

UNIVERSIDAD NACIONAL  
SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO



FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**LA METODOLOGÍA PROMETHEE EN LA SOLUCIÓN DE UN  
PROBLEMA DE DECISIÓN MULTICRITERIO DISCRETA. UN  
CASO DE ESTUDIO**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

**PRESENTADO POR:**

Bachiller: Erik Emerson Espinoza Melgarejo

Asesor: Henry Ángel Garrido Angulo

HUARAZ-PERÚ

2022

**N° Registro: T015**



Anexo de la R.C.U N° 126 -2022 -UNASAM  
**ANEXO 1**  
**INFORME DE SIMILITUD.**

El que suscribe (asesor) del trabajo de investigación titulado:

**LA METODOLOGÍA PROMETHEE EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE DECISIÓN  
MULTICRITERIO DISCRETA. UN CASO DE ESTUDIO.** 1

Presentado por: Erik Emerson Espinoza Melgarejo

con DNI N°: 31680720

para optar el Grado de Licenciado en:

MATEMÁTICA

Informo que el documento del trabajo anteriormente indicado ha sido sometido a revisión, mediante la plataforma de evaluación de similitud, conforme al Artículo 11° del presente reglamento y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de : 21% de similitud.

**Valoración para la evaluación y acciones del reporte de similitud de los trabajos académicos y de pre grado (Art. 11, inc 2 y 3)**

Porcentaje	Evaluación y acciones	Seleccione donde corresponda
Del 1 al 25%	Esta dentro del rango aceptable de similitud y podrá pasar al siguiente paso según sea el caso.	<input checked="" type="radio"/>
Del 26 al 50%	Devolver al autor para las correcciones y se presente nuevamente el trabajo en evaluación.	<input type="radio"/>
Mayores al 51%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes; sin perjuicio de las sanciones administrativas que corres andan de acuerdo a Ley.	<input type="radio"/>

Por tanto, en mi condición de **Asesor responsable**, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera hoja del reporte del software anti-plagio.

Huaraz, 05/02/2024

Apellidos y Nombres:

  
FIRMA  
Henry Angel Garrido Angulo  
DNI N°: 32800493

Se adjunta:

1. Reporte completo Generado por la plataforma de evaluación de similitud



UNIVERSIDAD NACIONAL  
SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO



"Una Nueva Universidad para el Desarrollo"

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

AV. CENTENARIO N° 200 - TELÉFONO (043) 640020 ANEXO 1913  
HUARAZ - ANCASH - PERÚ

"Año del Fortalecimiento de la Soberanía Nacional"

## ACTA DIGITAL DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 001-2022

Los Miembros del Jurado de la Revisión y Sustentación de Tesis de la Escuela Académico Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias, designados mediante Resolución de Consejo de Facultad N°057-2021-UNASAM-FC, se reunieron el día viernes 09 de septiembre de 2022, a horas 3:30 p.m. en el Auditorio de la Facultad de Ciencias en acto público para evaluar la Sustentación de Tesis, presentado por el:

Bachiller : Erik Emerson Espinoza Melgarejo

Tesis Titulada : "La Metodología Promethee en la Solución de un Problema de Decisión Multicriterio Discreta. Un Caso de Estudio".

Después de la Sustentación y las respuestas a las preguntas, el Jurado lo declara **APROBADO** para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, con el calificativo de **QUINCE (15)**.

En señal de conformidad y para constancia, firmamos la presente ACTA, siendo las 4:50 p.m. del mismo día y año.

Huaraz, 09 de septiembre de 2022.

Dra. Pilar Sara Nuñez Blas  
Presidenta

Mag. Nemecio Segundo Castillo Tuya  
Secretario

Mag. Vladimir Giovanni Rodríguez Sabino  
Vocal

MSc. Henry Ángel Garrido Angulo  
Asesor

## MIEMBROS DEL JURADO

*Dra. Pilar Sara Núñez Blas*

Presidente

---

*Mag. Nemeccio Segundo Castillo Tuya*

Secretario

---

*Mag. Vladimir Giovany Rodríguez Sabino*

Vocal

---

## DEDICATORIA

Esta tesis va dedicada con todo mi amor, a los dos seres más maravillosos que la vida me pudo dar: mis padres, Justo Espinoza y Céllica Melgarejo. A ustedes le debo todo lo que soy, les debo mi vida entera, sin ustedes no hubiera llegado hasta acá y no hubiera logrado mi sueño.



## AGRADECIMIENTO

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Agradezco de todo corazón las enseñanzas brindadas por todos y cada uno de mis maestros de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo - UNASAM, de la Facultad de Ciencias y la Escuela Profesional de Matemática, de todos me llevo algo muy especial y sé que lo aprendido jamás lo olvidaré.

Gracias a mi profesor y asesor de tesis al Mg. GARRIDO ANGULO Henry Ángel por haberme guiado en este proyecto y culminar mi tesis, que en base a su experiencia y sabiduría ha sabido direccionar mis conocimientos matemáticos y complementar mi formación profesional.





## RESUMEN

Las Decisiones Multicriterio Discreta siendo un campo enmarcado en la ciencia matemática, constituye una herramienta de gran importancia como ayuda a la toma de decisiones de soluciones de diversas situaciones problemáticas surgidas en distintos escenarios de la sociedad; la metodología PROMETHEE es una metodología que contribuye a resolverlos; para la investigación se seleccionó un caso de estudio que ocurre de manera recurrente en instituciones académicas como es el caso de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, específicamente en la Facultad de Ciencias; es sobre los procesos de concurso de contrato anual docente en el año 2021. Se realizó una propuesta de selección a través de cuatro departamentos académicos existentes, donde se aplicó la metodología de estudio, resultando en cada uno de ellos, como parte del proceso, un conjunto de docentes seleccionados, y en aplicación a la metodología de estudio, priorizados según los cinco criterios establecidos: la alternativa docente 1 superó a la segunda alternativa docente 2 en el DAISyT-FC; la alternativa docente 1 superó a las otras tres alternativas docentes en el DAE-FC; la alternativa docente 2 superó a las otras tres alternativas docentes en el DACB-FC; la alternativa docente 7 superó a las otras trece alternativas docentes en el DAM-FC.

**Palabras clave:** *Relación de Superación, Alternativas, Criterios, Matriz de Evaluación, Metodología PROMETHEE.*

## ABSTRACT

*Discrete Multicriteria Decisions constitutes a field framed in mathematical science, and is also a transcendental tool to help decision-making of various problematic situations that arise in different scenarios of society, the PROMETHEE methodology contributes to solving them; In particular, a usual case study was selected that occurs in academic institutions, such as the case of the Santiago Antúnez de Mayolo National University, specifically in the Faculty of Sciences, on the annual teaching contract competition processes in the year 2021. a selection proposal through four existing academic departments, where the study methodology was applied, resulting in each of them a selection of teachers prioritized according to the five established criteria: the teaching alternative 1 surpassed the second teaching alternative 2 in the DAISyT-FC. the teaching alternative 1 surpassed the second teaching alternative 2 in the DAISyT-FC; teaching alternative 1 outperformed the other three teaching alternatives in the DAE-FC; teaching alternative 2 outperformed the other three teaching alternatives in the DACB-FC; Teaching alternative 7 outperformed the other thirteen teaching alternatives in the DAM-FC.*

**Keywords:** *Overcoming Ratio, Alternatives, Criteria, Evaluation Matrix, PROMETHEE Methodology.*



## INDICE

MIEMBROS DEL JURADO .....	II
DEDICATORIA.....	III
AGRADECIMIENTO .....	IV
RESUMEN .....	V
ABSTRACT .....	VI
INDICE.....	VII
INTRODUCCIÓN.....	1
OBJETIVOS DE ESTUDIO .....	2
HIPÓTESIS.....	2
VARIABLES.....	3
MARCO TEÓRICO .....	4
2.1. ANTECEDENTES .....	4
2.2. BASES TEÓRICAS .....	6
2.2.1. La teoría de decisión multicriterio.....	6
2.2.2. Relaciones de preferencia del decisor .....	13
2.2.3. Relaciones de superación.....	17
2.2.4. La metodología PROMETHEE .....	19
2.2.5. Definición de términos .....	25
MATERIALES Y MÉTODOS.....	27
3.1. Tipo y diseño de investigación .....	27
3.2. Plan de recolección de la información.....	27
3.3. Instrumentos de recolección de la información.....	27
3.4. Plan de procesamiento de la información.....	28
3.5. Plan de análisis de datos .....	28
RESULTADOS .....	29
DISCUSIÓN.....	151

CONCLUSIONES.....	153
RECOMENDACIONES .....	154
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	155



## INTRODUCCIÓN

El ser humano es coexistente con la confrontación de situaciones de conflicto, cuando trata de tomar decisiones desde las personales, domésticas y simples hasta las más amplias, complejas y diversas ligadas a su propia naturaleza de la vida misma. En el contexto de ámbitos de la ciencia y la tecnología, y en especial desde la óptica de la sociedad las situaciones problemáticas se presentan en complejidades en extremo amplias. En esta investigación interesa, que, desde la ciencia matemática, en el marco de la teoría de las decisiones multicriterio discreta, es el estudio de la metodología denominada PROMETHEE, presentar una propuesta de evaluación de criterios en la selección de ciertas variables alternativas, en el modo más práctico y razonable, en cantidad finita; y que permita a los interesados de los mismos, contribuir una ayuda a la toma de decisiones de las actividades a ejecutar. La formulación del problema resulta relativamente simple, pero los mecanismos de resolver y presentar una solución no siempre es directa, inmediata ni sencilla, sino compleja, pues muchas veces se debe elegir de entre las soluciones del problema, la mejor o las mejores de ellas, éstas son llamadas también alternativas a elegir, evidentemente sujetas a un número racionalmente, finito de criterios previamente establecidos, ello determina una matriz de evaluación alternativas-criterios o simplemente matriz decisional, como resultado de la evaluación de cada una de las alternativas según los criterios establecidos, y según sus escalas valorativas independientes previamente establecidas. Una no buena elección de las alternativas lleva a serias implicancias importantes favorables o desfavorables en la resolución del problema, y es en ese propósito, la importancia del estudio de esta metodología denominada PROMETHEE contribuye como un mecanismo de ayuda decisional para los decisores. Asimismo, la solución permite determinar un ordenamiento de jerarquización de las alternativas intervinientes del problema y que, mediante un análisis de estudio conlleva a que las alternativas disponibles como soluciones del problema tengan una priorización entre ellas. La metodología PROMETHEE constituye una herramienta propiamente matemática que a través de sus propios métodos y variantes permite afrontar y resolver diversos problemas de decisión multicriterio. Finalmente, esta metodología es aplicada en un caso de estudio, relacionado a un problema de selección del personal docente de contrato anual 2021 para el inicio del ciclo académico 2021-1 en el Departamento Académico de Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones; en el Departamento Académico de Estadística, en el Departamento Académico de Ciencias Básicas y en el Departamento Académico Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNASAM,

institución académica que regularmente ha venido realizando estos procesos de selección de docentes contratados.

La propuesta de esta metodología, hace necesario ordenar los conceptos, con énfasis en dos de sus métodos PROMETHEE I y PROMETHEE II; la revisión de algunos conceptos preliminares, como es, la teoría de decisión multicriterio discreta, las relaciones de preferencia, las relaciones de superación, la metodología y algoritmo PROMETHEE, y, por último, el caso de estudio como aplicación real y práctica, propuesta referida a la priorización de alternativas-docentes en cuanto a su selección.

El problema de la investigación se formula de la siguiente manera:

¿Es posible resolver el problema de decisión multicriterio discreta del caso de estudio utilizando la metodología PROMETHEE I y II?

## **Objetivos de Estudio**

### **General**

Evaluar el problema de decisión multicriterio discreta del caso de estudio mediante la aplicación de la metodología PROMETHEE I y II que permita seleccionar la mejor de las variables alternativas propuestas.

### **Específicos**

- ✓ Construir un modelo matemático para el problema de decisión multicriterio discreta del caso de estudio.
- ✓ Aplicar la metodología PROMETHEE I y II para seleccionar la mejor de las variables alternativas del caso de estudio.
- ✓ Determinar la jerarquización de las soluciones del problema de decisión multicriterio discreta del caso de estudio.

### **Hipótesis**

Es posible seleccionar jerárquicamente las variables alternativas en el problema de decisión multicriterio discreta del caso de estudio mediante la metodología PROMETHEE I y II.

## **Variables**

El problema de decisión multicriterio discreta permite establecer las siguientes variables:

### **Variables Independientes:**

- Las alternativas disponibles y los criterios establecidos que determinan la matriz de evaluación de las alternativas sujetos a los criterios.

### **Variables Dependientes:**

- El método PROMETHEE I y II.

## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Antecedentes

Las diversas situaciones problemáticas, en un número finito, desde simples hasta complejas en el campo de las decisiones multicriterio discreta, se entiende de aquellas, que deben ser resueltas por metodologías o propiamente algoritmos de solución. De las distintas metodologías existentes o, mejor dicho, una mayoría de ellas se estudian en la ciencia matemática, siempre que exista la certeza de la consistencia resolutoria del problema; se tiene la inmediatez tarea de buscar y encontrar las soluciones, que puede ser única, o también, un número finito o infinito de soluciones posibles muchas veces en otros casos como soluciones alternativas válidas del problema. En este último, es cuando se encuentra sentido al problema de decisión o de decidir cuáles de las soluciones alternativas, en número finito, se debe elegir, y más, si aún pueden estar sujetas a criterios establecidos, en número finito y exigidas por los interesados, de este modo, se da nacimiento al problema decisorio discreta, formulado esto, surge la necesidad entonces de tomar una decisión, una acción, una alternativa en base a todo el conjunto de alternativas de solución disponibles. Esto es el sentido de la investigación propuesta, y resalta la gran importancia de estudiar esta metodología de ayuda de toma de decisión, como es, la metodología PROMETHEE. (Rosales Apeña, 2017)

El problema de decisión multicriterio discreta, formula el problema de la elección entre un número finito de alternativas posibles (proyectos, candidatos, ubicación de servicios, rutas, etc.), que permite tener una ayuda efectiva en la práctica para la toma de decisiones de gestión en diversas situaciones problemáticas, principalmente a los gestores y decisores a fin de que sea de utilidad para sus responsabilidades profesionales. (Rosales Apeña, 2017)

La práctica de la cultura científica privilegia la noción de la “mejor decisión”, entendiéndose que en la mayoría de las situaciones reales de decisión planteadas el óptimo, en el sentido estricto del término, no existe, y más aún no siempre es la mejor decisión. Por tal razón, el estudio está orientado a contribuir al fortalecimiento de las herramientas de decisiones multicriterio en situaciones reales y concretas, y lograr con ello una mejora en la eficiencia de la toma de decisiones. (Rosales Apeña, 2017)

Los trabajos de investigación existentes relacionados al problema de decisión multicriterio discreta resueltos con la metodología PROMETHEE, son ya en una gran cantidad y diversa; por ejemplo, uno de los primeros, es el caso de *Mladineo et al.* (1987), quién aplica el método PROMETHEE en el ordenamiento de alternativas de localización para una pequeña



escala de hidroplantas, y que fue apropiado para el periodo de planificación del problema resuelto cuando no existen suficientes datos ni medio financieros para su realización, siendo el principal objetivo de este estudio la selección de las mejores localizaciones para ser más adelante analizadas y estimadas su eficiencia económica sin un periodo de tiempo dado. (Rosales Apeña, 2017)

(Briggs, 1990) plantea el PROMETHEE a un problema relacionado a la gestión de desechos nucleares, un número bastante grande de escenarios fueron prevenidos, los cuales tuvieron que ser evaluados contra un número pequeño de criterio fuertemente conflictivos; este estudio determinó que la metodología puede ayudar a escoger opciones de políticas alternativas tomando en cuenta la descripción y el soporte del proceso de toma de decisión.

(Martin, 2010) utiliza el procedimiento de toma de decisión de PROMETHEE, para un proceso de negociación en un ambiente colaborativo y de servicio con participación de aseguradores.

(Waub, 2000) utiliza el PROMETHEE para comparar escenarios forestales a partir de una planificación estratégica en Quebec, Canadá, siendo el objetivo desarrollar un conjunto de herramientas diseñadas para guiar las decisiones de los gestores forestales como una manera de mejorar la sostenibilidad forestal.

(Hermans, 2007) evalúan dos casos de estudio en el Noreste de Norte América, relacionados a la gestión de recursos forestales e hídricos, e incluso evaluaron otro caso sobre direccionando los cambios en el uso de tierras y recursos hídricos con opciones políticas. En cada caso, PROMETHEE fue utilizado para ayudar a los aseguradores en la negociación de compromisos alcanzando decisiones operativas de mejora.

(Martin S.-O. e., 2010) crean un sistema integrado de ayuda para la toma de decisión de PROMETHEE, para el desarrollo del plano de aluvión del Saint Charles River en Quebec, Canada.

(Chávez, 2013) evalúan a los países de la Unión Europea para saber quién de ellos es líder en el marco del desarrollo sostenible utilizando la metodología PROMETHEE y de ese modo aplicar políticas de desarrollo para aquellos países que se encuentran en proceso de crecimiento.

(Rosales, 2017) evalúa el uso de la metodología PROMETHEE I y II en un caso de estudio sobre selección de proyectos de investigación en la UNASAM estableciendo criterios para una mejor selección de los mismos.

(Seminario, 2020) realiza la búsqueda y selección de proveedores en las organizaciones públicas y privadas, hace uso en particular de la metodología PROMETHEE acorde con el enfoque de las necesidades del mercado, la mejora continua, la calidad entre otros.

## **2.2. Bases Teóricas**

### **2.2.1. La teoría de decisión multicriterio**

#### **Introducción**

La teoría de decisión multicriterio, en general, llamado también optimización multicriterio u optimización vectorial comprende una clase especial de técnicas de optimización matemática con restricciones o sin restricciones, donde existe al menos más de un objetivo y en teoría: los objetivos requieren ser optimizados; y están sujetos a las mismas restricciones que acotan su solución. No existe un óptimo en sentido estricto sino un “óptimo de Pareto”, que significa ser una solución eficiente, una solución satisfactoria o mejor dicho una solución de compromiso, y en esos términos lo óptimo no siempre es lo mejor. En las decisiones multicriterio, el decisor se encuentra en posibilidad de escoger entre varias alternativas, el conjunto de las cuales constituye el llamado conjunto de elección. Para escoger en este conjunto de elección, el decisor tiene diversos puntos de vista o criterios, los cuales pueden ser al menos parcialmente, contradictorios en el sentido de que si el decisor adopta uno de dichos puntos de vista, por ejemplo una minimización de alguno de sus criterios, no escogerá la misma alternativa que si se basa en otro criterio establecido bajo la exigencia de una maximización; no es posible ignorar que cada decisión real consiste de hecho en un compromiso entre diversas soluciones, con sus ventajas y sus inconvenientes, dependiendo de la posición que al final se adopte. No obstante, la teoría de decisión multicriterio tiene ciertas debilidades, pero existe la garantía que su fundamentación matemática aún continúa fortaleciéndose. (Rosales Apeña, 2017)

### 2.2.1.1 Apuntes históricos de la Teoría de Decisión Multicriterio

Las investigaciones económicas de principios del siglo XX fueron una de las fuentes de inspiración de la teoría de decisión multicriterio. Los economistas iniciaron la búsqueda de las relaciones entre el comportamiento de los agentes económicos y la economía en general. Uno de los elementos básicos de tal comportamiento, tanto del productor como del consumidor, reside en la forma en la que efectúan sus elecciones, sean de consumo o de producción, siendo principalmente algunos de los precursores *Walras*, *Cournot* y *Pareto*. (Rosales Apeña, 2017)

En los años 60, *Pareto*, economista y sociólogo al igual que *Walras* y *Cournot* estudiaron aquellas situaciones económicas en las que varios agentes realizan elecciones diferentes y a menudo en conflicto. Ellos mostraron que no todos los agentes podían obtener su satisfacción máxima al mismo tiempo, y más aún cuando los recursos son escasos, lo que gana uno es de alguna manera obtenido en detrimento de otro. Una situación tal, en la que los agentes no pueden mejorar su satisfacción todos a la vez se denominó un óptimo de Pareto. (Rosales Apeña, 2017)

En 1970, en la Haya (Holanda), se realizó el séptimo congreso de programación matemática, la primera reunión científica consagrada a la teoría de decisión multicriterio.

En 1972, se llevó a cabo el primer congreso, enteramente dedicada a la MCDM (Multiple Criteria Decision Making), realizado en la Universidad de Columbia en Carolina del Sur (EE. UU), organizado especialmente por los científicos *Cochrane* y *Zeleny*. Asimismo, en aquel congreso la reflexión en torno a la decisión multicriterio estuvo dominada por las discusiones sobre la aditividad de las preferencias, cuyos primeros hitos ya los había marcado *Leontief* (1947), *Debreu* (1960), *Fisburn* (1965 y 1970) y hubo otros científicos que aportaron pronto a los primeros resultados que contribuyeron a fortalecer los fundamentos de este campo científico.

### 2.2.1.2 La Teoría de Decisión Multicriterio

La teoría de decisión multicriterio tiene gran potencialidad cuando el contexto decisional está definido por una serie de objetivos a “optimizar” para satisfacer un determinado conjunto de restricciones. La optimización simultánea de todos los objetivos es usualmente imposible, pues en la vida real entre los objetivos que pretende optimizar un decisor, suele existir un cierto grado de conflicto al enfoque multicriterio en vez de intentar determinar un óptimo existente pretende establecer el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas. La

teoría de decisión multicriterio sigue en la generación y crecimiento de nuevos conocimientos, dadas las diversas situaciones problemáticas de nuestro entorno cada vez más complejas.

### **La teoría de decisión multicriterio discreta**

La teoría de decisión multicriterio discreta se identifica con su propia terminología y su problemática aplicada de seleccionar alternativas en presencia de criterios múltiples a final de los años 60 e inicios de los años 70. En esa misma época, un equipo de investigadores de problemas multicriterio denominado SEMA, encuentra un método asociado a la decisión multicriterio discreta: el ELECTRE (Roy, 1968).

La escuela francesa conformada principalmente por Brans, Jacquet-Lagréze, Roy, Rouvens, Vansnick y Vincke (1980), exploraron ampliamente el problema multicriterio discreto, incorporaron el concepto de las relaciones de preferencias del decisor y las relaciones de superación.

La decisión multicriterio discreta es un campo de actividad científica donde la aplicabilidad práctica y las herramientas informáticas ya son dominantes. No obstante, de ello, las posibilidades informáticas no han sido aun totalmente exploradas, incluso se puede afirmar que la utilización efectiva de los métodos multicriterio en contextos profesionales no ha hecho más que comenzar. (Rosales Apeña, 2017)

#### **2.2.2.1 El Paradigma de la Teoría de Decisión Multicriterio Discreta**

Dentro de la estructura del paradigma de la decisión multicriterio discreta se deben considerar necesariamente un conjunto de elementos para su estudio, estos son:

**Criterios.** - Los criterios constituyen los atributos y objetivos que se consideran relevantes para un cierto problema decisional. Un criterio expresa, con mayor o menor precisión, las preferencias del decisor respecto a un cierto atributo y son de carácter cuantitativos como cualitativos. (Rosales Apeña, 2017)

**Conjunto de Elección.** - Es el conjunto de las alternativas usualmente dados en un número finito. Las alternativas son consideradas diferentes, excluyentes y exhaustivas. Para la elección entre las alternativas del conjunto de elección, se supone que el decisor posee varios (al menos uno) ejes de evaluación. Estos ejes de evaluación son las características de las alternativas, por lo que serán llamados atributos. Cuando se añade a estos atributos un mínimo de información relativa a las preferencias del decisor, los atributos se convierten en criterios.

De aquí se desprende dos tipos de evaluación en cuanto a los criterios; ciertos atributos corresponden a evaluaciones numéricas, y por ello se califica como un criterio cuantitativo. Otras evaluaciones, sin embargo, no se efectúan naturalmente en una escala numérica, por tanto, a los criterios para los que no existe una unidad canónica de medida se les llama criterios cualitativos. (Rosales Apeña, 2017)

**Matriz de Decisión.** - La matriz  $(a_{ij})$  se llama la matriz de decisión, donde cada fila de esta matriz expresa las cualidades de la alternativa  $i$  con respecto a los  $n$  atributos considerados. Cada columna  $j$  recoge las evaluaciones, realizadas por el decisor, de todas las alternativas con respecto al atributo. Es decir, la matriz de decisión expresa las preferencias del decisor, capaz de dar para cada uno de los atributos considerados y para cada alternativa del conjunto de elección, un valor numérico o simbólico  $a_{ij}$ . (Rosales Apeña, 2017)

**Decisor.** - Es el encargado de tomar la elección final una vez que conozca la información sobre las posibles combinaciones dadas en el problema. (Rosales Apeña, 2017)

### 2.2.2.2 El Problema de Decisión Multicriterio Discreta

Un dilema en la toma de decisiones multicriterio discreta surge cuando se enfrentan al menos dos criterios en conflicto y al menos dos opciones de solución. La resolución de esta situación implica encontrar un compromiso entre estos criterios, con el objetivo de obtener el resultado óptimo que maximice los beneficios. Es esencial evaluar minuciosamente cada una de las alternativas de solución disponibles para llegar a una decisión informada y de acuerdo con Artola (2002), “la evaluación desde el punto de vista matemático se caracteriza por tener múltiples criterios generalmente en conflicto por el grado de desigualdad de desarrollo en que estos suelen encontrarse suscitándose un problema multicriterio”.

Los problemas de decisión multicriterio de tipo discreto son aquellos en los que el conjunto de alternativas a considerar por parte del decisor es finito y normalmente no muy elevado. El interés práctico de los problemas multicriterio discreta resulta evidente. Así pues, existen multitud de contextos de decisión en los que un número finito de alternativas o elecciones posibles deben evaluarse en base a atributos.

### 2.2.2.3 Fundamentos Matemáticos de la Teoría de Decisión Multicriterio Discreta

La matemática es la ciencia que formaliza las situaciones problemáticas de la vida real mediante la modelización matemática, a través de un modelo matemático, con el fin de facilitar

una comunicación fluida de las ideas aportadas por individuos implicados en la resolución del mismo, en ese contexto, se disponen de ciertas teorías matemáticas establecidas para ser correspondidas a diversos problemas concretos.

### Relaciones Binarias

**Definición 1.-** Una relación binaria sobre un conjunto  $X$  en los reales, es una partición del conjunto  $X \times X$  de pares ordenados. La partición genera dos subconjuntos de  $X \times X$ .

Sea  $\mathcal{R}$  el subconjunto de los pares que están en la relación,  $\mathcal{R}^- = X \times X - \mathcal{R}$  es el subconjunto de los pares que no están en la relación.

Cuando  $(a, b)$  está en  $\mathcal{R}$ , se escribe  $a \mathcal{R} b$ , es decir que  $a$  y  $b$  están en la relación  $\mathcal{R}$ .

Los pares de  $\mathcal{R}^-$  son los que no están en dicha relación.

**Definición 2.-** Las relaciones binarias cumplen con las siguientes propiedades:

#### Reflexiva

Se dice que una relación binaria  $\mathcal{R}$  es reflexiva, si para todo  $a$  en  $X$  se tiene que  $(a, a)$  está en  $\mathcal{R}$ , es decir  $a \mathcal{R} a$ .

#### Irreflexiva

Se dice que una relación binaria  $\mathcal{R}$  es irreflexiva, si para todo  $a$  en  $X$  se tiene que  $(a, a)$  no está en  $\mathcal{R}$ , es decir no  $a \mathcal{R} a$ .

#### Simétrica

Se dice que una relación binaria  $\mathcal{R}$  es simétrica, si  $(a, b)$  está en  $\mathcal{R}$ , supone que también  $(b, a)$  está en  $\mathcal{R}$ , es decir, si  $a \mathcal{R} b$  entonces  $b \mathcal{R} a$ .

#### Asimétrica

Se dice que una relación binaria  $\mathcal{R}$  es asimétrica, si siempre que  $(a, b)$  está en  $\mathcal{R}$ , entonces  $(b, a)$  está en  $\mathcal{R}^-$ , es decir, si  $a \mathcal{R} b$  entonces no  $b \mathcal{R} a$ .

#### Transitividad

Se dice que una relación binaria  $\mathcal{R}$  es transitiva, si  $(a, b)$  está en  $\mathcal{R}$  y  $(b, c)$  está en  $\mathcal{R}$ , implica que  $(a, c)$  está en  $\mathcal{R}$ , es decir, si  $a \mathcal{R} b$  y  $b \mathcal{R} c$  entonces  $a \mathcal{R} c$ .

**Definición 3.-** Se dice que:

Una relación binaria  $\mathcal{R}$  es una relación de preorden, cuando es reflexiva y transitiva.

Una relación binaria  $\mathcal{R}$  es una relación de orden, cuando es irreflexiva y transitiva.



Una relación binaria  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia, cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

**Definición 4.-** Se dice que una relación binaria  $\mathcal{R}$  sobre  $X$  es una relación total (completa) si para todo par  $(x, y)$  de  $X \times X$  se tiene que, o bien  $x \mathcal{R} y$  o bien  $y \mathcal{R} x$ . Por el contrario, una relación que no posea esta propiedad se dice que es una relación parcial.

