0^t s(1-t)\left\{-\frac{31s}{16}\right\}h(s)ds+\int_t^1 t(1-s)\left\{-\frac{31s}{16}\right\}h(s)ds\,,$$

luego tenemos que

$$\left|\left[G'(x_0)(h)\right](t)\right|=\left|(t-1)\int_0^t s\left\{\frac{31s}{16}\right\}h(s)ds+t\int_t^1(s-1)\left\{\frac{31s}{16}\right\}h(s)ds\right|$$

$$\leq\left|\frac{31(t-1)}{16}\int_0^t s^2h(s)ds+\frac{31t}{16}\int_t^1 s(s-1)h(s)ds\right|$$

$$\leq\left|\frac{31(t-1)}{16}\right|\left|\int_0^t s^2h(s)ds\right|+\left|\frac{31t}{16}\right|\left|\int_t^1 s(s-1)h(s)ds\right|,\ t\in[0,1]$$

$$\leq\frac{31}{16}\left\{(1-t)\int_0^t\left|s^2\right|\left|h(s)\right|ds+t\int_t^1\left|s(s-1)\right|\left|h(s)\right|ds\right\},\ s\in[0,1]$$

$$\leq\frac{31}{16}\left\{(1-t)\int_0^t s^2ds+t\int_t^1 s(1-s)ds\right\}\|h\|$$

$$\leq\frac{31}{16}\left\{(1-t)\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^t+t\left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right]\Bigg|_t^1\right\}\|h\|$$

$$\leq\frac{31}{16}\left\{\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{3}+\frac{t}{6}-\frac{t^3}{2}+\frac{t^4}{3}\right\}\|h\|$$

$$\left|\left[G'(x_0)(h)\right](t)\right|\leq\frac{31}{16}\left\{\frac{t}{6}-\frac{t^3}{6}\right\}\|h\|\,,$$

tomando supremo cuando $t\in[0,1]$ obtenemos $\|G'(x_0)(h)\|\leq\frac{31}{96}\sup_{0\leq t\leq 1}\left\{t-t^3\right\}\|h\|$, es decir $\|G'(x_0)(h)\|\leq 0.1243\|h\|$; tomando supremo cuando $\|h\|=1$, $\|G'(x_0)\|<1$, luego como $\|-G'(x_0)\|=\|G'(x_0)\|$ tenemos que $\|-G'(x_0)\|<1$ entonces $\left\|\left[F(x_0)\right]^{-1}\right\|=\left\|\left[I+G'(x_0)\right]^{-1}\right\|=\left\|\left[I-(-G'(x_0))\right]^{-1}\right\|$, como $-G'(x_0)\in L(X)$ y $\|-G'(x_0)\|<1$ por el teorema 2.2.16

$$\left\|\left[F(x_0)\right]^{-1}\right\|=\left\|[I+G'(x_0)]^{-1}\right\|\leq\frac{1}{1-0.1243}=1.1419=b\,.$$

Reemplazando $x_0(t)$, $k(s,t)$ y $f(s,x(s))$ en (4.64) obtenemos

$$[F(x_0)](t) = \frac{t}{32} + \int_0^t s(1-t)\left(\frac{s}{32}-s\right)^2 ds + \int_t^1 t(1-s)\left(\frac{s}{32}-s\right)^2 ds\,,$$

Luego tenemos que

$$\left|[F(x_0)](t)\right| = \left|\frac{t}{32} + (1-t)\int_0^t s\frac{31^2}{32^2}s^2 ds + t\int_t^1 (1-s)\frac{31^2}{32^2}s^2 ds\right|$$

$$\leq \left|\frac{t}{32}\right| + \left|(1-t)\frac{31^2}{32^2}\int_0^t s^3 ds\right| + \left|\frac{31^2}{32^2}t\int_t^1 (s-s^3)ds\right|,\ t\in[0,1]$$

$$\leq \frac{t}{32} + \frac{31^2}{32^2}\left\{(1-t)\int_0^t \left|s^3\right| ds + t\int_t^1 \left|s^2-s^3\right| ds\right\},\ s\in[0,1]$$

$$\leq \frac{t}{32} + \frac{31^2}{32^2}\left\{(1-t)\int_0^t s^3 ds + t\int_t^1 (s^2-s^3)ds\right\}$$

