

UNIVERSIDAD NACIONAL
SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO



FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**SOBRE LA PROPIEDAD DE
ULTRAMETRICIDAD EN EL MODELO DE
ISING CON CAMPO**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR: Bach. Jamer Insupe Roldan Gonzales

Asesor: Dr. Bibiano Martín Cerna Maguiña

Huaraz-Perú

2023

Número de registro: T019





ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N°001-2023

Los Miembros del Jurado de la Revisión y Sustentación de la Escuela Académico Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias, designados mediante Resolución de Consejo de Facultad N° 119 -2023-UNASAM-FC; se reunieron el día 05 de julio de 2023, a horas 11:00 a.m. en el Aula G-402 de la Facultad de Ciencias en acto público para evaluar la Sustentación de Tesis, presentado por el:

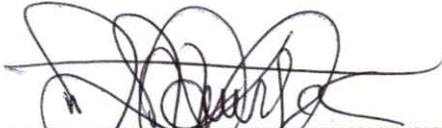
Bachiller : **JAMER INSUPE ROLDAN GONZALES**

Tesis Titulada : **“Sobre la Propiedad de Ultrametricidad en el Modelo ISING con campo”**

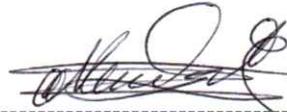
Después de la Sustentación y las respuestas a las preguntas, el Jurado lo declara APTO para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, con el calificativo de Dieciséis (16)

En señal de conformidad y para constancia, firmamos la presente ACTA, siendo las 12 h del mismo día y año.

Huaraz, 05 de julio de 2023



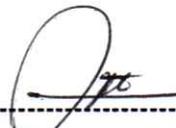
Mag. Mario NINAQUISPE CASTILLO
Presidente



Mag. Nemecio Segundo CASTILLO TUBA
Secretario



Mag. Vladimir Giovanni RODRIGUEZ SABINO
Vocal



Dr. Bibiano Martin CERNA MAGUIÑA
Asesor



Anexo de la R.C.U N° 126 -2022 -UNASAM
ANEXO 1
INFORME DE SIMILITUD.

El que suscribe (asesor) del trabajo de investigación titulado:

Presentado por: _____

con DNI N°: _____

para optar el Título Profesional de: _____

Informo que el documento del trabajo anteriormente indicado ha sido sometido a revisión, mediante la plataforma de evaluación de similitud, conforme al Artículo 11 ° del presente reglamento y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de : de similitud.

Evaluación y acciones del reporte de similitud de los trabajos de los estudiantes/ tesis de pre grado (Art. 11, inc. 1).

Porcentaje		Evaluación y acciones	Seleccione donde corresponda <input checked="" type="radio"/>
Trabajos de estudiantes	Tesis de pregrado		
Del 1 al 30%	Del 1 al 25%	Esta dentro del rango aceptable de similitud y podrá pasar al siguiente paso según sea el caso.	
Del 31 al 50%	Del 26 al 50%	Se debe devolver al estudiante o egresado para las correcciones con las sugerencias que amerita y que se presente nuevamente el trabajo.	
Mayores a 51%	Mayores a 51%	El docente o asesor que es el responsable de la revisión del documento emite un informe y el autor recibe una observación en un primer momento y si persistiese el trabajo es invalidado.	

Por tanto, en mi condición de Asesor/ Jefe de Grados y Títulos de la EPG UNASAM/ Director o Editor responsable, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera hoja del reporte del software anti-plagio.

Huaraz,



FIRMA

Apellidos y Nombres: _____

DNI N°: _____

Se adjunta:

1. Reporte completo Generado por la plataforma de evaluación de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

TesisJamer12-07-23.pdf

AUTOR

Jamer Insupe Roldan Gonzales

RECUENTO DE PALABRAS

31006 Words

RECUENTO DE CARACTERES

139119 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

120 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.2MB

FECHA DE ENTREGA

Jul 12, 2023 7:45 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Jul 12, 2023 7:47 PM GMT-5**● 5% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos

- 2% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 1% Base de datos de trabajos entregados
- 4% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Fuentes excluidas manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 8 palabras)

*Dedico este
trabajo a mis
padres y
hermanos
por todo su
apoyo
incondicional*



Agradecimientos

Durante todo mi camino mis padres Javier y Mercedes siempre estuvieron apoyándome, les agradezco mucho por toda la ayuda que me han dado en las buenas y en las malas, a mis hermanas Aurora, Merja, a mis hermanos Teylor y Juki por su apoyo.

Agradezco a mi asesor Martin Cerna Maguiña por todo el apoyo para llegar hasta aquí.

A mis amigos y colegas que estuvieron en esta jornada a Dik Dani, Roberto Vila, Jaime Rojas, Javier Sabino, Julian Lazaro, Jose Charahua, Jessica Jara, Karina Huerta, Celmi y Jaime Zelaya, por la incesante motivación.

Agradezco a la Escuela de Matemática UNASAM por la formación brindada y a los profesores Victor Pocoy, Vladimir Sabino por sus didácticas clases en el pregrado.

A mis amigos que están lejos pero son parte de la historia de este texto Maria Jose Monteiro, Josileide Candido, Amanda, Edilene Queiroz, Leo Melo, Kasia, Sabrina, Rita, Ellen, Rei, Lilian, Daiane por su compañía.

Resumen

En esta tesis se muestra la propiedad de ultrametricidad para el modelo de Ising con un cierto tipo de campo aleatorio; deducimos en el proceso de la prueba una formula de integración por partes y las igualdades de Guirlanda-Guerra para el modelo de Ising con campo aleatorio.

Palabras clave: Modelo de Ising, Campo aleatorio, Medida de Gibbs aleatoria, Ultrametricidad, Vidrios Spin, Identidades de Guirlanda Guerra.

Abstract

In this thesis the ultrametricity property for the Ising model with a especial random field will be proved. We deduce in the process of the proof an integration by parts formula and the Ghirlanda-Guerra identities for the Ising model with random field.

Keywords: Ising model, Random field, Random Gibbs measure, Ultrametricity, Spin glasses, Guirlanda Guerra identities.

Índice general

	Agradecimientos	VI
	Resumen	VII
	Abstract	VIII
I	Introducción	1
	I.1 Justificación del estudio	5
	I.2 Delimitación y planteamiento del problema	5
	I.3 Objetivos	6
	I.3.1 Objetivo general	6
	I.3.2 Objetivos específicos	6
	I.4 Hipótesis	6
II	Marco teórico	9
	II.1 Antecedentes del problema	9
	II.2 Breve presentación del Modelo de Ising	9
	II.2.1 El modelo en volumen finito	11
	II.2.2 Desigualdades y resultados importantes: GKS, GHS, FKG	19
	II.3 Modelo de Ising con campo aleatorio	29
	II.3.1 Presentación de la medida de Gibbs (en volumen infinito)	30
	II.3.2 Breve presentación de la medida de Gibbs aleatoria	41
	II.3.3 Resumen sobre el Modelo de Ising con Campo Aleatorio	43
	II.3.4 O argumento de Imry y Ma	50
	II.3.5 El método de Aizenman y Wehr	53
	II.3.6 El resultado de Bricmont y Kupiainen	54
	II.4 Introducción a la teoría de vidrios Spin	55

II.4.1	Sobre los vidrios spin	55
II.4.2	Modelo de Sherrington-Kirpatrick	56
II.4.3	Idea del método de réplicas	57
II.5	Las Identidades de Guirlanda-Guerra implican la Ultrametricidad (caso discreto)	60
II.5.1	Algunas definiciones en vidrios spin	60
II.6	Preliminares a la prueba de GG implica ultrametricidad	61
III	Metodología de la investigación	64
III.1	Tipo de investigación	64
III.2	Diseño de la investigación	64
III.3	Población y muestra	65
IV	Resultados principales	66
IV.1	Presentación del resultado	66
IV.1.1	Integración por partes gaussiana	69
IV.1.2	Generalización de la integración Gaussiana por Partes	70
IV.2	Prueba del item 1	71
IV.3	Prueba de Item 2	82
V	Conclusiones	86
VI	Recomendaciones	89
A	Desigualdades GKS	99
A.1	Desigualdad GKS-I	99
A.2	Demostración de GKS-II	101
A.3	Notación de la O	103
B	Sobre la integración Gaussiana por partes	104
B.1	Prueba de la formula de integración Gaussina por partes	104
B.2	Integración por partes no Gaussiana	108



B.2.1 Integración por partes para variables aleatorias no gaussianas, con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	108
B.2.2 Generalización de la integración Gaussiana por partes	109



Índice de figuras

II.1	W sería los vértices de estos grafos	10
II.2	Grafos d -regulares	17
II.3	Configuraciones posibles para S y Λ	34
II.4	Las líneas definidas representan las aristas y las líneas punteadas representan las plaquetas duales en \mathbb{Z}^2	44
II.5	Representación del conjunto \mathcal{E}_S	45
II.6	Considerando condición de frontera + (no graficada), las líneas punteadas representan los contornos, puntos rojos son $\sigma_x = +1$ y puntos azules son $\sigma_x = -1$	46

Capítulo I

Introducción

En este trabajo estudiaremos la propiedad de ultrametricidad para el modelo de Ising con campo aleatorio (en inglés *Random Field Ising Model* o resumido RFIM). La propiedad de ultrametricidad es más estudiada en modelos de vidrios de Spin (en inglés *Spin Glasses*) como en [Auffinger and Chen, 2016],[Talagrand, 2003].

El modelo de Ising es fácil de enunciar y trabajar; considerando que consigue describir el fenómeno de transición de fase, que lo convierte en uno de los modelos más interesantes a ser estudiados.

Fue creado en 1920 por el físico alemán Wilhelm Lenz, quien dio como un problema a su alumno Ernst Ising, el objetivo era encontrar transición de fase del modelo en una dimensión \mathbb{Z}^1 , pero eso no fue posible como lo mostró en su tesis de doctorado [Ising, 1925]. Después de eso se pensó que el modelo no servía para estudiar esos fenómenos pero afortunadamente casi una década después Rudolph Peierls en 1936 consiguió probar transición de fase para el reticulado \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$ [Peierls, 1936]. Posteriormente siguieron autores como Lars Onsager que escribieron sobre el comportamiento de parámetros de orden del modelo como la magnetización espontánea que es continua cuando trabajamos en \mathbb{Z}^d , $d = 2$ [Onsager, 1944]. Aizenman y Fernandez mostraron en [Aizenman et al., 1987] para $d \geq 4$ y finalmente el ganador de la medalla Fields 2022 Hugo Duminil-Copin demostró que para \mathbb{Z}^d , $d = 3$ la magnetización espontánea es continua [Aizenman et al., 2015]. Todo lo comentado anteriormente sobre estos modelos es

para campo nulo y para primeros vecinos¹.

Si hacemos cambios en el campo o en la interacción entre los átomos podemos tener que el modelo se torna más real, en esos cambios podemos tener campos o interacciones aleatorios o deterministas. Así Dyson cambiando las interacciones entre las partículas para que no decaigan más rapido que $J_{xy} = \frac{c}{\|x-y\|^2}$ mostró que el modelo de Ising en \mathbb{Z}^1 si tiene transición de fase [Dyson, 1969]. Para cuando el campo es constante diferente de cero Lee y Yang probaron que no hay transición de fase [Lee and Yang, 1952].

El caso en el que el modelo tiene campo aleatorio fue estudiado por primera vez en 1975 por Imry y Ma [Imry and Ma, 1975] en su articulo conjeturaron que el RFIM posee transición de fase, para $d \leq 2$, y que para dimensiones mayores no debería haber. Ya en 1988 fue probado por Brémont y Kupiainen, para $d \geq 3$, usando grupos de renormalización [Bricmont and Kupiainen, 1988], posteriormente, Aizenman y Wehr [Aizenman and Wehr, 1989] mostraron para $d \leq 2$.

Este trabajo relaciona el modelo de Ising con campo aleatorio y el modelo de *spin glasses* (ver [Panchenko, 2012, Panchenko, 2013b, Austin, 2012, Nishimori, 2001, Jesi, 2016]), que es un modelo que surgió durante la segunda mitad del siglo XX; el termino *spin glass* fue primeramente usado por Anderson [Anderson, 1970], en 1975 junto con Edwards crea el modelo de Edwards-Anderson, en este modelo inserta una aleatoriedad a las interacciones J_{xy} entre partículas, pudiendo ser negativas o positivas, usualmente escogen las variables J_{xy} con distribución gaussiana o distribución del modelo $\pm J$ (ver [Nishimori, 2001],[Jesi, 2016]). El Hamiltoniano para este modelo es del tipo $H = \sum_{xy \in B} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$ en ausencia de campo aleatorio, donde B es el conjunto de aristas de un grafo. Otro modelo también fue creado al mismo tiempo el modelo de Sherrington-Kirkpatrick que es un modelo a campo medio (*mean field*) es una extensión del modelo de Edwards-Anderson a rango infinito (ver [Panchenko, 2012, Panchenko, 2013b, Austin, 2012]).

Tratando de solucionar los modelos de *spin glasses* se creo nuevas técnicas y una amplia teoría matemática para poder explicar los fenómenos físicos de los *spin glasses*, la solución propuesta usaba el método de las replicas, pero esta solución daba situaciones

¹Se usa el termino primeros vecinos cuando las partículas tienen distancia de grafos de valor 1

no físicas a bajas temperaturas, para superar eso se creó otra teoría matemática que mostraba la quiebra de la simetría de las réplicas y quedó conocida como el esquema de quiebra de simetría de réplica (ver [Nishimori, 2001],[Austin, 2012]).

Entre el conjunto de herramientas matemáticas usadas para solucionar el modelo tenemos desigualdades FKG [Fortuin et al., 1971] o las identidades de Guirlanda Guerra [Ghirlanda and Guerra, 1998].

La solución por quiebra de simetría de réplica muestra que hay una propiedad de ultrametricidad en el espacio de estados del modelo, eso significa, que la relación entre la distancia entre tres estados están en la misma relación que en un triángulo isósceles o equilátero.[Mézard et al., 1987],[Nishimori, 2001],[Jesi, 2016].

Que en un modelo, bajo ciertas condiciones, se cumpla las propiedades de Guirlanda Guerra puede ayudarnos a probar o descartar que existe quiebra de simetría de réplica como en [Chatterjee, 2015] o implicar la validez de la propiedad de ultrametricidad como en [Panchenko, 2010a, Panchenko, 2011, Panchenko, 2013a], [Auffinger and Chen, 2016], [Austin, 2012].

Recientemente hay varios estudios sobre la propiedad de ultrametricidad en varios modelos de mecánica estadística como los de Auffinger [Auffinger and Chen, 2016], sobre ultrametricidad en el modelo p-spin y los trabajos de Itoi, en el modelo de Landau, [Itoi, 2018], [Itoi and Utsunomiya, 2019]; los de Roldan y Vila [Roldan and Vila, 2020] analizando la ultrametricidad para RFIM con campo no necesariamente gaussiano y con tasas de decaimiento.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En la parte de la introducción, de este texto, damos a conocer el problema a ser estudiado, como también damos información sobre éste y la hipótesis que tenemos al respecto.

En el marco teórico, ya que vamos a trabajar con el modelo de Ising con campo aleatorio (RFIM), comenzamos presentando el propio Modelo de Ising y algunas de sus propiedades, posteriormente presentamos el Modelo de Ising con campo aleatorio, seguidamente nos adentramos a explorar sobre los *spin glasses*. Hacemos todo esto con el fin de empapar al lector con los conocimientos preliminares para abordar el problema.

Posteriormente en la parte de resultados enunciamos las características del campo a ser estudiado, hacemos las demostraciones de los teoremas y proposiciones necesarios para llegar al resultado. Esta tesis de pregrado es el texto expandido de un artículo publicado conjuntamente con el profesor Roberto Vila en [Roldan and Vila, 2020].

Finalmente damos algunas recomendaciones y conclusiones.



I.1. Justificación del estudio

El estudio de modelos de Ising de modelos con campos aleatorios viene desde 1975 con Imry y Ma [Imry and Ma, 1975]. Al colocar perturbaciones el modelo presenta comportamientos muy distintos del modelo con campo nulo o con campo constante. Es así que el modelo con campo aleatorio presenta comportamientos propios de otros modelos que son conocidos como modelos de Vidrios de spin (*spin glasses*)². Entre esas propiedades esta la de *ausencia de la quiebra de la simetría de la replica* que se cumple para campos gaussianos esta presente en el modelo de Ising con campo aleatorio [Chatterjee, 2015]. Otra propiedad interesante es la de *ultrametricidad*. En modelos de Ising con campos no gaussianos no sabemos si tenemos esta ultima propiedad.

Este presente trabajo ayudaría a la mejor comprensión del RFIM a través de resultados matemáticos concretos. Ampliaría la literatura ya conocida sobre ultrametricidad cuando el campo no es gaussiano y aportaríamos nuevos resultados que podrían ser usados por físicos y matemáticos en sus futuros estudios.

I.2. Delimitación y planteamiento del problema

El modelo de Ising es uno de los modelos más simples para estudiar las propiedades magnéticas de un sistema. Una generalización de ese modelo es el modelo de Ising con campo externo aleatorio (RFIM de *Random fiel Ising Model*), que tiene un comportamiento muy distinto en lo que se refiere al fenómeno de transición de fase que el modelo de Ising con campo determinista (ver [Braga and Araujo, 1999, Braga and Araujo, 2000, Bovier, 2006, Bissacot and Cioletti, 2010]), así como también posee otras propiedades que son más estudiadas en los modelos de vidrios spin (*Spin glasses*) como son las igualdades de Ghirlanda-Guerra o la Ultrametricidad.

Es conocido de que la propiedad de ultrametricidad es valida para el RFIM cuando el campo es Gaussiano (Em [Chatterjee, 2015] podemos ver las igualdades de Ghirlanda-Guerra para el RFIM y de [Panchenko, 2010a, Panchenko, 2011, Panchenko, 2013a] podemos ver que implica ultrametricidad) pero cuando el campo no es gaussiano aun

²Sin llegar a serlo por que no tiene frustración. (ver [Jesi, 2016])

no podemos afirmar algo.

El problema a ser estudiado en este trabajo es el siguiente:

¿Es posible tener la propiedad de ultrametricidad valida para el RFIM cuando el campo no es gaussiano?

I.3. Objetivos

I.3.1. Objetivo general

Mostrar que el modelo de Ising con un tipo de campo aleatorio no gaussiano tiene la propiedad de ultrametricidad.

I.3.2. Objetivos específicos

- Mostrar las identidades de Ghirlanda Guerra para el RFIM con campo no gaussiano.
- Generalizar resultados conocidos para modelos de vidrios spin (*spin glasses*) en campos gaussianos a modelos, como el RFIM, con campos no gaussianos.
- Probar resultados relacionados a ultrametricidad para campos no gaussianos.
- Encontrar campos no gaussianos con propiedades adecuadas para conseguir ausencia de la quiebra de simetría de la replica.

I.4. Hipótesis

Dado un campo aleatorio no gaussiano especial, podemos mostrar que el modelo de Ising con campo aleatorio (RFIM) posee la propiedad de ultrametricidad.

Igualdades de Ghirlanda Guerra

En los modelos de Spin Glasses, como el modelo de Sherrington-Kirkpatrick (SK) que es un modelo que tiene las interacciones $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in W}$ siendo aleatorias. En estos modelos es frecuente usar unas identidades que fueron desarrolladas en 1998 por S.

Ghirlanda y F. Guerra [Ghirlanda and Guerra, 1998]. De satisfacerse estas identidades podemos tener implicancias muy importantes, como la ultrametricidad. A continuación las enunciamos siguiendo [Chatterjee, 2009].

Sean $\sigma^1, \sigma^2, \dots$ configuraciones i.i.d. de la medida de Gibbs. Estas variables en el modelo de vidrios de spin son conocidas con el nombre de **replicas**. Otra variable importante en esos modelos son las **sobreposiciones (overlaps)** de replicas que están dadas por

$$R_{l,l'} := \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \sigma_x^l \sigma_x^{l'}.$$

Fijamos un numero n y sea una función medible y limitada $f : \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \rightarrow \mathbb{R}$. También una colección $\mathcal{R}_n := (R_{l,l'})_{1 \leq l < l' \leq n}$ de sobreposiciones. Sea

$$\delta_N = \nu(R_{1,n+1}f) - \frac{1}{n} \nu(R_{1,2}) \nu(f) - \frac{1}{n} \sum_{s=2}^n \nu(R_{1,s}f).$$

Donde $\nu(f) = \mathbb{E} \langle f \rangle$ y para simplificar hemos escrito $f = f(\mathcal{R}_n)$. Siguiendo las identidades de Ghirlanda Guerra para cualquier n y f tenemos que se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0.$$

Ultrametricidad

Como ya hemos comentado antes las desigualdades de Ghirlanda Guerra implican en la propiedad de ultrametricidad. [Austin, 2012],[Panchenko, 2010a, Panchenko, 2011, Panchenko, 2013a]

Un espacio ultramétrico satisface la siguiente propiedad

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)).$$

En el estudio de modelos con campos aleatorios como el SK buscaremos que el soporte³ de la medida de Gibbs asintótica tenga estructura ultramétrica, i.e. sean $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ puntos del soporte, entonces

$$\|\sigma^1 - \sigma^3\| \leq \max\{\|\sigma^1 - \sigma^2\|, \|\sigma^2 - \sigma^3\|\}.$$

³cerradura del conjunto de puntos donde la medida no se anula

Cuando a medida de Gibbs esta concentrada en una esfera tenemos que $\|h\| = c$, para h en el soporte de la medida, así sigue que $\|\sigma^1 - \sigma^3\|^2 = 2c^2 - 2R_{1,3}$ [Panchenko, 2012, Panchenko, 2013b] y con esto la última ecuación se transforma en

$$R_{2,3} \geq \min \{R_{1,2}, R_{2,3}\}.$$

Usaremos estos conocimientos para buscar mostrar la propiedad de ultrametricidad para el modelo de Ising con campo aleatorio, más considerando un campo no gaussiano. Esto sera presentado en el capitulo IV.

Capítulo II

Marco teórico

II.1. Antecedentes del problema

El estudio de la propiedad de ultrametricidad es mas frecuente en modelos de vidrios spin y modelos p-spin. Esta propiedad permite una mejor comprensión de la “solución de Parisi”, que es también conocida como la “estimación por quiebra de simetría de replica de Parisi” (*Parisi’s Replica Symmetry Breaking ansatz*) (ver [Panchenko, 2012, Panchenko, 2013b, Jagannath, 2017, Nishimori, 2001, Austin, 2012])

Hay estudios que confirman la propiedad de ultrametricidad es consecuencia de de la propiedad de Guirlanda-Guerra [Panchenko, 2010a, Panchenko, 2013a, Panchenko, 2011]. La propiedad de ultrametricidad para los modelos p-spin es valida para cualquier distribución [Auffinger and Chen, 2016] con algunas condiciones o sea lo que en física matemática y estadística se conoce como universalidad.

II.2. Breve presentación del Modelo de Ising

El modelo de Ising es uno de los modelos mas simples capaz de describir matemáticamente el fenómeno de transición de fase, que es un fenómeno físico bastante complejo de expresar matemáticamente. En lo que sigue introduciremos el modelo.

Tomemos W siendo un conjunto infinito numerable; que W sea el conjunto de vértices de un grafo infinito. Como podría ser los conjuntos de vertices de los siguientes reticulados \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$ o podría ser el conjunto de vértices de un grafo hexagonal (“*Honey-*

comb”) o también podría ser el conjunto de vértices de un árbol infinito o de cualquier otro tipo de grafo conexo.



Figura II.1: W sería los vértices de estos grafos

En el modelo de Ising usualmente usamos el reticulado \mathbb{Z}^d , para suponer la estructura de los átomos de un cristal regular, identificando cada átomo con un vértice del grafo. El modelo de Ising surgió dentro del campo de la física y la ingeniería, debido a eso el conjunto W o sus subconjuntos serán llamados de **volumen** y sus elementos $x \in W$ serán llamados de **sitio, átomo o partícula**.

En lo que sigue comenzamos a dar algunas definiciones principales del modelo, lo haremos siguiendo el libro de Georgii [Georgii, 2011, pag 12].

Definición. 1. Una familia de variables aleatorias $(\sigma_x)_{x \in W}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{E}, \rho)$ y asumiendo valores en un espacio medible (E_0, \mathcal{E}_0) sera llamado de un **campo aleatorio**. Cada σ_x será nombrado de **spin**. El conjunto W sera llamado **espacio de parámetros o de reticulado** y (E_0, \mathcal{E}_0) sera el **espacio de estados**.

Espacio de configuraciones. Al conjunto

$\Omega = E_0^W := \{\omega = (\omega_x)_{x \in W} : \omega_x \in E_0\} = \{\omega \mid \omega : W \rightarrow E_0\}$ lo llamaremos de espacio de configuraciones y $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0^W$ sera su sigma-algebra producto en Ω . El spin en este caso

$$\begin{aligned} \sigma_x : \Omega &\rightarrow E_0 \\ \omega &\rightarrow \omega_x. \end{aligned}$$

da el valor de la proyección de la configuración ω en el p sitio x .

También podemos hacer una reducción de la configuración al subconjunto Λ de W .

Definimos para cada $\Lambda \subset W$,

$$\begin{aligned} \sigma_\Lambda : \Omega &\rightarrow E_0^\Lambda \\ \omega &\rightarrow \omega_\Lambda = (\omega_x)_{x \in \Lambda}, \end{aligned} \tag{II.1}$$

la proyección de las configuraciones sobre Λ . Observe que si $\Delta \subset \Lambda \subset W$, entonces tenemos $\sigma_\Delta \sigma_\Lambda(\omega) = \sigma_\Delta(\omega)$. Dados $\zeta \in E_0^\Delta$ y $\eta \in E_0^{\Lambda \setminus \Delta}$ con esto definimos la yuxtaposición $\zeta\eta \in E_0^\Lambda$ de modo que $\sigma_\Delta(\zeta\eta) = \zeta_\Delta$ y $\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}(\zeta\eta) = \eta_{\Lambda \setminus \Delta}$.

El espacio (E_0, \mathcal{E}_0) es llamado de **espacio de spin** [Georgii, 2011, pág. 12]. La medida ρ_0 es la **medida a priori** y es de probabilidad o sea, $\int \rho_0(d\sigma_x) = 1$.

A la variable aleatoria σ_x podemos definirla en varios espacios de probabilidad (no a la vez).¹ Construimos el espacio para el volumen Λ o sea $(\Omega_\Lambda, \mathcal{E}_\Lambda, \rho_\Lambda)$ donde $\Omega_\Lambda := E_0^\Lambda$, la sigma-algebra producto $\mathcal{E}_\Lambda = \mathcal{E}_0^\Lambda$ en Ω_Λ e $\rho_\Lambda := \prod_{x \in \Lambda} \rho_0$, la probabilidad tiene el siguiente significado

$$\rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda) := \prod_{x \in \Lambda} \rho_0(d\sigma_x).$$

Notamos que esa forma de definir la medida de probabilidad no hay interacción entre spins entonces esa medida es muy poco interesante pero sirve para fines explicativos de como seria una medida cuando tenemos el volumen Λ . (ver [von Dreifus, 1993, pág. 7]).

Observación 1.

- *La medida a priori ρ_0 es una medida que se conoce juntamente con la definición del modelo y sus parámetros. La usamos para construir las otras medidas.*
- *Algunas notaciones en teoría de la medida y mecánica estadística varían, como por ejemplo, en la integral $\int f(x)d\mu(x)$ la parte del diferencial en teoría de la medida es denotada por $d\mu(x)$ y en Mecánica Estadística es denotada por $\mu(dx)$. En ambos casos esa integral es una integral de Lebesgue y μ es una medida de Lebesgue.*

II.2.1. El modelo en volumen finito

Ahora veremos un conjunto finito de spins σ_x 's en los cuales sí tenemos interacción entre ellos; para eso, definimos el siguiente espacio $(\Omega_\Lambda, \mathcal{E}_\Lambda, \mu_\Lambda)$, donde están definidos los spins. Tomando Λ en **volumen finito**, o sea, cardinal finito y definiendo la medida

¹De hecho, durante el desarrollo de la teoría veremos a σ_x en diferentes espacios de probabilidad hasta construir la medida en volumen infinito que satisface todas las condiciones que precisaremos. Esa medida es la de Gibbs.

como

$$\mu_\Lambda(d\sigma_\Lambda) := g(\sigma_\Lambda) \prod_{x \in \Lambda} \rho_0(\sigma_x) = g(\sigma_\Lambda) \rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda),$$

y $g(\sigma_\Lambda)$ es tal que μ_Λ sea medida de probabilidad.

En especial podemos tomar $g(\sigma_\Lambda) = \exp(-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda)) Z_{\Lambda,\beta}^{-1}$. La variable Z hace que μ_Λ sea una medida de probabilidad. En este caso la siguiente medida es llamada como la **medida de Gibbs en volumen finito**.

$$\mu_{\Lambda,\beta}(d\sigma_\Lambda) := \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda)} \rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda)}{Z_{\Lambda,\beta}}. \quad (\text{II.2})$$

Por otra parte, a la función

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda) = - \sum_{xy \in E(\Lambda)} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x, \quad (\text{II.3})$$

en la literatura física la denominamos como la **energía o el hamiltoniano del sistema**. La notación $xy \in E(\Lambda)$ significa que la arista $\{x, y\}$ está en el conjunto de aristas $E(\Lambda)$, la variable $\beta \in (0, +\infty)$ y $h \in \mathbb{R}$ son llamados de **temperatura inversa** y **campo magnético externo** respectivamente.

Observación 2. En (II.3) hay un abuso de notación, ya que estamos usando la notación de spins σ_Λ para configuraciones. En realidad deberíamos escribir así

$$H_\Lambda(\omega) := - \sum_{xy \in E(\Lambda)} \sigma_x(\omega) \sigma_y(\omega) - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x(\omega),$$

con $\omega \in \Omega_\Lambda$. Lamentablemente si escribimos de esa forma la notación sería mucho más voluminosa.

En Friedli y Velenik [Friedli and Velenik, 2017], usan al inicio esta forma de denotar pero al continuar el texto comienzan a simplificarla haciendo abuso de notación.

La **función de partición** es definida como

$$Z_{\Lambda,\beta} := \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda)} \rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda),$$

y es la constante que se encarga que (II.2) sea una medida de probabilidad.