### Análisis Convexo

**Definición 5.-** Una norma en un espacio vectorial real  $V$ , es una función real  $x \in V \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$  definida en  $V$ , tal que, cualesquiera que sean  $x, y \in V$  y para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se cumple:

- $\|x\| \geq 0$  (positividad)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (desigualdad triangular)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogeneidad)
- $\|x\| = 0$ , si y sólo si  $x = 0$  (separación)

Al número  $\|x\|$  se le llama la norma del vector  $x$  en  $V$ .

**Definición 6.-** Un espacio normado es el par  $(V, \|\cdot\|)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial y  $\|\cdot\|$  es una norma en  $V$ .

Ejemplo. Si en el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^n$  cuyos elementos son

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

y si se toma  $\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , se comprueban todos los axiomas de la norma, y es

equivalente a la métrica  $d(x, y) = \|x - y\| = \left( \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Definición 7.-** La normalización de los criterios, se establece por las siguientes razones:

- En los problemas de decisiones multicriterio, las unidades en que están medidos los diferentes criterios suelen ser diferentes. En este tipo de situación una comparación de los diferentes criterios carece de significado.

- Los decisores realizan con más facilidad las tareas comparativas entre criterios cuando trabajan con valores normalizados de los mismos, en vez de con sus correspondientes valores originales que provienen de diferentes escalas valorativas.

**Definición 8.-** Sea el vector  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  con  $a_i \geq 0$ . Los métodos de normalización de vectores para obtener el vector normalizado de  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ , se determinan en base a los siguientes procedimientos:

- Procedimiento 1:  $v_i = \frac{a_i}{\max.a_i}$
- Procedimiento 2:  $v_i = \frac{a_i - \min.a_i}{\max.a_i - \min.a_i}$
- Procedimiento 3:  $v_i = \frac{a_i}{\sum_i a_i}$
- Procedimiento 4:  $v_i = \frac{a_i}{(\sum_i a_i^2)^{1/2}}$

### 2.2.2.4 Modelo Matemático del Problema de Decisión Multicriterio Discreta

En los problemas de decisión multicriterio que tienen una naturaleza discreta se toman en cuenta diversos criterios, sean de tipo tecnológicos, económicos, ambientales, sociales, entre otros.

El modelo matemático de un problema de decisión multicriterio discreta tiene la siguiente formulación general:

$$Opt \{g_1(a_i), g_2(a_i), \dots, g_j(a_i), \dots, g_n(a_i) / a_i \in A\}$$

Donde A es un conjunto finito de posibles alternativas:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m\}$$

Sujeto a un conjunto de criterios de evaluación:

$$\{g_1(a_i), g_2(a_i), \dots, g_j(a_i), \dots, g_n(a_i)\}$$

y a la siguiente matriz de decisión o de evaluación:

	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$	...	$g_n(a_i)$
$a_1$	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$	...	$g_n(a_1)$
$a_2$	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$	...	$g_n(a_2)$
...	...	...	...	...
$a_m$	$g_1(a_m)$	$g_2(a_m)$	...	$g_n(a_m)$

### 2.2.2. Relaciones de preferencia del decisor

#### Introducción

En las decisiones multicriterio, el decisor es el elemento que lleva la responsabilidad difícil y riesgosa, que involucra la necesidad de evaluar alternativas y elegir, de entre todas las alternativas, aquella que mejor se adecue a los objetivos perseguidos, una mala decisión puede

llegar a perjudicar los intereses organizacionales en virtud de la cual la decisión es tomada, afectando al accionar de individuos, organizaciones, empresas e incluso países.

En otras palabras, el decisor es quien es capaz de elegir, cuando considera que dos alternativas de su conjunto de elección tienen una preferencia en relación a otra, o cuando incluso no se puede elegir a ninguno, es decir, puede ser indiferente entre las dos alternativas en cuestión.

### 2.2.3.1 Las Relaciones de Preferencia

Todo proceso de decisión involucra el acto de comparar. Cuando comparamos dos opciones o alternativas  $(a_i, a_k)$ , el resultado de la comparación puede ser uno de los siguientes enunciados (Vincke, 1992):

- “prefiero  $a_i$  que  $a_k$ ”
- “soy indiferente entre  $a_i$  y  $a_k$ ”
- “no puedo o no quiero comparar  $a_i$  y  $a_k$ ”

Formalmente, se adopta la siguiente simbología:  $\forall a_i, a_k \in A$ .

**Definición 9.-** El decisor prefiere estrictamente  $a_i$  a  $a_k$  cuando su elección se efectúa sin ninguna duda sobre  $a_i$ , es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j, g_j(a_i) \geq g_j(a_k) \\ \exists h, g_h(a_i) > g_h(a_k) \end{array} \right\} \Leftrightarrow a_i P a_k$$

$$a_i P a_k : a_i \text{ es estrictamente preferido a } a_k, \forall j, g_j(a_i) = g_j(a_k)$$

**Definición 10.-** El decisor es indiferente entre  $a_i$  y  $a_k$  cuando acepta indistintamente una alternativa frente a la otra, es decir:  $a_i I a_k : a_i$  es indiferente con  $a_k$

**Definición 11.-** El decisor no sabe si prefiere estrictamente  $a_i$  a  $a_k$  o si es indiferente entre las dos, es decir:

$$\begin{cases} \exists s, g_s(a_i) > g_s(a_k) \\ \exists r, g_r(a_i) < g_r(a_k) \end{cases} \Leftrightarrow a_i R a_k$$

$a_i R a_k$ :  $a_i$  es incomparable con  $a_k$

Los símbolos  $P: \succ$ ,  $I: \approx$  y  $R: \geq$  representan respectivamente a lo que se conoce como “relaciones de preferencia o relaciones de dominancia”, “relaciones fundamentales de las decisiones multicriterio discreta”.

De este modo, se establece la identificación de alternativas dominadas, indiferentes o incomparables entre sí. Las alternativas que no son dominadas se denominan soluciones o alternativas eficientes.

Sin embargo, la identificación de las alternativas eficientes no resuelve totalmente el problema decisional, ya que es imposible concluir sin alguna información acerca de sus preferencias. Además, en la práctica puede ocurrir también que el decisor sea no capaz o rechace escoger entre dos alternativas, esto significa que las alternativas no son comparables.

Relaciones de orden

**Definición 12.-** Las relaciones  $\succ$ ,  $\approx$ ,  $\geq$  son relaciones binarias en el sentido de que relacionan dos alternativas del conjunto de elección  $A$

Racionalidad de las preferencias

Es necesario definir las hipótesis de racionalidad del decisor debido la metodología utiliza los pseudo criterios que permitirán hacer las comparaciones de las alternativas y los criterios.

**Definición 13.-** En lo sucesivo se entenderá como “hipótesis fuertes de racionalidad del decisor” a las hipótesis siguientes:

Las relaciones  $\approx$  y  $\succ$  son disjuntas.

La relación  $\approx$  es reflexiva y simétrica

La relación  $\succ$  es asimétrica.

La relación  $\geq$  es transitiva.

**Proposición 1.-** Bajo las hipótesis fuertes de racionalidad del decisor, la relación  $\succ$  es de orden, la relación  $\approx$  es de equivalencia y la relación  $\geq$  es de preorden.

**Proposición 2.-** Sea un conjunto  $A$  provisto de una relación de preorden  $\mathcal{R}$ . Puede descomponerse entonces  $\mathcal{R}$  en una parte simétrica  $\approx$  y otra parte asimétrica  $\succ$ , tales que  $\approx$  sea una relación de equivalencia y  $\succ$  una relación de orden.

**Definición 14.-** Se dice que las preferencias  $\succeq$  del decisor verifican las hipótesis débiles de racionalidad del decisor, si:

Las dos relaciones  $\succ$  y  $\approx$  son disjuntas.

La relación de indiferencia  $\approx$  es reflexiva y simétrica.

La relación de preferencia estricta  $\succ$  es asimétrica y transitiva.

Una estructura de preferencia que verifica las hipótesis débiles de racionalidad del decisor se denomina una relación de cuasi-orden.

Funciones de utilidad

**Definición 15.-** Sea la relación  $\succeq$  un preorden total sobre  $A$ . Se dice una función  $U$  de  $A$  en  $\mathcal{R}$  una *función de utilidad* que representa al preorden  $\succeq$  si y solamente si:  $x \succeq y$  si y sólo si  $U(x) \geq U(y)$ .

**Proposición 3.-** Sea  $U$  una función de utilidad sobre  $A$  que representa al preorden parcial  $\succeq$ . Se cumplen entonces las siguientes equivalencias:

$$x \succ y \text{ si y sólo si } U(x) > U(y)$$

$$x \approx y \text{ si y sólo si } U(x) = U(y)$$

**Teorema 1.-** Sea  $A$  un conjunto finito totalmente preordenado por  $\succeq$ . Entonces, el preorden está enteramente representado por una cadena de elementos de la forma:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{m-1} \geq a_m$$

**Lema 1.-** Sea un conjunto  $A$  preordenado por  $\succeq$ . Entonces  $x > y$  e  $y = z$  implican  $y > z$ .

Observaciones:

1.- No siempre existe una función de utilidad que represente un preorden total cuando el conjunto de elección  $A$  es infinito.

2.- El preorden total en el plano es denominado “*preorden lexicográfico*” por coincidir con la ordenación de las palabras en un diccionario.

Funciones de utilidad ordinales y cardinales y evaluación de las alternativas

Funciones de utilidad ordinal

**Definición 16.-** Se dice que un decisor expresa una función de utilidad ordinal cuando no indica solo más que el orden.



**Definición 17.-** Se dice que un decisor expresa *preferencias cardinales intervalo*, o *cardinales sin más*, si puede comparar las diferencias de preferencias.

Es decir, una función de utilidad cardinal será pues una función que respeta las diferencias, además del respetar el orden.

**Definición 18.-** Una función de utilidad  $U$  que representa el preorden total de un decisor es cardinal si, para cualquiera dos pares  $(x \geq y)$  y  $(a \geq b)$  en la relación de preorden

total, el cociente  $\frac{[U(x)-U(y)]}{[U(a)-U(b)]}$  es un invariante del decisor.

**Definición 19.-** Se dice que un decisor expresa preferencias cardinal ratio, si puede:

- i) Comparar las diferencias de preferencias; es decir, que si indica  $(x > y)$  y  $(a > b)$ , puede asimismo afirmar que la diferencia entre  $x$  e  $y$  es igual, mayor o menor que la diferencia entre  $a$  y  $b$ .
- ii) Existe un elemento  $a$  de  $A$  que puede servir de referencia absoluta, y tal que para toda utilidad  $U$  es  $U(a) = 0$ .

### 2.2.3. Relaciones de superación

#### Introducción

Una característica importante en este tipo de relaciones, porque asocian las alternativas y criterios dados, es el mecanismo básico de las comparaciones binarias entre alternativas y entre criterios, obedeciendo el cumplimiento del principio del *Conde de Condorcet*.

Las relaciones de superación constituyen un amplio conjunto de resultados para el campo de la decisión multicriterio discreta, dados a conocer por *Bernard Roy* (1960), pionero en las investigaciones de decisión multicriterio en la escuela europea junto a un grupo de investigadores franceses.

Estas relaciones se basan en otras relaciones básicas denominadas relaciones de preferencias, las que actualmente gozan de una amplia aceptación dentro del mundo de la decisión multicriterio discreta.

Las relaciones de superación significan que una alternativa puede ser mejor que otra, aunque no lo sea en todos los criterios, y cuando una alternativa es mejor que otra en todos los criterios ya no se cumple la relación de superación, sino se cumple una relación de dominación.

### 2.2.4.1 Las Relaciones de Superación

**Definición 20.-** Una alternativa  $a_i$  supera a otra alternativa  $a_k$  para los atributos considerados según Condorcet (1785): “cuando una alternativa  $a_i$  es “tan buena al menos” como otra  $a_k$  en “una mayoría” de los criterios, y no hay ningún criterio en el que  $a_i$  sea “notoriamente inferior” a  $a_k$ , y de ese modo se puede afirmar sin riesgo que  $a_i$  supera a  $a_k$ ”. Esto lo simbolizamos como  $a_i S a_k$ .

Una relación de superación establece una relación de preorden, generalmente parcial en el conjunto de las alternativas no dominadas de un problema dado. La relación de superación depende en gran medida de los valores de los pesos  $w_j$  y de los umbrales definidos. La principal ventaja de la relación de superación es que en ella no subyace necesariamente el supuesto de transitividad de preferencias o de comparabilidad, que sí subyace a cualquier enfoque basado en funciones de utilidad. Así, si  $a_1 S a_2$  y  $a_2 S a_3$  (donde S representa la relación de superación), esto no implica necesariamente que  $a_1 S a_3$ .

#### PSEUDOCRITERIOS

El concepto de pseudocriterio permite al decisor mostrar sus preferencias entre las alternativas. Para cada criterio  $j, j=1,2,\dots,n$  se debe definir el umbral de indiferencia  $q_j$  y el umbral de preferencia  $p_j$  suponiendo que  $p_j > q_j$ .

Los umbrales  $q$  y  $p$  permiten comparar las evaluaciones  $U_j(a)$  y  $U_j(b)$  de las alternativas  $a$  y  $b$  según el criterio  $j$ .

**Definición 21.-** La relación de preferencia estricta  $\succ_j$  está dada por la siguiente relación:  $a \succ_j b \Leftrightarrow U_j(a) > U_j(b) + p_j$

**Definición 22.-** La relación de preferencia de indiferencia  $\approx_j$  está dada por la siguiente relación:  $a \approx_j b \Leftrightarrow U_j(b) - q_j \leq U_j(a) \leq U_j(b) + q_j$

**Definición 23.-** La relación de superación  $S_j$  asociada al criterio  $j$  está dada por todas las posibilidades de que  $a$  no sea estrictamente peor que  $b$ :  $a S_j b \Leftrightarrow U_j(a) \geq U_j(b) - q_j$ .

## 2.2.4. La metodología PROMETHEE

### 2.2.5.1 Breve historia de la metodología PROMETHEE

Los fundamentos básicos de la metodología PROMETHEE fueron introducidos por el profesor *Jean-Pierre Brans* (CSOO, VUB Vrije Universiteit Brussel, 1982) durante una conferencia organizado por *R. Nadeau* y *M. Landry* en la Université Laval, Quèbeq, Canadá (L'Ingènièrie de la Dècision. Elaboration d'instruments d'Aide à la Dècision). En esa misma década, *Jean-Pierre Brans* y *Bertrand Mareschal* (Solvay School of Economics and Management, ULB Université Libre de Bruxelles, 2005) desarrollaron e implementaron el método PROMETHEE III (ordenación basada en intervalos) y PROMETHEE IV (para el caso continuo). Asimismo, propusieron en 1988 el módulo visual interactivo GAIA, que proporciona una magnífica representación gráfica de la metodología PROMETHEE. La descripción aproximada de GAIA permite al decisor visualizar las principales características del problema de decisión, y permite tener la facilidad de identificar los conflictos o sinergias entre criterios, e identificar los conjuntos de acciones o alternativas y las luces observables de mejoras.

En 1992 y 1994, *J.P. Brans* y *B. Mareschal* sugirieron dos extensiones más: PROMETHEE V (MCDA con restricciones de segmentación) y PROMETHEE VI (representación y simulación del cerebro humano). A lo largo del tiempo, ha habido un número considerable de aplicaciones exitosas de la metodología PROMETHEE en campos tan diversos como el de las finanzas, localización de industrias, planificación de recursos humanos, recursos hídricos, inversión, medicina, química, salud, turismo, ética, dirección dinámica, .... El éxito de la metodología se debe, entre otras razones, a sus propiedades matemáticas y a su particular simplicidad, claridad y estabilidad en el uso por parte de los usuarios.

### 2.2.5.2 El Método PROMETHEE

#### Introducción

El método PROMETHEE, está asociado a la Escuela Francesa: ELECTRE y PROMETHEE. El método PROMETHEE deriva del significado de **P**reference **R**anking **O**rganization **M**ETHod for **E**nrichment **E**valuation (Método Organizacional de Ordenamiento de las Preferencias para una Evaluación Eficiente) y, una de sus primeras aplicaciones ha sido en problemas de ubicación.

En el año 1960, *G. Davignon* hizo algunas aplicaciones utilizando esta metodología en el campo de la salud, éstas fueron la que dieron origen a distinguir el método PROMETHEE I (ordenación parcial) y el método PROMETHEE II (ordenación completa).

En el año 1985, *Brans* y *Vincke* presentaron formalmente tanto el método PROMETHEE I como el PROMETHEE II, que constituyó un inicio inmejorable a las circunstancias de lo conoce actualmente como metodología PROMETHEE y perfeccionado por *Brans* y *Mareschal* en el año 2005.

La metodología PROMETHEE está agrupada bajo la denominación común de los métodos de superación, dado que todos ellos giran en torno del concepto teórico de las relaciones de superación, no obstante existe entonces un conjunto de estos métodos discretos que se caracterizan porque son métodos de superación y tienen por objetivo proporcionar a los decisores, herramientas que les permitan resolver un problema donde existen varios objetivos, no homogéneos, y deben tomarse en cuenta, de acuerdo a sus preferencias. Es decir, estos métodos se aplican cuando el conjunto de alternativas que se considera es discreto y es factible enumerar y tratar explícitamente cada uno de las alternativas posibles.

### 2.2.5.2.1 El Método PROMETHEE

El método PROMETHEE, ideado por *Brans et al.*, 1984 como técnica y herramienta de decisión multicriterio, trata de establecer una matriz de decisión; para ello se realiza una evaluación de un conjunto de alternativas  $A$  en función de  $n$  criterios  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Las valoraciones están expresadas en escala cardinal, se determina una ordenación jerarquizada en el conjunto  $A$  de alternativas.

**Definición 24.-** Sea un criterio  $j$  a maximizar, y dos alternativas  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  y  $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ , donde  $a_{ij} = U_j(a_i)$  con  $a_{ij} \geq a_{kj}$  y sea  $d_{ik} = a_{ij} - a_{kj}$ , la función de preferencia relativa a  $j$  está dada por:  $S_j(d_{ik})$  como una función de  $[0,1]$  en  $\{0,1\}$ .

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{ik}) = \begin{cases} 0, & d_{ik} = 0 \\ 1, & d_{ik} > 0 \end{cases}, \text{ donde } d_{ik} = 0 \text{ es la relación de indiferencia y}$$

$d_{ik} > 0$  es la relación de preferencia estricta.

El decisor en función de las diferencias  $d_{ik} = a_{ij} - a_{kj}$  asignará una función de preferencia.

**Definición 25.-** Sea un criterio  $j$  a maximizar, y dos alternativas  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  y  $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ , donde  $a_{ij} = U_j(a_i)$  con  $a_{ij} \geq a_{kj}$  y, sea la función de preferencia relativa a  $j$  está dada por:

$$P_j(a_i, a_k) = F(d_{ik}), \quad \forall a_i, a_k \in A, \text{ que cumple las siguientes condiciones:}$$

Caso 1: Maximización de los criterios

$$\begin{cases} 0 \leq P_j \leq 1 \\ d_j(a_i, a_k) > 0 \rightarrow P_j(a_i, a_k) > 0 \\ d_j(a_i, a_k) \leq 0 \rightarrow P_j(a_i, a_k) = 0 \\ P_j(a_i, a_k) > 0 \rightarrow P_j(a_k, a_i) = 0 \end{cases}$$

Caso 2: Minimización de los criterios

$$P_j(a_i, a_k) = F[-(d_{ik})], \quad \forall a_i, a_k \in A$$

Para determinar el ordenamiento parcial (PROMETHEE I) u ordenamiento completo (PROMETHEE II) entre las diferentes alternativas es necesario el cálculo de la matriz de índices de preferencias. Para calcular esta matriz es necesario conocer cuál es el criterio generalizado o función de preferencia bajo el cual se evalúa cada uno de los criterios. Es decir, cada escala de los criterios se transforma a un grado de preferencia.

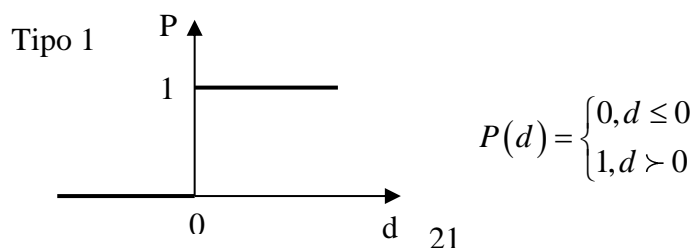
### Criterio Generalizado o Función de Preferencia

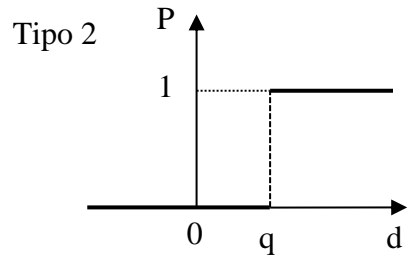
**Definición 26.-** Un criterio generalizado es una función de preferencia  $P_j(a_i, a_k)$ , que indica el grado de preferencia o de superación de  $a_i$  respecto de  $a_k$ , de forma tal que:

$$P_j(a_i, a_k) \approx P_j(d_j(a_i, a_k)) \quad \forall a_i, a_k \in A, \quad \text{donde} \quad d_j(a_i, a_k) \approx g_j(a_i) - g_j(a_k), \quad \text{siendo} \\ 0 \leq d_j(a_i, a_k) \leq 1$$

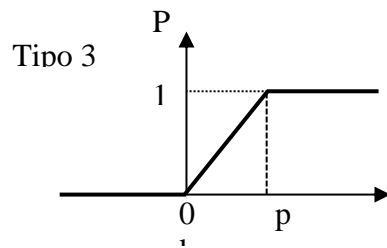
Entonces, el par  $\{g_j(\cdot), P_j(\cdot, \cdot)\}$  se denomina criterio generalizado asociado al criterio  $g_j(\cdot)$ .

Existen seis tipos de criterios generalizados y están dados por:



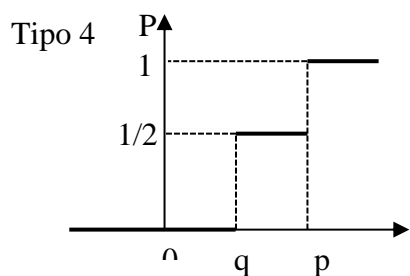


$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ 1, & d > q \end{cases}$$

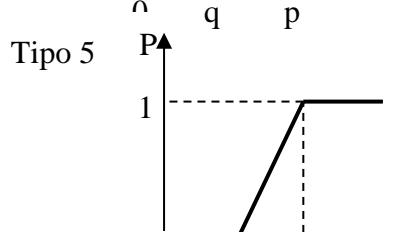


$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ \frac{d}{p}, & 0 \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$

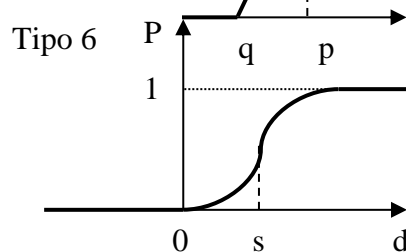




$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{1}{2}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$



$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$



$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d^2}{2s^2}}, & d > 0 \end{cases}$$

Algunas aclaraciones sobre el significado de los tipos de criterios generalizados establecidos:

Criterio tipo I - Usual: no se requiere la definición de umbrales.

Criterio tipo II-Forma de U: se define un umbral de indiferencia  $q$ .

Criterio tipo III-Forma de V: se define un umbral de preferencia estricta  $p$ .

Criterio tipo IV-Escalonado: se requiere la definición de dos umbrales, uno de indiferencia  $q$  y otro de preferencia estricta  $p$ .

Criterio tipo V-Forma de V con Indiferencia: requiere de la definición de dos umbrales, uno de indiferencia  $q$  y otro de preferencia estricta  $p$ .

Criterio tipo VI: se define un umbral  $s$ , normalmente comprendido entre  $q$  y  $p$ .

**Definición 27.-** El índice de preferencia  $c_{ik}$ , suponiendo que los pesos  $w_j$  son conocidos y están normalizados, está dado por:

$$c_{ik} = \sum_j w_j S_j(a_i, a_k) = \sum_j w_j S_j(d_{ik})$$

**Proposición 4.-** El índice de preferencia  $c_{ik}$  es nulo si y solamente si  $a_i$  es indiferente a  $a_k$  para todos los criterios;  $c_{ik}$  es igual a 1 si y solamente si  $a_i$  es estrictamente preferida a  $a_k$  para todos los criterios.

**Definición 28.-** Se denomina:

1) Flujo de orden saliente en  $a_i$

$$\phi_{a_i}^+ = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{a_i x}$$

2) Flujo de orden entrante en  $a_i$

$$\phi_{a_i}^- = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{x a_i}$$

3) Flujo neto en  $a_i$

$$\phi_{a_i} = \phi_{a_i}^+ - \phi_{a_i}^-$$

Aclaraciones sobre los flujos de orden:

El flujo de orden saliente representa el carácter dominante de una alternativa, su poder dominador, por ello será mejor aquella alternativa que tenga mayor flujo de orden saliente.

El flujo de orden entrante representa la debilidad de una alternativa, en tanto es dominada por las demás, así será mejor aquella alternativa que tenga un flujo de orden entrante más pequeño.

**Definición 29.-** En el método PROMETHEE I, se debe entender que:  $a_i$  supera a  $a_k$  si y solo si:

$$\phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^- \text{ o } \phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- = \phi_{a_k}^- \text{ o } \phi_{a_i}^+ = \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^-$$

En cualquier otro caso,  $a_i$  no supera a  $a_k$ .

En el método PROMETHEE II se hace uso del flujo neto  $\phi = \phi^+ - \phi^-$

**Definición 30.-** En el método PROMETHHE II, se debe entender que:  $a_i$  supera a  $a_k$  si y solo sí  $\phi_{a_i} \geq \phi_{a_k}$ .

### 2.2.5.3 Algoritmo del Método PROMETHEE

PASO 1.- Definición del criterio generalizado.

Esta fase requiere que a cada criterio  $g_j$  se le asocie un criterio generalizado  $P_j(d_j(a_i, a_k))$ , el cual valorará la preferencia de una alternativa  $a_i$  respecto a una  $a_k$  como una función de diferencias entre evaluaciones dado por  $d_j(a_i, a_k) = g_j(a_i) - g_j(a_k)$ .

PASO 2.- Construcción del índice de preferencia multicriterio.

Consiste en calcular el índice de preferencia multicriterio dado por:

$$c_{a_i, a_k} = \sum_{j=1}^n w_j P_j(d_j(a_i, a_k))$$

Donde los pesos  $w_j$  son conocidos, están normalizados y cumple la siguiente relación:

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

PASO 3.- Ordenación parcial de las alternativas.

Se calculan dos flujos de ordenación, el saliente y el entrante, que reflejan el grado en que una alternativa  $i$  domina o es dominada por las otras.

PASO 4.- Ordenación total de las alternativas.

Para obtener una ordenación total de las alternativas se calcula el flujo neto.

### 2.2.5. Definición de términos

El uso de los siguientes términos se hace necesario en la presente investigación:

**Modelo Matemático.** - Es la representación simbólica de relaciones matemáticas que involucran parámetros, variables y otros elementos necesarios a un problema dado teniendo como base alguna teoría de la ciencia matemática. La construcción de un modelo es, en esencia, un proceso consistente en decidir cuáles son las características o aspectos de un problema del entorno real y concreto que se debe representar para su estudio o análisis.

➤ **Decisión Multicriterio.** - es un campo de especialización de la ciencia matemática y que permite la adquisición de destrezas relativas a la modelización matemática mediante el estudio de modelos tipo y la consideración de varios objetivos.

➤ **Problema de Decisión Multicriterio Discreta.** - *Toskano* (2000), sostiene que aquellos problemas en los que las alternativas de decisión son finitas se denominan Problemas de Decisiones Multicriterio Discreta.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### 3.1. Tipo y diseño de investigación

La investigación es de tipo exploratoria, descriptiva y aplicada en la cual se analiza la teoría de decisión multicriterio discreta, la metodología PROMETHEE, métodos de solución PROMETHEE I y PROMETHEE II, un caso de estudio de aplicación práctica relacionada a la selección de personal docente para contrato anual 2021 en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo.

### 3.2. Plan de recolección de la información

En base al tema de estudio planteado, se elaboró el siguiente plan de recolección de datos:

- Revisión y análisis de algunas publicaciones relacionadas a la metodología PROMETHEE como técnica de solución a problemas de decisión multicriterio discreta.
- Formulación y análisis del modelo matemático del problema de decisión multicriterio discreto del caso de estudio.
- Estudio y análisis de los algoritmos de los métodos PROMETHEE I y II.
- Obtención de las soluciones en forma manual y computacional del caso de estudio como aplicación práctica utilizando los métodos PROMETHEE I y II.

### 3.3. Instrumentos de recolección de la información

Los instrumentos que permitieron obtener información fueron:

- La bibliografía especializada de la Facultad de Ciencias, constituida por libros y también de artículos publicados en revistas de investigación.
- Las páginas electrónicas de redes virtuales afines al campo de estudio.
- Formatos de evaluación de contrato docente anual 2021 de parte del Departamento Académico de Matemática.
- Las fichas de evaluación de actividades académicas de los docentes de parte de la Oficina General de Estudios.

### **3.4. Plan de procesamiento de la información**

Una vez obtenida la información necesaria y suficiente del tema se analizó la metodología PROMETHEE, facilitando la comprensión del modelo matemático como problema de decisión multicriterio discreta. Asimismo, se realizó el proceso manual sobre la aplicación práctica elegida como problema de decisión multicriterio discreta para obtener su solución mediante la metodología utilizada.