$$\leq \frac{t}{32} + \frac{31^2}{32^2}\left\{(1-t)\left.\frac{s^4}{4}\right|_0^t + t\left.\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{4}\right)\right|_t^1\right\}$$

$$\leq \frac{t}{32} + \frac{31^2}{32^2}\left\{\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{4} + \frac{t}{12} - \frac{t^4}{3} + \frac{t^5}{4}\right\}$$

$$\left|[F(x_0)](t)\right| \leq \frac{t}{32} + \frac{31^2}{32^2}\left\{\frac{t}{12} - \frac{t^4}{12}\right\},$$

tomando supremo cuando $t\in[0,1]$

$$\left\|F(x_0)\right\| \leq \frac{1}{32}\sup_{0\leq t\leq 1}\left\{t + \frac{31^2}{32\times 12}(t-t^4)\right\}$$

$$\left\|F(x_0)\right\| \leq 0.0578 = p$$

Luego los valores hallados son $K_\delta = 0.25$, $b = 1.1419$ y $p = 0.0578$, entonces $h_1 = b^2 K_\delta p = 0.0165 \leq 1/2$; por lo tanto, el teorema 4.2.3 nos garantiza que podemos utilizar el método de Newton-Kantorovich con los datos indicados.

4.3.3. Aplicación 3. Consideremos el operador

$KF : L^2\langle 0,1\rangle \to L^2\langle 0,1\rangle$ con $K : L^2\langle 0,1\rangle \to L^2\langle 0,1\rangle$ definido por

$$K(x)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)dt\,,$$

donde $k(t,s) = \begin{cases} (1-t)s, & 0 \le s \le t \le 1 \\ (1-s)t, & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$

y $F : D(F) \subseteq L^2\langle 0,1\rangle \to L^2\langle 0,1\rangle$ definido por $F(u) := u^3$

Aplicar el algoritmo del método presentado en el sub capítulo 4.1.4 y analizar su convergencia utilizando lo desarrollado en el sub capítulo 4.2.4.

Solución

Aplicamos el algoritmo escogiendo una secuencia de un subespacio finito dimensional V_n de X con $\dim V_n = n+1$ y $P_h = P_{\frac{1}{n}}$ que denota la proyección ortogonal sobre X con rango $R(P_h) = V_n$; asumiendo que $\|P_h x - x\| \to 0$ cuando $h \to 0$ para todo $x \in X$, precisamente escogemos V_n como el espacio de los splines lineales $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ en una malla uniforme de $n+1$ en $[0,1]$ como base de V_n.

La derivada de Fréchet del operador F está dada por $F'(u)w = 3u^2 w$, para nuestros cálculos tomamos

$$y(t) = \frac{837t}{6160} - \frac{t^2}{16} - \frac{t^{11}}{110} - \frac{3t^5}{80} - \frac{3t^8}{112} \quad \text{e} \quad y^\delta = y + \delta$$

luego la solución exacta es $\hat{x}(t) = 0.5 + t^3$.

Usando $x_0(t) = 0.5 + t^3 - \frac{3}{56}(t - t^8)$ para nuestros cálculos iniciales y escogiendo $\alpha_0 = (1.3)^2(\delta + \varepsilon_h)^2$, $\mu = 1.3$, $\delta = 0.1$, entonces la constante de Lipschitz k_0 es aproximadamente igual a 0.2134, además tenemos que $r = 1$, $\tau_0 = \frac{1}{64}$, luego

$$q = (1 + \beta\tau_0)k_0 r = 0.2133\,.$$

A continuación, mostramos algunas iteraciones y sus correspondientes errores $\|x_k - \hat{x}\|$, en todos los casos consideramos que $k = 4$

Para $n = 8$, $\alpha_k = 0.1820$, $\|x_k - \hat{x}\| = 0.5484$, $\dfrac{\|x_k - \hat{x}\|}{\sqrt{\delta + \varepsilon_h}} = 1.7273$

Para $n = 32$, $\alpha_k = 0.1061$, $\|x_k - \hat{x}\| = 0.5301$, $\dfrac{\|x_k - \hat{x}\|}{\sqrt{\delta + \varepsilon_h}} = 1.6759$