Observación 3. Aunque, ahora solo estamos viendo la medida de Gibbs en volumen finito, nuestro objetivo posterior será construir una medida en volumen infinito en Ω . Es importante hacer notar que la medida de Gibbs (II.2), en volumen finito, no puede ser pensada como la distribución marginal de la medida en volumen infinito, ya que no satisface las condiciones de compatibilidad de Kolmogorov (ver [Bovier, 2006, pág. 51])

Ya que tenemos la medida de Gibbs en volumen finito podemos usarla para definir **la esperanza con respecto a la medida de Gibbs en volumen finito** como sigue:

Sea la función $f : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$. La esperanza con respecto a la medida de Gibbs queda definida por

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta} := \int_{\Omega_\Lambda} f(\sigma_\Lambda) \mu_{\Lambda, \beta}(d\sigma_\Lambda) \quad (\text{II.4})$$

Observación 4. *La integral esta trabajando sobre las configuraciones $\omega \in \Omega_\Delta$ y no sobre spins. Una notación mas precisa seria así:*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta} := \int_{\{\omega \in \Omega_\Lambda\}} f(\sigma_\Lambda(\omega)) \mu_{\Lambda, \beta}(d\sigma_\Lambda(\omega)) \quad (\text{II.5})$$

pero ya la notación en mecánica estadística es muy sobrecargada y por eso, cuando no genera confusiones, es tradicional omitir algunas variables.

En el modelo de Ising no solo consideramos las interacciones de las partículas dentro del sistema sino las que están afuera también. Surge así, una definición importante, la condición de frontera.

A un elemento fijo $\eta \in \Omega$ lo llamaremos de **condición de frontera** de las configuraciones que pertenecen al siguiente conjunto

$$\Omega_\Lambda^\eta := \{\omega \in \Omega : \omega_i = \eta_i, \forall i \in \Lambda^c\}. \quad (\text{II.6})$$

En otras bibliografías, como en [Chatterjee, 2015] donde se considera configuraciones valiendo solo en la frontera exterior, eso es $\eta \in E_0^{\partial\Lambda}$, donde $\partial\Lambda$ es la frontera exterior de Λ .

Observación 5. *En la literatura hay dos condiciones de frontera especiales $\eta \equiv +1$ e $\eta \equiv -1$. Cuando se habla de medidas de Gibbs en volumen infinito las medidas que tienen por condición de frontera $+$ o $-$ son generalmente puntos de acumulación de otras medidas.*

Observación 6. *Como hemos adicionado la condición de frontera podemos reescribir el hamiltoniano (II.3), la medida de Gibbs en volumen finito (II.2) y la esperanza (II.4)*

con condición de frontera:

$$H_{\Lambda}(\sigma_{\Lambda}\eta_{\Lambda^c}) := - \sum_{xy \in E(\Lambda)} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y \quad (\text{II.7})$$

$$\mu_{\Lambda, \beta}^{\eta}(d\sigma_{\Lambda}) := \frac{e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma_{\Lambda}\eta_{\Lambda^c})} \rho_{\Lambda}(d\sigma_{\Lambda})}{Z_{\Lambda, \beta}^{\eta}}, \quad (\text{II.8})$$

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta}^{\eta} := \int_{\Omega_{\Lambda}^{\eta}} f(\sigma_{\Lambda}) \mu_{\Lambda, \beta}^{\eta}(d\sigma_{\Lambda}). \quad (\text{II.9})$$

La notación de yuxtaposición $\sigma_{\Lambda}\eta_{\Lambda^c}$ significa que si $x \in \Lambda$ tomamos los valores dados por la configuración σ y si $x \in \Lambda^c$ tomamos el valor de η en ese vértice.

En los casos de (II.3), (II.4) vamos a decir que estamos en **condiciones de frontera libre** y los denotamos por $\mu_{\Lambda, \beta}^0 = \mu_{\Lambda, \beta}$, $\langle f \rangle_{\Lambda, \beta}^0 = \langle f \rangle_{\Lambda, \beta}$, donde 0 denota una configuración que toma en cada coordenada el valor cero.

Observación 7. En la mayoría de artículos, encontramos hamiltonianos más complejos que los enunciados anteriormente (ver [Bissacot et al., 2015, Cioletti and Vila, 2016, Duminil-Copin and Tassion, 2016]). Ejemplo de eso:

Considerando la condición de frontera $\eta \in \Omega$.

$$H_{\Lambda}(\sigma_{\Lambda}) := - \sum_{xy \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y \quad (\text{II.10})$$

En ese caso $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in W}$ son llamadas de **contantes de acoplamiento** o también llamadas de **interacciones**; decimos que tenemos un **modelo de Ising ferromagnético** si cada $J_{y,x} = J_{x,y} \geq 0$, de \mathbf{J} . Si las constantes $J_{x,y}$ son positivas, cuando x, y son vértices de una arista del grafo y nulas sino, en ese caso, decimos que \mathbf{J} es a **primeros vecinos**. Para tener un modelo con propiedades adecuadas o para justificar que el modelo sea realista podemos colocar varias condiciones en las constantes de acoplamiento, como en [Aizenman et al., 1987, Duminil-Copin and Tassion, 2016, Medeiros, 2017]. Otro conjunto de variables importantes en el modelo es el **campo magnético no uniforme** dado por $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in W}$, que es el campo que esta interactuando con nuestro sistema.

El modelo puede ser extendido colocando aleatoriedades al grafo relacionado a W , al campo magnético o a las constantes de acoplamiento.

Modelo de Ising discreto.

Para discretizar el modelo vamos usar la medida a priori siendo la medida contadora. En la mayoría de textos encontramos enunciados del modelo de Ising en forma discreta y lo presentamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. *Primero definamos el hamiltoniano como en (II.3), en condiciones de frontera libre; lo siguiente es considerar la siguiente media a priori $\rho_0 = \frac{1}{2}\delta_+ + \frac{1}{2}\delta_-$, donde δ_x es la medida delta de Dirac soportada en el punto x ($\delta_{\pm} := \delta_{\pm 1}$). Si μ_{Λ} es la medida medida del modelo de Ising con condiciones de frontera libre, vamos a mostrar que para todo $A \subset \Omega_{\Lambda}$ es válida la identidad (II.12).*

De (II.2) y (II.4) tenemos:

$$\mu_{\Lambda,\beta}(A) = \left[\int_{\Omega_{\Lambda}} \mathbb{1}_A(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma)} \rho_{\Lambda}(d\sigma) \right] Z_{\Lambda,\beta}^{-1}. \quad (\text{II.11})$$

Note que $\rho_0(\{\sigma_x = 1\}) = \rho_0(\{\sigma_x = -1\}) = \frac{1}{2}$, para todo $x \in \Lambda$. Así la medida ρ_{Λ} se comporta como una medida contadora y

$$\rho_{\Lambda}(d\sigma) = \prod_{x \in \Lambda} \rho_0(d\sigma_x) = \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \vartheta(d\omega),$$

donde ϑ es la medida contadora en Ω_{Λ} . De esta forma podemos reescribir la parte derecha de (II.11) como sigue:

$$\frac{\int_{\Omega_{\Lambda}} \mathbb{1}_A(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda}} \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \vartheta(d\sigma)}{\int_{\Omega_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda}} \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \vartheta(d\sigma)} = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}} \mathbb{1}_A(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma)}} = \mu_{\Lambda,\beta}(A). \quad (\text{II.12})$$

Tomando $A = \{\sigma\}$, para una sola configuración, tenemos

$$\mu_{\Lambda}(\{\sigma\}) = \frac{e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma)}}{Z_{\Lambda,\beta}}.$$

Observe que esa nueva función de partición será $Z_{\Lambda,\beta} = \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma)}$.

Como sabemos el Modelo de Ising nació por y para estudiar fenómenos físicos, en especial, el fenómeno de la transición de fase, eso es, donde el sistema tiene magnetización y donde deja de tener, con relación a la temperatura. Con ese objetivo damos las siguientes definiciones en volumen finito.

La **magnetización**, que definimos como siendo $M := \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x$, la **densidad de magnetización** dada por $m := [\sum_{x \in \Lambda} \sigma_x] |\Lambda|^{-1}$, la **media de la densidad de la magnetización** como

$$m_{\Lambda}^{\eta}(\beta, h) := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\eta},$$

y la **susceptibilidad magnética**, con la siguiente expresión

$$\chi_{\Lambda}^{\eta}(\beta, h) := \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} m_{\Lambda}^{\eta}(\beta, h).$$

Uno de los componentes del hamiltoniano es el campo magnético, es decir, el hamiltoniano tiene dependencia del campo magnético h ; por tanto χ_{Λ}^{η} y m_{Λ}^{η} también tienen dependencia de ese factor.

Otra definición importante en la literatura de mecánica estadística y que esta relacionada al estudio de la transición de fase es la de **energía libre** en volumen finito

$$f_{\Lambda, \beta, h}^{\eta} := \frac{1}{\beta |\Lambda|} \ln Z_{\Lambda, \beta, h}^{\eta}. \quad (\text{II.13})$$

A modo de curiosidad el enunciado de estas expresiones pueden variar, por ejemplo en [Braga and Araujo, 1999], [Friedli and Velenik, 2017] se denotan como las acabamos de enunciar, en cuanto que, en [Bovier, 2006], [Chatterjee, 2015] denotan f y M sin dividir sobre $|\Lambda|$, claro que en las cuentas, operaciones y formulas tiende a aparecer la división entre $|\Lambda|$ para compensar.

Observación 8. *La primera derivada y segunda derivada de $f_{\Lambda, \beta, h}^{\eta}$ con respecto al campo magnético externo, h , son m_{Λ}^{η} e χ_{Λ}^{η} respectivamente.*

Limite Termodinámico.

En lo que sigue vamos a dar condiciones que nos permiten hacer un proceso de limite hacia el volumen infinito.

Así, creamos un limite en los volúmenes (Λ_n) hacia el **volumen infinito** ($\Lambda_n \rightarrow W$) a través del uso del siguiente procedimiento llamado de **limite termodinámico**. Sea la secuencia de subconjuntos Λ_n de W tal que los Λ_n son:

- crecientes, o sea, $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$;
- cubren todo W , eso es, $\cup_{n \geq 1} \Lambda_n = W$;

- poseen **convergencia en el sentido de Van Hove**, significa que satisface el siguiente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0,$$

donde $\partial^{in} \Lambda_n := \{x \in \Lambda_n : y \in \Lambda_n^c, |x - y| = 1\}$ y $|\cdot|$ es la distancia de grafos.

Observación 9. Cuando la secuencia de volúmenes (aunque no sean cajas de $n \times n$ puntos en \mathbb{Z}^d) satisfacen esas tres condiciones del limite termodinámico, arriba enunciadas, tenemos asegurada la convergencia del limite respecto al volumen de la función energía libre sin que importe la condición de frontera que tomemos (ver [Braga and Araujo, 1999]).

Si Λ_n son cajas de $n \times n$ puntos en \mathbb{Z}^d entonces se satisface la tercera condición. En lo que sigue damos un ejemplo donde la ultima condición no es satisfecha.

Ejemplo 2. Los grafos d -regulares, no satisfacen la convergencia en el sentido de Van Hove, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 1.$$

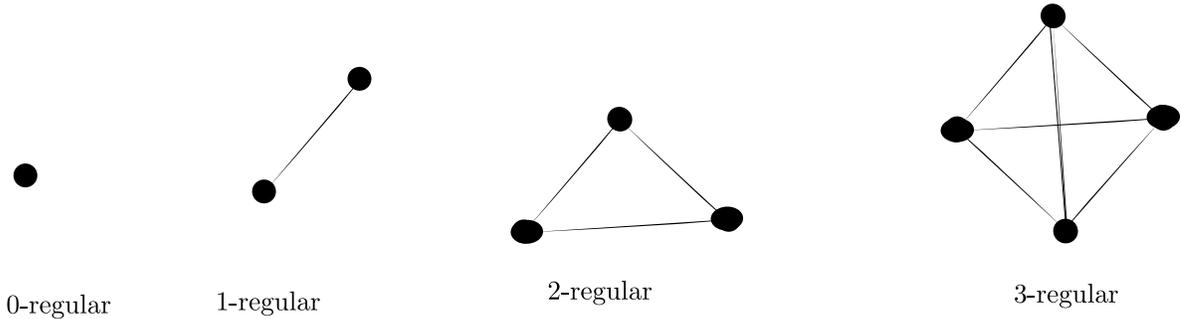


Figura II.2: Grafos d -regulares

Observación 10. La relación entre el volumen y la frontera exterior o interior de una sucesión de subgrafos depende de la forma, que tienen los subgrafos, por ejemplo, hay grafos reticulados como \mathbb{Z}^d , en forma de arboles, hexagonales, etc.

Muchas convergencias de medidas, de la función energía libre, etc. dependen de que podamos tomar el limite termodinámico y ese limite va a depender de que el volumen crezca más rápido que la frontera del grafo.

Observación 11. Una definición análoga a la condición de Van Hove es la de **grafo amenable** que son los grafos $G = (V, E)$ tal que

$$\inf_{\substack{K \subset V \\ |K| < \infty}} \frac{|\partial^{ex} K|}{|K|} = 0,$$

donde la frontera $\partial^{ex} K$ son todos los vértices de $V \setminus K$ que tienen un vecino en K .

- De las dos definiciones tenemos que si un grafo es amenable entonces satisface la condición de Van Hove.
- Los grafos d -regulares son los ejemplos mas comunes de grafos no amenables.
- hay grafos tipo árbol que no satisfacen con ser amenables.
- Saber si un grafo es amenable, o no, es importante, porque nos da información si es posible encontrar el fenómeno de transición de fase en el Modelo de Ising con ese grafo. En [Jonasson and Steif, 1999] demuestra que para el campo magnético $h \neq 0$ y en un grafo amenable no existe transición de fase, mientras que si el grafo no es amenable y $h \neq 0$ sí hay transición de fase.

Usando el limite con respecto a los volúmenes, el limite termodinámico, en (II.4) construiremos medidas en volumen infinito. Sean las secuencias (Λ_n) , siendo secuencias crecientes, que cubren \mathbb{Z}^d , que satisfacen la convergencia en el sentido de Van Hove y las secuencias de condiciones de frontera (η_n) , entonces decimos que las medidas de Gibbs en volumen finito **convergen vía el limite termodinámico** a la medida en volumen infinito, si y solo si,

$$\int_{\Omega} f(\sigma) \mu_{\beta}(d\sigma) = \langle f \rangle_{\beta} := \lim_{\Lambda_n \rightarrow W} \int_{\Omega_{\Lambda_n}} f(\sigma_{\Lambda_n}) \mu_{\Lambda_n, \beta}^{\eta_n}(d\sigma_{\Lambda_n}) = \lim_{\Lambda_n \rightarrow W} \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta}^{\eta_n},$$

para toda $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **función local**, que es una función determinada por valores locales, o sea, si ω y ω' son dos configuraciones que solo coinciden en un conjunto $\Delta \subset W$, cuando ese conjunto existe, entonces $f(\omega_x) = f(\omega'_x)$, si $x \in \Delta$.

En la subsección II.3.1 volveremos a ver la medida en volumen infinito. Observe ahora que, con el limite termodinámico, tenemos una medida en volumen infinito, mas no sabemos las propiedades de esta medida, no sabemos, si satisfacen las condiciones de compatibilidad del Teorema de Kolmogorov, que propiedades tienen sus distribuciones condicionales, sus distribuciones marginales etc.

II.2.2. Desigualdades y resultados importantes: GKS, GHS, FKG

Si para obtener algún resultado necesitamos limitar $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}$, por ejemplo, por arriba por un número menor que 1. ¿Como lo haríamos ya que σ_x e σ_y son variables aleatorias que asumen +1 o -1 y varían según la aleatoriedad? Pensaríamos en usar la limitación obtenida de la definición de la esperanza que es $-1 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta} \leq +1$ pero con esa desigualdad perdemos referencia a las variables aleatorias y no la limitaríamos por arriba por un número menor que 1, así que sería ideal tener otro tipo de desigualdades.

En adelante presentamos algunas desigualdades que son muy importantes en la literatura ya que si no las conocemos poco o nada se puede hacer en el análisis del modelo de Ising y en otros modelos de mecánica estadística. La primera desigualdad que presentaremos es la *GKS* que lleva ese nombre por sus descubridores Griffiths, Kelly e Sherman. Fue Griffiths quien primero desarrollo la teoría en estos tres primeros artículos [Griffiths, 1967a],[Griffiths, 1967b], [Griffiths, 1967c] de 1967 y después de un año fue generalizado por Kelly y Sherman en [Kelly and Sherman, 1968].

En lo que sigue denotaremos $\sigma_A := \prod_{x \in A} \sigma_x$ (Aunque es un abuso de la notación, esta vez σ_A denota el producto de spins y no una proyección de una configuración en un subconjunto) donde $A \subset W$ finito. También en las siguientes paginas consideramos el modelo de Ising con la medida a priori dada por $\rho_0 = \frac{1}{2}(\delta_+ + \delta_-)$, donde δ es la medida delta de Dirac.

Las desigualdades que envuelven esperanzas, con respecto a la medida de Gibbs de alguna función local f , se llamaran de **desigualdades de correlación de f**. Por ejemplo, una desigualdad envolviendo $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}$, será llamada de desigualdad de correlación de dos puntos.

Teorema II.2.1. (desigualdad GKS) *Para el modelo de Ising en \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, con hamiltoniano*

$$H_{\Lambda}(\sigma) = - \sum_{xy \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y,$$

con $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, $\beta > 0$, $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ donde cada $h_x \geq 0$ y $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ con $J_{x,y} \geq 0$, regular y a primeros vecinos, con condiciones de frontera η siendo $+$ o 0 y $A, B \subset \Lambda$. Tenemos

$$\text{GKS-I} \quad \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta \geq 0, \quad (\text{II.14})$$

$$\text{GKS-II} \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta. \quad (\text{II.15})$$

Las pruebas para campos constantes o nulos pueden ser encontradas en Braga e Roldan [Braga and Araujo, 1999, Braga and Araujo, 2000, Roldan, 2014]. Esta última se encuentra en el apéndice en las secciones A.1 e A.2. También lo podemos encontrar en [Medeiros, 2017, Friedli and Velenik, 2017, Bovier, 2006].

Ejemplo 3. Consideremos el campo magnético \mathbf{h} constante o nulo tenemos luego:

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0, \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+, \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+, \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 \geq 0.$$

lo interesante aquí es que si mudamos la condición de frontera $+$ o 0 por la condición $-$ o cualquier otra condición, en ese caso, ya no tendríamos la seguridad de que las esperanzas sean positivas.

Del teorema anterior tenemos varios resultados, como son

Corolario 1. En las mismas condiciones del Teorema II.2.1 sigue que la correlación $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta$

- no es decreciente en cada entrada $J_{x,y}$ de \mathbf{J} .
- no es decreciente y cóncava con respecto a la componente h_x del campo \mathbf{h} .

Para demostrar que la esperanza de dos spins es no decreciente con respecto a la componente del campo h_x o a la componente de la constante de acoplamiento $J_{x,y}$, derivando la correlación con respecto a esas variables y después usando *GKS – II*. Esa prueba puede ser encontrada en Medeiros e Braga [Medeiros, 2017], [Braga and Araujo, 2000] y como un ejercicio en Friedli y Velenik [Friedli and Velenik, 2017].

Por otra parte con lo que respecta a la prueba de la concavidad, tenemos que derivar dos veces en relación a la componente del campo h_x y después usamos la desigualdad llamada *GHS*.

Teorema II.2.2. (desigualdad GHS) *En las mismas condiciones del Teorema II.2.1 tenemos:*

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta - \langle \sigma_x \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \\ & - \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta + 2 \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \leq 0 \quad (\text{II.16}) \end{aligned}$$

Este teorema apareció en 1970 en el artículo de Griffiths, Hurst y Sherman en [Griffiths et al., 1970], donde para probarlo utilizaron una especie de proto-corrientes aleatorias. Podemos encontrar una prueba alternativa a la del artículo usando la técnica de corrientes aleatorias en Medeiros [Medeiros, 2017].

Continuando con la teoría dotamos a Ω de un **orden parcial**, eso es, vamos a decir que $\omega \leq \omega'$ si para todo x tenemos $\omega_x \leq \omega'_x$. De esa forma, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada de **no decreciente** si y solo si $\omega \leq \omega'$ entonces $f(\omega) \leq f(\omega')$. Una definición similar relacionada a eventos es: decimos que **evento** $E \subset \Omega$ es **no decreciente** si y solo si la función $f = \mathbf{1}_E$ es no decreciente.

Ejemplo 4. *La función $f(\omega) = \sigma_x(\omega)\sigma_y(\omega) = \omega_x\omega_y$, donde ω es la configuración y σ es el spin. Podemos escribir de forma resumida, la función anterior, como $f = \sigma_x\sigma_y$.*

Esta última función no es creciente ni decreciente, pero las esperanzas de esa función son muy importantes en la literatura.

La función $f(\omega) = \sigma_x(\omega) = \omega_x$ es una función creciente.

La siguiente propiedad es muy frecuente en las demostraciones de teoremas, por eso es importante aprenderla

Corolario 2. *Dados Λ, Δ subconjuntos finitos en \mathbb{Z}^d , con $A \subset \Lambda \subset \Delta$, \mathbf{J} a primeros vecinos, regular (eso es $\sum_{\{x,y\}} J_{\{x,y\}} < \infty$) y el campo \mathbf{h} con cada componente mayor o igual a cero. Entonces*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \quad (\text{II.17})$$

Prueba. Sea $\Lambda_1 = \Lambda \cup \{z\}$, $z \notin \Lambda$. Sumamos a $r > 0$ la componente del campo \mathbf{h} en el punto z , o sea, $h_z + r$ y con esto tenemos um nuevo campo que denotaremos por \mathbf{h}_1 . Luego por las propiedades de monotonicidad respecto al campo, sigue que:

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \quad (\text{II.18})$$

Abriendo la segunda esperanza tenemos:

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ = \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda_1}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+} \left[Z_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \right]^{-1}.$$

Para continuar, note que $H_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ = H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ - \sigma_z(h_z + r)$, e con isso

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ &= \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda_1}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} e^{+\beta \sigma_z(h_z + r)} \left[Z_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \right]^{-1} \\ &= \sum_{\sigma = \pm 1} e^{+\beta \sigma_z(h_z + r)} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \left[\sum_{\sigma = \pm 1} e^{+\beta \sigma_z(h_z + r)} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \right]^{-1} \\ &\stackrel{r \rightarrow +\infty}{\leq} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \left[\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \right]^{-1} \\ &= \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+. \end{aligned}$$

Por tanto, volviendo a (II.18) sigue $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+$. Procediendo iterativamente de esta forma concluimos (II.17). \square

También de las desigualdades *FKG – II* tenemos otro corolario, en el que debido a que la condición de frontera es 0 varía el orden de la desigualdad anterior con respecto al volumen.

Corolario 3. *Dados Λ, Δ subconjuntos finitos en \mathbb{Z}^d , con $\Lambda \subset \Delta$, \mathbf{J} a primeros vecinos, regular y el campo \mathbf{h} con cada componente mayor o igual a cero. Entonces, para $A \subset \Lambda$ tenemos*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0. \quad (\text{II.19})$$

En la prueba de este corolario es usada la propiedad que la esperanza es no decreciente con respecto a las constantes de acoplamiento.

Definimos una nueva matriz $\mathbf{J}^1 = (J_{x,y}^1)_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ donde $J_{x,y}^1 = 0$ si uno de los dos x o y está en Λ y el otro está en $\Delta \setminus \Lambda$, para las otras aristas dejamos $J_{x,y}^1 = J_{x,y}$. Al expresar explícitamente la fórmula de la esperanza $\langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}^1}^0$, la constante de acoplamiento \mathbf{J}^1 nos permite separar la sumatoria con respecto a los conjuntos Λ e $\Delta \setminus \Lambda$ y eso nos da la siguiente igualdad $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 = \langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}^1}^0$. Como $J_{x,y}^1 \leq J_{x,y}$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$ el resultado del corolario sigue de la monotonicidad en las interacciones.

Para la siguiente propiedad recordemos un poco las propiedades de las esperanzas condicionales (ver [Ash et al., 2000]). Cuando la variable es discreta la podemos escribir como:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_x xP(X = x|Y = y)$$

y cuando es continua como

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int x f_{X|Y}(x|Y = y)dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int x f_{X,Y}(x, y)dx,$$

aquí también el denominador puede escribirse $f_Y(y) = P(Y = y)$. Para el caso de la esperanza estar condicionada a un evento cualquier $B \in \mathcal{G}$, donde \mathcal{G} es una sigma álgebra, sería la siguiente expresión:

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_B]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_B]} = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_B]}{P(B)}.$$

En cuanto que para la esperanza condicionada en toda la sigma álgebra \mathcal{G} sería $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ con una de su propiedades siendo

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]].$$

Esta probabilidad condicional goza de muchas propiedades muy interesantes de estudiar y que son muy utilizadas en el estudio de martingalas.

La siguiente proposición de las esperanzas de Gibbs hace uso de justamente de esperanzas condicionales.

Proposición 1. (Propiedad de Markov espacial) Sean Λ, Δ subconjuntos finitos en \mathbb{Z}^d , con $\Lambda \subset \Delta$, \mathbf{J} a primeros vecinos, regular y el campo \mathbf{h} , la condición de frontera $\eta \in \Omega$ e $\zeta \in \Omega_\Delta^\eta$. Entonces

$$\langle \cdot | \sigma_x = \zeta_x, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta = \langle \cdot \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\zeta. \quad (\text{II.20})$$

Prueba. Escribamos el siguiente conjunto $B := \{\sigma_x = \zeta_x, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda\}$. Luego, para $f : \Omega_\Delta^\eta \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle f | B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta = \langle f \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \left[\langle \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \right]^{-1} \quad (\text{II.21})$$

El hamiltoniano es de la siguiente forma y lo podemos reacomodar así:

$$\begin{aligned} H_{\Delta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta}(\sigma) &= - \sum_{xy \in E(\Delta)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Delta} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Delta, y \in \Delta^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y \\ &= H_{\Lambda, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\zeta}(\sigma) - \sum_{xy \in E(\Delta \setminus \Lambda)} J_{x,y} \zeta_x \zeta_y - \sum_{x \in \Delta \setminus \Lambda} h_x \zeta_x - \sum_{\substack{x \in \Delta, y \in \Delta^c \\ \|x-y\|=1}} \zeta_x \eta_y. \end{aligned}$$

Al abrir las esperanzas de (II.21) notamos que hay parcelas de el hamiltoniano que no dependen de σ . Entonces pueden salir de la sumatoria tanto de parte del denominador como del numerador y luego la división de esas parcelas seria 1. Así tenemos:

$$\langle f | B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta} = \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\zeta}. \quad (\text{II.22})$$

□

En lo que sigue presentamos una desigualdad muy importante, no solo para el modelo de Ising, sino también para muchos otros modelos tales como el modelo de Potts, aglomerados aleatorios, etc. Esa desigualdad es llamada como la **desigualdad FKG** en homenaje a Fortuin, Kastelym e Ginebre (vea [Fortuin et al., 1971]). La prueba de esta desigualdad puede ser encontrada con detalles en la referencia [den Hollander and Keane, 1986]. La desigualdad adaptada al modelo de Ising es como sigue:

Teorema II.2.3. (desigualdad FKG) Para $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ finito, $\beta > 0$, $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$, $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ con $J_{x,y} \geq 0$, regular y a primeros vecinos, con condiciones de frontera $\eta \in \Omega$ y $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones no decrecientes, tenemos que

$$\langle f g \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta} \geq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta} \langle g \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta}. \quad (\text{II.23})$$

La prueba, para campos no uniformes, de este teorema lo podemos encontrar en [Bovier, 2006, pág. 68].

Ejemplo 5. Como la función σ_x es no decreciente, podemos usar la desigualdad FKG y afirmar que

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{-} \geq \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{-} \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{-}.$$

La desigualdad FKG tiene importantes consecuencias como

Corolario 4. *Dados Λ, Δ subconjuntos finitos en \mathbb{Z}^d , con $\Lambda \subset \Delta$, la constante de acoplamiento \mathbf{J} , el campo \mathbf{h} , como en el Teorema (II.2.3) y $f : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente.*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \geq \langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \quad y \quad \langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \geq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \quad (\text{II.24})$$

Prueba. Para demostrar esta propiedad vamos a usar la propiedad de Markov espacial y luego FKG. Siendo $B := \{\sigma_x = -1, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda\}$ un evento no creciente (un evento B es creciente si y solo si $\mathbb{1}_B$ es una función creciente), tenemos:

$$\begin{aligned} \langle -f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- &= \langle -f|B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \text{ Markov} \\ &= \langle f(-\mathbb{1}_B) \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \left[\langle \mathbb{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \right]^{-1} \\ &\geq \langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \langle -\mathbb{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \left[\langle \mathbb{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \right]^{-1} \text{ FKG} \\ &= -\langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- . \end{aligned}$$

De eso concluimos $\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \leq \langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^-$ y de forma similar para el caso con condición de frontera +. □

Como σ_x es una función creciente, podemos usar obtener:

Ejemplo 6. *Con las condiciones del corolario anterior,*

$$\langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \geq \langle \sigma_x \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \quad y \quad \langle \sigma_x \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \geq \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \quad (\text{II.25})$$

Esta desigualdad nos da muchas otras propiedades como la siguiente:

Corolario 5. *Sean Λ un subconjunto finito en \mathbb{Z}^d , una interacción \mathbf{J} , un campo \mathbf{h} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente. Entonces tenemos*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \quad (\text{II.26})$$

Podemos encontrar la prueba de este resultado en Bovier [Bovier, 2006, pág. 69] o en [Friedli and Velenik, 2017, pág. 100].

En lo que sigue daremos las definiciones de la energía libre y la media de la densidad de magnetización en volumen infinito. Entonces ¿Como se hace para obtener estas magnitudes en volumen infinito?, podríamos pensar en tomar el limite termodinámico pero nos queda la duda si de verdad ese limite existe, para salir de esa duda tenemos el siguiente teorema.

Teorema II.2.4. *La energía libre en volumen infinito*

$$f_{\beta,h} := \lim_{\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{\beta|\Lambda_n|} \ln Z_{\Lambda_n,\beta,h}, \quad (\text{II.27})$$

existe y está bien definida, esto es, no depende de la secuencia de regiones finitas ni de la condición de frontera escogidas.

La prueba de este teorema puede ser encontrada en Braga [Braga and Araujo, 1999, pág 20] y Medeiros [Medeiros, 2017, pág 84].

Seguimos con la definición de la **media de la densidad de la magnetización en volumen infinito**. Para todos los h 's tales que la derivada de la función energía libre en volumen infinito sea:

$$m^\eta(\beta, h) := \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta. \quad (\text{II.28})$$

Ahora tenemos un limite con respecto a las secuencias de volúmenes y muchas posibles condiciones de fronteras. siendo así, podríamos estar trabajando simplemente con algo que no existe y nuestra definición del limite estaría mal. Afortunadamente, en [Friedli and Velenik, 2017, pág 89], [Bovier, 2006, pág 70] tenemos teoremas que demuestran que el limite (II.28) está bien definido.