### **3.5. Plan de análisis de datos**

Dispuesta la información del caso de estudio para su solución como problema de decisión multicriterio discreta, se formuló el modelo matemático y se procedió a obtener la solución del problema mediante los métodos PROMETHEE I y II.

## RESULTADOS

### Aplicación de la Metodología PROMETHEE: Caso de Estudio

La convocatoria del proceso de concurso de selección de personal docente para contrato anual 2021 con financiamiento de Recursos Ordinarios, fue oficializada en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo mediante la Resolución de Consejo de la Facultad de Ciencias N°017-2021 – UNASAM-FC, de fecha 11 de enero, 2021. En la investigación, se tomará en consideración solo la asignación numérica de los docentes, afín de evitar observaciones y compromisos de atención por parte de los participantes.

Las bases de selección estuvieron disponibles en el portal de la UNASAM, [www.unasam.edu.pe](http://www.unasam.edu.pe) y en el enlace de la Facultad de Ciencias, según correo institucional: [mesadepartesfc@unasam.edu.pe](mailto:mesadepartesfc@unasam.edu.pe)

La presentación de los expedientes se realizó por trámite regular, según normas y dispositivos de emergencia sanitaria COVID-19, es decir, presentación del expediente en mesa de partes virtual de la Facultad de Ciencias-UNASAM; el proceso de selección de los contratos del personal docente se ejecutó en los Departamentos Académicos de Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones, Estadística, de Ciencias Básicas y de Matemáticas.

Es pertinente observar que, el proceso de selección de docentes para contrato que realiza la UNASAM se ejecuta según bases y reglamento de concurso vigentes, donde se contempla las condiciones mínimas de concurso, así como de las evaluaciones de expedientes y el desarrollo de una clase magistral; la evaluación lo realizan las Comisiones Evaluadoras conformada por una terna de docentes ordinarios de los Departamentos Académicos de la Facultad de Ciencias. El resultado de esta investigación permitirá ofrecer una contrastación, así como una validación de los puntajes obtenidos por el personal docente para contrato. Asimismo, la propuesta investigativa formula el establecimiento de más indicadores de evaluación, el cual constituirá el aporte de la investigación.

La información básica para la aplicación de la metodología PROMETHEE, lo constituyen la relación del personal docente o en términos desde el campo de las decisiones multicriterio discreta, alternativas; y los indicadores evaluativos llamado criterios; es decir, las variables alternativas lo constituyen el personal docente postulante, y los criterios lo constituyen las condiciones o exigencias que deben cumplir cada uno de los docentes postulantes para ser seleccionados y, por tanto, ganadores de la convocatoria del concurso docente. Estos criterios básicos de selección de docentes, exceptuando los requisitos mínimos según ley universitaria



N°30220 para el ingreso a la docencia universitaria, como por ejemplo, el grado académico, es de condición necesaria a los fines de las actividades académicas: Para el propósito del caso de estudio, se establecen los siguientes criterios: Criterio 1: **Evaluación Académica (C1)** con escala vigesimal, Criterio 2: **Experiencia profesional docente (C2)** con escala tricentesimal, Criterio 3: **Evaluación estudiantil (C3)** con escala centesimal, Criterio 4: **Clase magistral (C4)** con escala vigesimal y Criterio 5: **Entrevista personal (C5)** con escala decimal. La valoración de estos criterios se realiza mediante el uso de al menos formatos y tablas estipuladas en las bases del concurso.

#### EVALUACIÓN SOBRE CONCURSO DE CONTRATO ANUAL DOCENTE 2021 EN LA FACULTAD DE CIENCIAS

La Comisión Evaluadora aplica las bases y reglamento de concurso vigentes, según tablas de calificación establecidas; siendo las escalas de valoración existentes y distintas, entre ellas. Se lista la relación de los docentes postulantes al concurso del personal docente al contrato anual 2021, una vez admitido y dado el cumplimiento de los requisitos mínimos de los docentes postulantes, se procede al proceso de concurso para la selección del personal docente para contrato, obteniéndose los siguientes resultados:

**Tabla 1**

Relación de docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
<b>1</b>	16.50	156	77,34	12.25	08.00
<b>2</b>	18.00	168	90,57	14.00	10.00
<b>W</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>3</b>

Fuente: Facultad de Ciencias-Departamento Académico de Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones-OGE

Se consideran los criterios denotados con  $j = 1,2,3,4,5$  todos ellos a maximizar, y dos (02) alternativas o docentes postulantes sujetas a la valoración obtenida  $a_{ij} = g_j(a_i)$ .

**Tabla 2**

Relación de docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente- Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
1	18.10	252	87.84	13.05	08.00
2	17.00	144	82,14	12.75	08.50
3	16.50	072	76,82	12.25	08.00
4	14.80	192	81,68	11.40	08.00
W	4	5	2	6	3

Fuente: Facultad de Ciencias-Departamento Académico de Estadística-OGE

Se consideran los criterios denotados con  $j = 1,2,3,4,5$ , todos ellos a maximizar, y cuatro (04) alternativas o docentes postulantes sujetas a la valoración obtenida  $a_{ij} = g_j(a_i)$ .

**Tabla 3**

Relación de docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente- Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
1	16.00	180	90.48	11.75	07.50
2	16.50	204	83.33	12.25	08.00
3	15.90	156	86.81	11.45	07.00
4	16.30	108	82.18	11.90	07.50
W	4	5	2	6	3

Fuente: Facultad de Ciencias-Departamento Académico de Ciencias Básicas-OGE

Se consideran los criterios denotados con  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , todos ellos a maximizar, y cuatro (04) alternativas o docentes postulantes sujetas a la valoración obtenida  $a_{ij} = g_j(a_i)$ .

**Tabla 4**

Relación de docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente- Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
1	15.80	120	86.77	10.57	05.33
2	15.20	288	84.35	10.77	06.33
3	18.80	300	73.30	12.57	06.33
4	19.00	108	85.57	12.75	06.50
5	18.50	156	90.79	12.25	06.00
6	17.20	252	83.12	11.77	06.33
7	20.00	144	85.21	13.83	07.66
8	19.00	132	79.92	13.00	07.00
9	16.50	144	71.55	11.33	06.16
10	16.00	120	90.95	12.25	08.50
11	16.00	252	85.64	11.50	07.00
12	15.10	180	85.39	11.05	07.00
13	18.40	156	82.58	12.95	07.50
14	19.00	108	95.39	13.58	08.16
W	4	5	2	6	3

Fuente: Facultad de Ciencias-Departamento Académico de Matemática-OGE

Se consideran los criterios denotados con  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , todos ellos a maximizar, y catorce (14) alternativas o docentes postulantes sujetas a la valoración obtenida  $a_{ij} = g_j(a_i)$ .

### **Ponderación de los criterios establecidos:**

La ponderación que se establece para cada criterio dado, tiene la siguiente explicación: según la condición de escalas valorativas distintas establecidas para los cinco criterios; la ponderación para el criterio 1 sobre expediente, se asignó un valor de 4, considerando que se encuentran establecidos en la ley universitaria 30220 sobre requisitos mínimos; la ponderación para el criterio 2 sobre experiencia, se asignó un valor de 5, esto explica que la importancia de la experticia docente interesa en el proceso de enseñanza-aprendizaje; la ponderación para el criterio 3 sobre evaluación estudiantil, se asignó un valor de 2, esto explica que es reconocida dicha evaluación, pero resulta relativo a la capacidad docente; la ponderación para el criterio 4 sobre clase magistral, se asignó un valor de 6, que explica que esta aptitud es la más importante y necesaria para el desempeño docente y es ahí donde se evidencia sus condiciones; la ponderación para el criterio 5 sobre entrevista, se asignó un valor de 3, que explica que la respuesta sobre condiciones de cultura y de opiniones profesionales es flexible y sujeta a la mejora continua en el desempeño docente.

### **Normalización de la matriz de evaluación de los postulantes**

La normalización de los valores obtenidos en las tablas, incluyendo las ponderaciones de los pesos asignados a cada uno de los criterios mediante el vector de pesos o de ponderación es el siguiente:  $w = (4,5,2,6,3)$ , aplicando la forma usual de normalización, el procedimiento nº 3, se tiene:

**Tabla 5**

Normalización de las evaluaciones valorativas sobre los docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
1	0.478	0.481	0.461	0.467	0.444
2	0.522	0.519	0.539	0.533	0.556
W	0.200	0.250	0.100	0.300	0.150

Fuente: Departamento Académico de Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones

**Tabla 6**

Normalización de las evaluaciones valorativas sobre los docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente- Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
1	0.273	0.382	0.267	0.264	0.246
2	0.256	0.218	0.250	0.258	0.262
3	0.248	0.109	0.234	0.248	0.246
4	0.223	0.291	0.249	0.231	0.246
W	0.200	0.250	0.100	0.300	0.150

Fuente: Departamento Académico de Estadística

**Tabla 7**

Normalización de las evaluaciones valorativas sobre los docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente- Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
1	0.247	0.278	0.264	0.248	0.250
2	0.255	0.315	0.243	0.259	0.267
3	0.246	0.241	0.253	0.242	0.233
4	0.252	0.167	0.240	0.251	0.250
W	0.200	0.250	0.100	0.300	0.150

Fuente: Departamento Académico de Ciencias Básicas



**Tabla 8**

Normalización de las evaluaciones valorativas sobre los docentes postulantes presentados al concurso contrato anual 2021

Docente- Número	Criterio 1: expediente Max.	Criterio 2: experiencia Max.	Criterio 3: evaluación estudiantil Max.	Criterio 4: clase magistral Max.	Criterio 5: entrevista personal Max.
1	0.065	0.049	0.074	0.062	0.056
2	0.062	0.117	0.071	0.063	0.066
3	0.077	0.121	0.062	0.074	0.066
4	0.078	0.044	0.072	0.075	0.068
5	0.076	0.063	0.077	0.072	0.063
6	0.070	0.102	0.070	0.069	0.066
7	0.082	0.059	0.072	0.081	0.080
8	0.078	0.054	0.068	0.076	0.073
9	0.067	0.059	0.061	0.067	0.064
10	0.065	0.049	0.077	0.072	0.089
11	0.065	0.102	0.073	0.068	0.073
12	0.062	0.073	0.072	0.065	0.073
13	0.075	0.063	0.070	0.076	0.078
14	0.078	0.044	0.081	0.080	0.085
W	0.200	0.250	0.100	0.300	0.150

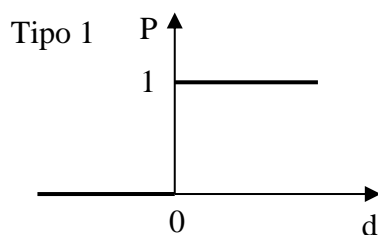
Fuente: Departamento Académico de Matemáticas

## Aplicación del Algoritmo de la metodología PROMETHEE: TABLA 1

Dado que la naturaleza de los criterios se orienta al propósito únicamente de ser maximizados, así como todos ellos convergen a validar la selección del personal docente para contrato anual 2021 en la Facultad de Ciencias.

### Paso 1. Determinación del criterio generalizado

Criterio tipo I que no requiere de umbrales.



Se supone que si  $a_{ij} \geq a_{kj}$ , de cómo se sitúan las dos alternativas con respecto al criterio  $j$ , se define  $d_{ik} = a_{ij} - a_{kj}$  y también se define la función de preferencia relativa a:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{ik}) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_{ik} \leq 0 \\ 1, & \text{si } d_{ik} > 0 \end{cases}$$

En detalle, se hacen los cálculos de cada uno de los valores de  $d_{ik} = a_{ij} - a_{kj}$

### PRIMERA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

1-2:

$$d_{12} = a_{1j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{12} = a_{11} - a_{21} = 16.50 - 18.00 = -1.50$$

$$j = 2: d_{12} = a_{12} - a_{22} = 156 - 168 = -12$$

$$j = 3: d_{12} = a_{13} - a_{23} = 77.34 - 90.57 = -13.23$$

$$j = 4: d_{12} = a_{14} - a_{24} = 12.25 - 14.00 = -1.75$$

$$j = 5: d_{12} = a_{15} - a_{25} = 8 - 10 = -2$$

## SEGUNDA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

2-1:

$$d_{21} = a_{2j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{21} = a_{21} - a_{11} = 18.00 - 16.50 = 1.50$$

$$j = 2: d_{21} = a_{22} - a_{12} = 168 - 156 = 12$$

$$j = 3: d_{21} = a_{23} - a_{13} = 90.57 - 77.34 = 13.23$$

$$j = 4: d_{21} = a_{24} - a_{14} = 14.00 - 12.25 = 1.75$$

$$j = 5: d_{21} = a_{25} - a_{15} = 10 - 8 = 2$$

**Paso 2.** Los índices de preferencias se calculan con las siguientes relaciones:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{i_k}) = P_j(d_j(a_i, a_k)) = P_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_{i_k} \leq 0 \\ 1, & \text{si } d_{i_k} > 0 \end{cases}$$

$$c_{ik} = c_{a_i a_k} = \sum_{j=1}^5 w_j P_j(d_j(a_i, a_k))$$

## PRIMERA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

1-2:

$$c_{12} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{12}^j) = 0.00$$

## SEGUNDA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

2-1:

$$c_{21} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{21}^j) = 1.00$$

**Tabla 9**

Matriz de índices de preferencia

$c_{a_i a_k}$	1	2
1	0	0.00
2	1.00	0

**Paso 3.** Los flujos de orden saliente y entrante se calculan con las relaciones:

$$\phi_{a_i}^+ = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{a_i x} \quad \text{y} \quad \phi_{a_i}^- = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{x a_i}$$

$$\varphi_1^+ = 0.00 \quad \varphi_2^+ = 1.00$$

Asimismo,

$$\varphi_1^- = 1.00 \quad \varphi_2^- = 0.00$$

**Tabla 10**

Matriz de índices de preferencia con flujos

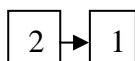
$c_{a_i a_k}$	1	2	$\phi_{a_i}^+$
1	0	0.00	0.00
2	1.00	0	1.00
$\phi_{a_i}^-$	1.00	0.00	0

Luego, se establece las relaciones de superación con las siguientes relaciones:  $a_i$  supera a  $a_k$  si y solo si:

$$\phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \quad \text{y} \quad \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^- \quad \text{o} \quad \phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \quad \text{y} \quad \phi_{a_i}^- = \phi_{a_k}^- \quad \text{o} \quad \phi_{a_i}^+ = \phi_{a_k}^+ \quad \text{y} \quad \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^-$$

Es decir, 2 supera a: 1

El resultado parcial, se muestra en forma gráfica:

**Figura 1.** El grafo de superación del PROMETHEE I

**Paso 4.** Cálculo del flujo neto para cada alternativa mediante la siguiente relación:

$$\phi_{a_i} = \phi_{a_i}^+ - \phi_{a_i}^- \text{ la cual determina la ordenación final: PROMETHEE II}$$

$$\varphi_1 = -1.00 \quad \varphi_2 = 1.00$$

Luego, decimos que la alternativa  $a_i$  supera a la alternativa  $a_k$  si y solo si:  $\phi_i \geq \phi_k$ , y se obtiene un preorden completo, es decir, la ordenación final es:

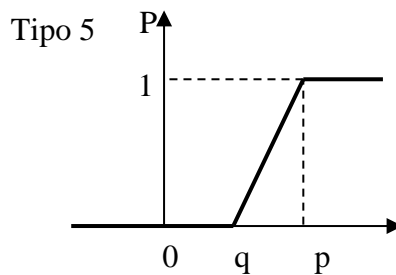
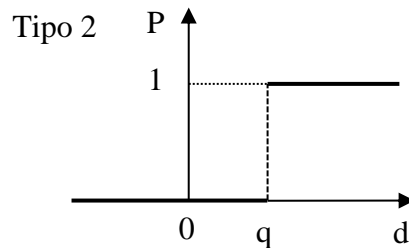
$$A2 \succ A1$$

### Aplicación del Algoritmo de la metodología PROMETHEE: TABLA 2

Dado que la naturaleza de los criterios se orienta al propósito únicamente de ser maximizados, así como todos ellos convergen a validar la selección del personal docente para contrato anual 2021 en la Facultad de Ciencias.

#### Paso 1. Determinación del criterio generalizado

Criterio tipo II, se establece el umbral  $q=0$  y  $p=10$ .



Se supone que si  $a_{ij} \geq a_{kj}$ , de cómo se sitúan las dos alternativas con respecto al criterio  $j$ , se define la función de preferencia del tipo 2:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{ik}) = P(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_{ik} \leq q \\ 1, & \text{si } d_{ik} > q \end{cases}$$

sí como la función de preferencia del tipo 5:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{ik}) = P(d) = \begin{cases} 0, d_{ik} \leq q \\ \frac{d - q}{p - q}, q < d_{ik} \leq p \\ 1, d_{ik} > p \end{cases}$$

En detalle, se hacen los cálculos de cada una de las diferencias definidas por:

$$d_{ik} = a_{ij} - a_{kj}$$

#### PRIMERA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

1-2:

$$d_{12} = a_{1j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{12} = a_{11} - a_{21} = 18.10 - 17.00 = 1.10$$

$$j = 2: d_{12} = a_{12} - a_{22} = 252 - 144 = 108$$

$$j = 3: d_{12} = a_{13} - a_{23} = 87.84 - 82.14 = 5.70$$

$$j = 4: d_{12} = a_{14} - a_{24} = 13.05 - 12.75 = 0.30$$

$$j = 5: d_{12} = a_{15} - a_{25} = 8.00 - 8.50 = -0.50$$

1-3:

$$d_{13} = a_{1j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{13} = a_{11} - a_{31} = 18.10 - 16.50 = 1.60$$

$$j = 2: d_{13} = a_{12} - a_{32} = 252 - 72 = 180$$

$$j = 3: d_{13} = a_{13} - a_{33} = 87.84 - 76.82 = 11.02$$

$$j = 4: d_{13} = a_{14} - a_{34} = 13.05 - 12.25 = 0.80$$

$$j = 5: d_{13} = a_{15} - a_{35} = 8 - 8 = 0$$

1-4:

$$d_{14} = a_{1j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{14} = a_{11} - a_{41} = 18.10 - 14.80 = 3.30$$

$$j = 2: d_{14} = a_{12} - a_{42} = 252 - 192 = 60$$

$$j = 3: d_{14} = a_{13} - a_{43} = 87.84 - 81.68 = 6.16$$

$$j = 4: d_{14} = a_{14} - a_{44} = 13.05 - 11.40 = 1.65$$

$$j = 5: d_{14} = a_{15} - a_{45} = 8 - 8 = 0$$

## SEGUNDA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

2-1:

$$d_{21} = a_{2j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{21} = a_{21} - a_{11} = 17.00 - 18.10 = -1.10$$

$$j = 2: d_{21} = a_{22} - a_{12} = 144 - 252 = -108$$

$$j = 3: d_{21} = a_{23} - a_{13} = 82.14 - 87.84 = -5.70$$

$$j = 4: d_{21} = a_{24} - a_{14} = 12.75 - 13.05 = -0.30$$

$$j = 5: d_{21} = a_{25} - a_{15} = 8.50 - 8.00 = 0.50$$

2-3:

$$d_{23} = a_{2j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{23} = a_{21} - a_{31} = 17.00 - 16.50 = 0.50$$

$$j = 2: d_{23} = a_{22} - a_{32} = 144 - 72 = 72$$

$$j = 3: d_{23} = a_{23} - a_{33} = 82.14 - 76.82 = 5.32$$

$$j = 4: d_{23} = a_{24} - a_{34} = 12.75 - 12.25 = 0.50$$

$$j = 5: d_{23} = a_{25} - a_{35} = 8.50 - 8.00 = 0.50$$

2-4:

$$d_{24} = a_{2j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{24} = a_{21} - a_{41} = 17.00 - 14.80 = 2.20$$

$$j = 2: d_{24} = a_{22} - a_{42} = 144 - 192 = -48$$

$$j = 3: d_{24} = a_{23} - a_{43} = 82.14 - 81.68 = 0.46$$

$$j = 4: d_{24} = a_{24} - a_{44} = 12.75 - 11.40 = 1.35$$

$$j = 5: d_{24} = a_{25} - a_{45} = 8.50 - 8.00 = 0.50$$

## TERCERA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

3-1:

$$d_{31} = a_{3j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{31} = a_{31} - a_{11} = 16.50 - 18.10 = -1.60$$

$$j = 2: d_{31} = a_{32} - a_{12} = 72 - 252 = -180$$

$$j = 3: d_{31} = a_{33} - a_{13} = 76.82 - 87.84 = -11.02$$

$$j = 4: d_{31} = a_{34} - a_{14} = 12.25 - 13.05 = -0.80$$

$$j = 5: d_{31} = a_{35} - a_{15} = 8 - 8 = 0$$



3-2:

$$d_{32} = a_{3j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{32} = a_{31} - a_{21} = 16.50 - 17.00 = -0.50$$

$$j = 2: d_{32} = a_{32} - a_{22} = 72 - 144 = -72$$

$$j = 3: d_{32} = a_{33} - a_{23} = 76.82 - 82.14 = -5.32$$

$$j = 4: d_{32} = a_{34} - a_{24} = 12.25 - 12.75 = -0.50$$

$$j = 5: d_{32} = a_{35} - a_{25} = 8.00 - 8.50 = -0.50$$

3-4:

$$d_{34} = a_{3j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{34} = a_{31} - a_{41} = 16.50 - 14.80 = 1.70$$

$$j = 2: d_{34} = a_{32} - a_{42} = 72 - 192 = -120$$

$$j = 3: d_{34} = a_{33} - a_{43} = 76.82 - 81.68 = -4.86$$

$$j = 4: d_{34} = a_{34} - a_{44} = 12.25 - 11.40 = 0.85$$

$$j = 5: d_{34} = a_{35} - a_{45} = 8 - 8 = 0$$

#### CUARTA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

4-1:

$$d_{41} = a_{4j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{41} = a_{41} - a_{11} = 14.80 - 18.10 = -3.30$$

$$j = 2: d_{41} = a_{42} - a_{12} = 192 - 252 = -60$$

$$j = 3: d_{41} = a_{43} - a_{13} = 81.68 - 87.84 = -6.16$$

$$j = 4: d_{41} = a_{44} - a_{14} = 11.40 - 13.05 = -1.65$$

$$j = 5: d_{41} = a_{45} - a_{15} = 8 - 8 = 0$$

4-2:

$$d_{42} = a_{4j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{42} = a_{41} - a_{21} = 14.80 - 17.00 = -2.20$$

$$j = 2: d_{42} = a_{42} - a_{22} = 192 - 144 = 48$$

$$j = 3: d_{42} = a_{43} - a_{23} = 81.68 - 82.14 = -0.46$$

$$j = 4: d_{42} = a_{44} - a_{24} = 11.40 - 12.75 = -1.35$$

$$j = 5: d_{42} = a_{45} - a_{25} = 8.00 - 8.50 = -0.50$$

4-3:

$$d_{43} = a_{4j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{43} = a_{41} - a_{31} = 14.80 - 16.50 = -1.70$$

$$j = 2: d_{43} = a_{42} - a_{32} = 192 - 72 = 120$$

$$j = 3: d_{43} = a_{43} - a_{33} = 81.68 - 76.82 = 4.86$$

$$j = 4: d_{43} = a_{44} - a_{34} = 11.40 - 12.25 = -0.85$$

$$j = 5: d_{43} = a_{45} - a_{35} = 8 - 8 = 0$$

**Paso 2.** Los índices de preferencias se calculan con las siguientes relaciones:

$$P_j(d_j(a_i, a_k)) = P_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0, & d_{ik} \leq q \\ 1, & d_{ik} > q \end{cases}$$

$$c_{ik} = c_{a_i a_k} = \sum_{j=1}^6 w_j P_j(d_j(a_i, a_k))$$

PRIMERA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

1-2:

$$c_{12} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{12}^j) = 0.80$$

1-3:

$$c_{13} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{13}^j) = 0.85$$

1-4:

$$c_{14} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{14}^j) = 0.81$$

SEGUNDA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

2-1:

$$c_{21} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{21}^j) = 0.15$$

2-3:

$$c_{23} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{23}^j) = 0.95$$

2-4:

$$c_{24} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{24}^j) = 0.65$$

### TERCERA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

3-1:

$$c_{31} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{31}^j) = 0.00$$

3-2:

$$c_{32} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{32}^j) = 0.00$$

3-4:

$$c_{34} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{34}^j) = 0.50$$

### CUARTA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

4-1:

$$c_{41} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{41}^j) = 0.00$$

4-2:

$$c_{42} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{42}^j) = 0.25$$

4-3:

$$c_{43} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{43}^j) = 0.29$$

**Tabla 11**

Matriz de índices de preferencia

$c_{a_i a_k}$	1	2	3	4
1	0	0.80	0.85	0.81
2	0.15	0	0.95	0.65
3	0.00	0.00	0	0.50
4	0.00	0.25	0.29	0

**Paso 3.** Los flujos de orden saliente y entrante se calculan con las relaciones:

$$\phi_{a_i}^+ = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{a_i x} \quad y \quad \phi_{a_i}^- = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{x a_i}$$

$$\phi_1^+ = 0.82 \quad \phi_2^+ = 0.58 \quad \phi_3^+ = 0.17 \quad \phi_4^+ = 0.18$$

Asimismo,

$$\phi_1^- = 0.05 \quad \phi_2^- = 0.35 \quad \phi_3^- = 0.69 \quad \phi_4^- = 0.65$$

Tabla 12. Matriz de índices de preferencia con flujos

**Tabla 12**

Matriz de índices de preferencia con flujos

$c_{a_i a_k}$	1	2	3	4	$\phi_{a_i}^+$
1	0	0.80	0.85	0.81	0.82
2	0.15	0	0.95	0.65	0.58
3	0.00	0.00	0	0.50	0.17
4	0.00	0.25	0.29	0	0.18
$\phi_{a_i}^-$	0.05	0.35	0.69	0.65	0

Luego, se establece las relaciones de superación con las siguientes relaciones:  $a_i$  supera a  $a_k$  si y solo si:

$$\phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \quad y \quad \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^- \quad o \quad \phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \quad y \quad \phi_{a_i}^- = \phi_{a_k}^- \quad o \quad \phi_{a_i}^+ = \phi_{a_k}^+ \quad y \quad \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^-$$

Es decir:

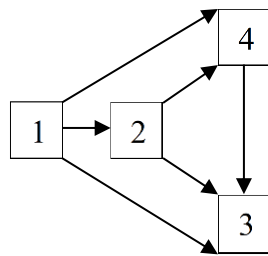
1 supera a: 2,3,4

2 supera a: 3,4

4 supera a: 3

El resultado parcial, se muestra en forma gráfica:

**Figura 2.** El grafo de superación del PROMETHEE I



**Paso 4.** Cálculo del flujo neto para cada alternativa mediante la siguiente relación:

$\phi_{a_i} = \phi_{a_i}^+ - \phi_{a_i}^-$  la cual determina la ordenación final: PROMETHEE II.

$$\varphi_1 = 0.77 \quad \varphi_2 = 0.23 \quad \varphi_3 = -0.52 \quad \varphi_4 = -0.47$$

Luego, decimos que la alternativa  $a_i$  supera a la alternativa  $a_k$  si y solo si:  $\phi_i \geq \phi_k$ , y se obtiene un preorden completo, es decir, la ordenación final es:

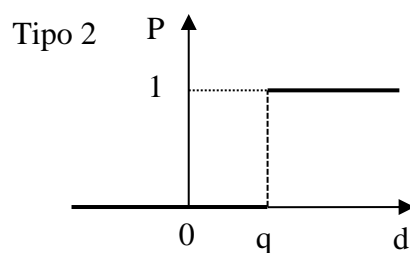
$$A1 > A2 > A4 > A3$$

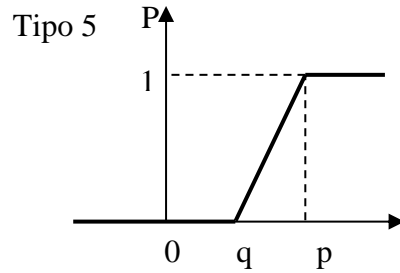
### Aplicación del Algoritmo de la metodología PROMETHEE: TABLA 3

Dado que la naturaleza de los criterios se orienta al propósito únicamente de ser maximizados, así como todos ellos convergen a validar la selección del personal docente para contrato anual 2021 en la Facultad de Ciencias.

**Paso 1.** Determinación del criterio generalizado

Criterio tipo II, se establece el umbral  $q=0$  y  $p=10$ .