Para $n = 128$, $\alpha_k = 0.1061$, $\|x_k - \hat{x}\| = 0.5234$, $\dfrac{\|x_k - \hat{x}\|}{\sqrt{\delta + \varepsilon_h}} = 1.6551$

Para $n = 1024$, $\alpha_k = 0.1060$, $\|x_k - \hat{x}\| = 0.5213$, $\dfrac{\|x_k - \hat{x}\|}{\sqrt{\delta + \varepsilon_h}} = 1.6484$

Observamos de los valores $\dfrac{\|x_k - \hat{x}\|}{\sqrt{\delta + \varepsilon_h}}$ que el error es de orden $(\delta + \varepsilon_h)^{1/2}$.

Conclusiones

- Es posible buscar y encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones no lineales en espacios de Banach mediante las variantes de los métodos de Newton, con lo cual se puede responder de manera afirmativa a la hipótesis planteada, es decir, sí es posible hallar soluciones de ecuaciones no lineales en espacios de Banach mediante algunas variantes del método de Newton.
- Mediante el estudio detallado de conceptos básicos de Análisis Funcional se puede tener la base teórica fundamental para desarrollar y entender las ecuaciones no lineales en espacios de Banach.
- Desarrollando los conceptos teóricos específicos sobre los métodos se logró la comprensión de la teoría en la cual se basan los métodos de solución estudiados en la presente tesis, los cuales se basan en la idea inicial de Newton para el cálculo de raíces aproximadas, este algoritmo es generalizado en los métodos aquí presentados, con ligeras variaciones en sus respectivos algoritmos en partes críticas de su fórmula general o en casos especiales de determinados espacios.
- Los algoritmos en cada método están basados en teoremas los que en su demostración en algunos casos muestran de forma general el funcionamiento mismo del método, estos teoremas a su vez también presentan las cotas de errores para cada método.
- Haciendo el estudio de los algoritmos y las cotas de los errores de los métodos desarrollados en la presente tesis, se logra identificar que en forma general el método de Newton-Kantorovich es el más simple y más estudiado por la forma general de su algoritmo, más esto no implica que siempre sea posible aplicarlo, puesto que en algunos casos especiales no será posible hacerlo, en esos casos se puede recurrir a los otros métodos desarrollados en esta tesis.

Recomendaciones

1.- De acuerdo a lo desarrollado en la presente tesis se recomienda que en investigaciones similares se desarrollen una mayor cantidad de ejemplos de comparación de la aplicación de los métodos presentados, para tener una mejor idea de la eficiencia de los métodos.

2.- Para verificar las aproximaciones obtenidas en cada método presentado, con mayor claridad y de manera mucho más rápida, se recomienda elaborar un programa informático que sea capaz de resolver numéricamente algunos problemas y que sea capaz de mostrar la diferencia de las aproximaciones.

3.- Es recomendable que a nivel local y regional también se difundan los resultados de investigaciones en ciencias puras puesto que a estos niveles solamente hay difusión de investigaciones en ciencias aplicadas, esto con el fin que profesionales de ciencias puras y ciencias aplicadas puedan usarlas, ya sea en problemas reales de investigación o en otras investigaciones teóricas.

Referencias Bibliográficas

Aguilar, R. (1994). *Metodología de la Investigación Científica*. Editorial UTPL.

Altman, M. (1980). *Iterative methods of contractor directions, Nonlinear*. *Analysis 4.* 761-772.

Argyros, I. (2004). *A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton Like methods in banach space. J.* Math. Anal. Applic., 298, 374-397. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X04003105

Argyros, I. (2005). *Approximate Solution of Operator Equations with Applications.* World Scientific Publ. Co.

Argyros, I. (2006). *A convergence Analysis of a Newton-Like Method Without Inverses.* Editorial J. Math. Pures Appl. Volume 30, No. 2. 143-149. https://www.ijpam.eu/contents/2006-30-2/1/1.pdf

Argyros I. (2008). *On the semilocal convergence of a fast two-step Newton method.* Revista Colombiana de Matemáticas. Volume 42, No. 1, 15-24. http://www.scielo.org.co/pdf/rcm/v42n1/v42n1a02.pdf

Argyros I. (2008). *Convergence and applications of Newton-type iterations*. Springer Verlag.