Teorema II.2.5. *Sea $f_{\beta,h}$ la función energía libre en volumen infinito como en (II.27). Para los h 's, donde $\frac{df_{\beta,h}}{dh}$ existe, tenemos que el limite (II.28) existe independientemente de la condición de frontera y de la secuencia de volúmenes escogida.*

Otra magnitud importante a ser estudiada es la **magnetización espontánea**

$$m^*(\beta) := \lim_{h \rightarrow 0^+} m^\eta(\beta, h). \quad (\text{II.29})$$

Observación 12. *En $h = 0$ no necesariamente existe la derivada de la energía libre en volumen infinito pero la definición (II.29) está bien definida, por cuestiones de convexidad de $f_{\beta,h}$ en h .*

Si las interacciones \mathbf{J} fueran **invariante por traslaciones**, eso es $J_{x,y} = J_{\theta_j x, \theta_j y}$, donde la **traslación** es $\theta_j : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ y es dada por $\theta_j x := x + j$, $j \in \mathbb{Z}^d$; también el campo fuera constante o nulo podríamos enunciar o siguiente teorema:

Proposición 2. Para \mathbf{J} invariante por traslaciones, regular ($\sum_{xy} J_{xy} < \infty$), ferromagnético y $h \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$m^+(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ . \quad (\text{II.30})$$

La prueba de esta proposición puede ser encontrada en Friedli y Velenik [Friedli and Velenik, 2017, pág. 106]. La proposición anterior *no es válido para volúmenes finitos*, dado que la invariancia por traslaciones no es válida en ese caso tampoco cuando el campo \mathbf{h} tiene sus componentes donde cada h_x varia.

Ejemplo 7. En \mathbb{Z}^1 y $\Lambda = \{-n, \dots, n\}$ no es válido que

$$m_{\Lambda}^+(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, h}^+ .$$

También si los h_x de \mathbf{h} no son constantes entonces no es válido que:

$$m^+(\beta, \mathbf{h}) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^+ .$$

Cuando estamos en volumen infinito, la esperanza $\langle \cdot \rangle^+$ del producto de dos spins, que están muy lejos, puede ser descompuesta como el producto de esperanzas:

Proposición 3. Sea $\beta \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$, \mathbf{J} invariante por traslación, ferromagnético, regular y f, g funciones locales. Entonces

$$\lim_{\|j\| \rightarrow \infty} \langle f \cdot \theta_j g \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ = \langle f \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ \langle \theta_j g \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ . \quad (\text{II.31})$$

Podemos encontrar la prueba en [Medeiros, 2017, pág. 66]. Usaremos ese resultado en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8. Con las mismas condiciones de la Proposición (3), tenemos

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ = (\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+)^2 . \quad (\text{II.32})$$

Los resultados anteriores nos ayudaran a definir la **temperatura inversa crítica** que es un punto en la temperatura a partir del cual se pierde la magnetización. La definición de esa magnitud es como sigue $\beta_c(d) := \inf\{\beta \geq 0 : m^*(\beta) > 0\} = \sup\{\beta \geq 0 : m^*(\beta) = 0\}$.

Proposición 4. Sea $\beta \geq 0$, $d \geq 2$ y \mathbf{J} invariante por traslación, ferromagnético, regular. Entonces el punto $\beta_c(d)$ es un número finito.

También se satisface

$$m^+(\beta, 0) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, 0}^+ = m^*(\beta).$$

La Proposición 4 nos dice que existe transición de fase (esto es existe una temperatura crítica finita a partir del cual el sistema deja de tener magnetización) para el modelo de Ising en la red hiper-cubica con $d \geq 2$. Podemos encontrar un bosquejo de la prueba en [Friedli and Velenik, 2017, pág. 106, 109, 114], en el cual se utiliza una herramienta matemática conocida como argumento de Peierls.

Observación 13. La magnetización espontánea en la literatura es usado para definir transición de fase (por ejemplo [Aizenman et al., 1987]), de esta forma, siendo β la temperatura inversa, se $\beta > \beta_c$ tenemos $m^*(\beta) > 0$ y abajo ese punto ($\beta_c > \beta$) tenemos una transición a $m^*(\beta) = 0$.

Ya lo habíamos visto antes que la magnetización espontanea es lo mismo que la esperanza con condición de frontera + de algún spin, eso lo podemos enunciar en el siguiente teorema; note que da una relación entre campo magnético y condición de frontera en la esperanza.

Proposición 5. Sea $\beta \geq 0$, e \mathbf{J} invariante por traslación, ferromagnético, regular. Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^0 = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, 0}^+ . \quad (\text{II.33})$$

Como ya decimos tenemos un sketch de la prueba en [Friedli and Velenik, 2017, pág. 106, 109, 114] y otra haciendo uso del Teorema de Strassen en Medeiros [Medeiros, 2017, pág. 89].

II.3. Modelo de Ising con campo aleatorio

En este capítulo veremos primeramente la medida de Gibbs en volumen infinito y la transición de fase, en el caso determinista, posteriormente veremos el caso en que nuestro campo tiene aleatoriedad lo que transforma la medida de Gibbs en una medida aleatoria.

Cuando veamos la definición matemáticamente de la propiedad de transición de fase veremos que la esencia de esta, es la medida de Gibbs. O sea, el conocimiento sobre las propiedades de la medida de Gibbs en volumen infinito nos da mucha información sobre el comportamiento del sistema.

Para construir la medida de Gibbs es muy importante primero definir el hamiltoniano

$$H(\sigma) = \sum_{i \in \Omega_S} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in S} g_i \sigma_i - \sum_{\substack{i \in S \\ \|i-j\|=1}} \sigma_i \gamma_j.$$

Recordando que trabajamos en un conjunto de vértices de un grafo llamado W , que es un conjunto numerable e infinito, así pudiendo ser, por ejemplo, los vértices de la red \mathbb{Z}^d , de un grafo tipo árbol infinito, del reticulado hexagonal, etc.

El conjunto E_0 es el conjunto donde los spins σ_x asumen sus valores², además es un conjunto metrizable, separable y completo (espacio polaco). En el modelo de Ising escogemos $E_0 = \{-1, +1\}$.

También como el spin es una variable aleatoria tenemos que definirlo, para eso, precisamos un espacio de probabilidad y un espacio medible. Luego, sea \mathcal{E}_0 una sigma-álgebra generada por conjuntos abiertos en una topología métrica; también tengamos una medida de probabilidad ρ_0 , que vamos a llamar de medida a priori del spin. Así nuestro spin está definido en el espacio de probabilidad $(E_0, \mathcal{E}_0, \rho_0)$ y algún espacio medible (E_0, \mathcal{A}) , donde \mathcal{A} es una sigma álgebra.

Precisamos construir un espacio que funcione para varias partículas y por tanto varios spins. Para eso, tomamos el conjunto $\Omega = E_0^W$ y lo dotamos de una topología producto. Las bolas abiertas, son los cilindros³ $B_{\epsilon, S}(\omega) := \{\omega' \in \Omega / \max_{x \in S} |\omega_x - \omega'_x| < \epsilon\}$

²en inglés *single spin space* ver Georgii [Georgii, 2011, pág 12].

³evento local

$\omega'_x| < \epsilon\}$, donde $\omega \in \Omega$, $S \subset W$ y $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Como consecuencia de que E_0 es un espacio polaco tenemos que el espacio topológico producto Ω es completo, separable y metrizable. Usando los abiertos de esta topología construimos la sigma-álgebra de Borel, que denotaremos por \mathcal{E} que satisface $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0^W$. De esta forma tenemos que el spin estaría definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{E}, \nu)$ y un espacio medible (E_0, \mathcal{G}) , siendo \mathcal{G} una sigma álgebra. En cuanto a la medida ν , es la medida que construiremos en este capítulo, una medida que describa el comportamiento del sistema y que funcione para los infinitos spins.

Otra propiedad de Ω es ser compacto, dotada de la topología producto, si E_0 es compacto, esto debido al Teorema de Tychonov.

Observación 14. *La notación Ω_S significa el espacio de configuraciones construido usando el subconjunto $S \subset W$, eso es $\Omega_S =: E_0^S$; esta otra notación \mathcal{E}_S significa la sigma algebra generada por eventos locales (cilindros).*

II.3.1. Presentación de la medida de Gibbs (en volumen infinito)

La medida de Gibbs es una medida que tiene que funcionar para todo el sistema, en \mathbb{Z}^d . Para construirla podríamos pensar en tomar el limite termodinámico y hacer

$$\lim_{\Lambda \rightarrow W} \mu_{\Lambda, \beta, J, h} = \mu_{\beta, J, h}$$

pero ahora surgen las interrogantes:

¿Cómo entendemos ese limite en volúmenes $\lim_{\Lambda \rightarrow W}$ de la medida $\mu_{\Lambda, \beta, J, h}$?

¿Una medida que trabaja en todo W si lo proyectamos sobre una caja $S \subset W$ esta se comporta como la medida finita como W ?

¿Existe ese limite?

¿Ese limite es único?

Observación 15. *Sobre esas preguntas:*

- *para la primera pregunta podemos ir a la subsección II.38 ahí explicamos como se construye una medida en volumen infinito.*

- para la segunda pregunta podemos leer la subsección II.3.1 y II.38.
- para la tercera pregunta también queda aclarado en la sección II.38.
- la última tiene respuesta afirmativa, pero la justificación lo podemos encontrar en el libro de Ivan Velenik [*Friedli and Velenik, 2017, cap 6*].

El limite termodinámico de estados

La expresión $\langle \cdot \rangle_\beta$ es llamada en mecánica estadística **estado**, osea si tenemos la función local f la expresión $\langle f \rangle_\beta$ seria la media de f en el estado $\langle \cdot \rangle_\beta$.

Un estado es una aplicación $f \mapsto \langle f \rangle_\beta$, que lleva una función local en un numero real y que tiene las siguientes propiedades:

- $\langle 1 \rangle_\beta = 1$
- si $f \geq 0$ entonces $\langle f \rangle_\beta \geq 0$
- $\langle f + \lambda g \rangle_\beta = \langle f \rangle_\beta + \lambda \langle g \rangle_\beta$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observación 16. En análisis funcional la aplicación $f \mapsto \langle f \rangle_\beta$ seria llamada de *funcional lineal positivo*.

Para una secuencia de subconjuntos S_n crecientes y encajados tal que cubren todo W y una secuencia de condiciones de frontera η_n . Decimos que la secuencia de distribuciones de Gibbs $(\mu_{S_n, \beta}^{\eta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge al estado $\langle f \rangle_\beta$ si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{S_n, \beta, \eta_n} = \langle f \rangle_\beta, \quad (\text{II.34})$$

para toda función local f .

Aquí estamos usando una secuencia de esperanzas finitas de Gibbs, procurando su convergencia con respecto al volumen, o sea cuando el volumen S_n crece a W . Recuerde que la esperanzas pueden verse como integrales así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \mu_{S_n, \beta, \eta_n}^{\eta_n} = \int f \mu_\beta =: \langle f \rangle_\beta,$$

en otras palabras, eso es un limite débil en una cierta topología. Del teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani (ver [Friedli and Velenik, 2017, cap 6]) tenemos que existe la medida limite μ_β , luego podríamos escribir (II.34) asi

$$\mu_{S_n, \beta, h}^{\eta_n} \rightharpoonup \mu_\beta,$$

Observación 17. *Entiéndase este limite como un limite débil en una cierta topología y no el limite en los reales que usamos en cálculo.*

Otra cosa que no dijimos es porque a veces colocamos un estado como siendo una medida de Gibbs indistintamente. Eso se debe a una consecuencia del **Teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani** y dice lo siguiente

Teorema II.3.1. *Para cada estado $\langle \cdot \rangle_\beta$. Existe una única medida de probabilidad μ_β tal que $\langle f \rangle_\beta = \mu_\beta(f)$, para todo f local.*

Este es un Teorema de la teoría de la medida. La prueba puede se encontrada en libros de esa materia y en [Friedli and Velenik, 2017, pag. 250 y 312].

Observación 18.

- Usaremos la notación $\mu_\beta(f)$ indistintamente de $\int f \mu_\beta$.
- También podemos notar que, como sucede muchas veces en la matemática, este teorema para medidas es una analogía del teorema del valor medio para integrales que conocemos en calculo.

Con esas preguntas notamos que la medida que resultar (si existir) tiene que cumplir requisitos y que no va a ser muy simple su construcción.

La definición de esa medida de Gibbs en volumen infinito usando el limite termodinámico es intuitiva pero tiene algunos puntos vacíos como: que pasa con la definición del hamiltoniano en volumen infinito o como expresa en [Friedli and Velenik, 2017, pag. 248] si la medida del evento $\{\sigma_x = -1\}$ es lo siguiente cuando β y h son fijos.

$$\begin{aligned} \mu_{S_n, \beta, h}^+(\sigma_0 = -1) &= \mu_{S_n, \beta, h}^+(\sigma_0 = +1) - \langle \sigma_0 \rangle_{S_n, \beta, h}^+ \\ &= 1 - \mu_{S_n, \beta, h}^+(\sigma_0 = -1) - \langle \sigma_0 \rangle_{S_n, \beta, h}^+ \end{aligned}$$

luego

$$\mu_{S_n, \beta, h}^+(\sigma_0 = -1) = \frac{1}{2}[1 - \langle \sigma_0 \rangle_{S_n, \beta, h}^+]$$

aplicando el limite termodinámico tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{S_n, \beta, h}^+(\sigma_0 = -1) = \frac{1}{2}[1 - \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+]$$

pues sabemos que el limite $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$ existe, como se puede ver la prueba de eso en [Friedli and Velenik, 2017, pag. 102]. La duda es si podriamos llamar a ese limite como la medida en volumen infinito, eso es, si $\mu_{\beta, h}^+$ es la medida en volumen infinito, se cumpliria

$$\mu_{\beta, h}^+(\sigma_0 = -1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{S_n, \beta, h}^+(\sigma_0 = -1) = \frac{1}{2}[1 - \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+] \quad (\text{II.35})$$

Aquí es bueno recordar que al usar todo \mathbb{Z}^d , el espacio de configuraciones es infinito. Si bien en la medida de Gibbs finita podíamos sumar cada una de las contables configuraciones que satisfacen $\{\sigma_x = -1\}$ y obtener en (II.35) lo siguiente $\frac{1}{2}[1 - \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+]$. En volumen infinito eso no es posible, ya que la función de partición tendrían infinitos sumandos, el hamiltoniano también (no estarían bien definidos) y las probabilidades de cada configuración serian nulas. Entonces 0 debería ser igual $\frac{1}{2}[1 - \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+]$ según (II.35), o es que nuestra interpretación, el entendimiento, de la medida en volumen infinito no está lo suficientemente justificada.

¿Y si usamos el Teorema de extensión de Kolmogorov?

Otro intento de construir la medida en volumen infinito, es usando el Teorema de kolmogorov, pero para enunciarlo daremos las siguientes definiciones:

Sea $\mathcal{M}(\Omega_S)$ el conjunto de todas las medidas de Gibbs definidas en el espacio medible $(\Omega_S, \mathcal{E}_S)$.

Siendo $A \in \mathcal{E}_S$ un evento, S finito. Podemos escribir el evento “ A sucede en S ”, como siendo $\Pi_S^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \omega_S \in A\}$, este tipo de evento es conocido como **evento cilíndrico** A , o sea, que depende solo de las variables aleatorias σ_x con $x \in S$. El conjunto de eventos cilíndricos sera denotado por $\mathcal{C}_S = \{\Pi_S^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}_S\}$.

La **medida marginal** de μ_β en S , con $\mu_\beta \in \mathcal{M}(\Omega)$, es una medida denotada por $\mu_\beta|_S \in \mathcal{M}(\Omega_S)$ que es dada por $\mu_\beta|_S(A) := \mu_\beta(\Pi_S^{-1}(A)) = \mu_\beta(C)$, $A \in \mathcal{E}_S$, C es un

evento cilíndrico con base S , o sea $C \in \mathcal{C}_S$ y Π_S es una aplicación proyección, eso es $\Pi_S : \Omega \rightarrow \Omega_S$, $\Pi_S(\omega) = \omega_S$.

Teorema II.3.2 (Teorema de extensión de Kolmogorov). *Sea $(\mu_{S,\beta})_{S \in W}$ una secuencia de medidas de Gibbs finitas y $\mu_{S,\beta} \in \mathcal{M}(\Omega_S)$. Si se satisface la condición de compatibilidad*

$$\mu_{S,\beta}(A) = \mu_{\Lambda,\beta}(\Pi_\Lambda(\Pi_S^{-1}(A))), \text{ para todo } \Lambda \subset W \text{ y para todo } S \subset \Lambda,$$

donde $A \in \mathcal{E}_S$. Entonces existe una única medida $\mu_\beta \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que la marginal de μ_β en S_n , denotada por $\mu_\beta|_{S_n}$, coincide con $\mu_{S_n,\beta}$.

Ejemplo 9. El siguiente evento $\{\sigma_i = +1\}$ es un evento cilíndrico con base en el vértice $\{i\}$.

Ejemplo 10. Intentar construir la medida en volumen infinito usando el Teorema de Extensión de Kolmogorov no es posible, por que falla la condición de compatibilidad, como podemos ver:

Tomemos el Hamiltoniano $H(\sigma) = \sum_{xy} \sigma_x \sigma_y + h \sum_x \sigma_x$ y siendo $S = \{0\}$, $\Lambda = \{0, i\}$ conjuntos de vértices de uno y dos elementos respectivamente.

Entonces notamos que $|\Omega_S| = 2^1$ y $|\Omega_\Lambda| = 2^2$ tienen ese numero de configuraciones.

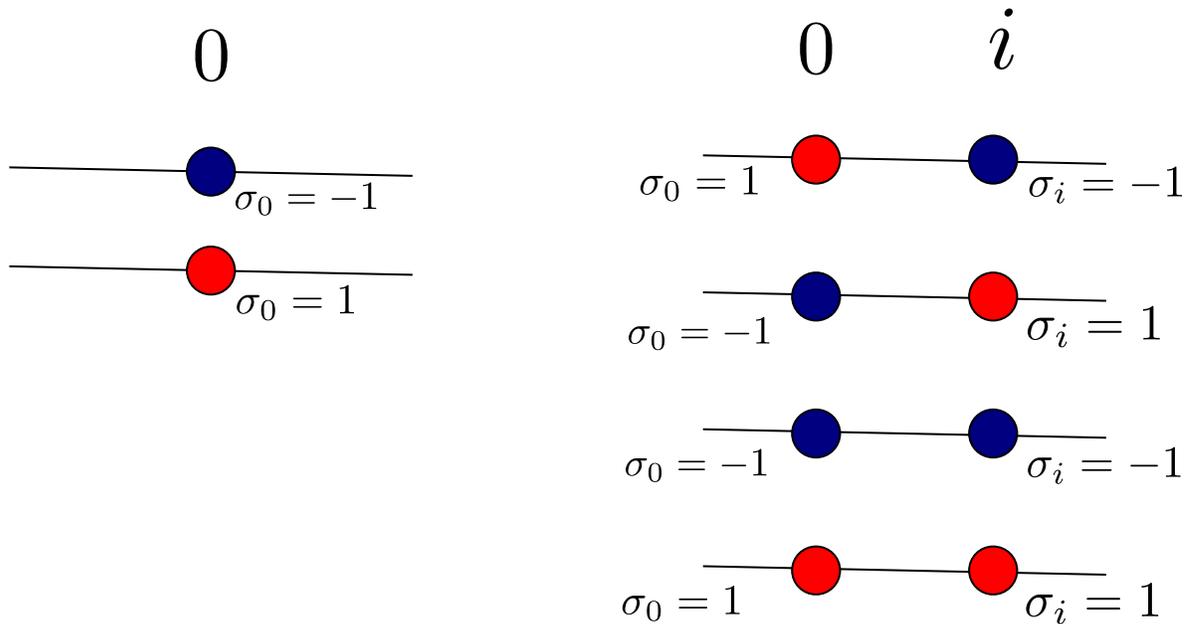


Figura II.3: Configuraciones posibles para S y Λ .

Luego

$$\mu_{S,\beta}^0(\sigma_0 = -1) = \frac{-e^{\beta h}}{Z_S^0} = \frac{-e^{\beta h}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}} \quad \text{y} \quad \mu_{\Lambda,\beta}^0(\sigma_0 = -1) = \frac{-e^{-\beta(1-2h)} - e^\beta}{Z_\Lambda^0}$$

Como vemos no se cumple la condición de compatibilidad ya que:

$$\mu_{S,\beta}^0(\sigma_0 = -1) \neq \mu_{\Lambda,\beta}^0(\sigma_0 = -1).$$

Construcción DLR

A pesar de que, ligeramente hablando, ya dijimos que esa medida límite μ_β existe, aun queda vacíos en su definición y aun no dimos detalles de su construcción. Vimos que no funciona tratar de construir esta medida usando marginales de la medida, lo que nos queda es tratar de definirla usando medidas condicionales, ese fue el enfoque usado por Roland Dobrushin de 1968 a 1969 en el quinquenio siguiente por [Landford y Ruelle](#).

Entonces tenemos que definir el hamiltoniano, correctamente, en volumen infinito. Anteriormente dijimos que usamos el hamiltoniano para medir la energía del sistema, pero ¿la expresión matemática del hamiltoniano considerando infinitos vértices, reflejaría la energía físicamente? parece confuso. Como se hace en Bovier [[Bovier, 2006](#), pag. 51] podemos preguntarnos ¿como sería la energía de una configuración infinita si la reducimos a un subconjunto finito $S \subset W$?. La definición de este hamiltoniano restringido a S sería como sigue:

$$H_S(\sigma) := - \sum_{\substack{x \in S, y \in S \cup S^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in S} h_x \sigma_x,$$

Observación 19. *Esta definición es diferente de la dada en el capítulo 1 en (II.3) ya que en esta se considera sumas en vértices que están fuera del conjunto finito S , específicamente los que están en la frontera exterior de S .*

La buena propiedad de este hamiltoniano es que permite la iteración en subconjuntos, eso es, si $S \subset S'$ vale que

$$(H_{S'})_S(\sigma) = H_S(\sigma).$$

Lo que significa que primero obtenemos el hamiltoniano en el conjunto de vértices S' posteriormente lo restringimos al subconjunto S . Esto nos va ayudar a que la medida de Gibbs condicional consiga satisfacer la condición de compatibilidad.

Daremos una clase amplia de Hamiltonianos para los que podemos definir nuestra medida Gibbsiana y para eso definimos

$B(\Omega, \mathcal{E}_A)$ el conjunto de aplicaciones limitadas y medibles, yendo de (Ω, \mathcal{E}_A) y tomando valores en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definición. 2. Una interacción Φ , es una familia $\{\Phi_A\}_{A \subset W}$, donde cada $\Phi_A \in B(\Omega, \mathcal{E}_A)$. También una interacción es llamada regular si para cualquier $i \in W$, existe una constante finita c_i tal que

$$\sum_{A \ni i} \|\Phi_A\|_\infty \leq c_i < \infty.$$

Una interacción regular es llamada continua si, para cada $A \subset W$, Φ_A es continua.

Consideremos el conjunto de todas las interacciones regulares Φ y dotado de una norma $\|\Phi\|_R = \sup_{x \in W} \sum_{A \ni x} \|\Phi_A\|_\infty$, se convierte en un espacio de Banach, que lo llamaremos I_0 . Usando las interacciones vamos a crear hamiltonianos. Sea S un subconjunto finito de W , definimos:

$$H_S(\sigma) := - \sum_{A \cap S \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma), \quad (\text{II.36})$$

Este Hamiltoniano si está en I_0 entonces H_S será limitado.

Si tomamos una interacción Φ en I_0 , entonces se satisface que

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_R &= \sup_{x \in W} \sum_{A \ni x} \|\Phi_A\|_\infty \leq C \\ \sup_{x \in W} \sum_{A \ni x} \sup_{\sigma} |\Phi_A(\sigma)| &\leq C \\ \sum_{A \ni x} |\Phi_A(\sigma)| &\leq C \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Sea $x \in S$, si sumamos todos los x que satisfacen (II.37), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{A \cap S \neq \emptyset} |\Phi_A(\sigma)| &\leq |\Lambda|C \\ \left| \sum_{A \cap S \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma) \right| &\leq |\Lambda|C \end{aligned}$$

Ahora recordamos que el hamiltoniano es $H_S(\sigma) := - \sum_{A \cap S \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma)$, así que

$$|H_S(\sigma)| \leq |\Lambda|C$$

$$\|H_S\|_\infty = \sup_\sigma |H_S(\sigma)| \leq |\Lambda|C.$$

Ejemplo 11. La interacción para el modelo de Ising, con condición de frontera η , será

$$\Phi_A = \begin{cases} \sum_{x,y} \sigma_x \sigma_y, & \text{si } A = \{x, y\}, |x - y| = 1, \\ \sum_x h_x \sigma_x, & \text{si } A = \{x\}, \\ \sum_{x,y} \sigma_x \eta_y, & \text{si } A = \{x, y\}, |x - y| = 1. \end{cases}$$

Eso da

$$H_S(\sigma) = - \sum_{\substack{x,y \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \sigma_y - \sum_x h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x,y \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y.$$

El hamiltoniano (II.36) tiene las propiedades del hamiltoniano definido en el capítulo 1 y podemos comenzar a construir la medida de Gibbs en volumen infinito.

Para eso definiremos lo que es un núcleo de probabilidad

Definición. 3. Una especificación local es una familia de núcleos de probabilidad $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}\}_{S \subset W}$, tal que:

1. Para todo $S \subset W$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}(\mathcal{A})$ es una función medible con respecto a la sigma-álgebra \mathcal{E}_{S^c} .
2. Para todo $\eta \in \Omega$, $\mu_{S,\beta}^\eta(\cdot)$ es una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{E}) .
3. Para cualquier par de volúmenes $S, S' \subset W$, con $S \subset S'$, y cualquier función medible f , entonces

$$\int \mu_{S',\beta}^\eta(d\sigma') \mu_{S,\beta}^{\sigma'_{S^c}}(d\sigma) f(\sigma_S \sigma'_{S' \setminus S} \eta_{S'^c}) = \int \mu_{S',\beta}^\eta(d\sigma') f(\sigma'_{S'}, \eta_{S'^c}),$$

o en notación resumida

$$\mu_{S',\beta}^{(\cdot)} \mu_{S,\beta}^{(\cdot)} = \mu_{S',\beta}^{(\cdot)}.$$

Observación 20.

- Otros autores denotan los núcleos de probabilidad como $\pi_S(\mathcal{A}|\cdot)$, lo que en el texto de Bovier y en este texto lo denotamos como $\mu_S^{(\cdot)}(\mathcal{A})$.
- Las dos primeras condiciones de la definición anterior (3), son las que definen un núcleo de probabilidad.

- Decimos que un núcleo de probabilidad es un **núcleo propio** si $\mu_{S,\beta}^\eta(\mathcal{B}) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}}(\eta)$, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{E}_{S^c}$ y para todo $\eta \in \Omega$.

La especificaciones tienen un comportamiento muy parecido a la probabilidades condicionales, en Bovier dice que la podemos ver “probabilidades condicionales esperando una medida” (ver [Bovier, 2006, pág. 57], [Friedli and Velenik, 2017, pág 258]). El lector puede ver la definición 6 para hacerse una idea.

Entre las propiedades que son comunes a ambas tenemos la condición de compatibilidad. Esa propiedad en el caso de las esperanzas condicionales es conocida como a “**tower rule**”, que hablando ligeramente dice lo siguiente: sea $\mu(f|\mathcal{G})$ la esperanza condicional de f dadas las sigmas-álgebra $\mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{G}'$ satisfaciendo $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{F}$ tenemos

$$\mu(\mu(f|\mathcal{G}')|\mathcal{G}) = \mu(f|\mathcal{G}).$$

Ya vimos la definición de las especificaciones $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}\}_{S \subset W}$, si los núcleos $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}$ tienen la siguiente forma particular

$$\mu_{S,\beta}^{(\eta)}(\sigma) := \frac{1}{Z_{S,\beta}^{(\eta)}} e^{-\beta H_S(\sigma_S \eta_{S^c})} \rho_S(d\sigma),$$

los llamaremos de **especificación Gibbsiana** (ver [Friedli and Velenik, 2017, pág. 260]).

También lo podemos tener en su forma integral

$$\int \mu_{S,\beta}^{(\eta)}(\sigma) f(\sigma) := \int \rho_S(d\sigma) \frac{1}{Z_{S,\beta}^{(\eta)}} e^{-\beta H_S(\sigma_S \eta_{S^c})} f(\sigma_S \eta_{S^c}),$$

el hamiltoniano es dado por una interacción regular como en (II.36).

Antes de seguir, recordemos lo que es una una esperanza condicional.

Definición. 4. Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y f una función \mathcal{F} -medible y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub sigma algebra. Vamos a llamar a la función $g := \mu(f|\mathcal{G})$ una esperanza condicional de f , si y solo si:

1. g es \mathcal{G} -medible,
2. para cualquier función h , \mathcal{G} -medible es valido que $\mu(hg) = \mu(hf)$.

Observación 21. Usamos la notación de la medida ν aun cuando nos referimos a la esperanza generada por esta. Esto como consecuencia del Teorema II.3.1.

Como lo estamos alertando las especificaciones se comportan como distribuciones de probabilidad condicionales, pero queda la duda es: ¿que tipo de distribución condicional son? para eso presentamos lo siguiente

Definición. 5. Dadas dos sigma-álgebras $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$, una **distribución condicional regular** es una función $\nu_{\mathcal{G}}^{\eta}$ tal que

1. Para cada $\eta \in \Omega$, $\nu_{\mathcal{G}}^{\eta}$ es una medida de probabilidad en \mathcal{F} , y
2. Para cada $A \in \mathcal{F}$, $\nu_{\mathcal{G}}^{\eta}(A)$ es una función \mathcal{G} medible tal que su versión es $\mu(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})(\eta)$, eso significa que para cuasi todo $\eta \in \Omega$ se satisface $\nu_{\mathcal{G}}^{\eta}(A) = \mu(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})(\eta)$.

Una función así satisfaciendo esas condiciones siempre va existir pues tomamos E como un espacio polaco (ver [Billingsley, 2008]).

La idea de usar especificaciones para conseguir una definición matemáticamente rigurosa de la medida de Gibbs en volumen infinito surgió con Dobrushin en 1968-1969 [Dobrushin, 1968], y luego le siguieron Ruelle y Landford [Lanford and Ruelle, 1969].

Definición. 6. Sea $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}\}_{S \subset W}$ una especificación local. Una medida μ_{β} es llamada **compatible con su especificación local** si y solo si para todo $S \subset W$ y todo $f \in B(\Omega, \mathcal{E})$,

$$\mu_{\beta}(f|\mathcal{F}_{S^c}) = \mu_{S,\beta}^{(\cdot)}(f), \quad \mu_{\beta}\text{-cuasi ciertamente.}$$

Ahora conociendo a la medida compatible con su especificación local podemos definir la medida de Gibbs.