Se supone que sí  $a_{ij} \geq a_{kj}$ , de cómo se sitúan las dos alternativas con respecto al criterio  $j$ , se define la función de preferencia del tipo 2:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{ik}) = P(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_{ik} \leq q \\ 1, & \text{si } d_{ik} > q \end{cases}$$

Así como la función de preferencia del tipo 5:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{ik}) = P(d) = \begin{cases} 0, & d_{ik} \leq q \\ \frac{d - q}{p - q}, & q < d_{ik} \leq p \\ 1, & d_{ik} > p \end{cases}$$

En detalle, se hacen los cálculos de cada una de las diferencias definidas por:

$$d_{ik} = a_{ij} - a_{kj}:$$

#### PRIMERA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

1-2:

$$d_{12} = a_{1j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{12} = a_{11} - a_{21} = 16.00 - 16.50 = -0.50$$

$$j = 2: d_{12} = a_{12} - a_{22} = 180 - 204 = -24$$

$$j = 3: d_{12} = a_{13} - a_{23} = 90.48 - 83.33 = 7.15$$

$$j = 4: d_{12} = a_{14} - a_{24} = 11.75 - 12.25 = -0.50$$

$$j = 5: d_{12} = a_{15} - a_{25} = 7.50 - 8.00 = -0.50$$

1-3:

$$d_{13} = a_{1j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{13} = a_{11} - a_{31} = 16.00 - 15.90 = 0.10$$

$$j = 2: d_{13} = a_{12} - a_{32} = 180 - 156 = 24$$

$$j = 3: d_{13} = a_{13} - a_{33} = 90.48 - 86.81 = 3.67$$

$$j = 4: d_{13} = a_{14} - a_{34} = 11.75 - 11.45 = 0.30$$

$$j = 5: d_{13} = a_{15} - a_{35} = 7.50 - 7.00 = 0.50$$

1-4:

$$d_{14} = a_{1j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{14} = a_{11} - a_{41} = 16.00 - 16.30 = -0.30$$

$$j = 2: d_{14} = a_{12} - a_{42} = 180 - 108 = 72$$

$$j = 3: d_{14} = a_{13} - a_{43} = 90.48 - 82.18 = 8.30$$

$$j = 4: d_{14} = a_{14} - a_{44} = 11.75 - 11.90 = -0.15$$

$$j = 5: d_{14} = a_{15} - a_{45} = 7.50 - 7.50 = 0$$

## SEGUNDA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

2-1:

$$d_{21} = a_{2j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{21} = a_{21} - a_{11} = 16.50 - 16.00 = 0.50$$

$$j = 2: d_{21} = a_{22} - a_{12} = 204 - 180 = 24$$

$$j = 3: d_{21} = a_{23} - a_{13} = 83.33 - 90.48 = -7.15$$

$$j = 4: d_{21} = a_{24} - a_{14} = 12.25 - 11.75 = 0.50$$

$$j = 5: d_{21} = a_{25} - a_{15} = 8.00 - 7.50 = 0.50$$

2-3:

$$d_{23} = a_{2j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{23} = a_{21} - a_{31} = 16.50 - 15.90 = 0.60$$

$$j = 2: d_{23} = a_{22} - a_{32} = 204 - 156 = 48$$

$$j = 3: d_{23} = a_{23} - a_{33} = 83.33 - 86.81 = -3.48$$

$$j = 4: d_{23} = a_{24} - a_{34} = 12.25 - 11.45 = 0.80$$

$$j = 5: d_{23} = a_{25} - a_{35} = 8.00 - 7.00 = 1.00$$



2-4:

$$d_{24} = a_{2j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{24} = a_{21} - a_{41} = 16.50 - 16.30 = 0.20$$

$$j = 2: d_{24} = a_{22} - a_{42} = 204 - 108 = 96$$

$$j = 3: d_{24} = a_{23} - a_{43} = 83.33 - 82.18 = 1.15$$

$$j = 4: d_{24} = a_{24} - a_{44} = 12.25 - 11.90 = 0.35$$

$$j = 5: d_{24} = a_{25} - a_{45} = 8.00 - 7.50 = 0.50$$

### TERCERA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

3-1:

$$d_{31} = a_{3j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{31} = a_{31} - a_{11} = 15.90 - 16.00 = -0.10$$

$$j = 2: d_{31} = a_{32} - a_{12} = 156 - 180 = -24$$

$$j = 3: d_{31} = a_{33} - a_{13} = 86.81 - 90.48 = -3.67$$

$$j = 4: d_{31} = a_{34} - a_{14} = 11.45 - 11.75 = -0.30$$

$$j = 5: d_{31} = a_{35} - a_{15} = 7.00 - 7.50 = -0.50$$

3-2:

$$d_{32} = a_{3j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{32} = a_{31} - a_{21} = 15.90 - 16.50 = -0.60$$

$$j = 2: d_{32} = a_{32} - a_{22} = 156 - 204 = -48$$

$$j = 3: d_{32} = a_{33} - a_{23} = 86.81 - 83.33 = 3.48$$

$$j = 4: d_{32} = a_{34} - a_{24} = 11.45 - 12.25 = -0.80$$

$$j = 5: d_{32} = a_{35} - a_{25} = 7.00 - 8.00 = -1.00$$

3-4:

$$d_{34} = a_{3j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{34} = a_{31} - a_{41} = 15.90 - 16.30 = -0.40$$

$$j = 2: d_{34} = a_{32} - a_{42} = 156 - 108 = 48$$

$$j = 3: d_{34} = a_{33} - a_{43} = 86.81 - 82.18 = 4.63$$

$$j = 4: d_{34} = a_{34} - a_{44} = 11.45 - 11.90 = -0.45$$

$$j = 5: d_{34} = a_{35} - a_{45} = 7.00 - 7.50 = -0.50$$

#### CUARTA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

4-1:

$$d_{41} = a_{4j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{41} = a_{41} - a_{11} = 16.30 - 16.00 = 0.30$$

$$j = 2: d_{41} = a_{42} - a_{12} = 108 - 180 = -72$$

$$j = 3: d_{41} = a_{43} - a_{13} = 82.18 - 90.48 = -8.30$$

$$j = 4: d_{41} = a_{44} - a_{14} = 11.90 - 11.75 = 1.15$$

$$j = 5: d_{41} = a_{45} - a_{15} = 7.50 - 7.50 = 0$$

4-2:

$$d_{42} = a_{4j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{42} = a_{41} - a_{21} = 16.30 - 16.50 = -0.20$$

$$j = 2: d_{42} = a_{42} - a_{22} = 108 - 204 = -96$$

$$j = 3: d_{42} = a_{43} - a_{23} = 82.18 - 83.33 = -1.15$$

$$j = 4: d_{42} = a_{44} - a_{24} = 11.90 - 12.25 = -0.35$$

$$j = 5: d_{42} = a_{45} - a_{25} = 7.50 - 8.00 = -0.50$$

4-3:

$$d_{43} = a_{4j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{43} = a_{41} - a_{31} = 16.30 - 15.90 = 0.40$$

$$j = 2: d_{43} = a_{42} - a_{32} = 108 - 156 = -48$$

$$j = 3: d_{43} = a_{43} - a_{33} = 82.18 - 86.81 = -4.63$$

$$j = 4: d_{43} = a_{44} - a_{34} = 11.90 - 11.45 = 0.45$$

$$j = 5: d_{43} = a_{45} - a_{35} = 7.50 - 7.00 = 0.50$$

**Paso 2.** Los índices de preferencias se calculan con las siguientes relaciones:

$$P_j(d_j(a_i, a_k)) = P_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0, & d_{ik} \leq q \\ 1, & d_{ik} > q \end{cases}$$

$$c_{ik} = c_{a_i a_k} = \sum_{j=1}^6 w_j P_j(d_j(a_i, a_k))$$

## PRIMERA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

1-2:

$$c_{12} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{12}^j) = 0.10$$

1-3:

$$c_{13} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{13}^j) = 1.00$$

1-4:

$$c_{14} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{14}^j) = 0.35$$

## SEGUNDA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

2-1:

$$c_{21} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{21}^j) = 0.90$$

2-3:

$$c_{23} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{23}^j) = 0.90$$

2-4:

$$c_{24} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{24}^j) = 1.00$$

## TERCERA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

3-1:

$$c_{31} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{31}^j) = 0.00$$

3-2:

$$c_{32} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{32}^j) = 0.10$$

3-4:

$$c_{34} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{34}^j) = 0.35$$

CUARTA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

4-1:

$$c_{41} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{41}^j) = 0.50$$

4-2:

$$c_{42} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{42}^j) = 0.00$$

4-3:

$$c_{43} = \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{43}^j) = 0.65$$

**Tabla 13**

El grafo de superación del PROMETHEE I

$c_{a_i a_k}$	1	2	3	4
1	0	0.10	1.00	0.35
2	0.90	0	0.90	1.00
3	0.00	0.10	0	0.35
4	0.50	0.00	0.65	0

**Paso 3.** Los flujos de orden saliente y entrante se calculan con las relaciones:

$$\phi_{a_i}^+ = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{a_i x} \quad y \quad \phi_{a_i}^- = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{x a_i}$$

$$\phi_1^+ = 0.48 \quad \phi_2^+ = 0.93 \quad \phi_3^+ = 0.15 \quad \phi_4^+ = 0.38$$

Asimismo,

$$\phi_1^- = 0.46 \quad \phi_2^- = 0.06 \quad \phi_3^- = 0.85 \quad \phi_4^- = 0.56$$

**Tabla 14**

Matriz de índices de preferencia con flujos

$c_{a_i a_k}$	1	2	3	4	$\phi_{a_i}^+$
1	0	0.80	0.85	0.81	0.48
2	0.15	0	0.95	0.65	0.93
3	0.00	0.00	0	0.50	0.15
4	0.00	0.25	0.29	0	0.38
$\phi_{a_i}^-$	0.46	0.06	0.85	0.56	0

Luego, se establece las relaciones de superación con las siguientes relaciones:  $a_i$  supera a  $a_k$  si y solo si:

$$\phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^- \text{ o } \phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- = \phi_{a_k}^- \text{ o } \phi_{a_i}^+ = \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^-$$

Es decir:

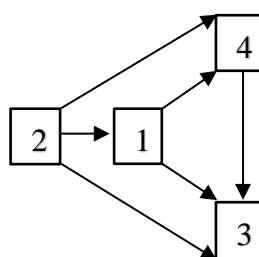
2 supera a: 1,3,4

1 supera a: 3,4

4 supera a: 3

El resultado parcial, se muestra en forma gráfica:

**Figura 3.** El grafo de superación del PROMETHEE I



**Paso 4.** Cálculo del flujo neto para cada alternativa mediante la siguiente relación:

$$\phi_{a_i} = \phi_{a_i}^+ - \phi_{a_i}^- \text{ la cual determina la ordenación final: PROMETHEE II.}$$

$$\varphi_1 = 0.02 \quad \varphi_2 = 0.87 \quad \varphi_3 = -0.70 \quad \varphi_4 = -0.18$$

Luego, decimos que la alternativa  $a_i$  supera a la alternativa  $a_k$  si y solo si:  $\phi_i \geq \phi_k$ , y se obtiene un preorden completo, es decir, la ordenación final es:

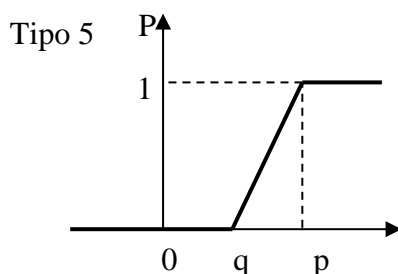
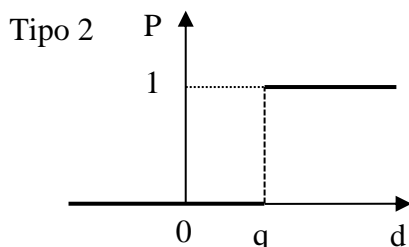
$$A2 \succ A1 \succ A4 \succ A3$$

### Aplicación del Algoritmo de la metodología PROMETHEE: TABLA 4

Dado que la naturaleza de los criterios se orienta al propósito únicamente de ser maximizados, así como todos ellos convergen a validar la selección del personal docente para contrato anual 2021 en la Facultad de Ciencias.

#### Paso 1. Determinación del criterio generalizado

Criterio tipo II, se establece el umbral  $q=0$  y  $p=10$ .



Se supone que si  $a_{ij} \geq a_{kj}$ , de cómo se sitúan las dos alternativas con respecto al criterio  $j$ , se define la función de preferencia del tipo 2:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{i_k}) = P(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_{i_k} \leq q \\ 1, & \text{si } d_{i_k} > q \end{cases}$$

Así como la función de preferencia del tipo 5:

$$S_j(a_i, a_k) = S_j(d_{i_k}) = P(d) = \begin{cases} 0, d_{i_k} \leq q \\ \frac{d - q}{p - q}, q < d_{i_k} \leq p \\ 1, d_{i_k} > p \end{cases}$$

En detalle, se hacen los cálculos de cada una de las diferencias definidas por:

$$d_{ik} = a_{ij} - a_{kj}:$$

#### PRIMERA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

1-2:

$$d_{12} = a_{1j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{12} = a_{11} - a_{21} = 15.80 - 15.20 = 0.60$$

$$j = 2: d_{12} = a_{12} - a_{22} = 120 - 288 = -168$$

$$j = 3: d_{12} = a_{13} - a_{23} = 86.77 - 84.35 = 2.42$$

$$j = 4: d_{12} = a_{14} - a_{24} = 10.57 - 10.77 = -0.20$$

$$j = 5: d_{12} = a_{15} - a_{25} = 5.33 - 6.33 = -1.00$$

1-3:

$$d_{13} = a_{1j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{13} = a_{11} - a_{31} = 15.80 - 18.80 = -3.00$$

$$j = 2: d_{13} = a_{12} - a_{32} = 120 - 300 = -180$$

$$j = 3: d_{13} = a_{13} - a_{33} = 86.77 - 73.30 = 13.47$$

$$j = 4: d_{13} = a_{14} - a_{34} = 10.57 - 12.57 = -2.00$$

$$j = 5: d_{13} = a_{15} - a_{35} = 5.33 - 6.33 = -1.00$$

1-4:

$$d_{14} = a_{1j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{14} = a_{11} - a_{41} = 15.80 - 19.00 = -3.20$$

$$j = 2: d_{14} = a_{12} - a_{42} = 120 - 108 = 12$$

$$j = 3: d_{14} = a_{13} - a_{43} = 86.77 - 85.57 = 1.20$$

$$j = 4: d_{14} = a_{14} - a_{44} = 10.57 - 12.75 = -2.18$$

$$j = 5: d_{14} = a_{15} - a_{45} = 5.33 - 6.50 = -1.17$$

1-5:

$$d_{15} = a_{1j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{15} = a_{11} - a_{51} = 15.80 - 18.50 = -2.70$$

$$j = 2: d_{15} = a_{12} - a_{52} = 120 - 156 = -36$$

$$j = 3: d_{15} = a_{13} - a_{53} = 86.77 - 90.79 = 4.02$$

$$j = 4: d_{15} = a_{14} - a_{54} = 10.57 - 12.25 = -1.68$$

$$j = 5: d_{15} = a_{15} - a_{55} = 5.33 - 6.00 = -0.67$$

1-6:

$$d_{16} = a_{1j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{16} = a_{11} - a_{61} = 15.80 - 17.20 = -1.40$$

$$j = 2: d_{16} = a_{12} - a_{62} = 120 - 252 = -132$$

$$j = 3: d_{16} = a_{13} - a_{63} = 86.77 - 83.12 = 3.65$$

$$j = 4: d_{16} = a_{14} - a_{64} = 10.57 - 11.77 = -1.20$$

$$j = 5: d_{16} = a_{15} - a_{65} = 5.33 - 6.33 = -1.00$$

1-7:

$$d_{17} = a_{1j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{17} = a_{11} - a_{71} = 15.80 - 20.00 = -4.20$$

$$j = 2: d_{17} = a_{12} - a_{72} = 120 - 144 = -24$$

$$j = 3: d_{17} = a_{13} - a_{73} = 86.77 - 85.21 = 1.56$$

$$j = 4: d_{17} = a_{14} - a_{74} = 10.57 - 13.83 = -3.26$$

$$j = 5: d_{17} = a_{15} - a_{75} = 5.33 - 7.66 = -2.33$$

1-8:

$$d_{18} = a_{1j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{18} = a_{11} - a_{81} = 15.80 - 19.00 = -3.20$$

$$j = 2: d_{18} = a_{12} - a_{82} = 120 - 132 = -12$$

$$j = 3: d_{18} = a_{13} - a_{83} = 86.77 - 79.92 = 6.85$$

$$j = 4: d_{18} = a_{14} - a_{84} = 10.57 - 13.00 = -2.43$$

$$j = 5: d_{18} = a_{15} - a_{85} = 5.33 - 7.00 = -1.67$$



1-9:

$$d_{19} = a_{1j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{19} = a_{11} - a_{91} = 15.80 - 16.50 = -0.70$$

$$j = 2: d_{19} = a_{12} - a_{92} = 120 - 144 = -24$$

$$j = 3: d_{19} = a_{13} - a_{93} = 86.77 - 71.55 = 15.22$$

$$j = 4: d_{19} = a_{14} - a_{94} = 10.57 - 11.33 = -0.76$$

$$j = 5: d_{19} = a_{15} - a_{95} = 5.33 - 6.16 = -0.83$$

1-10:

$$d_{110} = a_{1j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{110} = a_{11} - a_{101} = 15.80 - 16.00 = -0.20$$

$$j = 2: d_{110} = a_{12} - a_{102} = 120 - 120 = 0$$

$$j = 3: d_{110} = a_{13} - a_{103} = 86.77 - 90.95 = -4.18$$

$$j = 4: d_{110} = a_{14} - a_{104} = 10.57 - 12.25 = -1.68$$

$$j = 5: d_{110} = a_{15} - a_{105} = 5.33 - 8.50 = -3.17$$

1-11:

$$d_{111} = a_{1j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{111} = a_{11} - a_{111} = 15.80 - 16.00 = -0.20$$

$$j = 2: d_{111} = a_{12} - a_{112} = 120 - 252 = -132$$

$$j = 3: d_{111} = a_{13} - a_{113} = 86.77 - 85.64 = 1.13$$

$$j = 4: d_{111} = a_{14} - a_{114} = 10.57 - 11.50 = -0.93$$

$$j = 5: d_{111} = a_{15} - a_{115} = 5.33 - 7.00 = -1.67$$

1-12:

$$d_{112} = a_{1j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{112} = a_{11} - a_{121} = 15.80 - 15.10 = 0.70$$

$$j = 2: d_{112} = a_{12} - a_{122} = 120 - 180 = -60$$

$$j = 3: d_{112} = a_{13} - a_{123} = 86.77 - 85.39 = 1.38$$

$$j = 4: d_{112} = a_{14} - a_{124} = 10.57 - 11.05 = -0.48$$

$$j = 5: d_{112} = a_{15} - a_{125} = 5.33 - 7.00 = -1.67$$

1-13:

$$d_{113} = a_{1j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{113} = a_{11} - a_{131} = 15.80 - 18.40 = -2.60$$

$$j = 2: d_{113} = a_{12} - a_{132} = 120 - 156 = -36$$

$$j = 3: d_{113} = a_{13} - a_{133} = 86.77 - 82.58 = 4.19$$

$$j = 4: d_{113} = a_{14} - a_{134} = 10.57 - 12.95 = -2.38$$

$$j = 5: d_{113} = a_{15} - a_{135} = 5.33 - 7.50 = -2.17$$

1-14:

$$d_{114} = a_{1j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{114} = a_{11} - a_{141} = 15.80 - 19.00 = -3.20$$

$$j = 2: d_{114} = a_{12} - a_{142} = 120 - 108 = 12$$

$$j = 3: d_{114} = a_{13} - a_{143} = 86.77 - 95.39 = -8.62$$

$$j = 4: d_{114} = a_{14} - a_{144} = 10.57 - 13.58 = -3.01$$

$$j = 5: d_{114} = a_{15} - a_{145} = 5.33 - 8.16 = -2.83$$

## SEGUNDA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

2-1:

$$d_{21} = a_{2j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{21} = a_{21} - a_{11} = 15.20 - 15.80 = -0.60$$

$$j = 2: d_{21} = a_{22} - a_{12} = 288 - 120 = 168$$

$$j = 3: d_{21} = a_{23} - a_{13} = 84.35 - 86.77 = -2.42$$

$$j = 4: d_{21} = a_{24} - a_{14} = 10.77 - 10.57 = 0.20$$

$$j = 5: d_{21} = a_{25} - a_{15} = 6.33 - 5.33 = 1.00$$

2-3:

$$d_{23} = a_{2j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{23} = a_{21} - a_{31} = 15.20 - 18.80 = -3.60$$

$$j = 2: d_{23} = a_{22} - a_{32} = 288 - 300 = -12$$

$$j = 3: d_{23} = a_{23} - a_{33} = 84.35 - 73.30 = 11.05$$

$$j = 4: d_{23} = a_{24} - a_{34} = 10.77 - 12.57 = -1.80$$

$$j = 5: d_{23} = a_{25} - a_{35} = 6.33 - 6.33 = 0$$

2-4:

$$d_{24} = a_{2j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{24} = a_{21} - a_{41} = 15.20 - 19.00 = -3.80$$

$$j = 2: d_{24} = a_{22} - a_{42} = 288 - 108 = 180$$

$$j = 3: d_{24} = a_{23} - a_{43} = 84.35 - 85.57 = -1.22$$

$$j = 4: d_{24} = a_{24} - a_{44} = 10.77 - 12.75 = -1.98$$

$$j = 5: d_{24} = a_{25} - a_{45} = 6.33 - 6.50 = -0.17$$

2-5:

$$d_{25} = a_{2j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{25} = a_{21} - a_{51} = 15.20 - 18.50 = -3.30$$

$$j = 2: d_{25} = a_{22} - a_{52} = 288 - 156 = 132$$

$$j = 3: d_{25} = a_{23} - a_{53} = 84.35 - 90.79 = -6.44$$

$$j = 4: d_{25} = a_{24} - a_{54} = 10.77 - 12.25 = -1.48$$

$$j = 5: d_{25} = a_{25} - a_{55} = 6.33 - 6.00 = 0.33$$

2-6:

$$d_{26} = a_{2j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{26} = a_{21} - a_{61} = 15.20 - 17.20 = -2.00$$

$$j = 2: d_{26} = a_{22} - a_{62} = 288 - 252 = 36$$

$$j = 3: d_{26} = a_{23} - a_{63} = 84.35 - 83.12 = 1.23$$

$$j = 4: d_{26} = a_{24} - a_{64} = 10.77 - 11.77 = -1.00$$

$$j = 5: d_{26} = a_{25} - a_{65} = 6.33 - 6.33 = 0$$

2-7:

$$d_{27} = a_{2j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{27} = a_{21} - a_{71} = 15.20 - 20.00 = -4.80$$

$$j = 2: d_{27} = a_{22} - a_{72} = 288 - 144 = 144$$

$$j = 3: d_{27} = a_{23} - a_{73} = 84.35 - 85.21 = -0.86$$

$$j = 4: d_{27} = a_{24} - a_{74} = 10.77 - 13.83 = -3.06$$

$$j = 5: d_{27} = a_{25} - a_{75} = 6.33 - 7.66 = -1.33$$

2-8:

$$d_{28} = a_{2j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{28} = a_{21} - a_{81} = 15.20 - 19.00 = -3.80$$

$$j = 2: d_{28} = a_{22} - a_{82} = 288 - 132 = 156$$

$$j = 3: d_{28} = a_{23} - a_{83} = 84.35 - 79.92 = 4.43$$

$$j = 4: d_{28} = a_{24} - a_{84} = 10.77 - 13.00 = -2.23$$

$$j = 5: d_{28} = a_{35} - a_{85} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

2-9:

$$d_{29} = a_{2j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{29} = a_{21} - a_{91} = 15.20 - 16.50 = -1.30$$

$$j = 2: d_{29} = a_{22} - a_{92} = 288 - 144 = 144$$

$$j = 3: d_{29} = a_{23} - a_{93} = 84.35 - 71.55 = 12.80$$

$$j = 4: d_{29} = a_{24} - a_{94} = 10.77 - 11.33 = -0.56$$

$$j = 5: d_{29} = a_{25} - a_{95} = 6.33 - 6.16 = -0.17$$

2-10:

$$d_{210} = a_{2j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{210} = a_{21} - a_{101} = 15.20 - 16.00 = -0.80$$

$$j = 2: d_{210} = a_{22} - a_{102} = 288 - 120 = 168$$

$$j = 3: d_{210} = a_{13} - a_{103} = 84.35 - 90.95 = -6.60$$

$$j = 4: d_{210} = a_{24} - a_{104} = 10.77 - 12.25 = -1.48$$

$$j = 5: d_{210} = a_{25} - a_{105} = 6.33 - 8.50 = -2.17$$

2-11:

$$d_{211} = a_{2j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{211} = a_{21} - a_{111} = 15.20 - 16.00 = -0.80$$

$$j = 2: d_{211} = a_{22} - a_{112} = 288 - 252 = 36$$

$$j = 3: d_{211} = a_{23} - a_{113} = 84.35 - 85.64 = -1.29$$

$$j = 4: d_{211} = a_{24} - a_{114} = 10.77 - 11.50 = -0.73$$

$$j = 5: d_{211} = a_{25} - a_{115} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

2-12:

$$d_{212} = a_{2j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{212} = a_{21} - a_{121} = 15.20 - 15.10 = 0.10$$

$$j = 2: d_{212} = a_{22} - a_{122} = 288 - 180 = 108$$

$$j = 3: d_{212} = a_{23} - a_{123} = 84.35 - 85.39 = -1.04$$

$$j = 4: d_{212} = a_{24} - a_{124} = 10.77 - 11.05 = -0.28$$

$$j = 5: d_{212} = a_{25} - a_{125} = 6.33 - 7.00 = -0.17$$

2-13:

$$d_{213} = a_{2j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{213} = a_{21} - a_{131} = 15.20 - 18.40 = -3.20$$

$$j = 2: d_{213} = a_{22} - a_{132} = 288 - 156 = 132$$

$$j = 3: d_{213} = a_{13} - a_{133} = 84.35 - 82.58 = 1.77$$

$$j = 4: d_{213} = a_{24} - a_{134} = 10.77 - 12.95 = -2.18$$

$$j = 5: d_{213} = a_{25} - a_{135} = 6.33 - 7.50 = -1.17$$

2-14:

$$d_{214} = a_{2j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{214} = a_{21} - a_{141} = 15.20 - 19.00 = -3.80$$

$$j = 2: d_{214} = a_{22} - a_{142} = 288 - 108 = 180$$

$$j = 3: d_{214} = a_{23} - a_{143} = 84.35 - 95.39 = -11.04$$

$$j = 4: d_{214} = a_{24} - a_{144} = 10.77 - 13.58 = -2.81$$

$$j = 5: d_{214} = a_{25} - a_{145} = 6.33 - 8.16 = -1.83$$

### TERCERA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

3-1:

$$d_{31} = a_{3j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{31} = a_{31} - a_{11} = 18.80 - 15.80 = 3.00$$

$$j = 2: d_{31} = a_{32} - a_{12} = 300 - 120 = 180$$

$$j = 3: d_{31} = a_{33} - a_{13} = 73.30 - 86.77 = -13.47$$

$$j = 4: d_{31} = a_{34} - a_{14} = 12.57 - 10.57 = 2.00$$

$$j = 5: d_{31} = a_{35} - a_{15} = 6.33 - 5.33 = 1.00$$

3-2:

$$d_{32} = a_{3j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{32} = a_{31} - a_{21} = 18.80 - 15.20 = 3.60$$

$$j = 2: d_{32} = a_{32} - a_{22} = 300 - 288 = 12$$

$$j = 3: d_{32} = a_{33} - a_{23} = 73.30 - 84.35 = -11.05$$

$$j = 4: d_{32} = a_{34} - a_{24} = 12.57 - 10.77 = 1.80$$

$$j = 5: d_{32} = a_{35} - a_{25} = 6.33 - 6.33 = 0$$

3-4:

$$d_{34} = a_{3j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{34} = a_{31} - a_{41} = 18.80 - 19.00 = -0.20$$

$$j = 2: d_{34} = a_{32} - a_{42} = 300 - 108 = 192$$

$$j = 3: d_{34} = a_{33} - a_{43} = 73.30 - 85.57 = -12.27$$

$$j = 4: d_{34} = a_{34} - a_{44} = 12.57 - 12.75 = -0.18$$

$$j = 5: d_{34} = a_{35} - a_{45} = 6.33 - 6.50 = -0.17$$

3-5:

$$d_{35} = a_{3j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{35} = a_{31} - a_{51} = 18.80 - 18.50 = 0.30$$

$$j = 2: d_{35} = a_{32} - a_{52} = 300 - 156 = 144$$

$$j = 3: d_{35} = a_{33} - a_{53} = 73.30 - 90.79 = -17.49$$

$$j = 4: d_{35} = a_{34} - a_{54} = 12.57 - 12.25 = 0.32$$

$$j = 5: d_{35} = a_{35} - a_{55} = 6.33 - 6.00 = 0.33$$

3-6:

$$d_{36} = a_{3j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{36} = a_{31} - a_{61} = 18.80 - 17.20 = 1.60$$

$$j = 2: d_{36} = a_{32} - a_{62} = 300 - 252 = 48$$

$$j = 3: d_{36} = a_{33} - a_{63} = 73.30 - 83.12 = -9.82$$

$$j = 4: d_{36} = a_{34} - a_{64} = 12.57 - 11.77 = 0.80$$

$$j = 5: d_{36} = a_{35} - a_{65} = 6.33 - 6.33 = 0$$

3-7:

$$d_{37} = a_{3j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{37} = a_{31} - a_{71} = 18.80 - 20.00 = -1.20$$

$$j = 2: d_{37} = a_{32} - a_{72} = 300 - 144 = 156$$

$$j = 3: d_{37} = a_{33} - a_{73} = 73.30 - 85.21 = -11.91$$

$$j = 4: d_{37} = a_{34} - a_{74} = 12.57 - 13.83 = -1.26$$

$$j = 5: d_{37} = a_{35} - a_{75} = 6.33 - 7.66 = -1.33$$

3-8:

$$d_{38} = a_{3j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{38} = a_{31} - a_{81} = 18.80 - 19.00 = -0.20$$

$$j = 2: d_{38} = a_{32} - a_{82} = 300 - 132 = 168$$

$$j = 3: d_{38} = a_{33} - a_{83} = 73.30 - 79.92 = -6.62$$

$$j = 4: d_{38} = a_{34} - a_{84} = 12.57 - 13.00 = -0.43$$

$$j = 5: d_{38} = a_{35} - a_{85} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