Chumpitaz, M. (1990). *Análisis Funcional*. Editorial UNI.

Dennis Jr, J. (1968), *On Newton-Like methods*. Numer. Math., 11, 324-330. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02166685

Groetsch, C. (1980). *Elements of Applicable Functional Analysis*. Editorial Marcel Dekker Inc.

Haaser, J; La Salle, J. y Sullivan, J. (2001). *Análisis Matemático: Curso de Introducción.* Editorial Trillas.

Hernández, R; Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª. ed.). McGraw-hill.

Hernandez, M. y Salanova, M. (2000). *Modification of the Kantorovich assumptions for semilocal convergence of the Chebyshev methods. J. Comput. Appl. Math.* 126. 131-143. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042799003477

Homeier, H. (2003*). A modified method for rootfinding with cubic convergence*. J. Comput. Appl. Math. 157, 227-230. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042703003911

Homeier, H. (2004). *A modified Newton method with cubic convergence: the multivariate case*. J. Comput. Appl. Math.169, 161-169. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042703010215

Kantorovich L. y Akilov, G. (1982). *Functional Analysis in Normed Spaces.* Pergamon Press.

Shobha, M. y George, S. (2003). *Projection Method For Newton-Tikhonov Regularization For Non-Linear Equations.* Editorial J. Math. Pures Appl. Volume 83, No. 5. 643-650 http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v83i5.6

Ozban, A. (2004). *Some new variants of Newton's method.* Appl. Math. Letters 17, 677-682. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965904901048

Pisarievski, B. et al. (1987). *Problemas y Ejercicios De Análisis Funcional*. Editorial MIR.

Zorrilla, S. (1993). *Introducción a la metodología de la investigación* (11 ed.). Aguilar León y Cal Editores.

Anexos

MATRIZ DE CONSISTENCIA

<table>
<tr><th>Variables</th><th>Dimensiones</th><th>Indicadores</th><th>Metodología</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Método de Newton</td><td>Método de Newton – Kantorovich</td><td>- Linealización
- Mayorización</td><td rowspan="5">Tipo de estudio
La presente investigación es de tipo descriptivo, exploratorio y de enfoque cualitativo, investigación relacionada al diseño de la indagación, para lo cual se tomaron ciertos puntos de la teoría fundamentada. De esta manera se busca indagar una teoría que explique en un grado conceptual una acción, una relación o un área específico; a diferencia de la teoría formal (llamada de esta forma por Glaser y Strauss), esta teoría es de naturaleza local al estar circunscrita en un entorno y situación definida, por lo cual su descripción está supeditada a un entorno delimitado (Baptista, Fernández y Hernández, 2010).</td></tr>
<tr><td>Método de Newton – Like</td><td>- Linealización
- Mayorización
- Inversa aproximada</td></tr>
<tr><td>Método de Newton – Tikhonov</td><td>- Linealización
- Regularización de la inversa aproximada</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Soluciones de ecuaciones no lineales</td><td>Eficiencia de los algoritmos en cada método</td><td>- Número de iteraciones
- Orden de convergencia</td></tr>
<tr><td>Cota de error de los métodos</td><td>- Error absoluto
- Error relativo</td></tr>
</table>

Lista de Símbolos Matemáticos

$\mathbb{N}$	Denota el conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$	Denota el conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Denota el conjunto de los números complejos.
$\mathbf{K}$	Denota el cuerpo de los números reales o de los números complejos.
I	Denota un conjunto de índices.
$[x_1, x_2]$	Denota el segmento determinado por x_1 y x_2.
$x < \infty$	Significa que el número real x es un número finito.
$\{x_n\}$	Representa la secuencia infinita $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un conjunto dado.
X, Y, Z	Denota un espacio de Banach u otro espacio según sea el caso.
$\|.\|$	Denota la norma en un espacio normado cualquiera.
$\|.\|_X$	Denota la norma en un espacio normado X específico.
H	Denota un espacio de Hilbert.
$\langle x, y\rangle$	Denota el producto interno de x por y.
$L(X, Y)$	Denota el espacio de operadores lineales acotados de X en Y.
$L(X)$	Denota el espacio de operadores lineales acotados de X en X.
Θ	Significa la culminación de una demostración.