Definición. 7. A la medida que sea compatible con la especificación Gibbsiana local, para una interacción regular Φ , la temperatura inversa β y la medida a priori ρ . La llamaremos de **medida de Gibbs** μ_{β} correspondiente a Φ , β , ρ .

De esta forma acabamos de construir y definir mejor la medida de Gibbs en volumen infinito.

Observación 22.

- La definición es muy importante y interesante por eso es bueno ver como es definida en varios textos como [Georgii, 2011, pág. 16], [Bovier, 2006, pág. 57], [Friedli and Velenik, 2017, pág. 261].

- La distribución condicional regular $\mu_\beta(f|\mathcal{F}_{S^c})$ se consigue de f integrando sobre todas las variables σ_x con $x \in S$ y dejando fijas todas las σ_x con $x \in S^c$.

Sabemos la definición de la medida de Gibbs pero como sabemos si una medida cualquier es en verdad una medida de Gibbs, para eso usamos el siguiente resultado.

Teorema II.3.3. Una medida de probabilidad μ_β es una medida de Gibbs para Φ, β, ρ si y solamente si, para todo $S \subset W$,

$$\mu_\beta \mu_{S,\beta}^{(\cdot)} = \mu_\beta. \quad (\text{II.38})$$

Prueba. Probaremos la ida: si la medida μ_β es de Gibbs entonces por su definición es compatible con su especificación local eso es

$$\mu_\beta(f|\mathcal{F}_{S^c}) = \mu_{S,\beta}^{(\cdot)}(f), \quad \mu_\beta\text{-cuasi ciertamente,}$$

luego por la ley de la probabilidad total tenemos:

$$\mu_\beta \mu_\beta(f|\mathcal{F}_{S^c}) = \mu_\beta(f).$$

Ahora para mostrar la vuelta: Observemos la definición (4), podemos notar que $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}$ satisface la primera condición, ya que una especificación por definición es \mathcal{F}_{S^c} medible. Veamos si la especificación satisface la segunda condición de la esperanza condicional, para eso consideremos

$$\begin{aligned} \mu_\beta \left[\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[f(\eta_S) h(\eta_{S^c})] \right] &= \mu_\beta \left[h(\eta_{S^c}) \mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[f(\eta_S)] \right] \\ &= \mu_\beta \left[h(\eta_{S^c}) f(\eta_S) \right] \end{aligned}$$

esto es posible ya que $h(\eta_{S^c})$ es \mathcal{F}_{S^c} -medible, propiedades de la esperanza condicional y (II.38). Así podemos notar que la especificación es compatible con una esperanza condicional, luego es una medida de Gibbs. \square

Las ecuaciones (II.38) son conocidas como ecuaciones *DLR* eso en honor a Dobrushin, Lanford y Ruelle, que fueron los primeros en usar la idea de especificaciones para construir la medida en volumen infinita.

Con esta definición rigurosa, podemos enunciar el limite termodinámico, como un teorema.

Teorema II.3.4. *Sea Φ una interacción regular y continua, $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}$ la especificación Gibbsiana correspondiente. Sea S_n una secuencia de volúmenes finitos crecientes y absorbentes. Si, para algún $\eta \in \Omega$, la secuencia de medidas $\mu_{S,\beta}^\eta$ converge débilmente a una medida de probabilidad λ , entonces λ es la medida de Gibbs con respecto Φ, ρ, β .*

La demostración de este resultado puede ser vista en [Bovier, 2006, cap. 4].

II.3.2. Breve presentación de la medida de Gibbs aleatoria

Si consideramos el siguiente hamiltoniano

$$H_S(\sigma)[\omega] := - \sum_{x,y \in E(S)} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in S} h_x[\omega] \sigma_x,$$

donde $\sigma \in \Omega$, $\omega \in U$, $h_x[\omega]$ es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(U, \mathcal{U}, \mathbb{P})$. Esta nueva aleatoriedad altera el comportamiento de nuestra medida de Gibbs.

Similarmente como hicimos en la construcción de la medida de Gibbs también puede ser construida usando especificaciones, pero esta vez las especificaciones tendrán la aleatoriedad respectiva a h_x .

Entonces comencemos con las definiciones aleatorias de la especificaciones, las especificaciones Gibbsianas y la medida de Gibbs.

Definición. 8. *La especificación local aleatoria es una familia de núcleos de probabilidad $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[\omega]\}_{S \subset W}$, dependiendo del parámetro aleatorio, ω , tal que:*

1. *Para todo $S \subset W$ y $A \in \mathcal{E}$, $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}(A)$ es una función medible con respecto a la sigma-álgebra $\mathcal{E}_{S^c} \times \mathcal{B}$.*
2. *Para \mathbb{P} -cuasi todo ω , para todo $\eta \in \Omega$, $\mu_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega](d\omega)$ es una medida de probabilidad en Ω .*
3. *Para \mathbb{P} -cuasi todo ω , la familia $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[\omega]\}_{S \subset W}$ es una especificación Gibbsiana para una interacción aleatoria y la temperatura inversa β .*
4. *Una especificación local aleatoria es llamada de continua si, para cualquier S finito, $\mu_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega]$ es conjuntamente continua en $\eta \in \Omega$ e $\omega \in U$.*

En especial tomemos la especificación Gibbsiana.

Definición. 9. Si tenemos una interacción regular aleatoria. Tenemos que la expresión

$$\mu_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega](d\sigma) := \frac{1}{Z_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega]} e^{-\beta H_S[\omega](\sigma_S \eta_{S^c})} \rho_S(d\sigma_S) \delta_{\eta_{S^c}}(d\sigma_{S^c})$$

es llamada de especificación aleatoria Gibbsiana. Además de eso, si Φ es continua, la especificación Gibbsiana es continua.

Para definir la medida de Gibbs aleatoria definimos primero el siguiente espacio. $M(\Omega, \mathcal{E})$ es el conjunto de medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{E}) .

Definición. 10. La aplicación medible $\mu_\beta : U \rightarrow M(\Omega, \mathcal{E})$ será conocida como **medida aleatoria de Gibbs** para una interacción aleatoria y la temperatura inversa β si, para \mathbb{P} -cuasi todo ω , la medida $\mu_\beta[\omega]$ es compatible con a especificación local $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[\omega]\}_{S \subset W}$ para la interacción tomada.

Ya enunciamos la definición de la medida pero aun no hemos probado que de verdad esta medida existe, como en el caso de la medida usual de Gibbs podíamos hacerlo por definir especificaciones Gibbsianas y medidas compatibles con esta. Por otra parte podríamos usar el limite termodinámico para verificar esta medida.

Si usamos el método de limite termodinámico, en el caso de la medida aleatoria seria: considerando E compacto, para cuasi todo $\omega \in U$, con $S_n[\omega]$ crecientes y absorbentes; entonces la sucesión $\mu_{S_n,\beta}^\eta[\omega]$ posee puntos de acumulación. Así tenemos la subsección $S_{n_m}[\omega]$ de $S_n[\omega]$ tal que

$$\mu_{S_{n_m}[\omega],\beta}^\eta[\omega] \rightarrow \mu_\beta[\omega],$$

osea, la subsección converge a la medida de Gibbs, para una interacción aleatoria $\Phi[\omega]$ (Ver Bovier [Bovier, 2006, pág. 100]).

Observación 23. Que tengamos subsucesiones que convergen a la medida de Gibbs depende de la realización $\omega \in U$ tomada. Osea $\mu_\beta[\omega]$ va a depender de la realización tomada. Esto nos hace preguntarnos ¿la aplicación $\omega \mapsto \mu_\beta[\omega]$ es medible?

Si queremos construir rigurosamente la medida de Gibbs aleatoria tenemos que superar el problema de su medibilidad. En el libro de [Bovier, 2006] afirma que el estudio fue iniciado con Van Enter [van Enter and Griffiths, 1983], Aizenman Wehr [Aizenman and Wehr, 1989]; en la literatura de spin glasses con Charles Newman y Daniel Stein [Newman and Stein, 1998].

Con los teoremas en esos trabajos, afortunadamente, la existencia rigurosa de la medida aleatoria ya fue superado.

II.3.3. Resumen sobre el Modelo de Ising con Campo Aleatorio

Estudiaremos el modelo de Ising con los campos siendo variables aleatorias. Eso es en

$$H_S(\sigma)[\omega] := - \sum_{x,y \in E(S)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in S} h_x[\omega] \sigma_x,$$

donde $h_x[\omega]$ es una variable aleatoria. Este modelo puede ser más general, considerando la aleatoriedad en las constantes de acoplamiento \mathbf{J} o la estructura de grafo.

El modelo de Ising con campo aleatorio (en inglés **Random Field Ising Model** es abreviado por **RFIM**) fue primeramente estudiado por Imry y Ma que en [Imry and Ma, 1975] afirmaron, para la red hipercúbica en dimensión $d \leq 2$, no hay transición de fase, pero en $d \geq 3$ hay varias medidas aleatorias de Gibbs. Posteriormente, tendríamos las pruebas en los artículos de Bricmont y Kupiainen [Bricmont and Kupiainen, 1987, Bricmont and Kupiainen, 1988] para $d \geq 3$ y también los de Aizenman y wehr [Aizenman and Wehr, 1989, Aizenman and Wehr, 1990] para $d \leq 2$.

Con el fin de entender mejor el RFIM recordemos el argumento de Peierls [Peierls, 1936]; que es la base de métodos para probar transición de fase (ver Bovier [Bovier, 2006, Ch. 4]).

Breve presentación del Argumento de Peierls

Sea xy una arista en \mathbb{Z}^d y denote por xy^* su **plaqueta** dual, eso es el espacio dado por los puntos intermedios entre arista y arista.

Otra forma de pensar en las plaquetas duales son los lados $(d - 1)$ -dimensional que corta cada arista por la mitad.

Ahora, reuniremos todas las plaquetas que satisfacen una condición en el siguiente

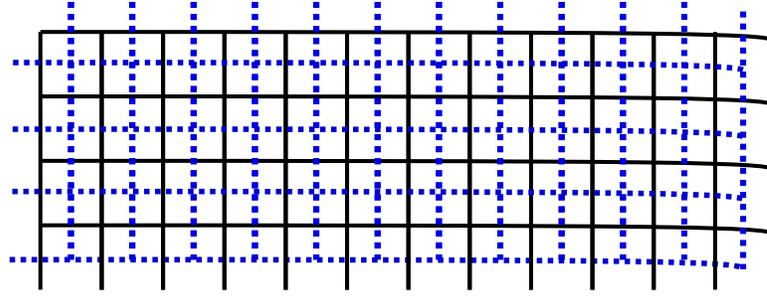


Figura II.4: Las líneas definidas representan las aristas y las líneas punteadas representan las plaquetas duales en \mathbb{Z}^2 .

conjunto

$$\Gamma(\sigma) := \{xy^* | \sigma_x \sigma_y = -1\},$$

observe que $\Gamma(\sigma) \subset \mathbb{R}^d$, es una superficie en $d = 3$ y en $d = 2$ curvas.

Llamaremos a las componentes conexas de Γ de **contornos** y escribiremos $\gamma \in \Gamma$. Los contornos tienen la propiedad de ser cerrados de longitud finita o infinita (Podemos aprender más de contornos en [Bovier, 2006, pag 63], [Velenik, 1997, cap 2], [Friedli and Velenik, 2017], [Procacci, 2005]).

Expansión en contornos

Veamos como hacer una expansión en contornos

Sea $\sigma \in \Omega_S^+$ y

$$H_{S,h}(\sigma) = - \sum_{xy \in E(S)} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in S} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{\|x-y\|=1 \\ x \in S, y \notin S}} J \sigma_x.$$

Definimos el conjunto \mathcal{E}_S como el conjunto de todas las aristas $E(S)$, juntamente con todas las aristas que unen S a su frontera ∂S . Recordemos que la frontera es $\partial S := \{y \in S^c : \|x - y\| = 1, x \in S\}$.

La condición de frontera positiva η^+ significa que los puntos que están en ∂S , todos toman $\eta_y = 1$.

Así, podemos reducir la expresión anterior del hamiltoniano

$$H_{S,h}(\sigma) = - \sum_{xy \in \mathcal{E}_S} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in S} h_x \sigma_x$$

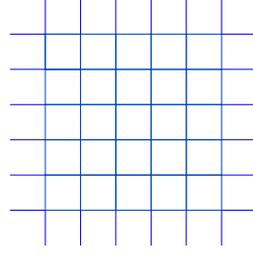


Figura II.5: Representación del conjunto \mathcal{E}_S .

Sea xy una arista en \mathbb{Z}^d y denote por xy^* una plaqueta dual. Denotemos por

$$\Gamma(\sigma) := \{xy^* | \sigma_x \sigma_y = -1\},$$

el conjunto $\Gamma(\sigma) \subset \mathbb{R}^d$ es una superficie en $d = 3$ y curvas en $d = 2$.

A las componentes conexas de Γ las llamamos de **contornos** y escribimos $\gamma \in \Gamma$. Los contornos tienen la propiedad de ser cerrados, pueden ser de longitud finita e infinitas. (ver [Bovier, 2006, pag 63], [Velenik, 1997, cap 2],[Friedli and Velenik, 2017], [Procacci, 2005])

Veamos como conseguir la expansión en contornos, vamos hacer esto considerando *hamiltonianos con campo*. En la mayoría de libros se encuentra solo la expansión en contornos sin campo.

Para eso sumamos en las parcelas mas uno y menos uno.

$$\begin{aligned} H_{S,h}(\sigma) &= - \sum_{xy \in \mathcal{E}_S} J(\sigma_x \sigma_y - 1 + 1) - \sum_{x \in S} h_x(\sigma_x - 1 + 1) \\ &= -J|\mathcal{E}_S| - \sum_{x \in S} h_x - \sum_{xy \in \mathcal{E}_S} J(\sigma_x \sigma_y - 1) - \sum_{x \in S} h_x(\sigma_x - 1). \end{aligned}$$

Si $\sigma_x \sigma_y = 1$, la segunda sumatoria arriba desaparece. Cuando $\sigma_x \sigma_y = -1$ genera contornos (en algunos libros son llamados de polímeros γ_k). Note que en el interior de los contornos toman en el valor de -1 .

$$\begin{aligned} H_{S,h}(\sigma) &= -J|\mathcal{E}_S| - \sum_{x \in S} h_x + 2J \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} |\gamma_k| + 2 \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \sum_{x \in \gamma_k} h_x \\ &= -J|\mathcal{E}_S| - \sum_{x \in S} h_x + 2 \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \left[J|\gamma_k| + \sum_{x \in \gamma_k} h_x \right]. \end{aligned}$$

Recordemos que $\Gamma(\sigma)$ es el conjunto de contornos asociados a la configuración σ . El conjunto γ son los vértices de \mathbb{Z}^d que están rodeados por el contorno γ . En cuanto que

$|\gamma|$ denota el número de lados, respecto a cada spin con signo diferente, del contorno γ , en $d = 2$.

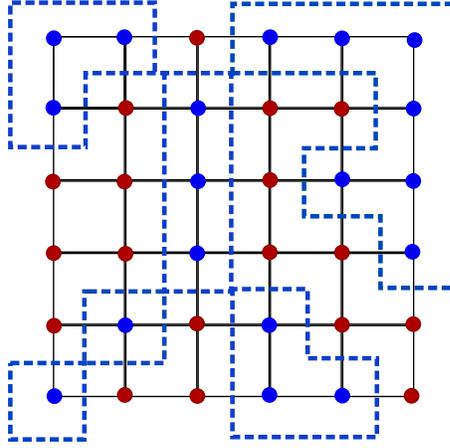


Figura II.6: Considerando condición de frontera + (no graficada), las líneas punteadas representan los contornos, puntos rojos son $\sigma_x = +1$ y puntos azules son $\sigma_x = -1$.

Observación 24. Para condición de frontera negativa $\sigma \in \Omega_S^-$ el hamiltoniano es dado por

$$H_{S,\mathbf{h}}(\sigma) = -J|\mathcal{E}_S| + \sum_{x \in S} h_x + 2 \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \left[J|\gamma_k| - \sum_{x \in \gamma_k} h_x \right].$$

Ya dimos la expresión para el hamiltoniano y ahora la función partición es descrita como

$$Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)} = C_{\beta,\mathbf{h}}^+(S) \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k), \quad (\text{II.39})$$

donde $C_{\beta,\mathbf{h}}(S) := \exp\{J\beta|\mathcal{E}_S| + \beta \sum_{x \in S} h_x\}$ y $\xi(\gamma_k) := \exp\{-2\beta J|\gamma_k| - 2\beta \sum_{x \in \gamma_k} h_x\}$.

Observación 25. Llegado a este punto podríamos usar otro tipo de expansión que se llama expansión en polímeros podemos aprender sobre eso en [Procacci, 2005, Friedli and Velenik, 2017, Pfister, 1991, Velenik, 1997], en la tesis de Velenik demuestra la relación uno a uno entre contornos y configuraciones.

Expresión usando la expansión en contornos de la esperanza

La expresión para la medida de Gibbs, considerando $\sigma \in \Omega_S^+$, es

$$\mu_{S,\beta,\mathbf{h}}^+(\sigma) := e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)} \left[\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)} \right]^{-1} = \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k) \left[\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k) \right]^{-1}.$$

Ejemplo 12. las funciones de correlación de un sitio, son descritas por

$$\langle \sigma_x \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ := \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \sigma_x e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)} [Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+]^{-1} = \frac{\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+(x)}{\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+},$$

donde $\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+(A) := \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \sigma_A \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)$, siendo A un subconjunto finito de S y $\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ := \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)$.

Podemos describir el spin de x en términos de los contornos que lo rodean, de la siguiente manera

$$\sigma_x = (-1)^{\sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} \mathbb{1}_{[x \in \gamma]}} = \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} (-1)^{\mathbb{1}_{[x \in \gamma]}} = \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} (-1)^{\mathbb{1}_{[x \in \gamma_k]}}.$$

Usando la última identidad arriba en la expansión de la correlación podemos obtener

$$\langle \sigma_x \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi_x(\gamma_k)}{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)},$$

donde $\xi_x(\gamma_k) = (-1)^{\mathbb{1}_{[x \in \gamma_k]}} \exp\{-2\beta J|\gamma_k| - 2\beta \sum_{x \in \gamma_k} h_x\}$.

Con un procedimiento análogo al utilizado arriba, obtenemos la expansión de la correlación de un subconjunto finito $A \subset S$, como siendo

$$\langle \sigma_A \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi_A(\gamma_k)}{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)},$$

considerando $\sigma_A = (-1)^{\sum_{x \in A} \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} \mathbb{1}_{[x \in \gamma]}}$ y $\xi_A(\gamma_k) = (-1)^{\sum_{x \in A} \mathbb{1}_{[x \in \gamma_k]}} \xi(\gamma_k)$.

Observación 26. Cuando el campo es nulo $\mathbf{h} = 0$ la medida de Gibbs es

$$\begin{aligned} \mu_{S,\beta,\mathbf{h}}^+(\sigma) &:= \frac{e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)}} \\ &= \frac{\prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} e^{-2\beta J|\gamma|}}{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} e^{-2\beta J|\gamma|}} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

El siguiente lema condensa la observación de Peierls el notó que la probabilidad de que aparezca un contorno en una configuración disminuye con el tamaño del contorno o si la temperatura es pequeña (baja temperatura).

Lema 1. *Sea μ_β una medida de Gibbs, con campo nulo $\mathbf{h} = 0$, $\beta > 0$, $\mathbf{J} = 1$ y γ un contorno finito. Entonces*

$$\mu_\beta[\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq 2e^{-2\beta|\gamma|}. \quad (\text{II.41})$$

La siguiente prueba que daremos esta inspirada en Friedli y Velenik [Friedli and Velenik, 2017] y es para $d = 2$. Tambien la prueba de este teorema y de los dos teoremas siguientes las podemos encontrar en Bovier [Bovier, 2006] para $d \geq 2$.

Prueba. Fijamos un contorno en especial y lo representamos como γ_* , también para no sobrecargar las notaciones escribiremos solamente Γ significando $\Gamma(\sigma)$. Luego

$$\begin{aligned} \mu_{S,\beta}[\gamma_* \in \Gamma] &= \sum_{\sigma: \gamma_* \in \Gamma(\sigma)} \mu_{S,\beta}(\sigma) \\ &= \frac{e^{-2\beta|\gamma_*|} \sum_{\sigma: \gamma_* \in \Gamma} \prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{\gamma \in \Gamma} e^{-2\beta|\gamma|}} \end{aligned}$$

En lo que sigue vamos a mostrar

$$\frac{\sum_{\sigma: \gamma_* \in \Gamma} \prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{\gamma \in \Gamma} e^{-2\beta|\gamma|}} \leq 1, \quad (\text{II.42})$$

o sea todo esa fracción es limitada por uno.

observe que para la configuración σ tal que $\gamma_* \in \Gamma(\sigma)$ podemos asociarla a otra configuración σ' creada por retirar el contorno γ_* , luego podemos definirla como

$$\sigma'_i := \begin{cases} -\sigma_i & \text{si } i \in \underline{\gamma_*} \\ \sigma_i & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ahora consideremos el conjunto $\mathcal{O}(\gamma_*)$ que contiene todas las configuraciones σ' asociadas a σ tal que $\gamma_* \in \Gamma(\sigma)$. Observe que Ω_S^+ tiene más configuraciones que $\mathcal{O}(\gamma_*)$. Reescribimos la sumatoria

$$\sum_{\sigma' \in \mathcal{O}(\gamma_*)} \prod_{\gamma' \in \Gamma(\sigma')} e^{-2\beta|\gamma'|} = \sum_{\sigma: \gamma_* \in \Gamma} \prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|}.$$

Lo ultimo nos permite observar que (II.42) es verdad.

Para obtener (II.41) basta tomar limite sobre el volumen. \square

Observación 27. *En la prueba anterior σ esta significando configuración y no spin.*

En lo que sigue vamos usar el lema anterior para acotar la probabilidad de un spin tomar -1 , note que

$$\mu_{S,\beta,0}^+(\sigma_0 = -1) \leq \mu_{S,\beta,0}^+(\exists \gamma_* \in \Gamma : \underline{\gamma}_* \ni 0) \leq \sum_{\gamma_* : \underline{\gamma}_* \ni 0} \mu_{S,\beta,0}^+(\Gamma \ni \gamma_*). \quad (\text{II.43})$$

Esas desigualdades nos van ayudar a mostrar transición de fase para $d \geq 0$ y $\mathbf{h} = 0$.

Teorema II.3.5. *Sea μ_β una medida de Gibbs, el hamiltoniano dado por $H(\sigma) := \sum_{xy \in \mathbb{Z}^d} \sigma_x \sigma_y$. Asumimos que $d \geq 2$. Entonces existe $\beta_d < \infty$ tal que para todo $\beta > \beta_d$ tenemos:*

$$\mu_\beta[\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0] < \frac{1}{2},$$

donde $\underline{\gamma}$ es el conjunto de vértices de \mathbb{Z}^d que están en el interior de el contorno γ .

Usaremos los resultados anteriores para mostrar la existencia de dos medidas de Gibbs.

Teorema II.3.6. *Con las condiciones del Teorema II.3.5 tenemos que existe al menos dos medidas extremales de Gibbs μ_β^+ y μ_β^- satisfaciendo $\mu^+(\sigma_0) = -\mu^-(\sigma_0) > 0$.*

La desigualdad (II.43) fue deducida observando que el evento $\{\sigma_0 = -1\}$ está incluido en $\{\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0\}$, luego si tomamos una medida de Gibbs en volumen Λ_n , para cualquier n tenemos $\mu_{\beta,\Lambda_n}^+[\sigma_0 = -1] \leq \mu_{\beta,\Lambda_n}^+[\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0] < \frac{1}{2}$, uniformemente. La ultima desigualdad (menor que 1/2) es conseguida usando la prueba del Teorema II.3.5 en [Bovier, 2006, pag.65]. Usando el limite termodinámico sigue que

$$\mu_\beta^+[\sigma_0 = -1] \leq \mu_\beta^+[\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0] < \frac{1}{2}.$$

Portanto $\mu_\beta^+[\sigma_0] = 1 - 2\mu_\beta^+[\sigma_0 = 1] > 0$.

Como vemos en [Friedli and Velenik, 2017, pag. 107] es valido que $\mu^+(\sigma_0) = -\mu^-(\sigma_0)$, por simetría (la esperanza se puede identificar con la medida por el Teorema de Riesz Markov II.3.1). Ademas usando que $\mu^+(\sigma_0) = \mu^-(\sigma_0)$ si y solo si tenemos unidad (ver [Friedli and Velenik, 2017, pag. 105]), podemos concluir el resultado del Teorema II.3.6.

II.3.4. O argumento de Imry y Ma

Como vimos el argumento de Peirls funciona cuando tenemos simetría, eso es $\mu^+(\sigma) = -\mu^-(\sigma)$ que es valido cuando el campo es nulo. En el articulo de 1975 [Imry and Ma, 1975], Imry y Ma estudiaron el modelo de Ising con campo aleatorio, esto rompe la simetría; estudiaron como afecta esto en la transición de fase. La idea fue extender el argumento de Peierls [Peierls, 1936] para el campo con aleatoriedad.

Ellos trabajaron con el siguiente hamiltoniano

$$H[\omega](\sigma) = - \sum_{xy \in E(S)} \sigma_x \sigma_y - \epsilon \sum_{x \in S} h_x[\omega] \sigma_x. \quad (\text{II.44})$$

La esencia del argumento de Peierls es que cambiar el *estado fundamental* (*ground state*) $+1$ dentro de un contorno γ a otro estado fundamental -1 tiene un costo de *una energía de superficie* (contorno) de $2|\gamma|$. Como el campo es nulo, por simetría, la energía considerando solo los sitios que están en el contorno (*bulk energy*), de los estados fundamentales $+1$ y -1 son iguales.

La *bulk energie* es dada por

$$E_{bulk}(\gamma) := \pm \epsilon \sum_{x \in \gamma} h_x[\omega],$$

podemos obtener E_{bulk} del hamiltoniano

$$H_{S,h}[\omega](\sigma) = -J|\mathcal{E}_S| - \epsilon \sum_{x \in S} h_x[\omega] + 2 \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} |\gamma| + \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} 2\epsilon \sum_{x \in \gamma_k} h_x[\omega],$$

observe que $2\epsilon \sum_{x \in \gamma} h_x[\omega]$ es la suma de todos los h_x dentro del contorno γ , entonces si cambiamos el estado $+$ por el estado $-$ el valor de Hamiltoniano queda alterado, eso no ocurre cuando el campo es nulo.

En el argumento de Peierls, es hecho considerando el campo externo nulo $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ entonces la energía de superficie de un contorno, solo seria de $2|\gamma|$. En el caso con campo aleatorio uno de los aportes a la energía de superficie seria

$$E_{bulk}(\gamma) := \pm \epsilon \sum_{x \in \gamma} h_x[\omega],$$

el signo depende si tomamos como estado fundamental el $+$ o el $-$. Si el campo aleatorio fuese uniformemente limitado tendríamos que la contribución seria limitada por $2\epsilon|\gamma|$ en

valor absoluto, pero esto es seria mucho mayor que el área de la superficie comprendida en el contorno.

Entonces Imry y Ma argumentaron que podemos obtener una cantidad mejor que esa, mucho menor. Usando el teorema do limite central, el **valor típico**⁴ de $E_{bulk}(\gamma)$, para γ , y $\epsilon \ll \ll 1$ seria

$$E_{bulk}(\gamma) \sim \pm \epsilon \sqrt{|\underline{\gamma}|}, \quad (\text{II.45})$$

ya que tomando los h_x con media 0 y varianza 1 tendríamos

$$P(-\epsilon|\underline{\gamma}| \leq \frac{\epsilon \sum_{x \in \underline{\gamma}} h_x}{\sqrt{\frac{1}{|\underline{\gamma}|}}} \leq \epsilon|\underline{\gamma}|) = 1 - \epsilon. \quad (\text{II.46})$$

Observación 28. *Recuerde la distribución de la media muestral, la cual es consecuencia del teorema del limite central.*

De la desigualdad isoperimetrica en \mathbb{Z}^d , tenemos $|\underline{\gamma}| \leq 2d|\gamma|^{\frac{d}{d-1}}$. Se substituímos en (II.45) notamos que la *bulk energy* es $E_{bulk}(\gamma) \sim \pm 2d\epsilon|\gamma|^{\frac{d}{2(d-1)}}$, para $d > 2$, que es mucho menor que $|\gamma|$. *Con este raciocino, Imry y Ma conjeturaron que el modelo de Ising con campo aleatorio posee transición de fase para $d \geq 3$ y no para $d \leq 2$.*

Algunos teoremas en RFIM

En lo que sigue vamos a reproducir algunos resultados del argumento de Peierls, con las variaciones adecuadas, como en el libro de Bovier [Bovier, 2006], ya que esa idea fue la seguida por Imry y Ma para predecir la existencia de una medida de Gibbs para el modelo de Ising con campo aleatorio.

El Lema siguiente es una adaptación del Lema 1 pero considerando el hamiltoniano con campo aleatorio.

Lema 2. *En el modelo de Ising aleatorio, para cualquier medida de Gibbs μ_β ,*

$$\mu_\beta[\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq \exp(-2\beta|\gamma| + |\ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+ - Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^-|). \quad (\text{II.47})$$

⁴son los valores comprendidos entre el intervalo dado por la media menos la desviación estándar y la media más la desviación estándar.

Observación 29. En el lema anterior $\Gamma(\sigma)$ es la colección de contornos asociadas a la configuración σ , el número de plaquetas de γ es denotado por $|\gamma|$. Así, también $\underline{\gamma}$ es el conjunto de vértices contenidos en el interior del contorno y γ^{in} (γ^{ex}) el conjunto de vértices que están en el interior (exterior) y a una arista de distancia del vértice que está en el exterior (interior).

Prueba. Tenemos la siguiente igualdad

$$\mu_\beta[\gamma \in \Gamma(\sigma)] \equiv \mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1, \sigma_{\gamma^{in}} = -1] + \mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = -1, \sigma_{\gamma^{in}} = +1], \quad (\text{II.48})$$

donde $[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1, \sigma_{\gamma^{in}} = -1]$ representa el conjunto de todas las configuraciones que tienen contornos γ , que tienen la propiedad que en la frontera interior tomar -1 y $+1$ en la frontera exterior. Esta es una prueba basada en el [Bovier, 2006].