3-9:

$$d_{39} = a_{3j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{39} = a_{31} - a_{91} = 18.80 - 16.50 = 2.30$$

$$j = 2: d_{39} = a_{32} - a_{92} = 300 - 144 = 156$$

$$j = 3: d_{39} = a_{33} - a_{93} = 73.30 - 71.55 = 1.75$$

$$j = 4: d_{39} = a_{34} - a_{94} = 12.57 - 11.33 = 1.24$$

$$j = 5: d_{39} = a_{35} - a_{95} = 6.33 - 6.16 = 0.17$$

3-10:

$$d_{310} = a_{3j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{310} = a_{31} - a_{101} = 18.80 - 16.00 = 2.80$$

$$j = 2: d_{310} = a_{32} - a_{102} = 300 - 120 = 180$$

$$j = 3: d_{310} = a_{33} - a_{103} = 73.30 - 90.95 = -17.65$$

$$j = 4: d_{310} = a_{34} - a_{104} = 12.57 - 12.25 = 0.32$$

$$j = 5: d_{310} = a_{35} - a_{105} = 6.33 - 8.50 = -2.17$$

3-11:

$$d_{311} = a_{3j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{311} = a_{31} - a_{111} = 18.80 - 16.00 = 2.80$$

$$j = 2: d_{311} = a_{32} - a_{112} = 300 - 252 = 48$$

$$j = 3: d_{311} = a_{33} - a_{113} = 73.30 - 85.64 = -12.34$$

$$j = 4: d_{311} = a_{34} - a_{114} = 12.57 - 11.50 = 1.07$$

$$j = 5: d_{311} = a_{35} - a_{115} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

3-12:

$$d_{312} = a_{3j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{312} = a_{31} - a_{121} = 18.80 - 15.10 = 3.70$$

$$j = 2: d_{312} = a_{32} - a_{122} = 300 - 180 = 120$$

$$j = 3: d_{312} = a_{33} - a_{123} = 73.30 - 85.39 = -12.09$$

$$j = 4: d_{312} = a_{34} - a_{124} = 12.57 - 11.05 = 1.52$$

$$j = 5: d_{312} = a_{35} - a_{125} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

3-13:

$$d_{313} = a_{3j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{313} = a_{31} - a_{131} = 18.80 - 18.40 = 0.40$$

$$j = 2: d_{313} = a_{32} - a_{132} = 300 - 156 = 144$$

$$j = 3: d_{313} = a_{33} - a_{133} = 73.30 - 82.58 = -9.28$$

$$j = 4: d_{313} = a_{34} - a_{134} = 12.57 - 12.95 = -0.38$$

$$j = 5: d_{313} = a_{35} - a_{135} = 6.33 - 7.50 = -1.17$$

3-14:

$$d_{314} = a_{3j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{314} = a_{31} - a_{141} = 18.80 - 19.00 = -0.20$$

$$j = 2: d_{314} = a_{32} - a_{142} = 300 - 108 = 192$$

$$j = 3: d_{314} = a_{33} - a_{143} = 73.30 - 95.39 = -22.09$$

$$j = 4: d_{314} = a_{34} - a_{144} = 12.57 - 13.58 = -1.01$$

$$j = 5: d_{314} = a_{35} - a_{145} = 6.33 - 8.16 = -1.83$$



#### CUARTA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

4-1:

$$d_{41} = a_{4j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{41} = a_{41} - a_{11} = 19.00 - 15.80 = 3.20$$

$$j = 2: d_{41} = a_{42} - a_{12} = 108 - 120 = -12$$

$$j = 3: d_{41} = a_{43} - a_{13} = 85.57 - 86.77 = -1.20$$

$$j = 4: d_{41} = a_{44} - a_{14} = 12.75 - 10.57 = 2.18$$

$$j = 5: d_{41} = a_{45} - a_{15} = 6.50 - 5.33 = 1.17$$

4-2:

$$d_{42} = a_{4j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{42} = a_{41} - a_{21} = 19.00 - 15.20 = 3.80$$

$$j = 2: d_{42} = a_{42} - a_{22} = 108 - 288 = -180$$

$$j = 3: d_{42} = a_{43} - a_{23} = 85.57 - 84.35 = 1.22$$

$$j = 4: d_{42} = a_{44} - a_{24} = 12.75 - 10.77 = 1.98$$

$$j = 5: d_{42} = a_{45} - a_{25} = 6.50 - 6.33 = 0.17$$

4-3:

$$d_{43} = a_{4j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{43} = a_{41} - a_{31} = 19.00 - 18.80 = 0.20$$

$$j = 2: d_{43} = a_{42} - a_{32} = 108 - 300 = -192$$

$$j = 3: d_{43} = a_{43} - a_{33} = 85.57 - 73.30 = 12.27$$

$$j = 4: d_{43} = a_{44} - a_{34} = 12.75 - 12.57 = 0.18$$

$$j = 5: d_{43} = a_{45} - a_{35} = 6.50 - 6.33 = 0.17$$

4-5:

$$d_{45} = a_{4j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{45} = a_{41} - a_{51} = 19.00 - 18.50 = 0.50$$

$$j = 2: d_{45} = a_{42} - a_{52} = 108 - 156 = -48$$

$$j = 3: d_{45} = a_{43} - a_{53} = 85.57 - 90.79 = -5.22$$

$$j = 4: d_{45} = a_{44} - a_{54} = 12.75 - 12.25 = 0.50$$

$$j = 5: d_{45} = a_{45} - a_{55} = 6.50 - 6.00 = 0.50$$

4-6:

$$d_{46} = a_{4j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{46} = a_{41} - a_{61} = 19.00 - 17.20 = 1.80$$

$$j = 2: d_{46} = a_{42} - a_{62} = 108 - 252 = -144$$

$$j = 3: d_{46} = a_{43} - a_{63} = 85.57 - 83.12 = 2.45$$

$$j = 4: d_{46} = a_{44} - a_{64} = 12.75 - 11.77 = 0.98$$

$$j = 5: d_{46} = a_{45} - a_{65} = 6.50 - 6.33 = 0.17$$

4-7:

$$d_{47} = a_{4j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{47} = a_{41} - a_{71} = 19.00 - 20.00 = -1.00$$

$$j = 2: d_{47} = a_{42} - a_{72} = 108 - 144 = -36$$

$$j = 3: d_{47} = a_{43} - a_{73} = 85.57 - 85.21 = 0.36$$

$$j = 4: d_{47} = a_{44} - a_{74} = 12.75 - 13.83 = -1.08$$

$$j = 5: d_{47} = a_{45} - a_{75} = 6.50 - 7.66 = -1.16$$

4-8:

$$d_{48} = a_{4j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{48} = a_{41} - a_{81} = 19.00 - 19.00 = 0$$

$$j = 2: d_{48} = a_{42} - a_{82} = 108 - 132 = -24$$

$$j = 3: d_{48} = a_{43} - a_{83} = 85.57 - 79.92 = 5.65$$

$$j = 4: d_{48} = a_{44} - a_{84} = 12.75 - 13.00 = -0.25$$

$$j = 5: d_{48} = a_{45} - a_{85} = 6.50 - 7.00 = -0.50$$

4-9:

$$d_{49} = a_{4j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{49} = a_{41} - a_{91} = 19.00 - 16.50 = 2.50$$

$$j = 2: d_{49} = a_{42} - a_{92} = 108 - 144 = -36$$

$$j = 3: d_{49} = a_{43} - a_{93} = 85.57 - 71.55 = 14.02$$

$$j = 4: d_{49} = a_{44} - a_{94} = 12.75 - 11.33 = 1.42$$

$$j = 5: d_{49} = a_{45} - a_{95} = 6.50 - 6.16 = 0.34$$

4-10:

$$d_{410} = a_{4j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{410} = a_{41} - a_{101} = 19.00 - 16.00 = 3.00$$

$$j = 2: d_{410} = a_{42} - a_{102} = 108 - 120 = -12$$

$$j = 3: d_{410} = a_{43} - a_{103} = 85.57 - 90.95 = -5.38$$

$$j = 4: d_{410} = a_{44} - a_{104} = 12.75 - 12.25 = 0.50$$

$$j = 5: d_{410} = a_{45} - a_{105} = 6.50 - 8.50 = -2.00$$

4-11:

$$d_{411} = a_{4j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{411} = a_{41} - a_{111} = 19.00 - 16.00 = 3.00$$

$$j = 2: d_{411} = a_{42} - a_{112} = 108 - 252 = -144$$

$$j = 3: d_{411} = a_{43} - a_{113} = 85.57 - 85.64 = -0.07$$

$$j = 4: d_{411} = a_{44} - a_{114} = 12.75 - 11.50 = 1.25$$

$$j = 5: d_{411} = a_{45} - a_{115} = 6.50 - 7.00 = -0.50$$

4-12:

$$d_{412} = a_{4j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{412} = a_{41} - a_{121} = 19.00 - 15.10 = 3.90$$

$$j = 2: d_{412} = a_{42} - a_{122} = 108 - 180 = -72$$

$$j = 3: d_{412} = a_{43} - a_{123} = 85.57 - 85.39 = 0.18$$

$$j = 4: d_{412} = a_{44} - a_{124} = 12.75 - 11.05 = 1.70$$

$$j = 5: d_{412} = a_{45} - a_{125} = 6.50 - 7.00 = -0.50$$

4-13:

$$d_{413} = a_{4j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{413} = a_{41} - a_{131} = 19.00 - 18.40 = 0.60$$

$$j = 2: d_{413} = a_{42} - a_{132} = 108 - 156 = -48$$

$$j = 3: d_{413} = a_{43} - a_{133} = 85.57 - 82.58 = -2.99$$

$$j = 4: d_{413} = a_{44} - a_{134} = 12.75 - 12.95 = -0.20$$

$$j = 5: d_{413} = a_{45} - a_{135} = 6.50 - 7.50 = -1.00$$

4-14:

$$d_{414} = a_{4j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{414} = a_{41} - a_{141} = 19.00 - 19.00 = 0$$

$$j = 2: d_{414} = a_{42} - a_{142} = 108 - 108 = 0$$

$$j = 3: d_{414} = a_{43} - a_{143} = 85.57 - 95.39 = -9.82$$

$$j = 4: d_{414} = a_{44} - a_{144} = 12.75 - 13.58 = -0.83$$

$$j = 5: d_{414} = a_{45} - a_{145} = 6.50 - 8.16 = -1.66$$

#### QUINTA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

5-1:

$$d_{51} = a_{5j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{51} = a_{51} - a_{11} = 18.50 - 15.80 = 2.70$$

$$j = 2: d_{51} = a_{52} - a_{12} = 156 - 120 = 36$$

$$j = 3: d_{51} = a_{53} - a_{13} = 90.79 - 86.77 = 4.02$$

$$j = 4: d_{51} = a_{54} - a_{14} = 12.25 - 10.57 = 1.68$$

$$j = 5: d_{51} = a_{55} - a_{15} = 6.00 - 5.33 = 0.67$$

5-2:

$$d_{52} = a_{5j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{52} = a_{51} - a_{21} = 18.50 - 15.20 = 3.30$$

$$j = 2: d_{52} = a_{52} - a_{22} = 156 - 288 = -132$$

$$j = 3: d_{52} = a_{53} - a_{23} = 90.79 - 84.35 = 6.44$$

$$j = 4: d_{52} = a_{54} - a_{24} = 12.25 - 10.77 = 1.48$$

$$j = 5: d_{52} = a_{55} - a_{25} = 6.00 - 6.33 = -0.33$$

5-3:

$$d_{53} = a_{5j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{53} = a_{51} - a_{31} = 18.50 - 18.80 = -0.30$$

$$j = 2: d_{53} = a_{52} - a_{32} = 156 - 300 = -144$$

$$j = 3: d_{53} = a_{53} - a_{33} = 90.79 - 73.30 = 17.49$$

$$j = 4: d_{53} = a_{54} - a_{34} = 12.25 - 12.57 = -0.32$$

$$j = 5: d_{53} = a_{55} - a_{35} = 6.00 - 6.33 = -0.33$$

5-4:

$$d_{54} = a_{5j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{54} = a_{51} - a_{41} = 18.50 - 19.00 = -0.50$$

$$j = 2: d_{54} = a_{52} - a_{42} = 156 - 108 = 48$$

$$j = 3: d_{54} = a_{53} - a_{43} = 90.79 - 85.57 = 5.22$$

$$j = 4: d_{54} = a_{54} - a_{44} = 12.25 - 12.75 = -0.50$$

$$j = 5: d_{54} = a_{55} - a_{45} = 6.00 - 6.50 = -0.50$$

5-6:

$$d_{56} = a_{5j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{56} = a_{51} - a_{61} = 18.50 - 17.20 = 1.30$$

$$j = 2: d_{56} = a_{52} - a_{62} = 156 - 252 = -96$$

$$j = 3: d_{56} = a_{53} - a_{63} = 90.79 - 83.12 = 7.67$$

$$j = 4: d_{56} = a_{54} - a_{64} = 12.25 - 11.77 = 0.48$$

$$j = 5: d_{56} = a_{55} - a_{65} = 6.00 - 6.33 = -0.33$$

5-7:

$$d_{57} = a_{5j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{57} = a_{51} - a_{71} = 18.50 - 20.00 = -1.50$$

$$j = 2: d_{57} = a_{52} - a_{72} = 156 - 144 = 12$$

$$j = 3: d_{57} = a_{53} - a_{73} = 90.79 - 85.21 = 5.58$$

$$j = 4: d_{57} = a_{54} - a_{74} = 12.25 - 13.83 = -1.58$$

$$j = 5: d_{57} = a_{55} - a_{75} = 6.00 - 7.66 = -1.66$$

5-8:

$$d_{58} = a_{5j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{58} = a_{51} - a_{81} = 18.50 - 19.00 = -0.50$$

$$j = 2: d_{58} = a_{52} - a_{82} = 156 - 132 = 24$$

$$j = 3: d_{58} = a_{53} - a_{83} = 90.79 - 79.92 = 10.87$$

$$j = 4: d_{58} = a_{54} - a_{84} = 12.25 - 13.00 = -0.75$$

$$j = 5: d_{58} = a_{55} - a_{85} = 6.00 - 7.00 = -1.00$$

5-9:

$$d_{59} = a_{5j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{59} = a_{51} - a_{91} = 18.50 - 16.50 = 2.00$$

$$j = 2: d_{59} = a_{52} - a_{92} = 156 - 144 = 12$$

$$j = 3: d_{59} = a_{53} - a_{93} = 90.79 - 71.55 = 19.24$$

$$j = 4: d_{59} = a_{54} - a_{94} = 12.25 - 11.33 = 0.92$$

$$j = 5: d_{59} = a_{55} - a_{95} = 6.00 - 6.16 = -0.16$$

5-10:

$$d_{510} = a_{5j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{510} = a_{51} - a_{101} = 18.50 - 16.00 = 2.50$$

$$j = 2: d_{510} = a_{52} - a_{102} = 156 - 120 = 36$$

$$j = 3: d_{510} = a_{53} - a_{103} = 90.79 - 90.95 = -0.16$$

$$j = 4: d_{510} = a_{54} - a_{104} = 12.25 - 12.25 = 0$$

$$j = 5: d_{510} = a_{55} - a_{105} = 6.00 - 8.50 = -2.50$$

5-11:

$$d_{511} = a_{5j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{511} = a_{51} - a_{111} = 18.50 - 16.00 = 2.50$$

$$j = 2: d_{511} = a_{52} - a_{112} = 156 - 252 = -96$$

$$j = 3: d_{511} = a_{53} - a_{113} = 90.79 - 85.64 = 5.15$$

$$j = 4: d_{511} = a_{54} - a_{114} = 12.25 - 11.50 = 0.75$$

$$j = 5: d_{511} = a_{55} - a_{115} = 6.00 - 7.00 = -1.00$$

5-12:

$$d_{512} = a_{5j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{512} = a_{51} - a_{121} = 18.50 - 15.10 = 3.40$$

$$j = 2: d_{512} = a_{52} - a_{122} = 156 - 180 = -24$$

$$j = 3: d_{512} = a_{53} - a_{123} = 90.79 - 85.39 = 5.40$$

$$j = 4: d_{512} = a_{54} - a_{124} = 12.25 - 11.05 = 1.20$$

$$j = 5: d_{512} = a_{55} - a_{125} = 6.00 - 7.00 = -1.00$$

5-13:

$$d_{513} = a_{5j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{513} = a_{51} - a_{131} = 18.50 - 18.40 = 0.10$$

$$j = 2: d_{513} = a_{52} - a_{132} = 156 - 156 = 0$$

$$j = 3: d_{513} = a_{53} - a_{133} = 90.79 - 82.58 = 8.21$$

$$j = 4: d_{513} = a_{54} - a_{134} = 12.25 - 12.95 = -0.70$$

$$j = 5: d_{513} = a_{55} - a_{135} = 6.00 - 7.50 = -1.50$$

5-14:

$$d_{514} = a_{5j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{514} = a_{51} - a_{141} = 18.50 - 19.00 = -0.50$$

$$j = 2: d_{514} = a_{52} - a_{142} = 156 - 108 = 48$$

$$j = 3: d_{514} = a_{53} - a_{143} = 90.79 - 95.39 = -4.60$$

$$j = 4: d_{514} = a_{54} - a_{144} = 12.25 - 13.58 = -1.33$$

$$j = 5: d_{514} = a_{55} - a_{145} = 6.00 - 8.16 = -2.16$$

#### SEXTA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

6-1:

$$d_{61} = a_{6j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{61} = a_{61} - a_{11} = 17.20 - 15.80 = 1.40$$

$$j = 2: d_{61} = a_{62} - a_{12} = 252 - 120 = 132$$

$$j = 3: d_{61} = a_{63} - a_{13} = 83.12 - 86.77 = -3.65$$

$$j = 4: d_{61} = a_{64} - a_{14} = 11.77 - 10.57 = 1.20$$

$$j = 5: d_{61} = a_{65} - a_{15} = 6.33 - 5.33 = 1.00$$

6-2:

$$d_{62} = a_{6j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{62} = a_{61} - a_{21} = 17.20 - 15.20 = 2.00$$

$$j = 2: d_{62} = a_{62} - a_{22} = 252 - 288 = -36$$

$$j = 3: d_{62} = a_{63} - a_{23} = 83.12 - 84.35 = -1.23$$

$$j = 4: d_{62} = a_{64} - a_{24} = 11.77 - 10.77 = 1.00$$

$$j = 5: d_{62} = a_{65} - a_{25} = 6.33 - 6.33 = 0$$

6-3:

$$d_{63} = a_{6j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{63} = a_{61} - a_{31} = 17.20 - 18.80 = -1.60$$

$$j = 2: d_{63} = a_{62} - a_{32} = 252 - 300 = -48$$

$$j = 3: d_{63} = a_{63} - a_{33} = 83.12 - 73.30 = 9.82$$

$$j = 4: d_{63} = a_{64} - a_{34} = 11.77 - 12.57 = -0.80$$

$$j = 5: d_{63} = a_{65} - a_{35} = 6.33 - 6.33 = 0$$

6-4:

$$d_{64} = a_{6j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{64} = a_{61} - a_{41} = 17.20 - 19.00 = -1.80$$

$$j = 2: d_{64} = a_{62} - a_{42} = 252 - 108 = 144$$

$$j = 3: d_{64} = a_{63} - a_{43} = 83.12 - 85.57 = -2.45$$

$$j = 4: d_{64} = a_{64} - a_{44} = 11.77 - 12.75 = -0.98$$

$$j = 5: d_{64} = a_{65} - a_{45} = 6.33 - 6.50 = -0.17$$

6-5:

$$d_{65} = a_{5j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{65} = a_{61} - a_{51} = 17.20 - 18.50 = -1.30$$

$$j = 2: d_{65} = a_{62} - a_{52} = 252 - 156 = 96$$

$$j = 3: d_{65} = a_{63} - a_{53} = 83.12 - 90.79 = -7.67$$

$$j = 4: d_{65} = a_{64} - a_{54} = 11.77 - 12.25 = -0.48$$

$$j = 5: d_{65} = a_{65} - a_{55} = 6.33 - 6.00 = 0.33$$

6-7:

$$d_{67} = a_{6j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{71} = a_{61} - a_{71} = 17.20 - 20.00 = -2.80$$

$$j = 2: d_{71} = a_{62} - a_{72} = 252 - 144 = 108$$

$$j = 3: d_{71} = a_{63} - a_{73} = 83.12 - 85.21 = -2.09$$

$$j = 4: d_{71} = a_{64} - a_{74} = 11.77 - 13.83 = -2.06$$

$$j = 5: d_{71} = a_{65} - a_{75} = 6.33 - 7.66 = -1.33$$



6-8:

$$d_{68} = a_{6j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{68} = a_{61} - a_{81} = 17.20 - 19.00 = -1.80$$

$$j = 2: d_{68} = a_{62} - a_{82} = 252 - 132 = 120$$

$$j = 3: d_{68} = a_{63} - a_{83} = 83.12 - 79.92 = 3.20$$

$$j = 4: d_{68} = a_{64} - a_{84} = 11.77 - 13.00 = -1.23$$

$$j = 5: d_{68} = a_{65} - a_{85} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

6-9:

$$d_{69} = a_{6j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{69} = a_{61} - a_{91} = 17.20 - 16.50 = 0.70$$

$$j = 2: d_{69} = a_{62} - a_{92} = 252 - 144 = 108$$

$$j = 3: d_{69} = a_{63} - a_{93} = 83.12 - 71.55 = 11.57$$

$$j = 4: d_{69} = a_{64} - a_{94} = 11.77 - 11.33 = 0.44$$

$$j = 5: d_{69} = a_{65} - a_{95} = 6.33 - 6.16 = 0.17$$

6-10:

$$d_{610} = a_{6j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{610} = a_{61} - a_{101} = 17.20 - 16.00 = 1.20$$

$$j = 2: d_{610} = a_{62} - a_{102} = 252 - 120 = 132$$

$$j = 3: d_{610} = a_{63} - a_{103} = 83.12 - 90.95 = -7.83$$

$$j = 4: d_{610} = a_{64} - a_{104} = 11.77 - 12.25 = -0.48$$

$$j = 5: d_{610} = a_{65} - a_{105} = 6.33 - 8.50 = -2.17$$

6-11:

$$d_{611} = a_{5j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{611} = a_{61} - a_{111} = 17.20 - 16.00 = 1.20$$

$$j = 2: d_{611} = a_{62} - a_{112} = 252 - 252 = 0$$

$$j = 3: d_{611} = a_{63} - a_{113} = 83.12 - 85.64 = -2.52$$

$$j = 4: d_{611} = a_{64} - a_{114} = 11.77 - 11.50 = 0.27$$

$$j = 5: d_{611} = a_{65} - a_{115} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

6-12:

$$d_{612} = a_{6j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{612} = a_{61} - a_{121} = 17.20 - 15.10 = 2.10$$

$$j = 2: d_{612} = a_{62} - a_{122} = 252 - 180 = 72$$

$$j = 3: d_{612} = a_{63} - a_{123} = 83.12 - 85.39 = -2.27$$

$$j = 4: d_{612} = a_{64} - a_{124} = 11.77 - 11.05 = 0.72$$

$$j = 5: d_{612} = a_{65} - a_{125} = 6.33 - 7.00 = -0.67$$

6-13:

$$d_{613} = a_{6j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{613} = a_{61} - a_{131} = 17.20 - 18.40 = -1.20$$

$$j = 2: d_{613} = a_{62} - a_{132} = 252 - 156 = 96$$

$$j = 3: d_{613} = a_{63} - a_{133} = 83.12 - 82.58 = 0.54$$

$$j = 4: d_{613} = a_{64} - a_{134} = 11.77 - 12.95 = -1.18$$

$$j = 5: d_{613} = a_{65} - a_{135} = 6.33 - 7.50 = -1.17$$

6-14:

$$d_{614} = a_{5j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{614} = a_{61} - a_{141} = 17.20 - 19.00 = -1.80$$

$$j = 2: d_{614} = a_{62} - a_{142} = 252 - 108 = 144$$

$$j = 3: d_{614} = a_{63} - a_{143} = 83.12 - 95.39 = -12.27$$

$$j = 4: d_{614} = a_{64} - a_{144} = 11.77 - 13.58 = -1.81$$

$$j = 5: d_{614} = a_{65} - a_{145} = 6.33 - 8.16 = -1.83$$

#### SÉPTIMA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

7-1:

$$d_{71} = a_{7j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{71} = a_{71} - a_{11} = 20.00 - 15.80 = 4.20$$

$$j = 2: d_{71} = a_{72} - a_{12} = 144 - 120 = 24$$

$$j = 3: d_{71} = a_{73} - a_{13} = 85.21 - 86.77 = -1.56$$

$$j = 4: d_{71} = a_{74} - a_{14} = 13.83 - 10.57 = 3.26$$

$$j = 5: d_{71} = a_{75} - a_{15} = 7.66 - 5.33 = 2.33$$

7-2:

$$d_{72} = a_{7j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{72} = a_{71} - a_{21} = 20.00 - 15.20 = 4.80$$

$$j = 2: d_{72} = a_{72} - a_{22} = 144 - 288 = -144$$

$$j = 3: d_{72} = a_{73} - a_{23} = 85.21 - 84.35 = 0.86$$

$$j = 4: d_{72} = a_{74} - a_{24} = 13.83 - 10.77 = 3.06$$

$$j = 5: d_{72} = a_{75} - a_{25} = 7.66 - 6.33 = 1.33$$

7-3:

$$d_{73} = a_{7j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{63} = a_{61} - a_{31} = 20.00 - 18.80 = 1.20$$

$$j = 2: d_{63} = a_{62} - a_{32} = 144 - 300 = -156$$

$$j = 3: d_{63} = a_{63} - a_{33} = 85.21 - 73.30 = 11.91$$

$$j = 4: d_{63} = a_{64} - a_{34} = 13.83 - 12.57 = 1.26$$

$$j = 5: d_{63} = a_{65} - a_{35} = 7.66 - 6.33 = 1.33$$

7-4:

$$d_{74} = a_{7j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{74} = a_{71} - a_{41} = 20.00 - 19.00 = 1.00$$

$$j = 2: d_{74} = a_{72} - a_{42} = 144 - 108 = 36$$

$$j = 3: d_{74} = a_{73} - a_{43} = 85.21 - 85.57 = -0.36$$

$$j = 4: d_{74} = a_{74} - a_{44} = 13.83 - 12.75 = 1.08$$

$$j = 5: d_{74} = a_{75} - a_{45} = 7.66 - 6.50 = 1.16$$

7-5:

$$d_{75} = a_{7j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{75} = a_{71} - a_{51} = 20.00 - 18.50 = 1.50$$

$$j = 2: d_{75} = a_{72} - a_{52} = 144 - 156 = -12$$

$$j = 3: d_{75} = a_{73} - a_{53} = 85.21 - 90.79 = -5.58$$

$$j = 4: d_{75} = a_{74} - a_{54} = 13.83 - 12.25 = 1.58$$

$$j = 5: d_{75} = a_{75} - a_{55} = 7.66 - 6.00 = 1.66$$

7-6:

$$d_{76} = a_{7j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{76} = a_{71} - a_{61} = 20.00 - 17.20 = 2.80$$

$$j = 2: d_{76} = a_{72} - a_{62} = 144 - 252 = -108$$

$$j = 3: d_{76} = a_{73} - a_{63} = 85.21 - 83.12 = 2.09$$

$$j = 4: d_{76} = a_{74} - a_{64} = 13.83 - 11.77 = 2.06$$

$$j = 5: d_{76} = a_{75} - a_{65} = 7.66 - 6.33 = 1.33$$

7-8:

$$d_{78} = a_{7j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{78} = a_{71} - a_{81} = 20.00 - 19.00 = 1.00$$

$$j = 2: d_{78} = a_{72} - a_{82} = 144 - 132 = 12$$

$$j = 3: d_{78} = a_{73} - a_{83} = 85.21 - 79.92 = 5.29$$

$$j = 4: d_{78} = a_{74} - a_{84} = 13.83 - 13.00 = 0.83$$

$$j = 5: d_{78} = a_{75} - a_{85} = 7.66 - 7.00 = 0.66$$

7-9:

$$d_{79} = a_{7j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{79} = a_{71} - a_{91} = 20.00 - 16.50 = 3.50$$

$$j = 2: d_{79} = a_{72} - a_{92} = 144 - 144 = 0$$

$$j = 3: d_{79} = a_{73} - a_{93} = 85.21 - 71.55 = 13.66$$

$$j = 4: d_{79} = a_{74} - a_{94} = 13.83 - 11.33 = 2.50$$

$$j = 5: d_{79} = a_{75} - a_{95} = 7.66 - 6.16 = 1.50$$

7-10:

$$d_{710} = a_{7j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{710} = a_{71} - a_{101} = 20.00 - 16.00 = 4.00$$

$$j = 2: d_{710} = a_{72} - a_{102} = 144 - 120 = 24$$

$$j = 3: d_{710} = a_{73} - a_{103} = 85.21 - 90.95 = -5.74$$

$$j = 4: d_{710} = a_{74} - a_{104} = 13.83 - 12.25 = 1.58$$

$$j = 5: d_{710} = a_{75} - a_{105} = 7.66 - 8.50 = -0.84$$

7-11:

$$d_{711} = a_{7j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{711} = a_{71} - a_{111} = 20.00 - 16.00 = 4.00$$

$$j = 2: d_{711} = a_{72} - a_{112} = 144 - 252 = -108$$

$$j = 3: d_{711} = a_{73} - a_{113} = 85.21 - 85.64 = -0.43$$

$$j = 4: d_{711} = a_{74} - a_{114} = 13.83 - 11.50 = 2.33$$

$$j = 5: d_{711} = a_{75} - a_{115} = 7.66 - 7.00 = 0.66$$

7-12:

$$d_{712} = a_{7j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{712} = a_{71} - a_{121} = 20.00 - 15.10 = 4.90$$

$$j = 2: d_{712} = a_{72} - a_{122} = 144 - 180 = -36$$

$$j = 3: d_{712} = a_{73} - a_{123} = 85.21 - 85.39 = -0.18$$

$$j = 4: d_{712} = a_{74} - a_{124} = 13.83 - 11.05 = 2.78$$

$$j = 5: d_{712} = a_{75} - a_{125} = 7.66 - 7.00 = 0.66$$

7-13:

$$d_{713} = a_{7j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{713} = a_{71} - a_{131} = 20.00 - 18.40 = 1.60$$

$$j = 2: d_{713} = a_{72} - a_{132} = 144 - 156 = -12$$

$$j = 3: d_{713} = a_{73} - a_{133} = 85.21 - 82.58 = 2.63$$

$$j = 4: d_{713} = a_{74} - a_{134} = 13.83 - 12.95 = 0.88$$

$$j = 5: d_{713} = a_{75} - a_{135} = 7.66 - 7.50 = 0.16$$

7-14:

$$d_{714} = a_{7j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{714} = a_{71} - a_{141} = 20.00 - 19.00 = 1.00$$

$$j = 2: d_{714} = a_{72} - a_{142} = 144 - 108 = 36$$

$$j = 3: d_{714} = a_{73} - a_{143} = 85.21 - 95.39 = -10.18$$

$$j = 4: d_{714} = a_{74} - a_{144} = 13.83 - 13.58 = 1.25$$

$$j = 5: d_{714} = a_{75} - a_{145} = 7.66 - 8.16 = -0.50$$

## OCTAVA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

8-1:

$$d_{81} = a_{8j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{81} = a_{81} - a_{11} = 19.00 - 15.80 = 3.20$$

$$j = 2: d_{81} = a_{82} - a_{12} = 132 - 120 = 12$$

$$j = 3: d_{81} = a_{83} - a_{13} = 79.92 - 86.77 = -6.85$$

$$j = 4: d_{81} = a_{84} - a_{14} = 13.00 - 10.57 = 2.43$$

$$j = 5: d_{81} = a_{85} - a_{15} = 7.00 - 5.33 = 1.67$$

8-2:

$$d_{82} = a_{8j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{82} = a_{81} - a_{21} = 19.00 - 15.20 = 3.80$$

$$j = 2: d_{82} = a_{82} - a_{22} = 132 - 288 = -156$$

$$j = 3: d_{82} = a_{83} - a_{23} = 79.92 - 84.35 = -4.43$$

$$j = 4: d_{82} = a_{84} - a_{24} = 13.00 - 10.77 = 2.23$$

$$j = 5: d_{82} = a_{85} - a_{25} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

8-3:

$$d_{83} = a_{8j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{83} = a_{81} - a_{31} = 19.00 - 18.80 = 0.20$$

$$j = 2: d_{83} = a_{82} - a_{32} = 132 - 300 = -168$$

$$j = 3: d_{83} = a_{83} - a_{33} = 79.92 - 73.30 = 6.62$$

$$j = 4: d_{83} = a_{84} - a_{34} = 13.00 - 12.57 = 0.43$$

$$j = 5: d_{83} = a_{85} - a_{35} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

8-4:

$$d_{84} = a_{8j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{84} = a_{81} - a_{41} = 19.00 - 19.00 = 0$$

$$j = 2: d_{84} = a_{82} - a_{42} = 132 - 108 = 24$$

$$j = 3: d_{84} = a_{83} - a_{43} = 79.92 - 85.57 = -5.65$$

$$j = 4: d_{84} = a_{84} - a_{44} = 13.00 - 12.75 = 0.25$$

$$j = 5: d_{84} = a_{85} - a_{45} = 7.00 - 6.50 = 0.50$$

8-5:

$$d_{85} = a_{8j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{85} = a_{81} - a_{51} = 19.00 - 18.50 = 0.50$$

$$j = 2: d_{85} = a_{82} - a_{52} = 132 - 156 = -24$$

$$j = 3: d_{85} = a_{83} - a_{53} = 79.92 - 90.79 = -10.87$$

$$j = 4: d_{85} = a_{84} - a_{54} = 13.00 - 12.25 = 0.75$$

$$j = 5: d_{85} = a_{85} - a_{55} = 7.00 - 6.00 = 1.00$$

8-6:

$$d_{86} = a_{8j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{86} = a_{81} - a_{61} = 19.00 - 17.20 = 1.80$$

$$j = 2: d_{86} = a_{82} - a_{62} = 132 - 252 = -120$$

$$j = 3: d_{86} = a_{83} - a_{63} = 79.92 - 83.12 = -3.20$$

$$j = 4: d_{86} = a_{84} - a_{64} = 13.00 - 11.77 = 1.23$$

$$j = 5: d_{86} = a_{85} - a_{65} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

8-7:

$$d_{87} = a_{8j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{87} = a_{81} - a_{71} = 19.00 - 20.00 = -1.00$$

$$j = 2: d_{87} = a_{82} - a_{72} = 132 - 144 = -12$$

$$j = 3: d_{87} = a_{83} - a_{73} = 79.92 - 85.21 = -5.29$$

$$j = 4: d_{87} = a_{84} - a_{74} = 13.00 - 13.83 = -0.83$$

$$j = 5: d_{87} = a_{85} - a_{75} = 7.00 - 7.66 = -0.66$$

8-9:

$$d_{89} = a_{8j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{89} = a_{81} - a_{91} = 19.00 - 16.50 = 2.50$$

$$j = 2: d_{89} = a_{82} - a_{92} = 132 - 144 = -12$$

$$j = 3: d_{89} = a_{83} - a_{93} = 79.92 - 71.55 = 8.37$$

$$j = 4: d_{89} = a_{84} - a_{94} = 13.00 - 11.33 = 1.67$$

$$j = 5: d_{89} = a_{85} - a_{95} = 7.00 - 6.16 = 0.84$$

8-10:

$$d_{810} = a_{8j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{810} = a_{81} - a_{101} = 19.00 - 16.00 = 3.00$$

$$j = 2: d_{810} = a_{82} - a_{102} = 132 - 120 = 12$$

$$j = 3: d_{810} = a_{83} - a_{103} = 79.92 - 90.95 = -11.03$$

$$j = 4: d_{810} = a_{84} - a_{104} = 13.00 - 12.25 = 0.75$$

$$j = 5: d_{810} = a_{85} - a_{105} = 7.00 - 8.50 = -1.50$$

8-11:

$$d_{811} = a_{8j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{811} = a_{81} - a_{111} = 19.00 - 16.00 = 3.00$$

$$j = 2: d_{811} = a_{82} - a_{112} = 132 - 252 = -120$$

$$j = 3: d_{811} = a_{83} - a_{113} = 79.92 - 85.64 = -5.72$$

$$j = 4: d_{811} = a_{84} - a_{114} = 13.00 - 11.50 = 1.50$$

$$j = 5: d_{811} = a_{85} - a_{115} = 7.00 - 7.00 = 0$$

8-12:

$$d_{812} = a_{8j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{812} = a_{81} - a_{121} = 19.00 - 15.10 = 3.90$$

$$j = 2: d_{812} = a_{82} - a_{122} = 132 - 180 = -48$$

$$j = 3: d_{812} = a_{83} - a_{123} = 79.92 - 85.39 = -5.47$$

$$j = 4: d_{812} = a_{84} - a_{124} = 13.00 - 11.05 = 1.95$$

$$j = 5: d_{812} = a_{85} - a_{125} = 7.00 - 7.00 = 0$$

8-13:

$$d_{813} = a_{8j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{813} = a_{81} - a_{131} = 19.00 - 18.40 = 0.60$$

$$j = 2: d_{813} = a_{82} - a_{132} = 132 - 156 = -24$$

$$j = 3: d_{813} = a_{83} - a_{133} = 79.92 - 82.58 = -2.66$$

$$j = 4: d_{813} = a_{84} - a_{134} = 13.00 - 12.95 = 0.05$$

$$j = 5: d_{813} = a_{85} - a_{135} = 7.00 - 7.50 = -0.50$$



8-14:

$$d_{814} = a_{8j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{814} = a_{81} - a_{141} = 19.00 - 19.00 = 0$$

$$j = 2: d_{814} = a_{82} - a_{142} = 132 - 108 = 24$$

$$j = 3: d_{814} = a_{83} - a_{143} = 79.92 - 95.39 = -15.47$$

$$j = 4: d_{814} = a_{84} - a_{144} = 13.00 - 13.58 = -0.58$$

$$j = 5: d_{814} = a_{85} - a_{145} = 7.00 - 8.16 = -1.16$$

#### NOVENA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

9-1:

$$d_{91} = a_{9j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{91} = a_{91} - a_{11} = 16.50 - 15.80 = 0.70$$

$$j = 2: d_{91} = a_{92} - a_{12} = 144 - 120 = 24$$

$$j = 3: d_{91} = a_{93} - a_{13} = 71.55 - 86.77 = -15.22$$

$$j = 4: d_{91} = a_{94} - a_{14} = 11.33 - 10.57 = 0.76$$

$$j = 5: d_{91} = a_{95} - a_{15} = 6.16 - 5.33 = 0.83$$

9-2:

$$d_{92} = a_{9j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{92} = a_{91} - a_{21} = 16.50 - 15.20 = 1.30$$

$$j = 2: d_{92} = a_{92} - a_{22} = 144 - 288 = -144$$

$$j = 3: d_{92} = a_{93} - a_{23} = 71.55 - 84.35 = -12.80$$

$$j = 4: d_{92} = a_{94} - a_{24} = 11.33 - 10.77 = 0.56$$

$$j = 5: d_{92} = a_{95} - a_{25} = 6.16 - 6.33 = -0.17$$

9-3:

$$d_{93} = a_{9j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{93} = a_{91} - a_{31} = 16.50 - 18.80 = -2.30$$

$$j = 2: d_{93} = a_{92} - a_{32} = 144 - 300 = -156$$

$$j = 3: d_{93} = a_{93} - a_{33} = 71.55 - 73.30 = -1.75$$

$$j = 4: d_{93} = a_{94} - a_{34} = 11.33 - 12.57 = -1.24$$

$$j = 5: d_{93} = a_{95} - a_{35} = 6.16 - 6.33 = -0.17$$

9-4:

$$d_{94} = a_{9j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{94} = a_{91} - a_{41} = 16.50 - 19.00 = -2.50$$

$$j = 2: d_{94} = a_{92} - a_{42} = 144 - 108 = 36$$

$$j = 3: d_{94} = a_{93} - a_{43} = 71.55 - 85.57 = -14.02$$

$$j = 4: d_{94} = a_{94} - a_{44} = 11.33 - 12.75 = -1.42$$

$$j = 5: d_{94} = a_{95} - a_{45} = 6.16 - 6.50 = -0.34$$

9-5:

$$d_{95} = a_{9j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{95} = a_{91} - a_{51} = 16.50 - 18.50 = -1.50$$

$$j = 2: d_{95} = a_{92} - a_{52} = 144 - 156 = -12$$

$$j = 3: d_{95} = a_{93} - a_{53} = 71.55 - 90.79 = -19.24$$

$$j = 4: d_{95} = a_{94} - a_{54} = 11.33 - 12.25 = -0.92$$

$$j = 5: d_{95} = a_{95} - a_{55} = 6.16 - 6.00 = 0.16$$

9-6:

$$d_{96} = a_{9j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{96} = a_{91} - a_{61} = 16.50 - 17.20 = -0.70$$

$$j = 2: d_{96} = a_{92} - a_{62} = 144 - 252 = -108$$

$$j = 3: d_{96} = a_{93} - a_{63} = 71.55 - 83.12 = -11.57$$

$$j = 4: d_{96} = a_{94} - a_{64} = 11.33 - 11.77 = -0.44$$

$$j = 5: d_{96} = a_{95} - a_{65} = 6.16 - 6.33 = -0.17$$

9-7:

$$d_{97} = a_{9j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{97} = a_{91} - a_{71} = 16.50 - 20.00 = -3.50$$

$$j = 2: d_{97} = a_{92} - a_{72} = 144 - 144 = 0$$

$$j = 3: d_{97} = a_{93} - a_{73} = 71.55 - 85.21 = -13.66$$

$$j = 4: d_{97} = a_{94} - a_{74} = 11.33 - 13.83 = -2.50$$

$$j = 5: d_{97} = a_{95} - a_{75} = 6.16 - 7.66 = -1.50$$

9-8:

$$d_{98} = a_{9j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{98} = a_{91} - a_{81} = 16.50 - 19.00 = -2.50$$

$$j = 2: d_{98} = a_{92} - a_{82} = 144 - 132 = 12$$

$$j = 3: d_{98} = a_{93} - a_{83} = 71.55 - 79.92 = -8.37$$

$$j = 4: d_{98} = a_{94} - a_{84} = 11.33 - 13.00 = -1.67$$

$$j = 5: d_{98} = a_{95} - a_{85} = 6.16 - 7.00 = -0.84$$

9-10:

$$d_{910} = a_{9j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{910} = a_{91} - a_{101} = 16.50 - 16.00 = 0.50$$

$$j = 2: d_{910} = a_{92} - a_{102} = 144 - 120 = 24$$

$$j = 3: d_{910} = a_{93} - a_{103} = 71.55 - 90.95 = -19.40$$

$$j = 4: d_{910} = a_{94} - a_{104} = 11.33 - 12.25 = -0.92$$

$$j = 5: d_{910} = a_{95} - a_{105} = 6.16 - 8.50 = -2.34$$

9-11:

$$d_{911} = a_{9j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{911} = a_{91} - a_{111} = 16.50 - 16.00 = 0.50$$

$$j = 2: d_{911} = a_{92} - a_{112} = 144 - 252 = -108$$

$$j = 3: d_{911} = a_{93} - a_{113} = 71.55 - 85.64 = -14.09$$

$$j = 4: d_{911} = a_{94} - a_{114} = 11.33 - 11.50 = 0.17$$

$$j = 5: d_{911} = a_{95} - a_{115} = 6.16 - 7.00 = -0.84$$

9-12:

$$d_{912} = a_{9j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{912} = a_{91} - a_{121} = 16.50 - 15.10 = 1.40$$

$$j = 2: d_{912} = a_{92} - a_{122} = 144 - 180 = -36$$

$$j = 3: d_{912} = a_{93} - a_{123} = 71.55 - 85.39 = -13.84$$

$$j = 4: d_{912} = a_{94} - a_{124} = 11.33 - 11.05 = 0.28$$

$$j = 5: d_{912} = a_{95} - a_{125} = 6.16 - 7.00 = -0.84$$

9-13:

$$d_{913} = a_{9j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{913} = a_{91} - a_{131} = 16.50 - 18.40 = -1.90$$

$$j = 2: d_{913} = a_{92} - a_{132} = 144 - 156 = -12$$

$$j = 3: d_{913} = a_{93} - a_{133} = 71.55 - 82.58 = -11.03$$

$$j = 4: d_{913} = a_{94} - a_{134} = 11.33 - 12.95 = -1.62$$

$$j = 5: d_{913} = a_{95} - a_{135} = 6.16 - 7.50 = -1.34$$

9-14:

$$d_{914} = a_{9j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{914} = a_{91} - a_{141} = 16.50 - 19.00 = -2.50$$

$$j = 2: d_{914} = a_{92} - a_{142} = 144 - 108 = 36$$

$$j = 3: d_{914} = a_{93} - a_{143} = 71.55 - 95.39 = -23.84$$

$$j = 4: d_{914} = a_{94} - a_{144} = 11.33 - 13.58 = -2.25$$

$$j = 5: d_{914} = a_{95} - a_{145} = 6.16 - 8.16 = -2.00$$

#### DÉCIMA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

10-1:

$$d_{101} = a_{10j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{101} = a_{101} - a_{11} = 16.00 - 15.80 = 0.20$$

$$j = 2: d_{101} = a_{102} - a_{12} = 120 - 120 = 0$$

$$j = 3: d_{101} = a_{103} - a_{13} = 90.95 - 86.77 = 4.18$$

$$j = 4: d_{101} = a_{104} - a_{14} = 12.25 - 10.57 = 1.68$$

$$j = 5: d_{101} = a_{105} - a_{15} = 8.50 - 5.33 = 3.17$$

10-2:

$$d_{102} = a_{10j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{102} = a_{101} - a_{21} = 16.00 - 15.20 = 0.80$$

$$j = 2: d_{102} = a_{102} - a_{22} = 120 - 288 = -168$$

$$j = 3: d_{102} = a_{103} - a_{23} = 90.95 - 84.35 = 6.60$$

$$j = 4: d_{102} = a_{104} - a_{24} = 12.25 - 10.77 = 1.48$$

$$j = 5: d_{102} = a_{105} - a_{25} = 8.50 - 6.33 = 2.17$$

10-3:

$$d_{103} = a_{10j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{103} = a_{101} - a_{31} = 16.00 - 18.80 = -2.80$$

$$j = 2: d_{103} = a_{102} - a_{32} = 120 - 300 = -180$$

$$j = 3: d_{103} = a_{103} - a_{33} = 90.95 - 73.30 = 17.65$$

$$j = 4: d_{103} = a_{104} - a_{34} = 12.25 - 12.57 = -0.32$$

$$j = 5: d_{103} = a_{105} - a_{35} = 8.50 - 6.33 = 2.17$$

10-4:

$$d_{104} = a_{10j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{104} = a_{101} - a_{41} = 16.00 - 19.00 = -3.00$$

$$j = 2: d_{104} = a_{102} - a_{42} = 120 - 108 = 12$$

$$j = 3: d_{104} = a_{103} - a_{43} = 90.95 - 85.57 = 5.38$$

$$j = 4: d_{104} = a_{104} - a_{44} = 12.25 - 12.75 = -0.50$$

$$j = 5: d_{104} = a_{105} - a_{45} = 8.50 - 6.50 = 2.00$$

10-5:

$$d_{105} = a_{10j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{105} = a_{101} - a_{51} = 16.00 - 18.50 = -2.50$$

$$j = 2: d_{105} = a_{102} - a_{52} = 120 - 156 = -36$$

$$j = 3: d_{105} = a_{103} - a_{53} = 90.95 - 90.79 = 0.16$$

$$j = 4: d_{105} = a_{104} - a_{54} = 12.25 - 12.25 = 0$$

$$j = 5: d_{105} = a_{105} - a_{55} = 8.50 - 6.00 = 2.50$$

10-6:

$$d_{106} = a_{10j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{106} = a_{101} - a_{61} = 16.00 - 17.20 = -1.20$$

$$j = 2: d_{106} = a_{102} - a_{62} = 120 - 252 = -132$$

$$j = 3: d_{106} = a_{103} - a_{63} = 90.95 - 83.12 = 7.83$$

$$j = 4: d_{106} = a_{104} - a_{64} = 12.25 - 11.77 = 0.48$$

$$j = 5: d_{106} = a_{105} - a_{65} = 8.50 - 6.33 = 2.17$$

10-7:

$$d_{107} = a_{10j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{107} = a_{101} - a_{71} = 16.00 - 20.00 = -4.00$$

$$j = 2: d_{107} = a_{102} - a_{72} = 120 - 144 = -24$$

$$j = 3: d_{107} = a_{103} - a_{73} = 90.95 - 85.21 = 5.74$$

$$j = 4: d_{107} = a_{104} - a_{74} = 12.25 - 13.83 = -1.58$$

$$j = 5: d_{107} = a_{105} - a_{75} = 8.50 - 7.66 = 0.84$$

10-8:

$$d_{108} = a_{10j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{108} = a_{101} - a_{81} = 16.00 - 19.00 = -3.00$$

$$j = 2: d_{108} = a_{102} - a_{82} = 120 - 132 = -12$$

$$j = 3: d_{108} = a_{103} - a_{83} = 90.95 - 79.92 = 11.03$$

$$j = 4: d_{108} = a_{104} - a_{84} = 12.25 - 13.00 = -0.75$$

$$j = 5: d_{108} = a_{105} - a_{85} = 8.50 - 7.00 = 1.50$$

10-9:

$$d_{109} = a_{10j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{109} = a_{101} - a_{91} = 16.00 - 16.50 = -0.50$$

$$j = 2: d_{109} = a_{102} - a_{92} = 120 - 144 = -24$$

$$j = 3: d_{109} = a_{103} - a_{93} = 90.95 - 71.55 = 19.40$$

$$j = 4: d_{109} = a_{104} - a_{94} = 12.25 - 11.33 = 0.92$$

$$j = 5: d_{109} = a_{105} - a_{95} = 8.50 - 6.16 = 2.34$$

10-11:

$$d_{1011} = a_{10j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{1011} = a_{101} - a_{111} = 16.00 - 16.00 = 0$$

$$j = 2: d_{1011} = a_{102} - a_{112} = 120 - 252 = -132$$

$$j = 3: d_{1011} = a_{103} - a_{113} = 90.95 - 85.64 = 5.31$$

$$j = 4: d_{1011} = a_{104} - a_{114} = 12.25 - 11.50 = 0.75$$

$$j = 5: d_{1011} = a_{105} - a_{115} = 8.50 - 7.00 = 1.50$$

10-12:

$$d_{1012} = a_{10j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{1012} = a_{101} - a_{121} = 16.00 - 15.10 = 0.90$$

$$j = 2: d_{1012} = a_{102} - a_{122} = 120 - 180 = -60$$

$$j = 3: d_{9102} = a_{103} - a_{123} = 90.95 - 85.39 = 5.56$$

$$j = 4: d_{1012} = a_{104} - a_{124} = 12.25 - 11.05 = 1.20$$

$$j = 5: d_{1012} = a_{105} - a_{125} = 8.50 - 7.00 = 1.50$$

10-13:

$$d_{1013} = a_{10j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{1013} = a_{101} - a_{131} = 16.00 - 18.40 = -2.40$$

$$j = 2: d_{1013} = a_{102} - a_{132} = 120 - 156 = -36$$

$$j = 3: d_{1013} = a_{103} - a_{133} = 90.95 - 82.58 = 8.37$$

$$j = 4: d_{1013} = a_{104} - a_{134} = 12.25 - 12.95 = -0.70$$

$$j = 5: d_{1013} = a_{105} - a_{135} = 8.50 - 7.50 = 1.00$$

10-14:

$$d_{1014} = a_{10j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{1014} = a_{101} - a_{141} = 16.00 - 19.00 = -3.00$$

$$j = 2: d_{1014} = a_{102} - a_{142} = 120 - 108 = 12$$

$$j = 3: d_{1014} = a_{103} - a_{143} = 90.95 - 95.39 = -4.44$$

$$j = 4: d_{1014} = a_{104} - a_{144} = 12.25 - 13.58 = -1.33$$

$$j = 5: d_{1014} = a_{105} - a_{145} = 8.50 - 8.16 = 0.34$$

#### ONCEAVA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

11-1:

$$d_{111} = a_{11j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{111} = a_{111} - a_{11} = 16.00 - 15.80 = 0.20$$

$$j = 2: d_{111} = a_{112} - a_{12} = 252 - 120 = 132$$

$$j = 3: d_{111} = a_{113} - a_{13} = 85.64 - 86.77 = -1.13$$

$$j = 4: d_{111} = a_{114} - a_{14} = 11.50 - 10.57 = 0.93$$

$$j = 5: d_{111} = a_{115} - a_{15} = 7.00 - 5.33 = 1.67$$

11-2:

$$d_{112} = a_{11j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{112} = a_{111} - a_{21} = 16.00 - 15.20 = 0.80$$

$$j = 2: d_{112} = a_{112} - a_{22} = 252 - 288 = -36$$

$$j = 3: d_{112} = a_{113} - a_{23} = 85.64 - 84.35 = 1.29$$

$$j = 4: d_{112} = a_{114} - a_{24} = 11.50 - 10.77 = 0.73$$

$$j = 5: d_{112} = a_{115} - a_{25} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

11-3:

$$d_{113} = a_{11j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{113} = a_{111} - a_{31} = 16.00 - 18.80 = -2.80$$

$$j = 2: d_{113} = a_{112} - a_{32} = 252 - 300 = -48$$

$$j = 3: d_{113} = a_{113} - a_{33} = 85.64 - 73.30 = 12.34$$

$$j = 4: d_{113} = a_{114} - a_{34} = 11.50 - 12.57 = -1.07$$

$$j = 5: d_{113} = a_{115} - a_{35} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

11-4:

$$d_{114} = a_{11j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{114} = a_{111} - a_{41} = 16.00 - 19.00 = -3.00$$

$$j = 2: d_{114} = a_{112} - a_{42} = 252 - 108 = 144$$

$$j = 3: d_{114} = a_{113} - a_{43} = 85.64 - 85.57 = 0.07$$

$$j = 4: d_{114} = a_{114} - a_{44} = 11.50 - 12.75 = -1.25$$

$$j = 5: d_{114} = a_{115} - a_{45} = 7.00 - 6.50 = 0.50$$

11-5:

$$d_{115} = a_{11j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{115} = a_{111} - a_{51} = 16.00 - 18.50 = -2.50$$

$$j = 2: d_{115} = a_{112} - a_{52} = 252 - 156 = 96$$

$$j = 3: d_{115} = a_{113} - a_{53} = 85.64 - 90.79 = -5.15$$

$$j = 4: d_{115} = a_{114} - a_{54} = 11.50 - 12.25 = -0.75$$

$$j = 5: d_{115} = a_{115} - a_{55} = 7.00 - 6.00 = 1.00$$



11-6:

$$d_{116} = a_{11j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{116} = a_{111} - a_{61} = 16.00 - 17.20 = -1.20$$

$$j = 2: d_{116} = a_{112} - a_{62} = 252 - 252 = 0$$

$$j = 3: d_{116} = a_{113} - a_{63} = 85.64 - 83.12 = 2.52$$

$$j = 4: d_{116} = a_{114} - a_{64} = 11.50 - 11.77 = -0.27$$

$$j = 5: d_{116} = a_{115} - a_{65} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

11-7:

$$d_{117} = a_{11j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{117} = a_{111} - a_{71} = 16.00 - 20.00 = -4.00$$

$$j = 2: d_{117} = a_{112} - a_{72} = 252 - 144 = 108$$

$$j = 3: d_{117} = a_{113} - a_{73} = 85.64 - 85.21 = 0.43$$

$$j = 4: d_{117} = a_{114} - a_{74} = 11.50 - 13.83 = -2.33$$

$$j = 5: d_{117} = a_{115} - a_{75} = 7.00 - 7.66 = -0.66$$

11-8:

$$d_{118} = a_{11j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{118} = a_{111} - a_{81} = 16.00 - 19.00 = -3.00$$

$$j = 2: d_{118} = a_{112} - a_{82} = 252 - 132 = 120$$

$$j = 3: d_{118} = a_{113} - a_{83} = 85.64 - 79.92 = 5.72$$

$$j = 4: d_{118} = a_{114} - a_{84} = 11.50 - 13.00 = -1.50$$

$$j = 5: d_{118} = a_{115} - a_{85} = 7.00 - 7.00 = 0$$

11-9:

$$d_{119} = a_{11j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{119} = a_{111} - a_{91} = 16.00 - 16.50 = -0.50$$

$$j = 2: d_{119} = a_{112} - a_{92} = 252 - 144 = 108$$

$$j = 3: d_{119} = a_{113} - a_{93} = 85.64 - 71.55 = 14.09$$

$$j = 4: d_{119} = a_{114} - a_{94} = 11.50 - 11.33 = 0.17$$

$$j = 5: d_{119} = a_{115} - a_{95} = 7.00 - 6.16 = 0.84$$

11-10:

$$d_{1110} = a_{11j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{1110} = a_{111} - a_{101} = 16.00 - 16.00 = 0$$

$$j = 2: d_{1110} = a_{112} - a_{102} = 252 - 120 = 132$$

$$j = 3: d_{1110} = a_{113} - a_{103} = 85.64 - 90.95 = -5.31$$

$$j = 4: d_{1110} = a_{114} - a_{104} = 11.50 - 12.25 = -0.75$$

$$j = 5: d_{1110} = a_{115} - a_{105} = 7.00 - 8.50 = -1.50$$

11-12:

$$d_{1112} = a_{11j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{1112} = a_{101} - a_{121} = 16.00 - 15.10 = 0.90$$

$$j = 2: d_{1112} = a_{102} - a_{122} = 252 - 180 = 72$$

$$j = 3: d_{1112} = a_{103} - a_{123} = 85.64 - 85.39 = 0.25$$

$$j = 4: d_{1112} = a_{104} - a_{124} = 11.50 - 11.05 = 0.45$$

$$j = 5: d_{1112} = a_{105} - a_{125} = 7.00 - 7.00 = 0$$

11-13:

$$d_{1113} = a_{11j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{1113} = a_{111} - a_{131} = 16.00 - 18.40 = -2.40$$

$$j = 2: d_{1113} = a_{112} - a_{132} = 252 - 156 = 96$$

$$j = 3: d_{1113} = a_{113} - a_{133} = 85.64 - 82.58 = 3.06$$

$$j = 4: d_{1113} = a_{114} - a_{134} = 11.50 - 12.95 = -1.45$$

$$j = 5: d_{1113} = a_{115} - a_{135} = 7.00 - 7.50 = -0.50$$

11-14:

$$d_{1114} = a_{11j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{1114} = a_{111} - a_{141} = 16.00 - 19.00 = -3.00$$

$$j = 2: d_{1114} = a_{112} - a_{142} = 252 - 108 = 144$$

$$j = 3: d_{1114} = a_{113} - a_{143} = 85.64 - 95.39 = -9.75$$

$$j = 4: d_{1114} = a_{114} - a_{144} = 11.50 - 13.58 = -2.08$$

$$j = 5: d_{1114} = a_{115} - a_{145} = 7.00 - 8.16 = -1.16$$

## DOCEAVA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

12-1:

$$d_{121} = a_{12j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{121} = a_{121} - a_{11} = 15.10 - 15.80 = -0.70$$

$$j = 2: d_{121} = a_{122} - a_{12} = 180 - 120 = 60$$

$$j = 3: d_{121} = a_{123} - a_{13} = 85.39 - 86.77 = -1.38$$

$$j = 4: d_{121} = a_{124} - a_{14} = 11.05 - 10.57 = 0.48$$

$$j = 5: d_{121} = a_{125} - a_{15} = 7.00 - 5.33 = 1.67$$

12-2:

$$d_{122} = a_{12j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{122} = a_{121} - a_{21} = 15.10 - 15.20 = -0.10$$

$$j = 2: d_{122} = a_{122} - a_{22} = 180 - 288 = -108$$

$$j = 3: d_{122} = a_{123} - a_{23} = 85.39 - 84.35 = 1.04$$

$$j = 4: d_{122} = a_{124} - a_{24} = 11.05 - 10.77 = 0.28$$

$$j = 5: d_{122} = a_{125} - a_{25} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