Usamos una ecuación DLR (Dobrushin, Landford, Ruelle)

$$\mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1, \sigma_{\gamma^{in}} = -1] = \mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1] \mu_{\underline{\gamma}, \beta}^+[\sigma_{\gamma^{in}} = -1].$$

Ahora, analizamos

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{\gamma}, \beta}^+[\sigma_{\gamma^{in}} = -1] &= \frac{\mathbb{E}_{\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}}} \rho(\sigma_{\gamma^{in}} = -1) e^{-\beta H_{\underline{\gamma}}(\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}} \eta \sigma')}}{\mathbb{E}_{\sigma_{\gamma^{in}}} \mathbb{E}_{\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}}} e^{-\beta H_{\underline{\gamma}}(\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}} \eta \sigma')}} \\ &= \frac{e^{-\beta |\gamma|} Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1} \rho(\sigma_{\gamma^{in}} = -1)}{\mathbb{E}_{\sigma_{\gamma^{in}}} e^{\beta \sum_{x \in \gamma^{in}, y \in \gamma^{ex}} \sigma_y} Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1}} \\ &\leq e^{-\beta |\gamma|} \frac{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1}}{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{+1}}. \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

y para la otra parte

$$\mu_{\underline{\gamma}, \beta}^-[\sigma_{\gamma^{in}} = +1] \leq e^{-\beta |\gamma|} \frac{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{+1}}{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1}}.$$

De (II.48) y de las últimas desigualdades, sigue que

$$\mu_\beta[\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq e^{-\beta |\gamma|} \left[\frac{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1}}{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{+1}} + \frac{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{+1}}{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1}} \right].$$

□

El objetivo es obtener un resultado similar al Teorema II.3.6, para campo nulo, pero esta vez será considerado campo aleatorio y $d \geq 3$.

El lema anterior permite, juntamente con otros resultados debidos a Talagrand, mostrar el siguiente Lema:

Lema 3. Sea el campo aleatorio $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$, con distribución simétrica y limitado ($h_x \leq 1$), o su distribución es Gaussiana. Luego hay una constante $C < \infty$ tal que, para cualquier $z \geq 0$,

$$\mathbb{P}[|\ln Z_{\underline{\gamma}^{\text{in},\beta}}^+ - \ln Z_{\underline{\gamma}^{\text{in},\beta}}^-| > z] \leq C \exp\left(-\frac{z^2}{\epsilon^2 \beta^2 C |\underline{\gamma}|}\right).$$

La prueba de este lema puede ser encontrada en [Bovier, 2006, pag.].

El siguiente teorema permitirá probar una versión del Teorema II.3.5

Teorema II.3.7. Consideremos que hay una constante positiva C tal que, para todo $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{P}[|\ln Z_{\Lambda,\beta}^+ - \ln Z_{\Lambda',\beta}^+ - \mathbb{E}[\ln Z_{\Lambda,\beta}^+ - \ln Z_{\Lambda',\beta}^+]| \geq z] \leq \exp\left(-\frac{z^2}{C \epsilon^2 \beta^2 |\Lambda \Delta \Lambda'|}\right), \quad (\text{II.50})$$

donde $\Lambda \Delta \Lambda'$ es la diferencia simétrica. Entonces, si $d \geq 3$, existen $\epsilon_0 > 0$ y $\beta_0 < \infty$ tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$ y $\beta \geq \beta_0$, para \mathbb{P} -cuasi todo $\omega \in U$, existe al menos dos medidas de Gibbs extremales en volumen infinito μ_β^+ y μ_β^- .

La prueba de la existencia de mas de dos medidas para el modelo de Ising con $d \geq 3$, sin colocar las hipótesis del párrafo anterior, fue dada por Bricmont y Kupiainen [Bricmont and Kupiainen, 1988].

II.3.5. El método de Aizenman y Wehr

Imry y Ma notaron que en $d \leq 2$ la energía de la superficie puede ser superada por la *bulk energy* eso significaría que la influencia de una realización del campo aleatorio es determinante en la orientación local de los spins. Entonces no importa cual sea la condición de frontera, su influencia no es perceptible en el interior del sistema, lo que implica una única medida de Gibbs aleatoria.

Aizenman y Wehr [Aizenman and Wehr, 1990] describieron esos raciocinios. El resultado principal de ellos fue:

Teorema II.3.8. En el modelo de Ising con campo aleatorio i.i.d. cuya distribución es no concentrada en un simples punto (no degenerada) y posee al menos $2 + \epsilon$ momentos finitos, para algun $\epsilon > 0$, se $d \leq 2$, existe una única medida de Gibbs en volumen infinito.

La prueba del teorema podemos encontrar en Bovier [Bovier, 2006].

II.3.6. El resultado de Bricmont y Kupiainen

Bricmont y Kupiainen [Bricmont and Kupiainen, 1988] hicieron el estudio del modelo para $d \geq 3$ de una forma bien diferente a los estudios anteriores Fisher, Fröhlich y Spencer [Fisher et al., 1984]. Ellos utilizaron una herramienta conocida como grupos de renormalización. Esa teoría puede ser encontrada en Bovier [Bovier, 2006] y con mas detalles en el artículo [Bovier and Külske, 1994].

El teorema a seguir implica la transición de fase para $d \geq 3$. Fue el resultado principal de [Bricmont and Kupiainen, 1988].

Teorema II.3.9. *Sea $d \geq 3$ y asumimos que las variables aleatorias h_x son i.i.d. simétricamente distribuidas y satisfacen $\mathbb{P}[|h_x| > h] \leq \exp(-h^2/A^2)$ para un A suficientemente pequeño y $h \geq 0$. Luego, existe $\beta_0 < \infty$, $a_0 > 0$, tal que para todo $\beta \geq \beta_0$ y $A \leq A_0$ para cualquier secuencia creciente y absorbente de volúmenes $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, la secuencia de medida $\mu_{\Lambda_n, \beta}^\pm$ converge a la medidas de Gibbs disjuntas μ_β^\pm , \mathbb{P} -cuasi ciertamente.*

II.4. Introducción a la teoría de vidrios Spin

En esta sección aprenderemos lo que son los modelos de vidrios spin basado en el libro de [Nishimori, 2001], [Talagrand, 2003], el libro de [Bovier, 2006] también posee un capítulo donde se ve algunos resultados de *spin glasses*, en específico sobre el modelo de Sherrington-Kirpatrik, más sobre este modelo en [Panchenko, 2012, Panchenko, 2013b, Austin, 2012]. En la teoría de *spin glasses* veremos los modelos de Sherrington-Kirpatrik, p-spin; en la teoría de estos modelos podemos aprender métodos para solucionarlos, o sea, encontrar una forma analítica para la función energía libre en términos de sus parámetros de orden, métodos como el de replicas por ejemplo. Podemos ver esos resultados en los textos de Panchenko [Panchenko, 2013b, Panchenko, 2012], en el artículo de Auffinger y Chen [Auffinger and Chen, 2016, Auffinger and Chen, 2018] o en el texto de [Austin, 2012].

Observación 30. *Como en este trabajo vamos a estudiar la propiedad de ultrametricidad en el modelo de Ising con campo aleatorio (RFIM), notamos que el RFIM no es un spin glass, porque no tiene frustración⁵. Para estudiar materiales que presentan la propiedad de los spin glasses⁶ (ver Jesi [Jesi, 2016]).*

II.4.1. Sobre los vidrios spin

En los *cristales* los átomos están ordenados en una estructura reticular a diferencia de los *vidrios* (*glasses*) en los cuales los átomos están en posiciones aleatorias, fijos en el tiempo. Los vidrios son aleaciones creadas por un enfriamiento muy rápido pero que no pasan por una transición de fase, ejemplo, una masa chiclosa de acero en alta temperatura que es enfriada muy rápido produce una vitrificación del metal.

⁵Decimos que un sistema, con los spins tipo Ising $\sigma_x = \pm 1$ tiene frustración si en el podemos alcanzar la energía mínima en todas sus interacciones simultáneamente, otra forma de ver esto es si tomamos circuitos cerrados y multiplicamos todos los acoplamientos y si el resultado es negativo decimos que tenemos **frustración** (ver Jesi y de las gupta [Jesi, 2016, pág. 10], [Dasgupta, 2015]).

⁶No confunda *spin glasses* con materiales que presentan *glassy phase*, el primero solo es un caso particular del segundo, los cuales tienen mucha aplicabilidad en la industria [Jesi, 2016].

¿Que son los vidrios spin?

Los *spin glasses* o vidrios de spin son materiales magnéticos que presentan aleatoriedad en la interacción de los spins y frustración, tenemos una extensa literatura y eso es debido a que el modelo no solo esta relacionado a los spin glasses sino que también los modelos de esta teoría sirven para otras teorías como teoría de la información, redes neuronales, procesamiento de imágenes, desdoblamiento de proteínas, problema del agente viajante y más (ver [Jesi, 2016, Stein and Newman, 2013, Nishimori, 2001, Panchenko, 2013b, Panchenko, 2012, Austin, 2012])

Los físicos estudian los *spin glasses* desde la segunda mitad del siglo XX, pero fue en 1970 que Anderson [Anderson, 1970] lo nombro así por primera vez.

II.4.2. Modelo de Sherrington-Kirpatrick

En 1975 [Edwards and Anderson, 1975], [Edwards and Anderson, 1976] Anderson creo un modelo simple y matemáticamente capaz de describir los fenómenos observados sobre *spin glasses*. Este modelo tiene el siguiente hamiltoniano

$$H(\sigma) = \sum_{xy \in E(\Lambda_N)} J_{xy} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda_N} \sigma_x .$$

Donde la parte aleatoria está en los (J_{xy}) a primeros vecinos, con cada J_{xy} independiente y uniformemente distribuida. Estas interacciones como se puede ver en la literatura generalmente tienen la distribución gaussiana o la distribución que asume $\pm J$ con determinadas probabilidades.

El modelo de Edwards-Anderson puede ser simplificado eliminando en cierta forma la dependencia del espacio a esto lo conocemos como crear uno *mean field model* (ver Stein [Stein and Newman, 2013, pág. 91],[Friedli and Velenik, 2017],[Bovier, 2006], [Panchenko, 2012],[Austin, 2012])). Para este modelo tenemos el modelo SK, creado pocos meses después de aparecer el E-A model, que es un modelo creado por David Sherrington y Scott Kirkpatrick [Sherrington and Kirkpatrick, 1975], que tiene el hamiltoniano de la siguiente forma

$$H(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq x < y \leq N} J_{xy} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{1 \leq x \leq N} \sigma_x \quad (\text{II.51})$$

donde $x, y \in \{1, \dots, N\}$. La aleatoriedad esta en los (J_{xy}) a largo alcance y cada J_{xy} es independiente y uniformemente distribuido.

II.4.3. Idea del método de réplicas

Ya presentamos las replicas en la sección I.4, para mejorar la comprensión lo presentamos nuevamente.

Observación 31. Sean $\sigma^1, \sigma^2, \dots$ configuraciones i.i.d. de la medida de Gibbs. Estas variables en el modelo de vidrios de spin son conocidas con el nombre de **replicas**. Otra variable importante en esos modelos son las **sobreposiciones** (overlaps) de replicas que están dadas por

$$R_{l,l'} := \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \sigma_x^l \sigma_x^{l'}.$$

Queremos *solucionar el modelo SK*⁷ para eso usamos el método de las réplicas que consiste en expresar el logaritmo como un limite de potencias, de la forma:

$$\begin{aligned} \ln Z &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n}, \\ \mathbb{E}[\ln Z] &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[Z^n] - 1}{n}. \end{aligned}$$

Lo anterior es un buen ejercicio de calculo de limites o algo fácil usando la regla de L'Hopital o la expansión de Taylor del logaritmo natural. La esperanza es con respecto a la aleatoriedad de las constantes de acoplamiento \mathbf{J} , y la función de partición Z depende aun del tamaño del volumen N de (II.51), mas por simplicidad lo escribimos sin subíndice. Como

$$\mathbb{E}[Z^n] = \int Z^n \prod_{x < y} P(J_{xy}) dJ_{xy},$$

de esta ultima expresión podemos hacer expansiones en las réplicas (Ver [Nishimori, 2001]).

En esta expansión vamos a multiplicar varias replicas, así podemos dar los siguientes nombres a las expresiones

$$q_{\alpha\beta} = \mathbb{E}[\langle \sigma_x^\alpha \sigma_x^\beta \rangle], \quad m_\alpha = \mathbb{E}[\langle \sigma_x^\alpha \rangle].$$

⁷Eso significa que podemos encontrar una forma explícita para la energía libre como función de los parámetros de orden de ese modelo.

Observación 32. Aunque esto va mas allá de una presentación, en Jesi [[Jesi, 2016](#)] vemos como caracterizar las fases del modelo spin glass cuando tenemos los parámetros (volumen infinito) dados por

$$q = \mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle^2], \quad m = \mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle],$$

el primero es el parámetro de orden para el spin glass y el segundo es para la magnetización. Las fases del modelo son:

- paramagnético en altas temperaturas: $q = 0$ y $m = 0$,
- ferromagnético: $q > 0$ y $m > 0$,
- spin glass a bajas temperaturas: $q > 0$ y $m = 0$.

Solución de réplica simétrica. Buscamos la solución del sistema y para eso hacemos la expansión de $\mathbb{E}[Z^n]$ en términos de sus réplicas así aparecen los términos $q_{\alpha\beta}$ y m_α . En Sherrington y Kirkpatrick [[Sherrington and Kirkpatrick, 1975](#)] consiguieron la solución para el sistema, pero para eso fue necesario hacer la suposición que las réplicas son equivalentes, lo que quiere decir es lo siguiente $q_{\alpha\beta} = q$, para todo $\alpha \neq \beta$ y $m_\alpha = m$ (ver [[Nishimori, 2001](#), pag 17], [[Stein and Newman, 2013](#), pag 95]). Esa solución funciono bien para altas temperaturas, pero para bajas temperaturas el modelo daba resultados no físicos y eso originaba un error.

Quiebra de la simetría de la réplica. El error estaba en suponer $q_{\alpha\beta}$, con $\alpha \neq \beta$, puede ser determinado por solo un valor q , eso es, considerar que todas las réplicas son simétricas. Parisi en [[Parisi, 1979](#)] creo el método de quiebra de la simetría de replica que consiguió solucionar el problema. Aunque quedo algunas dudas matemáticas no esclarecidas, la solución era suficiente para ser numéricamente y experimentalmente buena. Posteriormente, en 2006 matemáticos como Talagrand consiguieron probar rigurosamente este metodo [[Talagrand, 2006](#)]. La técnica fue creada inicialmente para los problemas en la solución del modelo SK, posteriormente descubrieron que la quiebra de simetría de la réplica consigue dar mucha mas información sobre el modelo (ver Nishimori, Castellani y Cavagna [[Nishimori, 2001](#)],[[Castellani and Cavagna, 2005](#)]).

Antes el método era solamente matemático pero en [Parisi, 2002] Parisi explico la interpretación física de la quiebra de simetría. Asi podemos entender quiebra de simetría de la réplica como cuando dos réplicas idénticas pueden estar en diferentes estados. Parisi también dio la definición que usaremos la seguir: Decimos que tenemos *quiebra de la simetría de la réplica* cuando el soporte de la distribución limite de la sobreposición de las réplicas tiene mas de un punto.

El párrafo anterior en terminología matemática seria como sigue:

Definamos la sobreposición como:

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \sigma_x^\alpha \sigma_x^\beta$$

Si $P_{\mathbf{J}}(r)$ es la distribución limite de la sobreposición r en un \mathbf{J} dado. Siguiendo Parisi [Parisi, 2002] y Castellani [Castellani and Cavagna, 2005] tiene la forma de sumas

$$P_{\mathbf{J}}(r) = \langle \delta(r - r_{\alpha\beta}) \rangle = \sum_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta \delta(r - r_{\alpha\beta}), \quad (\text{II.52})$$

donde \mathbf{J} representa la aleatoriedad en las interacciones, w_α son pesos que surgen de la expansión de la medida configuracional ([Castellani and Cavagna, 2005]).

Entonces decimos que no tenemos quiebra de la simetría si solamente tenemos una función delta

$$P_{\mathbf{J}}(r) = \delta(r - r_{\alpha\beta}).$$

y no mas términos en (II.52).

En [Chatterjee, 2015] usa la siguiente formula para expresar la falta de quiebra de simetría de la replica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \langle (R_{1,2} - q_{\beta,h})^2 \rangle = 0.$$

Observación 33. La definición (II.53) de la sección II.3.1 es una version generalizada de la sobreposición.

II.5. Las Identidades de Guirlanda-Guerra implican la Ultrametricidad (caso discreto)

En esta sección comentaremos sobre como las identidades de Ghirlanda Guerra implican la propiedad de ultrametricidad en el caso discreto, siguiendo el artículo de [Panchenko, 2011], complementando con [Panchenko, 2012],[Panchenko, 2013b],[Austin, 2012]. El caso continuo se puede ver en [Panchenko, 2013a].

II.5.1. Algunas definiciones en vidrios spin

Antes vamos a enunciar definiciones importantes de spin glass que tambien seran utiles en el capitulo IV.

Replicas

La colección $\sigma^1, \sigma^2, \dots$ de configuraciones las cuales son independientes e idénticamente distribuidas con respecto a la medida de Gibbs (en especial puede considerar la medida (IV.5) del capitulo IV) son conocidas como replicas.

Sobreposición de spins

La sobreposición de spins de dos replicas $\sigma^\ell, \sigma^{\ell'}$ es definida como sigue

$$R_{\ell, \ell'} := \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \sigma_x^\ell \sigma_x^{\ell'}, \quad \forall \ell, \ell' \geq 1. \quad (\text{II.53})$$

Es fácil ver lo siguiente

Proposición 6. $|R_{\ell, \ell'}| \leq 1$ y $R_{\ell, \ell} = 1$.

Prueba. Pues si usamos el valor absoluto

$$\left| \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \sigma_x^\ell \sigma_x^{\ell'} \right| \leq \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} |\sigma_x^\ell \sigma_x^{\ell'}| = 1$$

y si ℓ, ℓ' son los mismos el producto de spins da uno, luego $R_{\ell, \ell} = 1$. \square

Matriz de Gram-de Finetti

Una matriz aleatoria infinita $R = (R_{\ell,\ell'})_{\ell,\ell' \geq 1}$ es simétrica, non-negativa definida y **débilmente intercambiable**, eso es $(R_{l,s})_{1 \leq l,s \leq m}$ y $(R_{\rho(l),\rho(s)})_{1 \leq l,s \leq m}$ tiene la misma distribución, para cualquier permutación $\rho : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ y para cualquier $m \geq 1$. (ver [Panchenko, 2012, pag 4])

Siguiendo [Dovbysh and Sudakov, 1982], una matriz aleatoria infinita R con tales propiedades es conocida como matriz de Gram-de Finetti.

Identidades de Ghirlanda-Guerra (GG) extendidas

La matriz R de Gram-de Finetti satisface las identidades de Ghirlanda-Guerra extendidas (ver [Aizenman and Contucci, 1998, Ghirlanda and Guerra, 1998, Panchenko, 2007]) si para cualquier $m \geq 2$, cualquier función medible limitada $f = f((R_{\ell,\ell'})_{1 \leq \ell,\ell' \leq m})$, y para una función real de variable real, limitada y medible $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nu(f\psi(R_{1,m+1})) - \frac{1}{m} \nu(f)\nu(\psi(R_{1,2})) - \frac{1}{m} \sum_{\ell=2}^m \nu(f\psi(R_{1,\ell})) \xrightarrow{n} 0. \quad (\text{II.54})$$

donde $\nu(\cdot) := \mathbb{E}(\langle \cdot \rangle)$.

Observación 34.

- Se llama identidades por que para cada m se tiene que cumplir la condición II.54.

II.6. Preliminares a la prueba de GG implica ultrametricidad

Sea $R = (R_{l,l'})_{l,l' \geq 1}$ una matriz aleatoria de Gram-de Finetti, o sea con cada entrada positiva definida, débilmente intercambiable y simétrica. También asumimos que:

$$\mathbb{P}(R_{l,l} = 1) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(R_{1,2} = q_l) = p_l, \quad (\text{II.55})$$

para $1 \leq l \leq k$ y para $-1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_k \leq 1$ y $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$, $p_l > 0$. Es decir la diagonal de la matriz es 1 y los términos que no están en la diagonal toman valores positivos finitos.

Si la matriz R satisfaz, para cualquier $n \geq 2$ y cualquier $f = f((R_{i,l})_{1 \leq l, i \leq n})$ y para $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la siguiente identidad

$$\mathbb{E}f\psi(R_{1,n+1}) = \frac{1}{n}\mathbb{E}f\mathbb{E}\psi(R_{1,2}) + \frac{1}{n}\sum_{l=2}^n \mathbb{E}f\psi(R_{1,l}), \quad (\text{II.56})$$

decimos que la matriz R satisfaz **las igualdades de Guirlanda-Guerra (GG)**. Que fueron introducidos por primera vez en [Ghirlanda and Guerra, 1998].

Talagrand usando su principio de **de positividad** [Talagrand, 2003], mostró que si las desigualdades (II.56) son satisfechas entonces $R_{1,2} \geq 0$ es positiva, esto implica que q_l son positivas o cero.

El teorema principal de esta sección será el siguiente:

Teorema II.6.1. *Si se satisfacen las condiciones (II.55) e (II.56), la matriz de superposiciones R es ultramétrica,*

$$\mathbb{P}(R_{2,3} \geq \min(R_{1,2}, R_{1,3})) = 1. \quad (\text{II.57})$$

También (II.57) lo podemos enunciar como

$$R_{1,2} \geq q_l, R_{1,3} \geq q_l \text{ esto implica que } R_{2,3} \geq q_l, \text{ para todo } 1 \leq l \leq k. \quad (\text{II.58})$$

Para poder mostrar el teorema anterior usaremos **la representación de Dovbysh-Sudakov** [Dovbysh and Sudakov, 1984]. Enunciaremos el teorema según el libro de Panchenko [Panchenko, 2013b, pag 28]

Teorema II.6.2. *si tenemos una matriz R no negativa definida, simétrica y débilmente intercambiable entonces existe una medida aleatoria μ en $H \times [0, \infty)$, el conjunto H es un espacio de Hilbert separable, tal que la matriz R satisfaz lo siguiente:*

$$R = (R_{i,l})_{i,l \geq 1} \stackrel{d}{=} (\sigma^l \cdot \sigma^l + a^l \delta_{i,l})_{i,l \geq 1}, \quad (\text{II.59})$$

donde $\sigma^l \cdot \sigma^l$ es el producto escalar en H y $(\sigma^l, a^l)_{l \geq 1}$ es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. de μ ; $\delta_{i,l}$ es la función delta de kronecker y la igualdad es en distribución.

Denotaremos por G la marginal de μ en H , eso es $G = \int_0^\infty \mu$.

Observación 35. *Tanto las medidas μ y G son medidas aleatorias así que podríamos denotarlas como μ_ω e G_ω con ω un elemento de un cierto espacio de probabilidad, como en [Panchenko, 2010a].*

Otro resultado importante es el siguiente teorema; que puede ser encontrado en [Panchenko, 2010a, teo. 2] y parcialmente en [Panchenko, 2013b, pag. 64].

Teorema II.6.3. *Sea R una matriz de Gram-de Finetti que satisfaz (II.55) y (II.56), sea ζ la distribución de $R_{1,2}$. Si q_k es el mayor punto en el soporte de ζ , entonces, con probabilidad uno:*

- $G(\|\sigma\|^2 = q_k) = 1$.
- G es discreto si $\zeta(q_k) > 0$.

De este teorema como en [Panchenko, 2010a, sec. 3] cuando tenemos (II.55) el teorema anterior nos dice que podemos escribir la medida aleatoria G de la siguiente manera:

$$G = \sum_{l \geq 1} v_l \delta_{\sigma^l}, \quad (\text{II.60})$$

donde σ^l es una secuencia de elementos distintos, $\sigma^l \in H$ y $\|\sigma^l\|^2 = q_k$, además la secuencia v_l es decreciente $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \dots > 0$.

Observación 36. *Como G depende de una aleatoriedad las variables v_l también dependen de esa aleatoriedad y tienen una distribución asociada.*

Observación 37. *Del Teorema II.6.3 tenemos: $\sigma^l \cdot \sigma^{l'} = q_k$ si y solo si $\sigma^l = \sigma^{l'}$ eso sigue de $\|\sigma^l - \sigma^{l'}\|^2 = 2q_k - 2\sigma^l \cdot \sigma^{l'}$.*

Ahora de la ecuación (II.59) y del primer ítem del Teorema II.6.3 tenemos que $R_{l,l} = 1 = q_k + a^l$. Notamos que $a^l = 1 - q_k$ con probabilidad 1 para todo $l \geq 1$. Como por II.59 sabemos que $R_{l,l'} = \sigma^l \cdot \sigma^{l'}$ cuando $l \neq l'$ y ya que a^l está bien determinado vamos a redefinir la matriz R de la siguiente manera $R_{l,l'} = \sigma^l \cdot \sigma^{l'}$, para (σ^l) una secuencia i.i.d. de G , o sea ahora la diagonal es q_k .

En [Panchenko, 2011] el autor crea una versión alternativa al Teorema II.6.3. Es el siguiente:

Teorema II.6.4. *La medida G , cuando se satisfaz (II.55) y (II.56), es discreta y concentrada en una esfera de radio $\sqrt{q_k}$ con probabilidad uno.*

Con los preliminares anteriores ya podemos entender la prueba del Teorema II.6.4, que lo podemos encontrar en [Panchenko, 2011]; este teorema es importante ya que de él y la observación 37 se deduce el Teorema II.6.1.

Capítulo III

Metodología de la investigación

III.1. Tipo de investigación

Esta investigación, por el objetivo perseguido, es pura y por el nivel de profundización es exploratoria, por el tipo de inferencia es hipotético-deductiva, por el tipo de dato es cuantitativa.

III.2. Diseño de la investigación

Para realizar esta investigación se hizo lo siguiente:

1. Leer la literatura anterior existente sobre el problema.

En esta parte leímos los trabajos de

[[Panchenko, 2010a](#), [Panchenko, 2011](#), [Panchenko, 2012](#)] sobre la conexión de las identidades de Guirlanda Guerra y la propiedad de ultrametricidad; los trabajos de [[Auffinger and Chen, 2016](#), [Auffinger and Chen, 2018](#)] Auffinger que estudia la propiedad de ultrametricidad, en ese trabajo estudian la universalidad o sea si la propiedad de ultrametricidad es independiente del campo tomado, la diferencia con nuestro trabajo es que el trabaja en el modelo p-spin y nosotros en el modelo de Ising con campo aleatorio (RFIM); también leímos artículos de Chatterjee [[Chatterjee, 2015](#), [Chatterjee, 2009](#)] en este artículo tenemos un conjunto de técnicas usadas para mostrar quiebra de simetría de replica y las identidades de Ghirlanda Guerra, pero para campo gaussiano, el trabajo

en esta tesis es adaptar esas técnicas para campos que no son gaussianos; leer los artículos y libros de [Talagrand, 2003, Talagrand, 2006]; también el libro de Nishimori [Nishimori, 2001], de Panchenko [Panchenko, 2012, Panchenko, 2013b], también [Austin, 2012] para tener más contexto sobre spin glasses. Como usaremos el modelo de Ising con campo aleatorio leímos el libro de Velenik y Bovier [Friedli and Velenik, 2017], [Bovier, 2006].

2. Rehicimos los cálculos y los entendimos.

Los artículos y libros de [Chatterjee, 2015], [Talagrand, 2003] y [Auffinger and Chen, 2016] nos proporcionan buenas técnicas que tenemos que adaptar a nuestro problema.

3. Dedicamos largas horas de reflexión en busca de la solución haciendo muchos cálculos tentativos para encontrar la respuesta.

Para hacer este trabajo fue necesario modificar técnicas conocidas, crear nuevos resultados como el de la integración gaussiana por partes para dos variables.

4. Mostramos y discutimos con investigadores de la misma área sobre la solución encontrada. Se envió mensajes a colegas de otras universidades preguntando sobre resultados o cuestiones que generaban dudas.

5. Se publico un artículo y se presenta este trabajo de tesis de licenciatura.

Como resultado de este trabajo se publico un articulo, en conjunto con el Profesor del departamento de estadística UnB Roberto Vila, en la revista JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS [Roldan and Vila, 2020].

III.3. Población y muestra

No es un estudio de tipo experimental, si no puro, así que no tenemos muestra. Este trabajo esta enmarcado dentro de la teoría de probabilidad, análisis, como sub-area la mecánica estadística y la teoría de la medida.

Capítulo IV

Resultados principales

IV.1. Presentación del resultado

Dado $n \geq 1$, sea $V_n = \mathbb{Z}^d \cap [1, n]^d$, $d \geq 1$, un subconjunto finito de vértices de la red hipercubica d -dimensional, cuya cardinalidad es denotada por $|V_n|$. La medida de Gibbs del RFIM ferromagnético, en el conjunto de configuraciones

$\{\pm 1\}^{V_n}$, es dado por

$$G(\sigma) = \frac{1}{Z} \exp \left(\beta \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x \sigma_y + (\mu - h) \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x \right), \quad (\text{IV.1})$$

donde

- Aquí $\langle xy \rangle$ significa el conjunto de pares ordenados en V_n de primeros vecinos.
- $\beta > 0$ la temperatura inversa.
- $\mu - h > 0$ (con $\mu > 0$) la fuerza de campo.
- La función de partición es Z que aparece en la definición de G , es el factor que lo torna una probabilidad.
- Los g_x 's son variables aleatorias independientes, que colectivamente son llamados de desorden, tienen media cero y varianza uno.

Ademas, asumimos que el campo de fuerza es pequeña con la siguiente tasa de decaimiento

$$h \xrightarrow[n]{} \mu; \quad (IV.2)$$

$$(\mu - h)\sqrt{|V_n|} \xrightarrow[n]{} \infty; \quad (IV.3)$$

$$\frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \mathbb{E}(|g_x|^3 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) \xrightarrow[n]{} 0, \quad (IV.4)$$

para cualquier $\varepsilon > 0$.

Un modelo similar, con las condiciones sobre el desorden y la fuerza de campo (IV.2) apareció en Auffinger y Chen (2016) [Auffinger and Chen, 2016]. En otra referencia [Roldan and Vila, 2018a] los autores estudiaron el comportamiento del RFIM con desordenes teniendo tasas parecidas de decaimiento a (IV.2) pero no las mismas. También, la fuerza de campo usada en [Roldan and Vila, 2018a] se mantiene invariante con respecto al volumen.

Modelo perturbado

Como en Panchenko (2013) [Panchenko, 2013b] y Talagrand (2011) [Talagrand, 2010], perturbamos asintoticamente el hamiltoniano correspondiente a las medidas de Gibbs en (IV.1) para definir la medida aleatoria G_α en $\{\pm 1\}^{V_n}$ con el siguiente hamiltoniano perturbado

$$\beta \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x \sigma_y + (\mu - h) \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x + H_{n;\alpha}^{\text{per}}(\sigma), \quad (IV.5)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{n;\alpha}^{\text{per}}(\sigma) &= c_n \sum_{p \geq 2} \alpha_p 2^{-p} H_{n;p}(\sigma); \\ H_{n;p}(\sigma) &= \frac{1}{|V_n|^{(p-1)/2}} \sum_{x_1, \dots, x_p} \xi_{x_1, \dots, x_p} \sigma_{x_1} \cdots \sigma_{x_p}; \end{aligned} \quad (IV.6)$$

La ultima suma es sobre todo los $(x_1, \dots, x_p) \in \otimes_{n=2}^p V_n$.