12-3:

$$d_{123} = a_{12j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{123} = a_{121} - a_{31} = 15.10 - 18.80 = -3.70$$

$$j = 2: d_{123} = a_{122} - a_{32} = 180 - 300 = -120$$

$$j = 3: d_{123} = a_{123} - a_{33} = 85.39 - 73.30 = 12.09$$

$$j = 4: d_{123} = a_{124} - a_{34} = 11.05 - 12.57 = -1.52$$

$$j = 5: d_{123} = a_{125} - a_{35} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

12-4:

$$d_{124} = a_{12j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{124} = a_{121} - a_{41} = 15.10 - 19.00 = -3.90$$

$$j = 2: d_{124} = a_{122} - a_{42} = 180 - 108 = 72$$

$$j = 3: d_{124} = a_{123} - a_{43} = 85.39 - 85.57 = -0.18$$

$$j = 4: d_{124} = a_{124} - a_{44} = 11.05 - 12.75 = -1.70$$

$$j = 5: d_{124} = a_{125} - a_{45} = 7.00 - 6.50 = 0.50$$

12-5:

$$d_{125} = a_{12j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{125} = a_{121} - a_{51} = 15.10 - 18.50 = -3.40$$

$$j = 2: d_{125} = a_{122} - a_{52} = 180 - 156 = 24$$

$$j = 3: d_{125} = a_{123} - a_{53} = 85.39 - 90.79 = -5.40$$

$$j = 4: d_{125} = a_{124} - a_{54} = 11.05 - 12.25 = -1.20$$

$$j = 5: d_{125} = a_{125} - a_{55} = 7.00 - 6.00 = 1.00$$

12-6:

$$d_{126} = a_{12j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{126} = a_{121} - a_{61} = 15.10 - 17.20 = -2.10$$

$$j = 2: d_{126} = a_{122} - a_{62} = 180 - 252 = -72$$

$$j = 3: d_{126} = a_{123} - a_{63} = 85.39 - 83.12 = 2.27$$

$$j = 4: d_{126} = a_{124} - a_{64} = 11.05 - 11.77 = -0.72$$

$$j = 5: d_{126} = a_{125} - a_{65} = 7.00 - 6.33 = 0.67$$

12-7:

$$d_{127} = a_{12j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{117} = a_{111} - a_{71} = 15.10 - 20.00 = -4.90$$

$$j = 2: d_{117} = a_{112} - a_{72} = 180 - 144 = 36$$

$$j = 3: d_{117} = a_{113} - a_{73} = 85.39 - 85.21 = 0.18$$

$$j = 4: d_{117} = a_{114} - a_{74} = 11.05 - 13.83 = -2.78$$

$$j = 5: d_{117} = a_{115} - a_{75} = 7.00 - 7.66 = -0.66$$

12-8:

$$d_{128} = a_{12j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{128} = a_{121} - a_{81} = 15.10 - 19.00 = -3.90$$

$$j = 2: d_{128} = a_{122} - a_{82} = 180 - 132 = 48$$

$$j = 3: d_{128} = a_{123} - a_{83} = 85.39 - 79.92 = 5.47$$

$$j = 4: d_{128} = a_{124} - a_{84} = 11.05 - 13.00 = -1.95$$

$$j = 5: d_{128} = a_{125} - a_{85} = 7.00 - 7.00 = 0$$

12-9:

$$d_{129} = a_{12j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{129} = a_{121} - a_{91} = 15.10 - 16.50 = -1.40$$

$$j = 2: d_{129} = a_{122} - a_{92} = 180 - 144 = 36$$

$$j = 3: d_{129} = a_{123} - a_{93} = 85.39 - 71.55 = 13.84$$

$$j = 4: d_{129} = a_{124} - a_{94} = 11.05 - 11.33 = -0.28$$

$$j = 5: d_{129} = a_{125} - a_{95} = 7.00 - 6.16 = 0.84$$

12-10:

$$d_{1210} = a_{12j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{1210} = a_{121} - a_{101} = 15.10 - 16.00 = -0.90$$

$$j = 2: d_{1210} = a_{122} - a_{102} = 180 - 120 = 60$$

$$j = 3: d_{1210} = a_{123} - a_{103} = 85.39 - 90.95 = -5.56$$

$$j = 4: d_{1210} = a_{124} - a_{104} = 11.05 - 12.25 = -1.20$$

$$j = 5: d_{1210} = a_{125} - a_{105} = 7.00 - 8.50 = -1.50$$

12-11:

$$d_{1211} = a_{12j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{1211} = a_{121} - a_{111} = 15.10 - 16.00 = -0.90$$

$$j = 2: d_{1211} = a_{122} - a_{112} = 180 - 252 = -72$$

$$j = 3: d_{1211} = a_{123} - a_{113} = 85.39 - 85.64 = -0.25$$

$$j = 4: d_{1211} = a_{124} - a_{114} = 11.05 - 11.50 = -0.45$$

$$j = 5: d_{1211} = a_{125} - a_{115} = 7.00 - 7.00 = 0$$

12-13:

$$d_{1213} = a_{12j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{1213} = a_{121} - a_{131} = 15.10 - 18.40 = -3.30$$

$$j = 2: d_{1213} = a_{122} - a_{132} = 180 - 156 = 24$$

$$j = 3: d_{1213} = a_{123} - a_{133} = 85.39 - 82.58 = 2.81$$

$$j = 4: d_{1213} = a_{124} - a_{134} = 11.05 - 12.95 = -1.90$$

$$j = 5: d_{1213} = a_{125} - a_{135} = 7.00 - 7.50 = -0.50$$

12-14:

$$d_{1214} = a_{12j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{1214} = a_{121} - a_{141} = 15.10 - 19.00 = -3.90$$

$$j = 2: d_{1214} = a_{122} - a_{142} = 180 - 108 = 72$$

$$j = 3: d_{1214} = a_{123} - a_{143} = 85.39 - 95.39 = -10.00$$

$$j = 4: d_{1214} = a_{124} - a_{144} = 11.05 - 13.58 = -2.53$$

$$j = 5: d_{1214} = a_{125} - a_{145} = 7.00 - 8.16 = -1.16$$

### TRECEAVA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

13-1:

$$d_{131} = a_{13j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{131} = a_{131} - a_{11} = 18.40 - 15.80 = 2.60$$

$$j = 2: d_{131} = a_{132} - a_{12} = 156 - 120 = 36$$

$$j = 3: d_{131} = a_{133} - a_{13} = 82.58 - 86.77 = -4.19$$

$$j = 4: d_{131} = a_{134} - a_{14} = 12.95 - 10.57 = 2.38$$

$$j = 5: d_{131} = a_{135} - a_{15} = 7.50 - 5.33 = 2.17$$

13-2:

$$d_{132} = a_{13j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{132} = a_{131} - a_{21} = 18.40 - 15.20 = 3.20$$

$$j = 2: d_{132} = a_{132} - a_{22} = 156 - 288 = -132$$

$$j = 3: d_{132} = a_{133} - a_{23} = 82.58 - 84.35 = -1.77$$

$$j = 4: d_{132} = a_{134} - a_{24} = 12.95 - 10.77 = 2.18$$

$$j = 5: d_{132} = a_{135} - a_{25} = 7.50 - 6.33 = 1.17$$

13-3:

$$d_{133} = a_{13j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{133} = a_{131} - a_{31} = 18.40 - 18.80 = -0.40$$

$$j = 2: d_{133} = a_{132} - a_{32} = 156 - 300 = -144$$

$$j = 3: d_{133} = a_{133} - a_{33} = 82.58 - 73.30 = 9.28$$

$$j = 4: d_{133} = a_{134} - a_{34} = 12.95 - 12.57 = 0.38$$

$$j = 5: d_{133} = a_{135} - a_{35} = 7.50 - 6.33 = 1.17$$

13-4:

$$d_{134} = a_{13j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{134} = a_{131} - a_{41} = 18.40 - 19.00 = -0.60$$

$$j = 2: d_{134} = a_{132} - a_{42} = 156 - 108 = 48$$

$$j = 3: d_{134} = a_{133} - a_{43} = 82.58 - 85.57 = -2.99$$

$$j = 4: d_{134} = a_{134} - a_{44} = 12.95 - 12.75 = 0.20$$

$$j = 5: d_{134} = a_{135} - a_{45} = 7.50 - 6.50 = 1.00$$

13-5:

$$d_{135} = a_{13j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{135} = a_{131} - a_{51} = 18.40 - 18.50 = -0.10$$

$$j = 2: d_{135} = a_{132} - a_{52} = 156 - 156 = 0$$

$$j = 3: d_{135} = a_{133} - a_{53} = 82.58 - 90.79 = -8.21$$

$$j = 4: d_{135} = a_{134} - a_{54} = 12.95 - 12.25 = 0.70$$

$$j = 5: d_{135} = a_{135} - a_{55} = 7.50 - 6.00 = 1.50$$

13-6:

$$d_{136} = a_{13j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{136} = a_{131} - a_{61} = 18.40 - 17.20 = 1.20$$

$$j = 2: d_{136} = a_{132} - a_{62} = 156 - 252 = -96$$

$$j = 3: d_{136} = a_{133} - a_{63} = 82.58 - 83.12 = -0.54$$

$$j = 4: d_{136} = a_{134} - a_{64} = 12.95 - 11.77 = 1.18$$

$$j = 5: d_{136} = a_{135} - a_{65} = 7.50 - 6.33 = 1.17$$

13-7:

$$d_{137} = a_{13j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{137} = a_{131} - a_{71} = 18.40 - 20.00 = -1.60$$

$$j = 2: d_{137} = a_{132} - a_{72} = 156 - 144 = 12$$

$$j = 3: d_{137} = a_{133} - a_{73} = 82.58 - 85.21 = -2.63$$

$$j = 4: d_{137} = a_{134} - a_{74} = 12.95 - 13.83 = -0.88$$

$$j = 5: d_{137} = a_{135} - a_{75} = 7.50 - 7.66 = -0.16$$

13-8:

$$d_{138} = a_{13j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{138} = a_{131} - a_{81} = 18.40 - 19.00 = -0.60$$

$$j = 2: d_{138} = a_{132} - a_{82} = 156 - 132 = 24$$

$$j = 3: d_{138} = a_{133} - a_{83} = 82.58 - 79.92 = 2.66$$

$$j = 4: d_{138} = a_{134} - a_{84} = 12.95 - 13.00 = -0.05$$

$$j = 5: d_{138} = a_{135} - a_{85} = 7.50 - 7.00 = 0.50$$

13-9:

$$d_{139} = a_{13j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{139} = a_{131} - a_{91} = 18.40 - 16.50 = 1.90$$

$$j = 2: d_{139} = a_{132} - a_{92} = 156 - 144 = 12$$

$$j = 3: d_{139} = a_{133} - a_{93} = 82.58 - 71.55 = 11.03$$

$$j = 4: d_{139} = a_{134} - a_{94} = 12.95 - 11.33 = 1.62$$

$$j = 5: d_{139} = a_{135} - a_{95} = 7.50 - 6.16 = 1.34$$

13-10:

$$d_{1310} = a_{13j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{1310} = a_{131} - a_{101} = 18.40 - 16.00 = 2.40$$

$$j = 2: d_{1310} = a_{132} - a_{102} = 156 - 120 = 36$$

$$j = 3: d_{1310} = a_{133} - a_{103} = 82.58 - 90.95 = -8.37$$

$$j = 4: d_{1310} = a_{134} - a_{104} = 12.95 - 12.25 = 0.70$$

$$j = 5: d_{1310} = a_{135} - a_{105} = 7.50 - 8.50 = -1.00$$

13-11:

$$d_{1311} = a_{13j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{1311} = a_{131} - a_{111} = 18.40 - 16.00 = 2.40$$

$$j = 2: d_{1311} = a_{132} - a_{112} = 156 - 252 = -96$$

$$j = 3: d_{1311} = a_{133} - a_{113} = 82.58 - 85.64 = -3.06$$

$$j = 4: d_{1311} = a_{134} - a_{114} = 12.95 - 11.50 = 1.45$$

$$j = 5: d_{1311} = a_{135} - a_{115} = 7.50 - 7.00 = 0.50$$



13-12:

$$d_{1312} = a_{13j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{1312} = a_{131} - a_{121} = 18.40 - 15.10 = 3.30$$

$$j = 2: d_{1312} = a_{132} - a_{122} = 156 - 180 = -24$$

$$j = 3: d_{1312} = a_{133} - a_{123} = 82.58 - 85.39 = -2.81$$

$$j = 4: d_{1312} = a_{134} - a_{124} = 12.95 - 11.05 = 1.90$$

$$j = 5: d_{1312} = a_{135} - a_{125} = 7.50 - 7.00 = 0.50$$

13-14:

$$d_{1314} = a_{13j} - a_{14j}$$

$$j = 1: d_{1314} = a_{131} - a_{141} = 18.40 - 19.00 = -0.60$$

$$j = 2: d_{1314} = a_{132} - a_{142} = 156 - 108 = 48$$

$$j = 3: d_{1314} = a_{133} - a_{143} = 82.58 - 95.39 = -12.81$$

$$j = 4: d_{1314} = a_{134} - a_{144} = 12.95 - 13.58 = -0.63$$

$$j = 5: d_{1314} = a_{135} - a_{145} = 7.50 - 8.16 = -0.66$$

#### CATORCEAVA FILA – MATRIZ DE DIFERENCIAS

14-1:

$$d_{141} = a_{14j} - a_{1j}$$

$$j = 1: d_{141} = a_{141} - a_{11} = 19.00 - 15.80 = 3.20$$

$$j = 2: d_{141} = a_{142} - a_{12} = 108 - 120 = -12$$

$$j = 3: d_{141} = a_{143} - a_{13} = 95.39 - 86.77 = 8.62$$

$$j = 4: d_{141} = a_{144} - a_{14} = 13.58 - 10.57 = 3.01$$

$$j = 5: d_{141} = a_{145} - a_{15} = 8.16 - 5.33 = 2.83$$

14-2:

$$d_{142} = a_{14j} - a_{2j}$$

$$j = 1: d_{142} = a_{141} - a_{21} = 19.00 - 15.20 = 3.80$$

$$j = 2: d_{142} = a_{142} - a_{22} = 108 - 288 = -180$$

$$j = 3: d_{142} = a_{143} - a_{23} = 95.39 - 84.35 = 11.04$$

$$j = 4: d_{142} = a_{144} - a_{24} = 13.58 - 10.77 = 2.81$$

$$j = 5: d_{142} = a_{145} - a_{25} = 8.16 - 6.33 = 1.83$$

14-3:

$$d_{143} = a_{14j} - a_{3j}$$

$$j = 1: d_{143} = a_{141} - a_{31} = 19.00 - 18.80 = 0.20$$

$$j = 2: d_{143} = a_{142} - a_{32} = 108 - 300 = -192$$

$$j = 3: d_{143} = a_{143} - a_{33} = 95.39 - 73.30 = 22.09$$

$$j = 4: d_{143} = a_{144} - a_{34} = 13.58 - 12.57 = 1.01$$

$$j = 5: d_{143} = a_{145} - a_{35} = 8.16 - 6.33 = 1.83$$

14-4:

$$d_{144} = a_{14j} - a_{4j}$$

$$j = 1: d_{144} = a_{141} - a_{41} = 19.00 - 19.00 = 0$$

$$j = 2: d_{144} = a_{142} - a_{42} = 108 - 108 = 0$$

$$j = 3: d_{144} = a_{143} - a_{43} = 95.39 - 85.57 = 9.82$$

$$j = 4: d_{144} = a_{144} - a_{44} = 13.58 - 12.75 = 0.83$$

$$j = 5: d_{144} = a_{145} - a_{45} = 8.16 - 6.50 = 1.66$$

14-5:

$$d_{145} = a_{14j} - a_{5j}$$

$$j = 1: d_{145} = a_{141} - a_{51} = 19.00 - 18.50 = 0.50$$

$$j = 2: d_{145} = a_{142} - a_{52} = 108 - 156 = -48$$

$$j = 3: d_{145} = a_{143} - a_{53} = 95.39 - 90.79 = 4.60$$

$$j = 4: d_{145} = a_{144} - a_{54} = 13.58 - 12.25 = 1.33$$

$$j = 5: d_{145} = a_{145} - a_{55} = 8.16 - 6.00 = 2.16$$

14-6:

$$d_{146} = a_{14j} - a_{6j}$$

$$j = 1: d_{146} = a_{141} - a_{61} = 19.00 - 17.20 = 1.80$$

$$j = 2: d_{146} = a_{142} - a_{62} = 108 - 252 = -144$$

$$j = 3: d_{146} = a_{143} - a_{63} = 95.39 - 83.12 = 12.27$$

$$j = 4: d_{146} = a_{144} - a_{64} = 13.58 - 11.77 = 1.81$$

$$j = 5: d_{146} = a_{145} - a_{65} = 8.16 - 6.33 = 1.83$$

14-7:

$$d_{147} = a_{14j} - a_{7j}$$

$$j = 1: d_{147} = a_{141} - a_{71} = 19.00 - 20.00 = -1.00$$

$$j = 2: d_{147} = a_{142} - a_{72} = 108 - 144 = -36$$

$$j = 3: d_{147} = a_{143} - a_{73} = 95.39 - 85.21 = 10.18$$

$$j = 4: d_{147} = a_{144} - a_{74} = 13.58 - 13.83 = -0.25$$

$$j = 5: d_{147} = a_{145} - a_{75} = 8.16 - 7.66 = 0.50$$

14-8:

$$d_{148} = a_{14j} - a_{8j}$$

$$j = 1: d_{148} = a_{141} - a_{81} = 19.00 - 19.00 = 0$$

$$j = 2: d_{148} = a_{142} - a_{82} = 108 - 132 = -24$$

$$j = 3: d_{148} = a_{143} - a_{83} = 95.39 - 79.92 = 15.47$$

$$j = 4: d_{148} = a_{144} - a_{84} = 13.58 - 13.00 = 0.58$$

$$j = 5: d_{148} = a_{145} - a_{85} = 8.16 - 7.00 = 1.16$$

14-9:

$$d_{149} = a_{14j} - a_{9j}$$

$$j = 1: d_{149} = a_{141} - a_{91} = 19.00 - 16.50 = 2.50$$

$$j = 2: d_{149} = a_{142} - a_{92} = 108 - 144 = -36$$

$$j = 3: d_{149} = a_{143} - a_{93} = 95.39 - 71.55 = 23.84$$

$$j = 4: d_{149} = a_{144} - a_{94} = 13.58 - 11.33 = 2.25$$

$$j = 5: d_{149} = a_{145} - a_{95} = 8.16 - 6.16 = 2.00$$

14-10:

$$d_{1410} = a_{14j} - a_{10j}$$

$$j = 1: d_{1410} = a_{141} - a_{101} = 19.00 - 16.00 = 3.00$$

$$j = 2: d_{1410} = a_{142} - a_{102} = 108 - 120 = -12$$

$$j = 3: d_{1410} = a_{143} - a_{103} = 95.39 - 90.95 = 4.44$$

$$j = 4: d_{1410} = a_{144} - a_{104} = 13.58 - 12.25 = 1.33$$

$$j = 5: d_{1410} = a_{145} - a_{105} = 8.16 - 8.50 = -0.34$$

14-11:

$$d_{1411} = a_{14j} - a_{11j}$$

$$j = 1: d_{1411} = a_{141} - a_{111} = 19.00 - 16.00 = 3.00$$

$$j = 2: d_{1411} = a_{142} - a_{112} = 108 - 252 = -144$$

$$j = 3: d_{1411} = a_{143} - a_{113} = 95.39 - 85.64 = 9.75$$

$$j = 4: d_{1411} = a_{144} - a_{114} = 13.58 - 11.50 = 2.08$$

$$j = 5: d_{1411} = a_{145} - a_{115} = 8.16 - 7.00 = 1.16$$

14-12:

$$d_{1412} = a_{14j} - a_{12j}$$

$$j = 1: d_{1412} = a_{141} - a_{121} = 19.00 - 15.10 = 3.90$$

$$j = 2: d_{1412} = a_{142} - a_{122} = 108 - 180 = -72$$

$$j = 3: d_{1412} = a_{143} - a_{123} = 95.39 - 85.39 = 10.00$$

$$j = 4: d_{1412} = a_{144} - a_{124} = 13.58 - 11.05 = 2.53$$

$$j = 5: d_{1412} = a_{145} - a_{125} = 8.16 - 7.00 = 1.16$$

14-13:

$$d_{1413} = a_{14j} - a_{13j}$$

$$j = 1: d_{1413} = a_{141} - a_{131} = 19.00 - 18.40 = 0.60$$

$$j = 2: d_{1413} = a_{142} - a_{132} = 108 - 156 = -48$$

$$j = 3: d_{1413} = a_{143} - a_{133} = 95.39 - 82.58 = 12.81$$

$$j = 4: d_{1413} = a_{144} - a_{134} = 13.58 - 12.95 = 0.63$$

$$j = 5: d_{1413} = a_{145} - a_{135} = 8.16 - 7.50 = 0.66$$

**Paso 2.** Los índices de preferencias se calculan con las siguientes relaciones:

$$P_j(d_j(a_i, a_k)) = P_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0, & d_{ik} \leq q \\ 1, & d_{ik} > q \end{cases}$$

$$c_{ik} = c_{a_i, a_k} = \sum_{j=1}^6 w_j P_j(d_j(a_i, a_k))$$

PRIMERA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

1-2:

$$\begin{aligned}c_{12} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{12}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{12}^1) + w_2 S_2(d_{12}^2) + w_3 S_3(d_{12}^3) + w_4 S_4(d_{12}^4) + w_5 S_5(d_{12}^5) \\ &= 0.22\end{aligned}$$

1-3:

$$\begin{aligned}c_{13} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{13}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{13}^1) + w_2 S_2(d_{13}^2) + w_3 S_3(d_{13}^3) + w_4 S_4(d_{13}^4) + w_5 S_5(d_{13}^5) \\ &= 0.10\end{aligned}$$

1-4:

$$\begin{aligned}c_{14} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{14}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{14}^1) + w_2 S_2(d_{14}^2) + w_3 S_3(d_{14}^3) + w_4 S_4(d_{14}^4) + w_5 S_5(d_{14}^5) \\ &= 0.26\end{aligned}$$

1-5:

$$\begin{aligned}c_{15} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{15}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{15}^1) + w_2 S_2(d_{15}^2) + w_3 S_3(d_{15}^3) + w_4 S_4(d_{15}^4) + w_5 S_5(d_{15}^5) \\ &= 0.04\end{aligned}$$

1-6:

$$\begin{aligned}c_{16} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{16}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{16}^1) + w_2 S_2(d_{16}^2) + w_3 S_3(d_{16}^3) + w_4 S_4(d_{16}^4) + w_5 S_5(d_{16}^5) \\ &= 0.04\end{aligned}$$

1-7:

$$\begin{aligned}c_{17} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{17}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{17}^1) + w_2 S_2(d_{17}^2) + w_3 S_3(d_{17}^3) + w_4 S_4(d_{17}^4) + w_5 S_5(d_{17}^5) \\ &= 0.02\end{aligned}$$

1-8:

$$\begin{aligned}c_{18} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{18}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{18}^1) + w_2 S_2(d_{18}^2) + w_3 S_3(d_{18}^3) + w_4 S_4(d_{18}^4) + w_5 S_5(d_{18}^5) \\ &= 0.07\end{aligned}$$

1-9:

$$\begin{aligned}c_{19} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{19}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{19}^1) + w_2 S_2(d_{19}^2) + w_3 S_3(d_{19}^3) + w_4 S_4(d_{19}^4) + w_5 S_5(d_{19}^5) \\ &= 0.10\end{aligned}$$

1-10:

$$\begin{aligned}c_{110} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{110}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{110}^1) + w_2 S_2(d_{110}^2) + w_3 S_3(d_{110}^3) + w_4 S_4(d_{110}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{110}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

1-11:

$$\begin{aligned}c_{111} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{111}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{111}^1) + w_2 S_2(d_{111}^2) + w_3 S_3(d_{111}^3) + w_4 S_4(d_{111}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{111}^5) \\ &= 0.01\end{aligned}$$

1-12:

$$\begin{aligned}c_{112} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{112}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{112}^1) + w_2 S_2(d_{112}^2) + w_3 S_3(d_{112}^3) + w_4 S_4(d_{112}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{112}^5) \\ &= 0.21\end{aligned}$$

1-13:

$$\begin{aligned}c_{113} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{113}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{113}^1) + w_2 S_2(d_{113}^2) + w_3 S_3(d_{113}^3) + w_4 S_4(d_{113}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{113}^5) \\ &= 0.04\end{aligned}$$

1-14:

$$\begin{aligned}c_{114} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{114}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{114}^1) + w_2 S_2(d_{114}^2) + w_3 S_3(d_{114}^3) + w_4 S_4(d_{114}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{114}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

## SEGUNDA FILA – MATRIZ DE ÍNDICES DE PREFERENCIA

2-1:

$$\begin{aligned}c_{21} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{21}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{21}^1) + w_2 S_2(d_{21}^2) + w_3 S_3(d_{21}^3) + w_4 S_4(d_{21}^4) + w_5 S_5(d_{21}^5) \\ &= 0.70\end{aligned}$$

2-3:

$$\begin{aligned}c_{23} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{23}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{23}^1) + w_2 S_2(d_{23}^2) + w_3 S_3(d_{23}^3) + w_4 S_4(d_{23}^4) + w_5 S_5(d_{23}^5) \\ &= 0.10\end{aligned}$$

2-4:

$$\begin{aligned}c_{24} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{24}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{24}^1) + w_2 S_2(d_{24}^2) + w_3 S_3(d_{24}^3) + w_4 S_4(d_{24}^4) + w_5 S_5(d_{24}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

2-5:

$$\begin{aligned}c_{25} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{25}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{25}^1) + w_2 S_2(d_{25}^2) + w_3 S_3(d_{25}^3) + w_4 S_4(d_{25}^4) + w_5 S_5(d_{25}^5) \\ &= 0.40\end{aligned}$$

2-6:

$$\begin{aligned}c_{26} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{26}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{26}^1) + w_2 S_2(d_{26}^2) + w_3 S_3(d_{26}^3) + w_4 S_4(d_{26}^4) + w_5 S_5(d_{26}^5) \\ &= 0.26\end{aligned}$$



2-7:

$$\begin{aligned}c_{27} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{27}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{27}^1) + w_2 S_2(d_{27}^2) + w_3 S_3(d_{27}^3) + w_4 S_4(d_{27}^4) + w_5 S_5(d_{27}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

2-8:

$$\begin{aligned}c_{28} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{28}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{28}^1) + w_2 S_2(d_{28}^2) + w_3 S_3(d_{28}^3) + w_4 S_4(d_{28}^4) + w_5 S_5(d_{28}^5) \\ &= 0.29\end{aligned}$$

2-9:

$$\begin{aligned}c_{29} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{29}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{29}^1) + w_2 S_2(d_{29}^2) + w_3 S_3(d_{29}^3) + w_4 S_4(d_{29}^4) + w_5 S_5(d_{29}^5) \\ &= 0.35\end{aligned}$$