- La secuencia de números (c_n) es tal que $c_n \xrightarrow[n]{} 0$.
- La secuencia $\alpha = (\alpha_p)$ es dada y satisface $|\alpha_p| \leq 1$.

- El desorden (ξ_{x_1, \dots, x_p}) consiste de variables aleatorias reales i.i.d. ξ_{x_1, \dots, x_p} , para $p \geq 2$, con media cero y varianza uno.

Observación 38. Cuando $\alpha = 0$, $G_\alpha(\sigma) = G(\sigma)$ para todo $\sigma \in \{\pm 1\}^{V_n}$.

Esperanzas para el modelo

Como trabajaremos con funciones que dependen de varios spins definiremos las siguientes esperanzas.

Para la función $f : (\{\pm 1\}^{V_n})^m \rightarrow \mathbb{R}$, $m \geq 1$, definimos

$$\langle f \rangle_\alpha = \langle f(\sigma^1, \dots, \sigma^m) \rangle_\alpha = \int f(\sigma^1, \dots, \sigma^m) dG_\alpha(\sigma^1) \cdots dG_\alpha(\sigma^m). \quad (\text{IV.7})$$

La aleatoriedad del desorden (g_x) y los ξ_{x_1, \dots, x_p} 's sera representados por γ en $\mathbb{R}^{V_n} \times \mathbb{R}^{\otimes_{n \geq 2} V_n}$. Siguiendo la notación de Talagrand (2003) [Talagrand, 2003], escribimos

$$\nu_\alpha(f) := \mathbb{E} \langle f \rangle_\alpha = \int \langle f \rangle_{\alpha; g=u, \xi=v} d\gamma(u, v), \quad (\text{IV.8})$$

promediando en las realizaciones del desorden, donde $\langle \cdot \rangle_{\alpha; g=u, \xi=v}$ es esperanza de Gibbs definida por fijar g_x y ξ_{x_1, \dots, x_p} en $\langle \cdot \rangle_\alpha$ siendo u_x y v_{x_1, \dots, x_p} para cada p , respectivamente, para cada $x, x_i \in V_n$.

Dado que $\sqrt{\mathbb{E} H_{n,p}^2(\sigma)} \leq \sqrt{|V_n|}$, donde $H_{n,p}$ es como en (IV.6), solo basta recordar que ξ_{x_1, \dots, x_p} son i.i.d. con media cero y varianza uno. Con eso sigue del Lema 3,6'' de Loève (1951) [Loève, 1951] que las series $c_n \sum_{p \geq 2} \alpha_p 2^{-p} H_{n,p}(\sigma)$ converge cuasi seguramente. Por tanto el hamiltoniano $c_n \alpha_p 2^{-p} H_{n,p}(\sigma)$ esta bien definido cuasi seguramente.

Recordando lo que son replicas, sobreposiciones, identidades de Guirlanda-Guerra (ver sección II.5.1) enunciamos el resultado principal.

Teorema IV.1.1. Bajo las condiciones (IV.2), es valido que:

- 1) $R_{2,3} \geq \min\{R_{1,2}, R_{1,3}\}$ cuasi seguramente con respecto al limite en volumen infinito de ν ;
- 2) $R_{2,3} \geq \min\{R_{1,2}, R_{1,3}\}$ cuasi seguramente con respecto al limite en volumen infinito de ν_α , para todo $p \geq 1$ en (IV.6).

Por lo tanto para el RFIMs, definido por (IV.1)-(IV.2) y (IV.2)-(IV.6), la matriz es R es ultrametrica.

IV.1.1. Integración por partes gaussiana

Em probabilidad usamos el termino integración partes pero no es la integración por partes del calculo usual, las formulas son parecidas, varían por que trabajamos con esperanzas y variables aleatorias. (ver Chatterjee o Talagrand [[Chatterjee, 2015](#), [Talagrand, 2003](#)])

Integración por partes gaussiana para una variable.

Antes de mostrar la integración por partes gaussiana veamos los siguientes resultados

Proposición 7. Sea $g, f, h \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ tales que $g(t) = th(t)$ y $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t)f(t)e^{-t^2/2\sigma^2} = 0$, con $\sigma > 0$. Entonces

$$\int g(t)f(t)e^{-t^2/2\sigma^2} dt = \sigma^2 \int [h'(t)f(t) + f'(t)h(t)]e^{-t^2/2\sigma^2} dt.$$

En la proposición anterior no usamos variables aleatorias, si usáramos variables aleatorias tendríamos la *Integración por partes gaussiana* en algunos textos es conocido como *Lema de Stein*, en nombre del matemático-estadístico Charles Max Stein, que creo el método para limitar la distancia entre dos distribuciones [[Stein, 1972](#)].

Proposición 8 (Integración por partes gaussiana). Si la variable aleatoria g tiene distribución $N(0, \sigma^2)$ y $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Tenemos

$$\mathbb{E}[g f(g)] = \mathbb{E}[g^2] \mathbb{E}[f'(g)].$$

En Talagrand [[Talagrand, 2003](#), Ap. A6] podemos encontrar más sobre esto.

Integración por partes gaussiana para funciones de múltiples variables.

También en Talagrand encontramos la siguiente formula para vectores aleatorios Gaussianos

Proposición 9. Sea $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio gaussiano centrado, $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\delta_{lk} := \text{Cov}(X_l, X_k)$ con ∂_k representando la derivada parcial en el lugar k . Luego

$$\mathbb{E}[X_l f(\mathbf{X})] = \sum_{k=1}^n \delta_{lk} \mathbb{E}[\partial_k f(\mathbf{X})].$$

Observación 39. Las componentes X_l no necesitan ser independientes ni idénticamente distribuidas.

Observación 40. Obtener una fórmula de integración por partes cuando la variable aleatoria no es gaussiana es un poco complicado y en la literatura no se encuentra mucha información. En el apéndice B pondremos mas información sobre este tema generalizaciones e integración gaussiana por partes para cuando el campo no es gaussiano.

IV.1.2. Generalización de la integración Gaussiana por Partes

Para hacer la prueba del Teorema IV.1.1 el mayor trabajo será hacer la generalización de la integración Gaussiana por partes, como en [Auffinger and Chen, 2016, Carmona and Hu, 2006] y [Chen, 2019].

Para eso usaremos el siguiente teorema que aparece en Auffinger y Chen (2016) [Auffinger and Chen, 2016], Lemma 2.2.

Proposición 10. Sea y una variable aleatoria tal que su primera $k \geq 2$ momentos son como los de una variable aleatoria Gaussiana. Sea $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$. Para todo $K \geq 1$;

$$|\mathbb{E}yf(y) - \mathbb{E}f'(y)| \leq \frac{2(\|f^{(k-1)}\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\infty)}{(k-1)!} \mathbb{E}(|y|^k : |y| \geq K) + \frac{(k+1)K}{k!} \|f^{(k)}\|_\infty \mathbb{E}|y|^k.$$

Otro resultado importante es la siguiente proposición, cuya prueba esta en el apéndice B.1. Este es un resultado nuevo para dos variables y esta inspirado en la Proposición 10.

Proposición 11. Sea x, y dos variables aleatorias independientes tal que su primer $k \geq 2$ momentos coinciden con los de una variable aleatoria Gaussiana. Suponga que

$f \in C^{k+2}(\mathbb{R}^2)$. Para cualquier $K_1, K_2 \geq 1$;

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E}xyf(x, y) - \mathbb{E} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right| \\
& \leq \frac{2}{(k-1)!} \left(\left\| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^{k-1}} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \right) \mathbb{E}(|x| : |x| \geq K_1) \mathbb{E}(|y|^k : |y| \geq K_2) \\
& \quad + \frac{2}{(k-1)!} \left(\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \right) \mathbb{E}(|x|^k : |x| \geq K_2) \\
& \quad + \frac{2(k+1)K_1}{k!} \left(K_2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|y|^k + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|x|^k \right) \\
& \quad + \frac{(k+1)K_1}{k!} \left(\left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|y|^{k+1} : |y| \geq K_2) + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|x|^k \right) \\
& \quad + \frac{(k+1)}{k!} \left(K_2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|x| : |x| \geq K_1) \mathbb{E}|y|^k + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|x|^{k+1} : |x| \geq K_1) \right).
\end{aligned}$$

En lo que sigue probaremos el resultado principal el Teorema [IV.1.1](#).

IV.2. Prueba del item 1

En la teoría es conocido que si tenemos la identidades de Guirlanda-Guerra y la falta de quiebra de la simetría de replica eso muestra la validez de la ultrametricidad, en este texto analizaremos el RFIM dado por [\(IV.1\)](#)-[\(IV.2\)](#).

Nuestro objetivo será encontrar la identidad de Guirlanda-Guerra y la ausencia de quiebra de simetria de replica para nuestro modelo de Ising con el campo [\(IV.1\)](#)-[\(IV.2\)](#). Artículos donde se pueden encontrar mas información sobre esto son [[Chatterjee, 2015](#), [Itoi, 2018](#), [Itoi and Utsunomiya, 2019](#), [Roldan and Vila, 2018b](#)].

Usaremos la misma notación que en Chatterjee (2015) [[Chatterjee, 2015](#)], para cada $(\beta, \mu) \in (0, \infty)^2$, definimos:

$$F_n := \log Z_n; \quad \psi_n := \frac{F_n}{|V_n|}; \quad p_n := \mathbb{E}\psi_n, \quad (\text{IV.9})$$

donde ψ_n es llamada como la densidad de energía libre.

En lo que sigue probamos que **presión en volumen infinita existe**. La siguiente prueba está inspirada en Chatterjee [[Chatterjee, 2015](#), lem. 2.1].

Lema 4. Para cada β, μ positivo y $\mu > h$, el limite $p = p(\beta, \mu) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ existe y es finito.

Prueba. Definamos $Z_n = Z_n(\beta, \mu)$, $F_n = F_n(\beta, \mu)$ y $p_n = p_n(\beta, \mu)$ para β y μ fijados. Definiremos el número $l := mn$, con m y n son dos números enteros. Luego podemos partir la caja V_l en m^d sub cajas distintas V_n que denominaremos de ‘bloques’ y siguiendo definimos un nuevo hamiltoniano en V_l . Ahora sacamos de la suma del hamiltoniano de (IV.1) los términos $\sigma_x \sigma_y$ siempre y cuando x y y estén en dos bloques distintos. Para este nuevo hamiltoniano definimos una nueva función de partición Z'_l . Así tenemos

$$e^{-\beta L} \leq \frac{Z'_l}{Z_l} \leq e^{\beta L},$$

donde L es el número de aristas. Notamos que $L \leq C(d)n^{d-1}m^d$, con $C(d)$ siendo una constante que depende de la dimensión d . Posteriormente observamos

$$|\log Z'_l - \log Z_l| \leq C(d)\beta n^{d-1} m^d.$$

Como tenemos que Z'_l esta separado en m^d términos independientes, cada uno de los cuales tiene la misma distribución que Z_n . Así tenemos $\mathbb{E}(\log Z_l) = m^d \mathbb{E}(F_n)$. Sigue que

$$\begin{aligned} |p_n - p_l| &= |n^{-d} \mathbb{E}(F_n) - l^{-d} \mathbb{E}(F_l)| = l^{-d} |m^d \mathbb{E}(F_n) - \mathbb{E}(F_l)| \\ &\leq l^{-d} C(d) \beta n^{d-1} m^d = C(d) \beta n^{-1}. \end{aligned}$$

Análogamente para m . Luego, obtenemos $|p_m - p_l| \leq C(d) \beta m^{-1}$. de los dos resultados anteriores tenemos que $|p_m - p_n| \leq C(d) \beta (m^{-1} + n^{-1})$. Lo que permite notar que p_n es una secuencia de Cauchy y por lo tanto convergente. Para mostrar que el limite es finito, usamos la desigualdad de Jensen y que $\mathbb{E}[p_n] = n^{-d} \mathbb{E}(F_n)$. \square

Tenemos mas propiedades de las funciones p , F_n , ψ_n e p_n .

Lema 5. El limite $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ es una función convexa de μ para cada β fijo. Lo mismo es verdad para F_n , ψ_n y p_n .

Prueba. Derivamos dos veces F_n con respecto la μ . Eso da lo siguiente

$$\frac{\partial F_n}{\partial \mu} = \sum_{x \in V_n} g_x \langle \sigma_x \rangle$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_n}{\partial \mu^2} &= \sum_{x, y \in V_n} g_x g_y [\langle \sigma_x \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle] \\ &= \left[\left\langle \left(\sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x \right\rangle^2 \right]. \end{aligned}$$

Notamos que F_n es una función convexa en μ . Así, también ψ_n , $p_n = \mathbb{E}[F_n]/|V_n|$ y en consecuencia p es convexa en μ . \square

Estamos trabajando con campo aleatorio entonces vamos a verificar si la desigualdad FKG vale para este campo.

Lema 6. *Sea f y g dos funciones monótonas las no-decrecientes en el espacio de configuraciones $\{-1, 1\}^{V_n}$. Luego $\langle fg \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle$.*

Prueba. Es suficiente verificar que para cualquier valor del campo aleatorio, la medida de Gibbs del modelo satisface la condición de red, como se ve en [Fortuin et al., 1971] o en den Hollander [den Hollander and Keane, 1986]. Antes las notaciones siendo $\sigma_1 \wedge \sigma_2 := (\max(\sigma_{1x}, \sigma_{2x}))_{x \in V_n}$ y $\sigma_1 \vee \sigma_2 := (\min(\sigma_{1x}, \sigma_{2x}))_{x \in V_n}$ tenemos que mostrar que la medida de probabilidad satisface, $\mu(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \mu(\sigma_1 \vee \sigma_2) \geq \mu(\sigma_1) \mu(\sigma_2)$, para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}^{V_n}$. haciendo $\eta = \sigma_1 \wedge \sigma_2$ y $\xi = \sigma_1 \vee \sigma_2$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{\beta \sum_{xy \in E(V_n)} (\eta_x \eta_y + \xi_x \xi_y) + (\mu - h) \sum_{x \in V_n} g_x (\eta_x + \xi_x)} &\geq \\ e^{\beta \sum_{xy \in E(V_n)} (\sigma_{1x} \sigma_{1y} + \sigma_{2x} \sigma_{2y}) + (\mu - h) \sum_{x \in V_n} g_x (\sigma_{1x} + \sigma_{2x})} &. \end{aligned}$$

Esa ultima igualdad es verdad ya que $(\eta_x \eta_y + \xi_x \xi_y) \geq (\sigma_{1x} \sigma_{1y} + \sigma_{2x} \sigma_{2y})$ y $\eta_x + \xi_x = \sigma_{1x} + \sigma_{2x}$. Posteriormente, podemos continuar como en la prueba del FKG en Bovier [Bovier, 2006, pág. 68]. \square

Lema 7. *Para cada $(\beta, \mu) \in (0, \infty)^2$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe $C_n(\varepsilon, \mu) = O(\sqrt{|V_n|})$ tal que*

$$\text{Var}(F_n) \leq C_n |V_n| + o(|V_n|).$$

Demostración. Vamos usar la misma notación como en el Lemma 4.1 de [Roldan and Vila, 2018b]. Tomemos dos desordenes $g = (g_x)$ y $g^* = (g_x^*)$ de variables aleatorias independientes. Para cada $s \in [0, 1]$, definimos un nuevo campo aleatorio $G = (G_x)$ como sigue:

$$G_x := \sqrt{s} g_x + \sqrt{1-s} g_x^*, \quad x \in V_n.$$

Esta forma de combinar variables aleatorias ayuda a resolver este y problemas similares. También consideremos las siguientes funciones generadoras

$$\gamma_n(s) := \mathbb{E}[\mathbb{E}^* F_n(G)]^2, \quad \text{con } F_n(G) = \log Z_n(G),$$

donde \mathbb{E} y \mathbb{E}^* denotan las esperanzas con respecto a g y g^* , respectivamente.

Para cada $s \in (0, 1)$, mostramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_n}{ds}(s) &= \sum_x \frac{\partial \gamma_n}{\partial G_x} \frac{\partial G_x}{\partial s}(s) \\ &= \sum_x \frac{\partial \gamma_n}{\partial G_x} \left[\frac{1}{2\sqrt{s}} g_x - \frac{1}{2\sqrt{1-s}} g_x^* \right] \\ &= \sum_x \mathbb{E} \left[2\mathbb{E}^* [F_n(G)] \frac{\partial \mathbb{E}^* [F_n(G)]}{\partial G_x} \right] \left[\frac{1}{2\sqrt{s}} g_x - \frac{1}{2\sqrt{1-s}} g_x^* \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma_n}{ds}(s) = \sum_x \mathbb{E} \left[\frac{g_x}{\sqrt{s}} \mathbb{E}^* F_n(G) \mathbb{E}^* \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} - \mathbb{E}^* F_n(G) \mathbb{E}^* \frac{g_x^*}{\sqrt{1-s}} \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} \right]. \quad (\text{IV.10})$$

En lo que sigue usaremos la proposición 10, integración gaussiana por partes. Tomando

$$y = g_x \quad f(y) = \mathbb{E}^* F_n(G) \mathbb{E}^* \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x}$$

también $k = 2$ y $K = \varepsilon(\mu - h)^{-1}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, así obtenemos las dos desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[\frac{g_x}{\sqrt{s}} \mathbb{E}^* F_n(G) \mathbb{E}^* \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\partial}{\partial g_x} \mathbb{E}^* F_n(G) \mathbb{E}^* \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} \right] \right| \\ & \leq \frac{C_1}{\sqrt{s}} \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + \frac{C_2}{\sqrt{s}} \varepsilon(\mu - h)^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}^* F_n(G) \mathbb{E}^* \frac{g_x^*}{\sqrt{1-s}} \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} - \frac{\mathbb{E}^* F_n(G)}{\sqrt{1-s}} \mathbb{E}^* \frac{\partial}{\partial g_x^*} \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} \right| \\ & \leq \frac{C_3}{\sqrt{1-s}} \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + \frac{C_4}{\sqrt{1-s}} \varepsilon(\mu - h)^{-1}, \end{aligned}$$

los valores C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes positivas.

para la siguiente expresión, podemos construir una limitación por arriba o cota superior usando las dos desigualdades anteriores junto con (IV.10)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d\gamma_n}{ds}(s) - \sum_x \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\partial}{\partial g_x} \mathbb{E}^* F_n(G) \mathbb{E}^* \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} - \frac{\mathbb{E}^* F_n(G)}{\sqrt{1-s}} \mathbb{E}^* \frac{\partial}{\partial g_x^*} \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} \right] \right| \\ & \leq \left(\frac{C_1}{\sqrt{s}} + \frac{C_3}{\sqrt{1-s}} \right) \sum_x \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + \left(\frac{C_2}{\sqrt{s}} + \frac{C_4}{\sqrt{1-s}} \right) |V_n| \varepsilon(\mu - h)^{-1} \\ & =: \Theta(n, s, \varepsilon, \mu). \end{aligned} \tag{IV.11}$$

Ahora observamos las siguientes identidades

$$\frac{\partial F_n(G)}{\partial g_x} = \sqrt{s} \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x}; \tag{IV.12}$$

$$\frac{\partial F_n(G)}{\partial g_x^*} = \sqrt{1-s} \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x}, \tag{IV.13}$$

Esas identidades son deducidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_n(G)}{\partial g_x} &= \frac{\partial}{\partial g_x} \ln Z_n(G) \\ &= \frac{1}{Z_n(G)} \frac{\partial Z_n(G)}{\partial g_x} \\ &= \frac{1}{Z_n(G)} \frac{\partial Z_n(G)}{\partial G_x} \frac{\partial G_x}{\partial g_x} \\ &= \frac{\sqrt{s}}{Z_n(G)} \frac{\partial Z_n(G)}{\partial G_x} \end{aligned}$$

mientras que:

$$\frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} = \frac{1}{Z_n(G)} \frac{\partial Z_n(G)}{\partial G_x}$$

así tenemos (IV.12) y de forma análoga (IV.13).

Con las identidades anteriores, variando esperanzas y derivadas en (IV.11), para cada $s \in (0, 1)$, sigue que

$$\left| \frac{d\gamma_n}{ds}(s) - \sum_x \mathbb{E} \left(\mathbb{E}^* \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x} \right)^2 \right| \leq \Theta(n, s, \varepsilon, \mu).$$

ya que $\mathbb{E}(\mathbb{E}^* \frac{\partial F_n(G)}{\partial G_x})^2 \leq \mu^2$, tenemos la desigualdad superior

$$\frac{d\gamma_n}{ds}(s) \leq \mu^2 |V_n| + \Theta(n, s, \varepsilon, \mu).$$

Para $s = 1$ y $s = 0$ podemos notar $\text{Var}(F_n) = \gamma_n(1) - \gamma_n(0) = \int_0^1 \frac{d\gamma_n}{ds}(s) ds$ junto con la ultima desigualdad

$$\begin{aligned} \text{Var}(F_n) &\leq \mu^2 |V_n| + \int_0^1 \Theta(n, s, \varepsilon, \mu) ds \\ &= [\mu^2 + (C_2 + C_4)\varepsilon(\mu - h)^{-1}] |V_n| + (C_1 + C_3) \sum_x \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) \\ &=: C_n(\varepsilon, \mu) |V_n| + o(|V_n|), \end{aligned}$$

por tanto la prueba está completa. \square

Para cualquier $n \geq 1$, sea

$$\Delta_n := \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x \quad (\text{IV.14})$$

la parte del hamiltoniano (IV.1) asociado al desorden.

Sea \mathcal{A} un conjunto contable de todos $(\beta, \mu) \in (0, \infty)^2$ tal que $\frac{\partial p}{\partial \mu^-}(\beta, \mu) \neq \frac{\partial p}{\partial \mu^+}(\beta, \mu)$.

Lema 8. *Sea \mathcal{A} el conjunto de todos los $(\beta, \mu) \in (0, \infty)^2$ tal que la función p no es diferenciable en μ en el punto (β, μ) . El conjunto \mathcal{A} tiene medida de Lebesgue cero. Además, para cada β , el conjunto de todos los μ tal que $(\beta, \mu) \in \mathcal{A}$ es numerable.*

Prueba. Para β fijado y como por el Lema 5 tenemos que $\frac{dp}{d\mu}$ es una función monótona, podemos usar el Teorema de Darboux-Froda que dice que: una función a valores reales monótona, definida en un intervalo (a, b) con $a \geq -\infty$ y $b \leq +\infty$ tiene un conjunto contable de discontinuidades. Luego, p tiene un conjunto numerable de puntos en donde no es diferenciable. Por ser conjunto numerable tiene medida de Lebesgue cero con eso hemos terminado la prueba. \square

Proposición 12. *Para cualquier $(\beta, \mu) \in \mathcal{A}^c$, tenemos*

$$\begin{aligned} \nu(\Delta_n) &\xrightarrow{n} \frac{\partial p}{\partial \mu}(\beta, \mu); \\ \mathbb{E}|\langle \Delta_n \rangle - \nu(\Delta_n)| &\xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

Prueba. Primero recuerde que

$$\langle \Delta_n \rangle = \frac{\partial \psi_n}{\partial \mu} \quad \text{e} \quad \nu(\Delta_n) = \frac{\partial p_n}{\partial \mu}. \quad (\text{IV.15})$$

En las expresiones anteriores la derivada con respecto a μ entra en las esperanzas porque μ de no depende de la aleatoriedad de g_x . Sabemos por el Lema 5 que ψ_n es convexa. Entonces para $\mu' > \mu > 0$ fijos

$$\langle \Delta_n \rangle \leq \frac{\psi_n(\beta, \mu') - \psi_n(\beta, \mu)}{\mu' - \mu}. \quad (\text{IV.16})$$

Usando Cauchy-Schwartz y $\text{Var}(F_n(\beta, \mu)) \leq C|V_n|$ tenemos

$$\mathbb{E}[|\psi_n(\beta, \mu) - p_n(\beta, \mu)|] \leq \sqrt{\text{Var}(\psi_n(\beta, \mu))} \leq \left(\frac{C}{|V_n|}\right)^{1/2}. \quad (\text{IV.17})$$

Denotando $p' = \frac{\partial p}{\partial \mu}$ tenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, \mu') - \psi_n(\beta, \mu)}{\mu' - \mu} - p'(\beta, \mu) \right| &\leq \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, \mu') - p_n(\beta, \mu')}{\mu' - \mu} \right| + \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, \mu) - p_n(\beta, \mu)}{\mu' - \mu} \right| \\ &\quad + \mathbb{E} \left| \frac{p_n(\beta, \mu') - p(\beta, \mu')}{\mu' - \mu} \right| + \mathbb{E} \left| \frac{p_n(\beta, \mu) - p(\beta, \mu)}{\mu' - \mu} \right| \\ &\quad + \mathbb{E} \left| \frac{p(\beta, \mu') - p(\beta, \mu)}{\mu' - \mu} - p'(\beta, \mu) \right|. \end{aligned}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, por (IV.17) las dos primeras esperanzas del lado derecho de las desigualdades arriba son anuladas y por el Lema 5 tenemos $p_n \rightarrow p$ las dos siguientes esperanzas también. Sigue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, \mu') - \psi_n(\beta, \mu)}{\mu' - \mu} - p'(\beta, \mu) \right| \leq \mathbb{E} \left| \frac{p(\beta, \mu') - p(\beta, \mu)}{\mu' - \mu} - p'(\beta, \mu) \right|.$$

Así, usando (IV.15)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle \Delta_n \rangle - p'(\beta, \mu)] \leq \mathbb{E} \left| \frac{p(\beta, \mu') - p(\beta, \mu)}{\mu' - \mu} - p'(\beta, \mu) \right|$$

y usando limite por la derecha en μ y el hecho que p es diferenciable, sigue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle \Delta_n \rangle - p'(\beta, \mu)]^+ = 0,$$

En que la notación $x(h)^+$ significa la parte positiva de la función real $x(h)$. Procediendo de forma similar calculamos el limite por la izquierda, ahora de la parte negativa que también se anula. Luego

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\langle \Delta_n \rangle - p'(\beta, \mu)| = 0. \quad (\text{IV.18})$$

De la desigualdad de Jensen sigue:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\nu(\Delta_n) - p'(\beta, \mu)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\langle \Delta_n \rangle - p'(\beta, \mu)| = 0 \quad (\text{IV.19})$$

junto con la desigualdad triangular y de IV.18 y IV.19 tenemos la segunda parte de la desigualdad. \square

Esta proposición juega un importante rol en la prueba del siguiente resultado.

Lema 9. *Bajo la hipótesis del Teorema IV.1.1, para cualquier $(\beta, \mu) \in \mathcal{A}^c$, tenemos*

$$\nu(|\Delta_n - \nu(\Delta_n)|) \xrightarrow{n} 0.$$

Prueba.

La definición de la correlación de dos puntos truncada es $\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle := \langle \sigma_x \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle$. Haciendo cálculos mostramos que

$$\left| \frac{\partial \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle}{\partial g_y} \right| \leq 2\mu; \quad \left| \frac{\partial^2 \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle}{\partial g_x \partial g_y} \right| \leq 6\mu^2; \quad \left| \frac{\partial^3 \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle}{\partial g_x^2 \partial g_y} \right| \leq 24\mu^3.$$

Sea la medida de Gibbs $\langle \cdot \rangle_{g_x=u, g_y=v}$ generado por fijar g_x y g_y en $\langle \cdot \rangle$ como siendo u y v respectivamente, y $F_{x,y}(u, v) := \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{g_x=u, g_y=v}$. Integrando por partes (ver proposición 11) y denotando $f_{x,y}(u, v) = \mathbb{E}F_{x,y}(u, v)$, $k = 2$, $K_1 = K_2 = \varepsilon(\mu - h)^{-1}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}g_x g_y f_{x,y} - \mathbb{E} \frac{\partial^2 f_{x,y}(g_x, g_y)}{\partial u \partial v} \right| \\ & \leq 4\mu(1 + 3\mu) \mathbb{E}(|g_x| : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) \mathbb{E}(|g_y|^2 : |g_y| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) \\ & \quad + 12\mu^2(1 + 4\mu) \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + 18\varepsilon(\varepsilon + 4\mu^2) \\ & \quad + 9\varepsilon\mu \left[\mathbb{E}(|g_y|^3 : |g_y| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + 4\mu \right] \\ & \quad + 9\mu(\varepsilon + 4\mu^2) \mathbb{E}(|g_x|^3 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}). \end{aligned}$$

Dividiendo esta desigualdad por $|V_n|^2$ y sumando sobre todo $x, y \in V_n$, la desigualdad

triangular nos brinda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\langle \Delta_n^2 \rangle - \langle \Delta_n \rangle^2) &\leq \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y} \left| \mathbb{E} g_x g_y f_{x,y} - \mathbb{E} \frac{\partial^2 f_{x,y}(g_x, g_y)}{\partial u \partial v} \right| \\
&\leq 4\mu(1 + 3\mu) \frac{1}{|V_n|^2} \left[\sum_x \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) \right]^2 \\
&\quad + 12\mu^2(1 + 4\mu) \frac{1}{|V_n|} \sum_x \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + 18\varepsilon(\varepsilon + 4\mu^2) \\
&\quad + 9\varepsilon\mu \frac{1}{|V_n|} \sum_y \mathbb{E}(|g_y|^3 : |g_y| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + 36\varepsilon\mu^2 \\
&\quad + 9\mu(\varepsilon + 4\mu^2) \frac{1}{|V_n|} \sum_x \mathbb{E}(|g_x|^3 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}).
\end{aligned}$$

Usando la definición de ν tenemos que :

$$\nu(|\Delta_n - \langle \Delta_n \rangle|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\langle \Delta_n^2 \rangle - \langle \Delta_n \rangle^2)},$$

de las ultimas desigualdades, de (IV.2)-(IV.4), y el hecho que ε es arbitrario. Finalmente, la prueba sigue de la desigualdad triangular y la Proposición 12. \square

Proposición 13. *Bajo la hipótesis del Teorema IV.1.1, para cualquier $(\beta, \mu) \in \mathcal{A}^c$, la siguiente propiedad es valida:*

$$\nu \left(\left| \frac{\beta}{|V_n|} \sum_{\langle xy \rangle} (\sigma_x \sigma_y - \nu(\sigma_x \sigma_y)) \right| \right) \xrightarrow{n} 0.$$

Prueba. Recordando el hamiltoniano visto en (IV.1)

$$\Delta_n(\sigma) = \beta \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x \sigma_y + h \sum_x g_x \sigma_x, \quad \sigma \in \{\pm 1\}^{V_n},$$

que corresponde a nuestra medida de Gibbs de (IV.1) del RFIM. Del teorema anterior y haciendo algunos cálculos tenemos:

$$\nu \left(\left| \frac{\Delta_n}{|V_n|} - \nu \left(\frac{\Delta_n}{|V_n|} \right) \right| \right) \xrightarrow{n} 0; \tag{IV.20}$$

cálculos similares pueden verse en [Panchenko, 2010b, Panchenko, 2013b]. Por lo tanto sigue de la segunda desigualdad triangular ($|x - y| \geq ||x| - |y||$) que

$$\nu \left(\left| \frac{\Delta_n}{|V_n|} - \nu \left(\frac{\Delta_n}{|V_n|} \right) \right| \right) \geq \left| \nu \left(\left| \frac{\beta}{|V_n|} \sum_{\langle xy \rangle} (\sigma_x \sigma_y - \nu(\sigma_x \sigma_y)) \right| \right) - (\mu - h) \nu(|\Delta_n - \nu(\Delta_n)|) \right|.$$

combinando está desigualdad con (IV.20), (IV.2) y el Lema 9, la prueba de la propiedad sigue. \square

Lo siguiente es probar las identidades de Ghirlanda-Guerra (ver II.54) para el modelo en cuestión, lo que es precisamente afirmado en el siguiente lema 10.

Con el fin de obtener esas identidades, el Lema 9 tiene un importante rol.

Lema 10. *Dado $m \geq 2$ y sea $f : \mathbb{R}^{m(m-1)/2} \rightarrow [-1, 1]$ una función medible acotada de superposiciones (II.53) que no cambian con n . Entonces, bajo la suposición (IV.2), las identidades de Ghirlanda-Guerra con $\psi \equiv \text{Id}$ y $\alpha = \mathbf{0}$ en (II.54) son satisfechas en cuasi todo (β, μ) . Lo que significa, si f es como arriba,*

$$\nu_\alpha(f R_{1,m+1}) - \frac{1}{m} \nu_\alpha(f) \nu_\alpha(R_{1,2}) - \frac{1}{m} \sum_{s=2}^m \nu_\alpha(f R_{1,s}) \xrightarrow{n} 0, \quad \forall (\beta, \mu) \in \mathcal{A}^c.$$

donde los ν_α son como en (IV.8).

Demostración. Dado que $\|f\|_\infty \leq 1$, tenemos

$$\left| \nu(\Delta_n(\sigma^1)f) - \nu(\Delta_n(\sigma^1))\nu(f) \right| \leq \nu(|\Delta_n - \nu(\Delta_n)|), \quad (\text{IV.21})$$

donde Δ_n es como en (IV.14).

Por otro lado, sea $\langle \cdot \rangle_{g_x=u}$ la esperanza de Gibbs definida fijando g_x en $\langle \cdot \rangle$ como siendo u y $F_x(u) := \langle \sigma_x^1 f \rangle_{g_x=u}$. Usando la definición de la esperanza (IV.7), y un calculo posterior mostramos que

$$\frac{\partial^j F_x(u)}{\partial u^j} = (\mu - h)^j \left\langle \sigma_x^1 \cdot \left(\sum_{\ell=1}^m \sigma_x^\ell - m \sigma_x^{m+1} \right)^j f \right\rangle_{g_x=u}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (\text{IV.22})$$

Notamos que la formula arriba también aparece en Chen (2019) [Chen, 2019].

Dado que $|\frac{\partial^j F_x(u)}{\partial u^j}| \leq (2m\mu)^j$ y $\mathbb{E}g_x^2 = 1$, la formula de integración por partes (Proposición 10) con $f_x(u) := \mathbb{E}F_x(u)$, $k = 2$ y $K = \varepsilon(\mu - h)^{-1}$, permite mostrar

$$\left| \mathbb{E}g_x f_x - \mathbb{E} \frac{df_x(g_x)}{du} \right| \leq 4m\mu(1 + 2m\mu) \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + 6\varepsilon m^2 \mu,$$

para cualquier $\varepsilon > 0$. Dividiendo la desigualdad arriba por $|V_n|$, sumando sobre $x \in V_n$, la desigualdad triangular y usando (IV.22) con $j = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \nu(\Delta_n(\sigma^1)f) - (\mu - h)\nu\left(\left(\sum_{\ell=1}^m R_{1,\ell} - mR_{1,m+1}\right)f\right) \right| \\ & \leq \frac{1}{|V_n|} \sum_x \left| \mathbb{E}g_x f_x - \mathbb{E} \frac{df_x(g_x)}{du} \right| \\ & \leq 4m\mu(1 + 2m\mu) \frac{1}{|V_n|} \sum_x \mathbb{E}(|g_x|^2 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) + 6\varepsilon m^2 \mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de los dos de la suposición (IV.2) y que podemos escoger cualquier ε , sigue que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_f \left| \nu(\Delta_n(\sigma^1)f) - (\mu - h)\nu\left(\left(\sum_{\ell=1}^m R_{1,\ell} - mR_{1,m+1}\right)f\right) \right| = 0. \quad (\text{IV.23})$$

En el caso particular donde $f = 1$ y $m = 1$, obtenemos que $|\nu(\Delta_n(\sigma^1)) - (\mu - h)\nu(R_{1,1} - R_{1,2})| \xrightarrow{n} 0$. Combinando esto con (IV.21) y (IV.23), sigue del Lema 9 que

$$\left| \nu(R_{1,1} - R_{1,2})\nu(f) - \nu\left(\left(\sum_{\ell=1}^m R_{1,\ell} - mR_{1,m+1}\right)f\right) \right| \xrightarrow{n} 0.$$

□

El último ingrediente que prueba el ítem (1) del Teorema IV.1.1 es el siguiente resultado por Auffinger y Chen (2016) [Auffinger and Chen, 2016] el cual permite probar la auto promediación de las sobreposiciones de spin.

Proposición 14 ([Auffinger and Chen, 2016]). *Bajo las hipótesis (IV.2), para cualquier $(\beta, \mu) \in (0, \infty)^2$,*

$$\mathbb{E} \left(\langle R_{1,2}^2 \rangle - \langle R_{1,2} \rangle^2 \right) = \nu(R_{1,2} - \langle R_{1,2} \rangle)^2 \xrightarrow{n} 0; \quad \nu \left(m(\sigma) - \langle m(\sigma) \rangle \right)^2 \xrightarrow{n} 0,$$

donde $m(\sigma) = \sum_x \sigma_x / |V_n|$ define la magnetización del sistema.

Prueba del ítem 1 del Teorema IV.1.1.

Acabamos de establecer dos cosas: La auto promediación de las sobreposiciones (Proposición 14) y las identidades de Ghirlanda-Guerra (Lema 10). Con el argumento de Chatterjee (ver Chatterjee (2015) [Chatterjee, 2015]) esos dos hechos implican la falta de simetría de las replicas del RFIM y la ultrametricidad. Lo último significa que la sobre-posición de spins es concentrada en su esperanza y esto a su vez implica la propiedad de ultrametricidad.

Los cálculos de esta prueba son como siguen:

tomando $m = 2$ y $f = R_{1,2}$ en Lema 10 tenemos

$$\nu(R_{1,2}R_{1,3}) - \frac{1}{2}\nu(R_{1,2})^2 - \frac{1}{2}\nu(R_{1,2}^2) \xrightarrow{n} 0. \quad (\text{IV.24})$$

escogiendo $m = 3$ y $f = R_{2,3}$

$$\nu(R_{2,3}R_{1,4}) - \frac{1}{3}\nu(R_{1,2})^2 - \frac{1}{3}\sum_{\ell=2}^3 \nu(R_{2,3}R_{1,\ell}) \xrightarrow{n} 0. \quad (\text{IV.25})$$

de la simetría entre replicas, $\nu(R_{2,3}R_{1,2}) = \nu(R_{2,3}R_{1,3}) = \nu(R_{1,2}R_{1,3})$. Entonces, multiplicando (IV.24) por $2/3$ y sumando con (IV.25) obtenemos

$$\frac{2}{3}[\nu(R_{1,2}^2) - \nu(R_{1,2})^2] - \mathbb{E}(\langle R_{1,2}^2 \rangle - \langle R_{2,3}R_{1,4} \rangle) \xrightarrow{n} 0. \quad (\text{IV.26})$$

Dado que la secuencia (σ^l) es independiente

$$\langle R_{2,3}R_{1,4} \rangle = \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y \in V_n} h_x^2 h_y^2 \langle \sigma_x^2 \sigma_x^3 \sigma_y^1 \sigma_y^4 \rangle = \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y \in V_n} h_x^2 h_y^2 \langle \sigma_x \rangle^2 \langle \sigma_y \rangle^2 = \langle R_{1,2} \rangle^2,$$

de combinar esto con (IV.26) y de la Proposición 14 tenemos la prueba del Teorema IV.1.1. \square

IV.3. Prueba de Item 2

Vamos a probar que vale la propiedad de ultrametricidad para el modelo perturbado con algún tipo de campo con decaimiento

Nuestro RFIM con las condiciones (IV.2)-(IV.6) y el modelo p -spin mixto con el desorden $\tilde{\xi} = (g_x, \xi_{x_1, \dots, x_p})$ para $p \geq 2$. Donde el desorden (g_x) y (ξ_{x_1, \dots, x_p}) son definidos en (IV.2) y en (IV.6), respectivamente. Dado que ambos desordenes son independiente uno del otro, trabajando solo en la aleatoriedad del desorden (g_x) y promediando en las realizaciones del desorden (ξ_{x_1, \dots, x_p}) , note que todos los resultados de la sección previa pueden ser adaptados para el modelo p -spin mixto (IV.2)-(IV.6).

La estrategia es combinar los resultados de la sección anterior con los siguientes resultados conocidos en la literatura para modelos p -spin mixtos para $p \geq 2$:

- El principal teorema de Panchenko (2010) [Panchenko, 2010b];
- La universalidad de las identidades de Ghirlanda-Guerra en modelos p -spin modelos mixtos; ver Chen (2019) [Chen, 2019];
- El teorema principal de Panchenko (2011) [Panchenko, 2013a].

para cualquier $n \geq 1$, sea $\tilde{\xi}_{x_1, \dots, x_p} := g_x \delta_{p,1} + \xi_{x_1, \dots, x_p} (1 - \delta_{p,1})$, donde δ es la función delta de Kronecker y

$$\Delta_{n;p} := \frac{1}{|V_n|^{(p+1)/2}} \sum_{x_1, \dots, x_p} \tilde{\xi}_{x_1, \dots, x_p} \sigma_{x_1} \cdots \sigma_{x_p}, \quad p \geq 1,$$

la parte de la función energía (IV.5) respecto al desorden. Cuando $p = 1$, $\Delta_{n;p}$ coincide con la función aleatoria Δ_n dado en (IV.14).

Lo siguiente será probar un resultado muy importante para obtener las identidades de de Ghirlanda-Guerra, que son dadas en el siguiente limite

$$\nu_\alpha\left(|\Delta_{n;p} - \nu_\alpha(\Delta_{n;p})|\right) \xrightarrow{n} 0.$$

Este resultado fue dado en Panchenko (2010) [Panchenko, 2010b], Auffinger y Chen (2018) [Auffinger and Chen, 2018].

De hecho, en [Auffinger and Chen, 2018] un resultado más fuerte es obtenido pero requiriendo una hipótesis más fuerte que el usado en [Panchenko, 2010b]. Para dar más detalle, en [Panchenko, 2010b] Panchenko se obtiene el limite anterior con las suposiciones siguientes:

- a) $|V_n|^{-1} \mathbb{E} \left| \log Z_\alpha(t) - \mathbb{E} \log Z_\alpha(t) \right| \xrightarrow{n} 0$,
- b) $|V_n|^{-1} \mathbb{E} \log Z_\alpha(t) \xrightarrow{n} P(t)$ en alguna vecindad de t , y
- c) $P(t)$ es diferenciable en t .

por otra parte, un limite similar es obtenido en Auffinger y Chen [Auffinger and Chen, 2018]

Con las siguientes hipótesis

- i) existe una función determinista $P : I = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $t' \in I$, $|V_n|^{-1} \log Z_\alpha(t') \xrightarrow{n} P(t')$ cuasi seguramente y
- ii) $P(t)$ es diferenciable en t ,

Podemos mostrar que las condiciones i) y ii) implican a), b) y c). pero, como observamos antes, la conclusión de [Auffinger and Chen, 2018] es más fuerte que la de [Panchenko, 2010b].

En nuestro caso es más convenienten establecer la validez de las condiciones a), b) y c).

Proposición 15. *para cualquier $p \geq 1$*

$$\nu_\alpha\left(|\Delta_{n;p} - \nu_\alpha(\Delta_{n;p})|\right) \xrightarrow{n} 0. \tag{IV.27}$$

Demostración. Para casi todo (β, μ) , la convergencia en (IV.27) es probado en el Lema 9 para $p = 1$. Para $p \geq 2$, sea $Z_\alpha(t)$ la función partición asociada para el hamiltoniano $c_n \alpha_p 2^{-p} H_{n,p}(\sigma)$ con $\alpha_p = t$. Bajo la condición de dos momentos del desorden (ξ_{x_1, \dots, x_p}) ser coincidentes, Lema 8 de Carmona y Hu (2006) [Carmona and Hu, 2006] muestra que el limite de la función energía libre $|V_n|^{-1} \log Z_\alpha(t)$ no depende de la distribución particular del ambiente. Por tanto este limite es valido donde t es diferenciable, para t fijado. De usar el argumento de diferencias de martingalas de la desigualdad de Burkholder [Burkholder, 1973] y la formula de integración por partes, Chen (2019) [Chen, 2019] probo que

$$|V_n|^{-2} \mathbb{E} \left| \log Z_\alpha(t) - \mathbb{E} \log Z_\alpha(t) \right|^2 \xrightarrow{n} 0.$$

Por lo tanto, la hipótesis a), b), y c) del principal teorema en [Panchenko, 2010b] son satisfechas para el modelo p -spin mixto con $p \geq 2$. Consecuentemente, (IV.27) es también valido para todo $p \geq 2$. □

Prueba del Item 2 del Teorema IV.1.1.

Para derivar las identidades extendidas de Ghirlanda-Guerra (II.54), podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $|\psi| \leq 1$. Dado que el espacio de funciones con soporte compacto a valores reales en $[-1, 1]$ es denso en el espacio de funciones Lebesgue integrables en $[-1, 1]$ y dado que cualquier función continua puede ser uniformemente aproximada en $[-1, 1]$ por una polinomial, es suficiente para probar las identidades extendidas de Ghirlanda-Guerra (II.54) para cualquier momentos mas altos de la sobreposición, que es, para todo $p \geq 1$,

$$\nu_\alpha(f R_{1,m+1}^p) - \frac{1}{m} \nu_\alpha(f) \nu_\alpha(R_{1,2}^p) - \frac{1}{m} \sum_{\ell=2}^m \nu_\alpha(f R_{1,\ell}^p) \xrightarrow{n} 0, \quad m \geq 2, \quad (\text{IV.28})$$

De hecho, consideremos el caso $p = 1$.

En este caso, la validez de las identidades (IV.28), sigue de la Proposición 15 y el Lema 10.

Posteriormente, la validez de (IV.28) para $p \geq 2$, es consecuencia de la Proposición 15 y la formula de integración por partes (como en la prueba del Teorema 2.1-Step 2, en Chen (2019) [Chen, 2019]). Por tanto, en el limite en volumen infinito, la medida de

Gibbs del RFIM definida en (IV.2)-(IV.6) satisface la identidad extendida de Ghirlanda-Guerra (II.54) para cualquier $p \geq 1$.

Finalmente, dado que $R = (R_{\ell,\ell'})_{\ell,\ell' \geq 1}$ es una matriz Gram-de Finetti [Dovbysh and Sudakov, 1982] y dado que las identidades extendidas Ghirlanda-Guerra (II.54) son satisfechas, el principal teorema de Panchenko (2011) [Panchenko, 2013a] prueba la ultrametricidad. \square

Capítulo V

Conclusiones

Encontrar ultrametricidad para campos no Gaussianos no es algo usual, en este caso hemos demostrado la propiedad de Ultrametricidad para campos no Gaussianos en el modelo de de Ising con campo aleatorio (RFIM)

a) El Teorema [IV.1.1](#) principal de esta tesis, con los campos con las condiciones [\(IV.2\)](#), es nuevo y afirma lo siguiente

- 1) $R_{2,3} \geq \min\{R_{1,2}, R_{1,3}\}$ casi seguramente con respecto al limite en volumen infinito de ν ;
- 2) $R_{2,3} \geq \min\{R_{1,2}, R_{1,3}\}$ casi seguramente con respecto al limite en volumen infinito de ν_α , para todo $p \geq 1$ en [\(IV.6\)](#).

Por lo tanto para el RFIMs, definido por [\(IV.1\)](#)-[\(IV.2\)](#) y [\(IV.2\)](#)-[\(IV.6\)](#), la matriz R es ultrametrica.

b) Otro resultado nuevo es la modificación de la conocida integración por partes Gaussiano para varias variables. El resultado es como se ve en la Proposición [11](#) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E}xyf(x, y) - \mathbb{E} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right| \\
& \leq \frac{2}{(k-1)!} \left(\left\| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^{k-1}} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \right) \mathbb{E}(|x| : |x| \geq K_1) \mathbb{E}(|y|^k : |y| \geq K_2) \\
& + \frac{2}{(k-1)!} \left(\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \right) \mathbb{E}(|x|^k : |x| \geq K_2) \\
& + \frac{2(k+1)K_1}{k!} \left(K_2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|y|^k + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|x|^k \right) \\
& + \frac{(k+1)K_1}{k!} \left(\left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|y|^{k+1} : |y| \geq K_2) + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|x|^k \right) \\
& + \frac{(k+1)}{k!} \left(K_2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|x| : |x| \geq K_1) \mathbb{E}|y|^k + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|x|^{k+1} : |x| \geq K_1) \right).
\end{aligned}$$

Este resultado puede ser conseguido usando la expansión de Taylor de dos variables hasta el k -ésimo orden.

c) El campo usado en el hamiltoniano

$$\beta \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x \sigma_y + (\mu - h) \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x$$

tiene los siguientes decaimientos, como se ve en (IV.2), (IV.3), (IV.4)

$$\begin{aligned}
h & \xrightarrow[n]{} \mu; \\
(\mu - h) \sqrt{|V_n|} & \xrightarrow[n]{} \infty; \\
\frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \mathbb{E}(|g_x|^3 : |g_x| \geq \varepsilon(\mu - h)^{-1}) & \xrightarrow[n]{} 0,
\end{aligned}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$. Este campo está inspirado en el campo de Auffinger y Chen (2016) [Auffinger and Chen, 2016].

d) Para obtener el resultado principal usamos la integración por partes y las identidades de Guirlanda-Guerra. Estas desigualdades tuvieron que ser probadas para nuestro modelo con el campo con decaimiento. El Lema 10 sobre las identidades de Guirlanda-Guerra es el siguiente:

Dado $m \geq 2$ y sea $f : \mathbb{R}^{m(m-1)/2} \rightarrow [-1, 1]$ una función medible acotada de superposiciones (II.53) que no cambian con n . Entonces, bajo la suposición (IV.2), las identidades de Ghirlanda-Guerra con $\psi \equiv \text{Id}$ y $\alpha = \mathbf{0}$ en (II.54) son satisfechas en cuasi todo (β, μ) . Lo que significa, si f es como arriba, entonces tenemos:

$$\nu(f R_{1,m+1}) - \frac{1}{m} \nu(f) \nu(R_{1,2}) - \frac{1}{m} \sum_{s=2}^m \nu(f R_{1,s}) \xrightarrow[n]{} 0, \quad \forall (\beta, \mu) \in \mathcal{A}^c.$$

Capítulo VI

Recomendaciones

Las recomendaciones que podemos extraer son:

- a) Una buena comprensión de las identidades de Guirlanda-Guerra, de esta propiedad se deducen otras, como ultrametricidad, pero para cada modelo tiene que ser verificada.
- b) Hay otras propiedades de modelos de vidrios spin como la propiedad de Caos probabilístico que para futuros trabajos podemos verificar si en el modelo de Ising con campo aleatorio lo posee.
- c) Cuando el campo es determinístico las técnicas conocidas para modelos con campos aleatorios fallan, un ejercicio sería adaptar técnicas, si es posible, para modelos de Ising con campos deterministas.
- d) Antes de comenzar el estudio de spin glasses se recomienda leer [[Panchenko, 2012](#)], [[Austin, 2012](#)] y [[Nishimori, 2001](#)].

Bibliografía

- [Aizenman et al., 1987] Aizenman, M., Barsky, D. J., and Fernández, R. (1987). The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *Journal of Statistical Physics*, 47(3-4):343–374.
- [Aizenman and Contucci, 1998] Aizenman, M. and Contucci, P. (1998). On the stability of the quenched state in mean-field spin-glass models. *Journal of Statistical Physics*, 92:765–783.
- [Aizenman et al., 2015] Aizenman, M., Duminil-Copin, H., and Sidoravicius, V. (2015). Random currents and continuity of Ising model’s spontaneous magnetization. *Communications in Mathematical Physics*, 334(2):719–742.
- [Aizenman and Wehr, 1989] Aizenman, M. and Wehr, J. (1989). Rounding of first-order phase transitions in systems with quenched disorder. *Physical Review Letters*, 62:2503–2506.
- [Aizenman and Wehr, 1990] Aizenman, M. and Wehr, J. (1990). Rounding effects of quenched randomness on first-order phase transitions. *Communications in Mathematical Physics*, 130:489–528.
- [Anderson, 1970] Anderson, P. W. (1970). Localisation theory and the Cu–Mn problem: Spin glasses. *Materials Research Bulletin*, 5(8):549–554.
- [Ash et al., 2000] Ash, R. B., Robert, B., Doleans-Dade, C. A., and Catherine, A. (2000). *Probability and measure theory*. Academic press.

- [Auffinger and Chen, 2016] Auffinger, A. and Chen, W.-K. (2016). Universality of chaos and ultrametricity in mixed p-spin models. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 69(11):2107–2130.
- [Auffinger and Chen, 2018] Auffinger, A. and Chen, W.-K. (2018). On concentration properties of disordered hamiltonians. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(4):1807–1815.
- [Austin, 2012] Austin, T. (2012). Mean field models for spin glasses. In *Notes for IAS workshop*, Springer.
- [Billingsley, 2008] Billingsley, P. (2008). *Probability and measure*. John Wiley & Sons.
- [Bissacot et al., 2015] Bissacot, R., Cassandro, M., Cioletti, L., and Presutti, E. (2015). Phase transitions in ferromagnetic Ising models with spatially dependent magnetic fields. *Communications in Mathematical Physics*, 337(1):41–53.
- [Bissacot and Cioletti, 2010] Bissacot, R. and Cioletti, L. (2010). Phase transition in ferromagnetic Ising models with non-uniform external magnetic fields. *Journal of Statistical Physics*, 139(5):769–778.
- [Bovier, 2006] Bovier, A. (2006). *Statistical mechanics of disordered systems: a mathematical perspective*, volume 18. Cambridge University Press.
- [Bovier and Külske, 1994] Bovier, A. and Külske, C. (1994). A rigorous renormalization group method for interfaces in random media. *Reviews in Mathematical Physics*, 6(03):413–496.
- [Braga and Araujo, 1999] Braga, G. A. and Araujo, F. F. (1999). O limite termodinâmico e independência das condições de contorno para o modelo de Ising d-dimensional1. *Anais da VIII semana da iniciação científica da UFMG. Belo Horizonte*.
- [Braga and Araujo, 2000] Braga, G. A. and Araujo, F. F. (2000). Caracterização da fase desordenada do modelo de Ising d-dimensional via desigualdades de correlações.

- [Bricmont and Kupiainen, 1987] Bricmont, J. and Kupiainen, A. (1987). Lower critical dimension for the random field Ising model. *Physical Review Letters*, 59:1829–1832.
- [Bricmont and Kupiainen, 1988] Bricmont, J. and Kupiainen, A. (1988). Phase transition in the 3d random field Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 116:539–572.
- [Burkholder, 1973] Burkholder, D. L. (1973). Distribution function inequalities for martingales. *the Annals of Probability*, 1(1):19–42.
- [Carmona and Hu, 2006] Carmona, P. and Hu, Y. (2006). Universality in sherrington–kirkpatrick’s spin glass model. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, volume 42, pages 215–222. Elsevier.
- [Castellani and Cavagna, 2005] Castellani, T. and Cavagna, A. (2005). Spin-glass theory for pedestrians. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2005(05):P05012.
- [Chatterjee, 2009] Chatterjee, S. (2009). The ghirlanda-guerra identities without averaging. *Preprint, arXiv:0911.4520*.
- [Chatterjee, 2015] Chatterjee, S. (2015). Absence of replica symmetry breaking in the random field Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 337:93–102.
- [Chen, 2019] Chen, Y.-T. (2019). Universality of ghirlanda–guerra identities and spin distributions in mixed p -spin models. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, volume 55, pages 528–550. Institut Henri Poincaré.
- [Cioletti and Vila, 2016] Cioletti, L. and Vila, R. (2016). Graphical representations for Ising and potts models in general external fields. *Journal of Statistical Physics*, 162(1):81–122.
- [Dasgupta, 2015] Dasgupta, C. (2015). Experimental results for spin glasses; models; the replica method; the edwards-anderson order parameter.

- [den Hollander and Keane, 1986] den Hollander, W. T. F. and Keane, M. (1986). Inequalities of FKG type. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 138(1-2):167–182.
- [Dobrushin, 1968] Dobrushin, R. L. (1968). Description of a random field by means of conditional probabilities, with applications. *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, 13.
- [Dovbysh and Sudakov, 1984] Dovbysh, L. and Sudakov, V. (1984). Gram-de finetti matrices. *Journal of Soviet Mathematics*, 27:3047–3054.
- [Dovbysh and Sudakov, 1982] Dovbysh, L. and Sudakov, V. N. (1982). On the gram-de finetti matrices. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 119:77–86.
- [Duminil-Copin and Tassion, 2016] Duminil-Copin, H. and Tassion, V. (2016). A new proof of the sharpness of the phase transition for bernoulli percolation and the Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 343(2):725–745.
- [Dyson, 1969] Dyson, F. (1969). Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet. *Communications in Mathematical Physics*, 12(2):91–107.
- [Edwards and Anderson, 1975] Edwards, S. F. and Anderson, P. W. (1975). Theory of spin glasses. *Journal of Physics F: Metal Physics*, 5(5):965.
- [Edwards and Anderson, 1976] Edwards, S. F. and Anderson, P. W. (1976). Theory of spin glasses. ii. *Journal of Physics F: Metal Physics*, 6(10):1927.
- [Fisher et al., 1984] Fisher, D. S., Fröhlich, J., and Spencer, T. (1984). The Ising model in a random magnetic field. *Journal of Statistical Physics*, 34(5-6):863–870.
- [Fortuin et al., 1971] Fortuin, C. M., Kasteleyn, P. W., and Ginibre, J. (1971). Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Communications in Mathematical Physics*, 22(2):89–103.
- [Friedli and Velenik, 2017] Friedli, S. and Velenik, Y. (2017). *Equilibrium statistical mechanics of classical lattice systems: A concrete introduction*.

- [Georgii, 2011] Georgii, H.-O. (2011). *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9. Walter de Gruyter.
- [Ghirlanda and Guerra, 1998] Ghirlanda, S. and Guerra, F. (1998). General properties of overlap probability distributions in disordered spin systems. towards paris ultrametricity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(46):9149.
- [Griffiths, 1967a] Griffiths, R. B. (1967a). Correlations in Ising ferromagnets. i. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):478–483.
- [Griffiths, 1967b] Griffiths, R. B. (1967b). Correlations in Ising ferromagnets. ii. external magnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):484–489.
- [Griffiths, 1967c] Griffiths, R. B. (1967c). Correlations in Ising ferromagnets. iii. *Communications in Mathematical Physics*, 6(2):121–127.
- [Griffiths et al., 1970] Griffiths, R. B., Hurst, C. A., and Sherman, S. (1970). Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):790–795.
- [Imry and Ma, 1975] Imry, Y. and Ma, S.-k. (1975). Random-field instability of the ordered state of continuous symmetry. *Physical Review Letters*, 35:1399.
- [Ising, 1925] Ising, E. (1925). Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 31(1):253–258.
- [Itoi, 2018] Itoi, C. (2018). Absence of replica symmetry breaking in the transverse and longitudinal random field ising model. *Journal of Statistical Physics*, 170(4):684–699.
- [Itoi and Utsunomiya, 2019] Itoi, C. and Utsunomiya, Y. (2019). No replica symmetry breaking phase in the random field ginzburg-landau model. *Journal of Mathematical Physics*, 60(8):083304.
- [Jagannath, 2017] Jagannath, A. (2017). Approximate ultrametricity for random measures and applications to spin glasses. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 70(4):611–664.

- [Jesi, 2016] Jesi, M. B. (2016). *Spin Glasses: Criticality and Energy Landscapes*. Springer.
- [Jonasson and Steif, 1999] Jonasson, J. and Steif, J. E. (1999). Amenability and phase transition in the Ising model. *Journal of Theoretical Probability*, 12(2):549–559.
- [Kelly and Sherman, 1968] Kelly, D. G. and Sherman, S. (1968). General griffiths' inequalities on correlations in Ising ferromagnets. *Journal of Mathematical Physics*, 9(3):466–484.
- [Landau, 1909] Landau, E. (1909). *Handbuch der lehre von der verteilung der primzahlen*, volume 1. BG Teubner.
- [Lanford and Ruelle, 1969] Lanford, O. E. and Ruelle, D. (1969). Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 13(3):194–215.
- [Lee and Yang, 1952] Lee, T.-D. and Yang, C.-N. (1952). Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and Ising model. *Physical Review*, 87(3):410.
- [Loève, 1951] Loève, M. (1951). On almost sure convergence. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 2, pages 279–304. University of California Press.
- [Medeiros, 2017] Medeiros, L. C. (2017). A continuidade da transição de fase do modelo de Ising tridimensional. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília.
- [Mézarid et al., 1987] Mézarid, M., Parisi, G., and Virasoro, M. (1987). *Spin glass theory and beyond: An Introduction to the Replica Method and Its Applications*, volume 9. World Scientific Publishing Company.
- [Newman and Stein, 1998] Newman, C. and Stein, D. L. (1998). Simplicity of state and overlap structure in finite-volume realistic spin glasses. *Physical Review E*, 57(2):1356.

- [Nishimori, 2001] Nishimori, H. (2001). *Statistical physics of spin glasses and information processing: an introduction*, volume 111. Clarendon Press.
- [Onsager, 1944] Onsager, L. (1944). Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117.
- [Panchenko, 2007] Panchenko, D. (2007). A note on talagrand's positivity principle. *Electronic Communications in Probability*, 12:401–410.
- [Panchenko, 2010a] Panchenko, D. (2010a). A connection between the ghirlanda–guerra identities and ultrametricity. *Ann. Probab.*, 38(1):327–347.
- [Panchenko, 2010b] Panchenko, D. (2010b). The ghirlanda-guerra identities for mixed p-spin model. *Preprint, arXiv:1002.2190*.
- [Panchenko, 2011] Panchenko, D. (2011). Ghirlanda–guerra identities and ultrametricity: An elementary proof in the discrete case. *Comptes Rendus Mathematique*, 349(13-14):813–816.
- [Panchenko, 2012] Panchenko, D. (2012). The sherrington-kirkpatrick model: an overview. *Journal of Statistical Physics*, 149:362–383.
- [Panchenko, 2013a] Panchenko, D. (2013a). The parisi ultrametricity conjecture. *Annals of Mathematics*, pages 383–393.
- [Panchenko, 2013b] Panchenko, D. (2013b). *The Sherrington-Kirkpatrick model*. Springer Science and Business Media.
- [Parisi, 1979] Parisi, G. (1979). Infinite number of order parameters for spin-glasses. *Physical Review Letters*, 43(23):1754.
- [Parisi, 2002] Parisi, G. (2002). The physical meaning of replica symmetry breaking. *arXiv preprint cond-mat/0205387*.
- [Peierls, 1936] Peierls, R. (1936). On Ising's model of ferromagnetism. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 32, pages 477–481. Cambridge University Press.

- [Pfister, 1991] Pfister, C.-E. (1991). Large deviations and phase separation in the two-dimensional Ising model. *Helvetica Physica Acta*, 64(GR-PF-ARTICLE-1991-004):953–1054.
- [Procacci, 2005] Procacci, A. (2005). Cluster expansion methods in rigorous statistical mechanics. *Preprint (www.mat.ufmg.br/aldo/papers/book.pdf)*.
- [Roldan, 2014] Roldan, J. (2014). O teorema de aizenman-barsky-fernández e a unicidade da temperatura crítica. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília.
- [Roldan and Vila, 2018a] Roldan, J. and Vila, R. (2018a). Absence of replica symmetry breaking in finite fifth moment random field ising model. *arXiv preprint arXiv:1811.07003*.
- [Roldan and Vila, 2018b] Roldan, J. and Vila, R. (2018b). On the absence of replica symmetry breaking for the random field Ising model in the presence of a class of non-gaussian disorders. *arXiv preprint arXiv:1811.07003v2*.
- [Roldan and Vila, 2020] Roldan, J. and Vila, R. (2020). On the ultrametricity property in random field ising models. *Journal of Mathematical Physics*, 61(10):103302.
- [Sherrington and Kirkpatrick, 1975] Sherrington, D. and Kirkpatrick, S. (1975). Solvable model of a spin-glass. *Physical review letters*, 35(26):1792.
- [Stein, 1972] Stein, C. (1972). A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Probability Theory*. The Regents of the University of California.
- [Stein and Newman, 2013] Stein, D. L. and Newman, C. (2013). *Spin glasses and complexity*, volume 4. Princeton University Press.
- [Talagrand, 2003] Talagrand, M. (2003). *Spin glasses: a challenge for mathematicians: cavity and mean field models*, volume 46. Springer Science & Business Media.

- [Talagrand, 2006] Talagrand, M. (2006). The Parisi formula. *Annals of mathematics*, pages 221–263.
- [Talagrand, 2010] Talagrand, M. (2010). *Mean field models for spin glasses: Volume I: Basic examples*, volume 54. Springer Science & Business Media.
- [van Enter and Griffiths, 1983] van Enter, A. C. D. and Griffiths, R. B. (1983). The order parameter in a spin glass. *Communications in mathematical physics*, 90(3):319–327.
- [Velenik, 1997] Velenik, Y. (1997). *Phase Separation as a Large Deviation Problem*. PhD thesis.
- [von Dreifus, 1993] von Dreifus, H. (1993). *Mecânica Estatística de Modelos Ferromagnéticos*. Impa.

Apéndice A

Desigualdades GKS

A.1. Desigualdad GKS-I

Presentamos la prueba de la Desigualdade GKS-1, para condiciones de frontera libre y campo positivo (enunciada no Teorema II.2.1), el sea, $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h, \mathbf{J}}^0 \geq 0$. Ya que el denominador de la esperanza es $Z_\Lambda > 0$, lo único que nos queda es mostrar que el denominador no es negativo, o sea,

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} \geq 0.$$

Para eso trabajamos en el factor de Boltzmann

$$e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} e^{\beta J_{ij} \omega_i \omega_j} \quad (\text{A.1})$$

y como

$$e^{\beta J_{ij} \omega_i \omega_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J_{ij} \omega_i \omega_j)^n}{n!},$$

puedemos ordenar los términos para obtener las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} e^{\beta J_{ij} \omega_i \omega_j} &= \cosh(\beta J_{ij}) + \sinh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j \\ &= \cosh(\beta J_{ij}) (1 + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ahora, usando (A.2) en (A.1) tenemos

$$e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \cosh(\beta J_{ij}) (1 + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j), \quad (\text{A.3})$$

luego,

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \cosh(\beta J_{ij})(\sigma_A(\omega) + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j \sigma_A(\omega)).$$

Ahora, desarrollando el productorio tenemos

$$\prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \cosh(\beta J_{ij})(\sigma_A(\omega) + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j \sigma_A(\omega)) = \sum_m c_m P_m,$$

donde c_m es un factor dado por un producto de términos que son ahora $\cosh(\beta J_{ij})$, el $\sinh(\beta J_{ij})$. Esos factores son no negativos pues $\cosh(x)$ y $\tanh(x)$ son ambos no negativos para $x \geq 0$. Ya los factores P_m son de la forma

$$P_m = \omega_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots \omega_{i_m}^{n_{i_m}} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i}.$$

Con eso tenemos

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sum_m c_m P_m = \left(\sum_m c_m \right) \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m \right).$$

En caso todos los n_i sean pares, tenemos inmediatamente que

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} > 0.$$

Por otro lado, si n_{j_1}, \dots, n_{j_r} es la lista completa de todos os exponentes impares que aparecen en P_m , entonces tenemos que

$$P_m = \omega_{j_1} \cdots \omega_{j_r} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i}.$$

Sumando sobre todas las configuraciones, obtenemos

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \omega_{j_1} \cdots \omega_{j_r} \prod_{i \in \{j_1, \dots, j_r\}} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{i \in \Lambda \setminus \{j_1, \dots, j_r\}} e^{\beta h_i \omega_i}.$$

Como el segundo productorio que aparece arriba es positivo y

$$e^{\beta h_j} - e^{-\beta h_j} = 2 \sinh(\beta h_j) \geq 0,$$

sigue que

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m \geq 0.$$

Así, concluimos que

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} \geq 0.$$

A.2. Demostración de GKS-II

En esta parte mostraremos que $\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^0 \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^0$ (que es la segunda parte del Teorema II.2.1). Haremos una prueba para el modelo en condiciones de frontera libre. El método utilizado en esta prueba será la de duplicación de variables, es decir, para cada sitio $i \in \Lambda$ creamos una nueva variable $\mu_i : \Omega_\Lambda \rightarrow \{-1, 1\}$, y definimos un hamiltoniano duplicado en el volumen Λ de la siguiente forma

$$H^{(2)}(\sigma, \mu) := H(\sigma) + H(\mu) = - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} J_{i,j} (\sigma_i \sigma_j + \mu_i \mu_j) - \sum_{i \in \Lambda} h_i (\sigma_i + \mu_i).$$

Denotaremos por $\langle \cdot \rangle^{(2)}$ el valor esperado con respecto a la medida de Gibbs definida por el hamiltoniano $H^{(2)}(\sigma, \mu)$. Observe que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \sigma_B - \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} &= \frac{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} [\sigma_A(\omega_1) \sigma_B(\omega_1) - \sigma_A(\omega_1) \mu_B(\omega_2)] e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1) - \beta(H(\mu))(\omega_2)}}{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1) - \beta(H(\mu))(\omega_2)}} \\ &= \frac{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega_1) \sigma_B(\omega_1) e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)}}{\sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)} \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)}} \\ &\quad - \frac{\sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} \mu_B(\omega_2) e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)} \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega_1) e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)}}{\sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)} \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)}} \\ &= \langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_B \rangle \langle \sigma_A \rangle \end{aligned}$$

de la misma forma, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \rangle^{(2)} &= \langle \mu_A \rangle^{(2)} = \langle \sigma_A \rangle, \\ \langle \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} &= \langle \sigma_A \rangle \langle \mu_B \rangle, \\ \langle \sigma_A \sigma_B \rangle^{(2)} &= \langle \sigma_A \sigma_B \rangle = \langle \mu_A \mu_B \rangle = \langle \mu_A \mu_B \rangle^{(2)}. \end{aligned}$$

Como $\sigma_A = \prod_{i \in A} \sigma_i$, tenemos

$$\langle \sigma_A \sigma_B - \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} = \left\langle \prod_{i \in A} \sigma_i \left(\prod_{i \in B} \sigma_i - \prod_{i \in B} \mu_i \right) \right\rangle^{(2)}. \quad (\text{A.4})$$

Considerando la siguiente mudanza de variables

$$X_i = \frac{(\sigma_i - \mu_i)}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad Y_i = \frac{(\sigma_i + \mu_i)}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.5})$$

y reescribiendo las igualdades en (A.4) y (A.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_B \rangle \langle \sigma_A \rangle &= \langle \sigma_A \sigma_B - \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} \\ &= \left\langle \prod_{i \in A} \left(\frac{X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right) \left[\prod_{i \in B} \left(\frac{X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right) - \prod_{i \in B} \left(\frac{-X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\rangle^{(2)}. \end{aligned}$$

Los términos con coeficiente negativo de $\prod_{i \in B} \left(\frac{-X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right)$ son cancelados con el termino de $\prod_{i \in B} \left(\frac{X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right)$ y al final queda un polinomio en X_i e Y_i con coeficientes no negativos. La demostración será concluida si mostramos que $\langle X_A Y_B \rangle^{(2)} \geq 0$, para cualquier $A, B \subset \Lambda$, con $X_A := \prod_{i \in A} X_i$. Para probar esta desigualdad primero observamos que:

$$\begin{aligned} H^{(2)}(\sigma, \mu) &= - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} J_{i,j} (X_i X_j + Y_i Y_j) - \sqrt{2} \sum_{i \in \Lambda} h_i Y_i, \\ \langle X_A Y_B \rangle^{(2)} &= \frac{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} X_A(\omega_1, \omega_2) Y_B(\omega_1, \omega_2) e^{-\beta (H(\sigma, \mu))(\omega_1, \omega_2)}}{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta (H(\sigma, \mu))(\omega_1, \omega_2)}}. \end{aligned}$$

El denominador de la esperanza es positivo, luego expandimos la exponencial del numerador de la esperanza con su representación en series de Taylor. Seguimos factorizando cada termino con respecto la $i \in \Lambda$. Así, solo tenemos que garantizar que:

$$\begin{aligned} &\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} X_i^m(\omega_1, \omega_2) Y_i^n(\omega_1, \omega_2) \\ &= \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} \left(\frac{\sigma_i(\omega_1) - \mu_i(\omega_2)}{\sqrt{2}} \right)^m \left(\frac{\sigma_i(\omega_1) + \mu_i(\omega_2)}{\sqrt{2}} \right)^n \geq 0, \end{aligned}$$

para cualquier entero $m, n \geq 0$. Se m y n son positivos, entonces la suma es nula, debido a los valores que asumen os spins σ y μ . Si m o n es cero, entonces tenemos sumas en apenas una de estas variables X_i o Y_i . Si el exponente de esa variable es par entonces tenemos que la suma es positiva, y si el exponente es impar, entonces la suma es nula. Con eso terminamos la prueba.

A.3. Notación de la O

Para $f(x)$, $g(x)$ funciones reales, $g(x) \neq 0$ para todo x en un entorno de x_0 .

La notación **o-pequeña**¹ está definida así

$$f(x) = o(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow x_0,$$

si y solo si, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Para el caso infinito sería

$$f(x) = o(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow \infty,$$

si y solo si, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, esto es, $\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \forall x \geq R \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \epsilon$.

La notación **O-grande** es

$$f(x) = O(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow x_0,$$

si y solo si, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$, para x en una vecindad de x_0 . En el caso infinito, tenemos

$$f(x) = O(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow \infty,$$

si y solo si, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$, para x suficientemente grande, o sea, $\exists C > 0, \exists R > 0, \forall x \geq R \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < C$.

¹fue creada por Edmund Landau en 1909, en el pequeño libro sobre la distribución de los primos [Landau, 1909].

Apéndice B

Sobre la integración Gaussiana por partes

B.1. Prueba de la formula de integración Gaussiana por partes

prueba de la proposición 11. Sea $g(x, y) := xf(x, y)$ por la función expandida de Taylor g en $(k - 1)$ -ésimo y k -ésimo orden, tenemos

$$yg(x, y) = g(x, 0)y - \frac{\partial^{k-1}g(x, 0)}{\partial y^{k-1}} \frac{y^k}{(k-1)!} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^n g(x, 0)}{\partial y^n} \frac{y^{n+1}}{n!} \quad (\text{B.1})$$
$$+ \frac{\partial^{k-1}g(x, a(y))}{\partial y^{k-1}} \frac{y^k}{(k-1)!},$$

$$= g(x, 0)y + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\partial^n g(x, 0)}{\partial y^n} \frac{y^{n+1}}{n!} + \frac{\partial^k g(x, b(y))}{\partial y^k} \frac{y^{k+1}}{k!}. \quad (\text{B.2})$$

Similarmente, considerando la expansión de $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$ para su $(k - 1)$ -ésimo orden, conseguimos

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^n g(x, 0)}{\partial y^n} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^k g(x, c(y))}{\partial y^k} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}, \quad (\text{B.3})$$

donde $a(y), b(y), c(y)$ son funciones dependiendo solo de y . Donde (B.1) y (B.3) sigue que

$$yg(x, y) - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = g(x, 0)y - \frac{\partial^{k-1}g(x, 0)}{\partial y^{k-1}} \frac{y^k}{(k-1)!} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^n g(x, 0)}{\partial y^n} h_n(y) \quad (\text{B.4})$$
$$+ \frac{\partial^{k-1}g(x, a(y))}{\partial y^{k-1}} \frac{y^k}{(k-1)!} - \frac{\partial^k g(x, c(y))}{\partial y^k} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!},$$

donde $h_n(y) := \left(\frac{y^{n+1}}{n!} - \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\right)$. Donde (B.2) y (B.3), conseguimos

$$yg(x, y) - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = g(x, 0)y + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^n g(x, 0)}{\partial y^n} h_n(y) \quad (\text{B.5})$$

$$+ \frac{\partial^k g(x, b(y))}{\partial y^k} \frac{y^{k+1}}{k!} - \frac{\partial^k g(x, c(y))}{\partial y^k} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Expandiendo $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ para $(k-1)$ -ésimo y k -ésimo orden, tenemos

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} x - \frac{\partial^k f(0, y)}{\partial x^{k-1} \partial y} \frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} \frac{x^{n+1}}{n!} \quad (\text{B.6})$$

$$+ \frac{\partial^k f(\tilde{a}(x), y)}{\partial x^{k-1} \partial y} \frac{x^k}{(k-1)!},$$

$$= \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} x + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} \frac{x^{n+1}}{n!} + \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{b}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k+1}}{k!}. \quad (\text{B.7})$$

De nuevo, expandiendo $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ al $(k-1)$ -ésimo orden, obtenemos

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{c}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \quad (\text{B.8})$$

donde $\tilde{a}(x), \tilde{b}(x), \tilde{c}(x)$ son funciones que dependen de x . De (B.6) y (B.8),

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} x - \frac{\partial^k f(0, y)}{\partial x^{k-1} \partial y} \frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} h_n(x) \quad (\text{B.9})$$

$$+ \frac{\partial^k f(\tilde{a}(x), y)}{\partial x^{k-1} \partial y} \frac{x^k}{(k-1)!} - \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{c}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

De (B.7) y (B.8) tenemos

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} x + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} h_n(x) \quad (\text{B.10})$$

$$+ \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{b}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k+1}}{k!} - \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{c}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

sumando (B.4) y (B.9) tenemos

$$\begin{aligned}
 xyf(x, y) - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= f(x, 0)xy + \frac{\partial f(0, y)}{\partial y}x - \frac{\partial^{k-1} f(x, 0)}{\partial y^{k-1}} \frac{xy^k}{(k-1)!} \\
 &\quad - \frac{\partial^k f(0, y)}{\partial x^{k-1} \partial y} \frac{x^k}{(k-1)!} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{\partial^n f(x, 0)}{\partial y^n} x h_n(y) + \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} h_n(x) \right) \\
 &\quad + \frac{\partial^{k-1} f(x, a(y))}{\partial y^{k-1}} \frac{xy^k}{(k-1)!} - \frac{\partial^k f(x, c(y))}{\partial y^k} \frac{xy^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &\quad + \frac{\partial^k f(\tilde{a}(x), y)}{\partial x^{k-1} \partial y} \frac{x^k}{(k-1)!} - \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{c}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

adicionando (B.5) y (B.10) conseguimos

$$\begin{aligned}
 xyf(x, y) - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= f(x, 0)xy + \frac{\partial f(0, y)}{\partial y}x \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{\partial^n f(x, 0)}{\partial y^n} x h_n(y) + \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} h_n(x) \right) \\
 &\quad + \frac{\partial^k f(x, b(y))}{\partial y^k} \frac{xy^{k+1}}{k!} - \frac{\partial^k f(x, c(y))}{\partial y^k} \frac{xy^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &\quad + \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{b}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k+1}}{k!} - \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{c}(x), y)}{\partial x^k \partial y} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

definiendo

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_2 &:= xyf(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} - f(x, 0)xy - \frac{\partial f(0, y)}{\partial y}x \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{\partial^n f(x, 0)}{\partial y^n} x h_n(y) + \frac{\partial^{n+1} f(0, y)}{\partial x^n \partial y} h_n(x) \right),
 \end{aligned}$$

obtenemos de (B.11) y (B.12) las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
 |I_1| &\leq 2 \left\| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^{k-1}} \right\|_{\infty} \frac{|x||y|^k}{(k-1)!} + 2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y} \right\|_{\infty} \frac{|x|^k}{(k-1)!} \\
 &\quad + \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \frac{|x||y|^{k-1}}{(k-1)!} + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{(k-1)!}
 \end{aligned}$$

y

$$|I_2| \leq \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} |x| \left(\frac{|y|^{k+1}}{k!} + \frac{|y|^{k-1}}{(k-1)!} \right) + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \left(\frac{|x|^{k+1}}{k!} + \frac{|x|^{k-1}}{(k-1)!} \right).$$

Tomando la esperanza de $|I_1|$ en $D := \{|x| \geq K_1, |y| \geq K_2\}$, con $K_1, K_2 \geq 1$, para la primera desigualdad, conseguimos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I_1| : D) &\leq \frac{2}{(k-1)!} \left(\left\| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^{k-1}} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \right) \mathbb{E}(|x| : |x| \geq K_1) \mathbb{E}(|y|^k : |y| \geq K_2) \\ &+ \frac{2}{(k-1)!} \left(\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \right) \mathbb{E}(|x|^k : |x| \geq K_2). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Ahora, tomando la esperanza de $|I_2|$ en el conjunto $\{|x| \leq K_1\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I_2| : |x| \leq K_1) &= \mathbb{E}(|I_2| : |x| \leq K_1, |y| \leq K_2) + \mathbb{E}(|I_2| : |x| \leq K_1, |y| \geq K_2) \quad (\text{B.14}) \\ &\leq \frac{(k+1)K_1}{k!} \left(K_2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|y|^k + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|x|^k \right) \\ &+ \frac{(k+1)K_1}{k!} \left(\left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|y|^{k+1} : |y| \geq K_2) + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|x|^k \right). \end{aligned}$$

Similarmente, tomando la esperanza de $|I_2|$ en el conjunto $\{|y| \leq K_2\}$ notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I_2| : |y| \leq K_2) &\leq \frac{(k+1)K_1}{k!} \left(K_2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|y|^k + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}|x|^k \right) \\ &+ \frac{(k+1)}{k!} \left(K_2 \left\| \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|x| : |x| \geq K_1) \mathbb{E}|y|^k + \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right\|_{\infty} \mathbb{E}(|x|^{k+1} : |x| \geq K_1) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Dado que x, y son del s variables aleatorias tales que sus primeros $k \geq 2$ momentos coinciden con los una variable aleatoria Gaussiana, sigue que $\mathbb{E}h_n(x) = \mathbb{E}h_n(y) = 0$, $n = 1, \dots, k-1$. entonces,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}xyf(x, y) - \mathbb{E} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right| &= |\mathbb{E}(I_1)| = |\mathbb{E}(I_2)| = |\mathbb{E}(I_1 : D) + \mathbb{E}(I_2 : D^c)| \\ &\leq \mathbb{E}(|I_1| : D) + \mathbb{E}(|I_2| : |x| \leq K_1) + \mathbb{E}(|I_2| : |y| \leq K_2). \end{aligned}$$

Finalmente, Combinando la desigualdad arriba con (B.13), (B.14) y (B.15), concluimos la prueba. □

B.2. Integración por partes no Gaussiana

B.2.1. Integración por partes para variables aleatorias no gaussianas, con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Muchas veces vamos a querer derivar expresiones en el interior de esperanzas, aunque cuando no posean distribución gaussiana, pero si otra.

Proposición 16. *Sea g la variable aleatoria real con media cero y varianza σ^2 . Entonces para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada de tercera orden continua y limitada. Entonces:*

$$\mathbb{E}[g f(g)] = \sigma^2 \mathbb{E}[\partial_x f(g)] + \gamma_g^2 [\partial_x^2 f],$$

con

$$\gamma_g^2 [\partial_x^2 f] := \mathbb{E} \left[g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx \right] - \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^g (g-x) \partial_x^3 f(x) dx \right].$$

La primera esperanza de γ_g^2 está bien definida, ya que

$$\left| g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx \right| \leq |g| \int_0^{|g|} \min\{2 \|\partial_x f\|_\infty, \|\partial_x^2 f\|_\infty x\} dx.$$

Prueba. La prueba de este resultado puede ser encontrada en el artículo de Yu-Ting Chen [Chen, 2019] y es como sigue :

Comenzamos usando la fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} g f(g) &= g f(0) + g^2 \partial_x f(0) + g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx \\ &= g f(0) + g^2 \partial_x f(0) + \sigma^2 \int_0^g \partial_x^2 f(x) dx \\ &\quad + \sigma^2 \int_0^g \left(-\partial_x^2 f(g) + \int_y^g \partial_x^3 f(x) dx \right) dy + g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx. \end{aligned}$$

Usando el teorema fundamental del cálculo observemos

$$\int_0^g -\partial_x^2 f(g) dx = -g \partial_x^2 f(0) - g \int_0^g \partial_x^3 f(x) dx.$$

Posteriormente tomando la esperanza y debido a que $\mathbb{E}[g] = 0$ y $\mathbb{E}[g^2] = \sigma^2$ tenemos

$$\mathbb{E}[g f(g)] = \sigma^2 \mathbb{E}[\partial_x f(g)] + \gamma_g^2 [\partial_x^2 f].$$

□

B.2.2. Generalización de la integración Gaussiana por partes

La prueba del próximo resultado puede ser encontrado en Chen (2019) [Chen, 2019, prop 6.1]

Proposición 17. *Sea Y una variable aleatoria de valor real con media cero y varianza finita σ^2 , con $\sigma > 0$. Para cualquier función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con una derivada de tercera orden continua y limitada, tenemos:*

$$\mathbb{E}(Y f(Y)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(Y)) + \gamma_Y^2(f), \quad (\text{B.16})$$

donde

$$\gamma_Y^2(f) := \mathbb{E}\left(Y \int_0^Y (Y-u) f''(u) du\right) - \sigma^2 \mathbb{E}\left(\int_0^Y (Y-u) f'''(u) du\right),$$

con

$$\left|Y \int_0^Y (Y-u) f''(u) du\right| \leq |Y| \int_0^{|Y|} \min\{2 \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty u\} du. \quad (\text{B.17})$$

Prueba. Usando el Teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} Y f(Y) &= Y f(0) + Y^2 f'(0) + Y \int_0^Y (Y-u) f''(u) du \\ &\quad + \sigma^2 \left(f'(Y) - f'(0) - Y f''(0) + R(Y) \right), \end{aligned}$$

donde $R(Y) := -f'(Y) + f'(0) + Y f''(0)$.

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo e integración por partes,

$$R(Y) = - \int_0^Y f''(u) du + Y f''(0) = - \int_0^Y (Y-u) f'''(u) du. \quad (\text{B.18})$$

Dado que $\mathbb{E}Y = 0$ y $\mathbb{E}Y^2 = \sigma^2$,

$$\mathbb{E}(Y f(Y)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(Y)) + \mathbb{E}\left(Y \int_0^Y (Y-u) f''(u) du\right) + \sigma^2 \mathbb{E}R(Y).$$

Así, usando (B.18) conseguimos mostrar (B.16). Por otro lado, (B.17) sigue combinando la igualdad $\int_0^Y (Y-u) f''(u) du = \int_0^Y (f'(u) - f'(0)) du$ con el Teorema del Valor Medio. \square

El próximo resultado es nuevo y puede ser visto como una generalización de la Proposición 17 para el caso de dos variables. Para simplificar la notación, vamos escribir $\partial_{i,j} f$ la derivada parcial de orden i y j para la primera y segunda componente respectivamente.

Proposición 18 (Una integración Gaussiana por partes generalizada). *Sea X y Y dos variables aleatorias reales independientes con media cero y varianzas finitas σ_X^2 y σ_Y^2 respectivamente, con σ_X, σ_Y ambos positivos. Para cualquier función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada de quinta orden continua y limitada. Tenemos*

$$\mathbb{E}(XYf(X, Y)) = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \mathbb{E}(\partial_{1,1}f(X, Y)) + \gamma_{X,Y}^2(f), \quad (\text{B.19})$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_{X,Y}^2(f) := & \mathbb{E}\left(XY \int_0^X \int_0^Y (X-u) \partial_{2,1}f(u, v) dudv\right) \\ & - \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \mathbb{E}\left(\int_0^X \int_0^Y (X-u) \partial_{3,2}f(u, v) dudv\right) \\ & - \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \mathbb{E}\left(\int_0^X (X-u) \partial_{3,1}f(u, 0) du + \int_0^Y (Y-v) \partial_{1,3}f(0, v) dv\right). \end{aligned}$$

Ademas de eso,

$$\left|XY \int_0^X \int_0^Y (X-u) \partial_{2,1}f(u, v) dudv\right| \quad (\text{B.20})$$

$$\leq |X||Y| \int_0^{|X|} \int_0^{|Y|} \min\{2\|\partial_{1,1}f\|_\infty, \|\partial_{2,1}f\|_\infty u\} dudv,$$

$$\left|\int_0^X (X-u) \partial_{3,1}f(u, 0) du\right| \leq \int_0^{|X|} \min\{2\|\partial_{2,1}f\|_\infty, \|\partial_{3,1}f\|_\infty u\} du, \quad (\text{B.21})$$

$$\left|\int_0^Y (Y-v) \partial_{1,3}f(0, v) dv\right| \leq \int_0^{|Y|} \min\{2\|\partial_{1,2}f\|_\infty, \|\partial_{1,3}f\|_\infty v\} dv. \quad (\text{B.22})$$

Prueba. El Teorema de Taylor para funciones multivariadas lo que da,

$$\begin{aligned} XYf(X, Y) = & XYf(0, 0) + X^2Y\partial_{1,0}f(0, 0) + XY^2\partial_{0,1}f(0, 0) \\ & + \frac{X^3Y}{2}\partial_{2,0}f(0, 0) + \frac{XY^3}{2}\partial_{0,2}f(0, 0) + X^2Y^2\partial_{1,1}f(0, 0) \\ & + XY \int_0^X \frac{(X-u)^2}{2} \partial_{3,0}f(u, 0) du + XY \int_0^Y \frac{(Y-v)^2}{2} \partial_{0,3}f(0, v) dv \\ & + X^2Y \int_0^Y (Y-v) \partial_{1,2}f(0, v) dv + XY \int_0^X \int_0^Y (X-u) \partial_{2,1}f(u, v) dudv \\ & + \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \left(\partial_{1,1}f(X, Y) - \partial_{1,1}f(0, 0) - X\partial_{2,1}f(0, Y) - Y\partial_{1,2}f(0, 0) \right. \\ & \left. - \int_0^X (X-u) \partial_{3,1}f(u, 0) du - \int_0^Y (Y-v) \partial_{1,3}f(0, v) dv + R(X, Y) \right), \end{aligned}$$

donde:

$$R(X, Y) := -\partial_{1,1}f(X, Y) + \partial_{1,1}f(0, 0) + X\partial_{2,1}f(0, Y) + Y\partial_{1,2}f(0, 0) \\ + \int_0^X (X - u) \partial_{3,1}f(u, 0) du + \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3}f(0, v) dv.$$

Organizando adecuadamente y usando propiedades del Cálculo Diferencial e Integral, tenemos

$$R(X, Y) = \int_0^X (X - u) (\partial_{3,1}f(u, Y) - \partial_{3,1}f(u, 0)) du \\ = - \int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{3,2}f(u, v) dudv. \quad (\text{B.23})$$

Como X, Y son variables aleatorias independientes, $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ y $\mathbb{E}X^2 = \sigma_X^2$, $\mathbb{E}Y^2 = \sigma_Y^2$, notamos que:

$$\mathbb{E}(XYf(X, Y)) = \sigma_X^2\sigma_Y^2 \mathbb{E}(\partial_{1,1}f(X, Y)) + \sigma_X^2\sigma_Y^2 \mathbb{E}R(X, Y) \\ + \mathbb{E}\left(XY \int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{2,1}f(u, v) dudv\right) \\ - \sigma_X^2\sigma_Y^2 \mathbb{E}\left(\int_0^X (X - u) \partial_{3,1}f(u, 0) du + \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3}f(0, v) dv\right).$$

Entonces, usando (B.23) tenemos (B.19). Por otro lado, los items (B.20), (B.21) y (B.22) siguen combinando el Teorema del Valor Médio con cada una de las siguientes identidades

$$\int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{2,1}f(u, v) dudv = \int_0^X \int_0^Y (\partial_{1,1}f(u, v) - \partial_{1,1}f(0, v)) dudv, \\ \int_0^X (X - u) \partial_{3,1}f(u, 0) du = \int_0^X (\partial_{2,1}f(u, 0) - \partial_{2,1}f(0, 0)) du, \\ \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3}f(0, v) dv = \int_0^Y (\partial_{1,2}f(0, v) - \partial_{1,2}f(0, 0)) dv.$$

□