2-10:

$$\begin{aligned}c_{210} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{210}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{210}^1) + w_2 S_2(d_{210}^2) + w_3 S_3(d_{210}^3) + w_4 S_4(d_{210}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{210}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

2-11:

$$\begin{aligned}c_{211} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{211}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{211}^1) + w_2 S_2(d_{211}^2) + w_3 S_3(d_{211}^3) + w_4 S_4(d_{211}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{211}^5)\end{aligned}$$

$$= 0.25$$

2-12:

$$\begin{aligned}c_{212} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{212}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{212}^1) + w_2 S_2(d_{212}^2) + w_3 S_3(d_{212}^3) + w_4 S_4(d_{212}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{212}^5) \\ &= 0.45\end{aligned}$$

2-13:

$$\begin{aligned}c_{213} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{213}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{213}^1) + w_2 S_2(d_{213}^2) + w_3 S_3(d_{213}^3) + w_4 S_4(d_{213}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{213}^5) \\ &= 0.27\end{aligned}$$

2-14:

$$\begin{aligned}c_{214} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{214}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{214}^1) + w_2 S_2(d_{214}^2) + w_3 S_3(d_{214}^3) + w_4 S_4(d_{214}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{214}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

### TERCERA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

3-1:

$$\begin{aligned}c_{31} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{31}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{31}^1) + w_2 S_2(d_{31}^2) + w_3 S_3(d_{31}^3) + w_4 S_4(d_{31}^4) + w_5 S_5(d_{31}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

3-2:

$$\begin{aligned}c_{32} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{32}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{32}^1) + w_2 S_2(d_{32}^2) + w_3 S_3(d_{32}^3) + w_4 S_4(d_{32}^4) + w_5 S_5(d_{32}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

3-4:

$$\begin{aligned}c_{34} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{34}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{34}^1) + w_2 S_2(d_{34}^2) + w_3 S_3(d_{34}^3) + w_4 S_4(d_{34}^4) + w_5 S_5(d_{34}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

3-5:

$$\begin{aligned}c_{35} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{35}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{35}^1) + w_2 S_2(d_{35}^2) + w_3 S_3(d_{35}^3) + w_4 S_4(d_{35}^4) + w_5 S_5(d_{35}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

3-6:

$$\begin{aligned}c_{36} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{36}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{36}^1) + w_2 S_2(d_{36}^2) + w_3 S_3(d_{36}^3) + w_4 S_4(d_{36}^4) + w_5 S_5(d_{36}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

3-7:

$$\begin{aligned}c_{37} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{37}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{37}^1) + w_2 S_2(d_{37}^2) + w_3 S_3(d_{37}^3) + w_4 S_4(d_{37}^4) + w_5 S_5(d_{37}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

3-8:

$$\begin{aligned}c_{38} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{38}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{38}^1) + w_2 S_2(d_{38}^2) + w_3 S_3(d_{38}^3) + w_4 S_4(d_{38}^4) + w_5 S_5(d_{38}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

3-9:

$$\begin{aligned}c_{39} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{39}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{39}^1) + w_2 S_2(d_{39}^2) + w_3 S_3(d_{39}^3) + w_4 S_4(d_{39}^4) + w_5 S_5(d_{39}^5) \\ &= 0.92\end{aligned}$$

3-10:

$$\begin{aligned}c_{310} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{310}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{310}^1) + w_2 S_2(d_{310}^2) + w_3 S_3(d_{310}^3) + w_4 S_4(d_{310}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{310}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

3-11:

$$\begin{aligned}c_{311} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{311}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{311}^1) + w_2 S_2(d_{311}^2) + w_3 S_3(d_{311}^3) + w_4 S_4(d_{311}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{311}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

3-12:

$$\begin{aligned}c_{312} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{312}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{312}^1) + w_2 S_2(d_{312}^2) + w_3 S_3(d_{312}^3) + w_4 S_4(d_{312}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{312}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

3-13:

$$\begin{aligned}c_{313} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{313}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{313}^1) + w_2 S_2(d_{313}^2) + w_3 S_3(d_{313}^3) + w_4 S_4(d_{313}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{313}^5) \\ &= 0.45\end{aligned}$$

3-14:

$$\begin{aligned}c_{314} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{314}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{314}^1) + w_2 S_2(d_{314}^2) + w_3 S_3(d_{314}^3) + w_4 S_4(d_{314}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{314}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

#### CUARTA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

4-1:

$$\begin{aligned}c_{41} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{41}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{41}^1) + w_2 S_2(d_{41}^2) + w_3 S_3(d_{41}^3) + w_4 S_4(d_{41}^4) + w_5 S_5(d_{41}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

4-2:

$$\begin{aligned}c_{42} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{42}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{42}^1) + w_2 S_2(d_{42}^2) + w_3 S_3(d_{42}^3) + w_4 S_4(d_{42}^4) + w_5 S_5(d_{42}^5) \\ &= 0.66\end{aligned}$$

4-3:

$$\begin{aligned}c_{43} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{43}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{43}^1) + w_2 S_2(d_{43}^2) + w_3 S_3(d_{43}^3) + w_4 S_4(d_{43}^4) + w_5 S_5(d_{43}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

4-5:

$$\begin{aligned}c_{45} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{45}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{45}^1) + w_2 S_2(d_{45}^2) + w_3 S_3(d_{45}^3) + w_4 S_4(d_{45}^4) + w_5 S_5(d_{45}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

4-6:

$$\begin{aligned}c_{46} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{46}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{46}^1) + w_2 S_2(d_{46}^2) + w_3 S_3(d_{46}^3) + w_4 S_4(d_{46}^4) + w_5 S_5(d_{46}^5) \\ &= 0.67\end{aligned}$$

4-7:

$$\begin{aligned}c_{47} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{47}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{47}^1) + w_2 S_2(d_{47}^2) + w_3 S_3(d_{47}^3) + w_4 S_4(d_{47}^4) + w_5 S_5(d_{47}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

4-8:

$$\begin{aligned}c_{48} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{48}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{48}^1) + w_2 S_2(d_{48}^2) + w_3 S_3(d_{48}^3) + w_4 S_4(d_{48}^4) + w_5 S_5(d_{48}^5) \\ &= 0.06\end{aligned}$$

4-9:

$$\begin{aligned}c_{49} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{49}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{49}^1) + w_2 S_2(d_{49}^2) + w_3 S_3(d_{49}^3) + w_4 S_4(d_{49}^4) + w_5 S_5(d_{49}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

4-10:

$$\begin{aligned}c_{410} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{410}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{410}^1) + w_2 S_2(d_{410}^2) + w_3 S_3(d_{410}^3) + w_4 S_4(d_{410}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{410}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

4-11:

$$\begin{aligned}c_{411} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{411}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{411}^1) + w_2 S_2(d_{411}^2) + w_3 S_3(d_{411}^3) + w_4 S_4(d_{411}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{411}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

4-12:

$$\begin{aligned}c_{412} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{412}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{412}^1) + w_2 S_2(d_{412}^2) + w_3 S_3(d_{412}^3) + w_4 S_4(d_{412}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{412}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

4-13:

$$\begin{aligned}c_{413} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{413}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{413}^1) + w_2 S_2(d_{413}^2) + w_3 S_3(d_{413}^3) + w_4 S_4(d_{413}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{413}^5) \\ &= 0.20\end{aligned}$$

4-14:

$$\begin{aligned}c_{414} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{414}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{414}^1) + w_2 S_2(d_{414}^2) + w_3 S_3(d_{414}^3) + w_4 S_4(d_{414}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{414}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

#### QUINTA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

5-1:

$$\begin{aligned}c_{51} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{51}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{51}^1) + w_2 S_2(d_{51}^2) + w_3 S_3(d_{51}^3) + w_4 S_4(d_{51}^4) + w_5 S_5(d_{51}^5) \\ &= 0.94\end{aligned}$$



5-2:

$$\begin{aligned}c_{52} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{52}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{52}^1) + w_2 S_2(d_{52}^2) + w_3 S_3(d_{52}^3) + w_4 S_4(d_{52}^4) + w_5 S_5(d_{52}^5) \\ &= 0.56\end{aligned}$$

5-3:

$$\begin{aligned}c_{53} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{53}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{53}^1) + w_2 S_2(d_{53}^2) + w_3 S_3(d_{53}^3) + w_4 S_4(d_{53}^4) + w_5 S_5(d_{53}^5) \\ &= 0.10\end{aligned}$$

5-4:

$$\begin{aligned}c_{54} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{54}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{54}^1) + w_2 S_2(d_{54}^2) + w_3 S_3(d_{54}^3) + w_4 S_4(d_{54}^4) + w_5 S_5(d_{54}^5) \\ &= 0.30\end{aligned}$$

5-6:

$$\begin{aligned}c_{56} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{56}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{56}^1) + w_2 S_2(d_{56}^2) + w_3 S_3(d_{56}^3) + w_4 S_4(d_{56}^4) + w_5 S_5(d_{56}^5) \\ &= 0.57\end{aligned}$$

5-7:

$$\begin{aligned}c_{57} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{57}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{57}^1) + w_2 S_2(d_{57}^2) + w_3 S_3(d_{57}^3) + w_4 S_4(d_{57}^4) + w_5 S_5(d_{57}^5) \\ &= 0.30\end{aligned}$$

5-8:

$$\begin{aligned}c_{58} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{58}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{58}^1) + w_2 S_2(d_{58}^2) + w_3 S_3(d_{58}^3) + w_4 S_4(d_{58}^4) + w_5 S_5(d_{58}^5) \\ &= 0.35\end{aligned}$$

5-9:

$$\begin{aligned}c_{59} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{59}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{59}^1) + w_2 S_2(d_{59}^2) + w_3 S_3(d_{59}^3) + w_4 S_4(d_{59}^4) + w_5 S_5(d_{59}^5) \\ &= 0.85\end{aligned}$$

5-10:

$$\begin{aligned}c_{510} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{510}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{510}^1) + w_2 S_2(d_{510}^2) + w_3 S_3(d_{510}^3) + w_4 S_4(d_{510}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{510}^5) \\ &= 0.45\end{aligned}$$

5-11:

$$\begin{aligned}c_{511} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{511}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{511}^1) + w_2 S_2(d_{511}^2) + w_3 S_3(d_{511}^3) + w_4 S_4(d_{511}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{511}^5) \\ &= 0.55\end{aligned}$$

5-12:

$$\begin{aligned}c_{512} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{512}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{512}^1) + w_2 S_2(d_{512}^2) + w_3 S_3(d_{512}^3) + w_4 S_4(d_{512}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{512}^5) \\ &= 0.55\end{aligned}$$

5-13:

$$\begin{aligned}c_{513} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{513}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{513}^1) + w_2 S_2(d_{513}^2) + w_3 S_3(d_{513}^3) + w_4 S_4(d_{513}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{513}^5) \\ &= 0.28\end{aligned}$$

5-14:

$$\begin{aligned}c_{514} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{514}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{514}^1) + w_2 S_2(d_{514}^2) + w_3 S_3(d_{514}^3) + w_4 S_4(d_{514}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{514}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

#### SEXTA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

6-1:

$$\begin{aligned}c_{61} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{61}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{61}^1) + w_2 S_2(d_{61}^2) + w_3 S_3(d_{61}^3) + w_4 S_4(d_{61}^4) + w_5 S_5(d_{61}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

6-2:

$$\begin{aligned}c_{62} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{62}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{62}^1) + w_2 S_2(d_{62}^2) + w_3 S_3(d_{62}^3) + w_4 S_4(d_{62}^4) + w_5 S_5(d_{62}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

6-3:

$$\begin{aligned}c_{63} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{63}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{63}^1) + w_2 S_2(d_{63}^2) + w_3 S_3(d_{63}^3) + w_4 S_4(d_{63}^4) + w_5 S_5(d_{63}^5) \\ &= 0.09\end{aligned}$$

6-4:

$$\begin{aligned}c_{64} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{64}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{64}^1) + w_2 S_2(d_{64}^2) + w_3 S_3(d_{64}^3) + w_4 S_4(d_{64}^4) + w_5 S_5(d_{64}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

6-5:

$$\begin{aligned}c_{65} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{65}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{65}^1) + w_2 S_2(d_{65}^2) + w_3 S_3(d_{65}^3) + w_4 S_4(d_{65}^4) + w_5 S_5(d_{65}^5) \\ &= 0.40\end{aligned}$$

6-7:

$$\begin{aligned}c_{67} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{67}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{67}^1) + w_2 S_2(d_{67}^2) + w_3 S_3(d_{67}^3) + w_4 S_4(d_{67}^4) + w_5 S_5(d_{67}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

6-8:

$$\begin{aligned}c_{68} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{68}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{68}^1) + w_2 S_2(d_{68}^2) + w_3 S_3(d_{68}^3) + w_4 S_4(d_{68}^4) + w_5 S_5(d_{68}^5) \\ &= 0.28\end{aligned}$$

6-9:

$$\begin{aligned}c_{69} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{69}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{69}^1) + w_2 S_2(d_{69}^2) + w_3 S_3(d_{69}^3) + w_4 S_4(d_{69}^4) + w_5 S_5(d_{69}^5) \\ &= 1.00\end{aligned}$$

6-10:

$$\begin{aligned}c_{610} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{610}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{610}^1) + w_2 S_2(d_{610}^2) + w_3 S_3(d_{610}^3) + w_4 S_4(d_{610}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{610}^5) \\ &= 0.45\end{aligned}$$

6-11:

$$\begin{aligned}c_{611} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{611}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{611}^1) + w_2 S_2(d_{611}^2) + w_3 S_3(d_{611}^3) + w_4 S_4(d_{611}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{611}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

6-12:

$$\begin{aligned}c_{612} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{612}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{612}^1) + w_2 S_2(d_{612}^2) + w_3 S_3(d_{612}^3) + w_4 S_4(d_{612}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{612}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

6-13:

$$\begin{aligned}c_{613} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{613}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{613}^1) + w_2 S_2(d_{613}^2) + w_3 S_3(d_{613}^3) + w_4 S_4(d_{613}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{613}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

6-14:

$$\begin{aligned}c_{614} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{614}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{614}^1) + w_2 S_2(d_{614}^2) + w_3 S_3(d_{614}^3) + w_4 S_4(d_{614}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{614}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

#### SEPTIMA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

7-1:

$$\begin{aligned}c_{71} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{71}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{71}^1) + w_2 S_2(d_{71}^2) + w_3 S_3(d_{71}^3) + w_4 S_4(d_{71}^4) + w_5 S_5(d_{71}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

7-2:

$$\begin{aligned}c_{72} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{72}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{72}^1) + w_2 S_2(d_{72}^2) + w_3 S_3(d_{72}^3) + w_4 S_4(d_{72}^4) + w_5 S_5(d_{72}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

7-3:

$$\begin{aligned}c_{73} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{73}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{73}^1) + w_2 S_2(d_{73}^2) + w_3 S_3(d_{73}^3) + w_4 S_4(d_{73}^4) + w_5 S_5(d_{73}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

7-4:

$$\begin{aligned}c_{74} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{74}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{74}^1) + w_2 S_2(d_{74}^2) + w_3 S_3(d_{74}^3) + w_4 S_4(d_{74}^4) + w_5 S_5(d_{74}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

7-5:

$$\begin{aligned}c_{75} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{75}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{75}^1) + w_2 S_2(d_{75}^2) + w_3 S_3(d_{75}^3) + w_4 S_4(d_{75}^4) + w_5 S_5(d_{75}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

7-6:

$$\begin{aligned}c_{76} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{76}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{76}^1) + w_2 S_2(d_{76}^2) + w_3 S_3(d_{76}^3) + w_4 S_4(d_{76}^4) + w_5 S_5(d_{76}^5) \\ &= 0.67\end{aligned}$$

7-8:

$$\begin{aligned}c_{78} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{78}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{78}^1) + w_2 S_2(d_{78}^2) + w_3 S_3(d_{78}^3) + w_4 S_4(d_{78}^4) + w_5 S_5(d_{78}^5) \\ &= 0.95\end{aligned}$$

7-9:

$$\begin{aligned}c_{79} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{79}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{79}^1) + w_2 S_2(d_{79}^2) + w_3 S_3(d_{79}^3) + w_4 S_4(d_{79}^4) + w_5 S_5(d_{79}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

7-10:

$$\begin{aligned}c_{710} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{710}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{710}^1) + w_2 S_2(d_{710}^2) + w_3 S_3(d_{710}^3) + w_4 S_4(d_{710}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{710}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

7-11:

$$\begin{aligned}c_{711} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{711}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{711}^1) + w_2 S_2(d_{711}^2) + w_3 S_3(d_{711}^3) + w_4 S_4(d_{711}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{711}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

7-12:

$$\begin{aligned}c_{712} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{712}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{712}^1) + w_2 S_2(d_{712}^2) + w_3 S_3(d_{712}^3) + w_4 S_4(d_{712}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{712}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

7-13:

$$\begin{aligned}c_{713} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{713}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{713}^1) + w_2 S_2(d_{713}^2) + w_3 S_3(d_{713}^3) + w_4 S_4(d_{713}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{713}^5) \\ &= 0.67\end{aligned}$$



7-14:

$$\begin{aligned}c_{714} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{714}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{714}^1) + w_2 S_2(d_{714}^2) + w_3 S_3(d_{714}^3) + w_4 S_4(d_{714}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{714}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

#### OCTAVA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

8-1:

$$\begin{aligned}c_{81} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{81}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{81}^1) + w_2 S_2(d_{81}^2) + w_3 S_3(d_{81}^3) + w_4 S_4(d_{81}^4) + w_5 S_5(d_{81}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

8-2:

$$\begin{aligned}c_{82} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{82}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{82}^1) + w_2 S_2(d_{82}^2) + w_3 S_3(d_{82}^3) + w_4 S_4(d_{82}^4) + w_5 S_5(d_{82}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

8-3:

$$\begin{aligned}c_{83} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{83}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{83}^1) + w_2 S_2(d_{83}^2) + w_3 S_3(d_{83}^3) + w_4 S_4(d_{83}^4) + w_5 S_5(d_{83}^5) \\ &= 0.71\end{aligned}$$

8-4:

$$\begin{aligned}c_{84} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{84}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{84}^1) + w_2 S_2(d_{84}^2) + w_3 S_3(d_{84}^3) + w_4 S_4(d_{84}^4) + w_5 S_5(d_{84}^5) \\ &= 0.70\end{aligned}$$

8-5:

$$\begin{aligned}c_{85} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{85}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{85}^1) + w_2 S_2(d_{85}^2) + w_3 S_3(d_{85}^3) + w_4 S_4(d_{85}^4) + w_5 S_5(d_{85}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

8-6:

$$\begin{aligned}c_{86} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{86}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{86}^1) + w_2 S_2(d_{86}^2) + w_3 S_3(d_{86}^3) + w_4 S_4(d_{86}^4) + w_5 S_5(d_{86}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

8-7:

$$\begin{aligned}c_{87} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{87}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{87}^1) + w_2 S_2(d_{87}^2) + w_3 S_3(d_{87}^3) + w_4 S_4(d_{87}^4) + w_5 S_5(d_{87}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

8-9:

$$\begin{aligned}c_{89} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{89}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{89}^1) + w_2 S_2(d_{89}^2) + w_3 S_3(d_{89}^3) + w_4 S_4(d_{89}^4) + w_5 S_5(d_{89}^5) \\ &= 0.73\end{aligned}$$

8-10:

$$\begin{aligned}c_{810} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{810}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{810}^1) + w_2 S_2(d_{810}^2) + w_3 S_3(d_{810}^3) + w_4 S_4(d_{810}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{810}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

8-11:

$$\begin{aligned}c_{811} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{811}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{811}^1) + w_2 S_2(d_{811}^2) + w_3 S_3(d_{811}^3) + w_4 S_4(d_{811}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{811}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

8-12:

$$\begin{aligned}c_{812} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{812}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{812}^1) + w_2 S_2(d_{812}^2) + w_3 S_3(d_{812}^3) + w_4 S_4(d_{812}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{812}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

8-13:

$$\begin{aligned}c_{813} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{813}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{813}^1) + w_2 S_2(d_{813}^2) + w_3 S_3(d_{813}^3) + w_4 S_4(d_{813}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{813}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

8-14:

$$\begin{aligned}c_{814} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{814}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{814}^1) + w_2 S_2(d_{814}^2) + w_3 S_3(d_{814}^3) + w_4 S_4(d_{814}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{814}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

#### NOVENA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

9-1:

$$\begin{aligned}c_{91} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{91}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{91}^1) + w_2 S_2(d_{91}^2) + w_3 S_3(d_{91}^3) + w_4 S_4(d_{91}^4) + w_5 S_5(d_{91}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

9-2:

$$\begin{aligned}c_{92} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{92}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{92}^1) + w_2 S_2(d_{92}^2) + w_3 S_3(d_{92}^3) + w_4 S_4(d_{92}^4) + w_5 S_5(d_{92}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

9-3:

$$\begin{aligned}c_{93} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{93}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{93}^1) + w_2 S_2(d_{93}^2) + w_3 S_3(d_{93}^3) + w_4 S_4(d_{93}^4) + w_5 S_5(d_{93}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

9-4:

$$\begin{aligned}c_{94} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{94}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{94}^1) + w_2 S_2(d_{94}^2) + w_3 S_3(d_{94}^3) + w_4 S_4(d_{94}^4) + w_5 S_5(d_{94}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

9-5:

$$\begin{aligned}c_{95} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{95}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{95}^1) + w_2 S_2(d_{95}^2) + w_3 S_3(d_{95}^3) + w_4 S_4(d_{95}^4) + w_5 S_5(d_{95}^5) \\ &= 0.15\end{aligned}$$

9-6:

$$\begin{aligned}c_{96} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{96}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{96}^1) + w_2 S_2(d_{96}^2) + w_3 S_3(d_{96}^3) + w_4 S_4(d_{96}^4) + w_5 S_5(d_{96}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

9-7:

$$\begin{aligned}c_{97} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{97}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{97}^1) + w_2 S_2(d_{97}^2) + w_3 S_3(d_{97}^3) + w_4 S_4(d_{97}^4) + w_5 S_5(d_{97}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

9-8:

$$\begin{aligned}c_{98} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{98}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{98}^1) + w_2 S_2(d_{98}^2) + w_3 S_3(d_{98}^3) + w_4 S_4(d_{98}^4) + w_5 S_5(d_{98}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

9-10:

$$\begin{aligned}c_{910} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{910}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{910}^1) + w_2 S_2(d_{910}^2) + w_3 S_3(d_{910}^3) + w_4 S_4(d_{910}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{910}^5) \\ &= 0.45\end{aligned}$$

9-11:

$$\begin{aligned}c_{911} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{911}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{911}^1) + w_2 S_2(d_{911}^2) + w_3 S_3(d_{911}^3) + w_4 S_4(d_{911}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{911}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

9-12:

$$\begin{aligned}c_{912} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{912}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{912}^1) + w_2 S_2(d_{912}^2) + w_3 S_3(d_{912}^3) + w_4 S_4(d_{912}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{912}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

9-13:

$$\begin{aligned}c_{913} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{913}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{913}^1) + w_2 S_2(d_{913}^2) + w_3 S_3(d_{913}^3) + w_4 S_4(d_{913}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{913}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

9-14:

$$\begin{aligned}c_{914} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{914}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{914}^1) + w_2 S_2(d_{914}^2) + w_3 S_3(d_{914}^3) + w_4 S_4(d_{914}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{914}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

#### DÉCIMA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

10-1:

$$\begin{aligned}c_{101} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{101}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{101}^1) + w_2 S_2(d_{101}^2) + w_3 S_3(d_{101}^3) + w_4 S_4(d_{101}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{101}^5) \\ &= 0.69\end{aligned}$$

10-2:

$$\begin{aligned}c_{102} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{102}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{102}^1) + w_2 S_2(d_{102}^2) + w_3 S_3(d_{102}^3) + w_4 S_4(d_{102}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{102}^5) \\ &= 0.71\end{aligned}$$

10-3:

$$\begin{aligned}c_{103} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{103}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{103}^1) + w_2 S_2(d_{103}^2) + w_3 S_3(d_{103}^3) + w_4 S_4(d_{103}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{103}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

10-4:

$$\begin{aligned}c_{104} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{104}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{104}^1) + w_2 S_2(d_{104}^2) + w_3 S_3(d_{104}^3) + w_4 S_4(d_{104}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{104}^5) \\ &= 0.45\end{aligned}$$

10-5:

$$\begin{aligned}c_{105} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{105}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{105}^1) + w_2 S_2(d_{105}^2) + w_3 S_3(d_{105}^3) + w_4 S_4(d_{105}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{105}^5) \\ &= 0.15\end{aligned}$$

10-6:

$$\begin{aligned}c_{106} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{106}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{106}^1) + w_2 S_2(d_{106}^2) + w_3 S_3(d_{106}^3) + w_4 S_4(d_{106}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{106}^5) \\ &= 0.52\end{aligned}$$

10-7:

$$\begin{aligned}c_{107} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{107}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{107}^1) + w_2 S_2(d_{107}^2) + w_3 S_3(d_{107}^3) + w_4 S_4(d_{107}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{107}^5) \\ &= 0.21\end{aligned}$$



10-8:

$$\begin{aligned}c_{108} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{108}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{108}^1) + w_2 S_2(d_{108}^2) + w_3 S_3(d_{108}^3) + w_4 S_4(d_{108}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{108}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

10-9:

$$\begin{aligned}c_{109} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{109}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{109}^1) + w_2 S_2(d_{109}^2) + w_3 S_3(d_{109}^3) + w_4 S_4(d_{109}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{109}^5) \\ &= 0.55\end{aligned}$$

10-11:

$$\begin{aligned}c_{1011} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1011}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1011}^1) + w_2 S_2(d_{1011}^2) + w_3 S_3(d_{1011}^3) + w_4 S_4(d_{1011}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1011}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

10-12:

$$\begin{aligned}c_{1012} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1012}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1012}^1) + w_2 S_2(d_{1012}^2) + w_3 S_3(d_{1012}^3) + w_4 S_4(d_{1012}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1012}^5) \\ &= 0.70\end{aligned}$$

10-13:

$$\begin{aligned}c_{1013} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1013}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1013}^1) + w_2 S_2(d_{1013}^2) + w_3 S_3(d_{1013}^3) + w_4 S_4(d_{1013}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1013}^5) \\ &= 0.53\end{aligned}$$

10-14:

$$\begin{aligned}c_{1014} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1014}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1014}^1) + w_2 S_2(d_{1014}^2) + w_3 S_3(d_{1014}^3) + w_4 S_4(d_{1014}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1014}^5) \\ &= 0.70\end{aligned}$$

#### ONCEAVA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

11-1:

$$\begin{aligned}c_{111} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{111}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{111}^1) + w_2 S_2(d_{111}^2) + w_3 S_3(d_{111}^3) + w_4 S_4(d_{111}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{111}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

11-2:

$$\begin{aligned}c_{112} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{112}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{112}^1) + w_2 S_2(d_{112}^2) + w_3 S_3(d_{112}^3) + w_4 S_4(d_{112}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{112}^5) \\ &= 0.66\end{aligned}$$

11-3:

$$\begin{aligned}c_{113} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{113}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{113}^1) + w_2 S_2(d_{113}^2) + w_3 S_3(d_{113}^3) + w_4 S_4(d_{113}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{113}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

11-4:

$$\begin{aligned}c_{114} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{114}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{114}^1) + w_2 S_2(d_{114}^2) + w_3 S_3(d_{114}^3) + w_4 S_4(d_{114}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{114}^5) \\ &= 0.40\end{aligned}$$

11-5:

$$\begin{aligned}c_{115} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{115}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{115}^1) + w_2 S_2(d_{115}^2) + w_3 S_3(d_{115}^3) + w_4 S_4(d_{115}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{115}^5) \\ &= 0.40\end{aligned}$$

11-6:

$$\begin{aligned}c_{116} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{116}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{116}^1) + w_2 S_2(d_{116}^2) + w_3 S_3(d_{116}^3) + w_4 S_4(d_{116}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{116}^5) \\ &= 0.17\end{aligned}$$

1-7:

$$\begin{aligned}c_{117} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{117}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{117}^1) + w_2 S_2(d_{117}^2) + w_3 S_3(d_{117}^3) + w_4 S_4(d_{117}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{117}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

11-8:

$$\begin{aligned}c_{118} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{118}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{118}^1) + w_2 S_2(d_{118}^2) + w_3 S_3(d_{118}^3) + w_4 S_4(d_{118}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{118}^5) \\ &= 0.31\end{aligned}$$

11-9:

$$\begin{aligned}c_{119} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{119}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{119}^1) + w_2 S_2(d_{119}^2) + w_3 S_3(d_{119}^3) + w_4 S_4(d_{119}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{119}^5) \\ &= 0.80\end{aligned}$$

11-10:

$$\begin{aligned}c_{1110} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1110}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1110}^1) + w_2 S_2(d_{1110}^2) + w_3 S_3(d_{1110}^3) + w_4 S_4(d_{1110}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1110}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

11-12:

$$\begin{aligned}c_{1112} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1112}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1112}^1) + w_2 S_2(d_{1112}^2) + w_3 S_3(d_{1112}^3) + w_4 S_4(d_{1112}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1112}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

11-13:

$$\begin{aligned}c_{1113} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1113}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1113}^1) + w_2 S_2(d_{1113}^2) + w_3 S_3(d_{1113}^3) + w_4 S_4(d_{1113}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1113}^5) \\ &= 0.28\end{aligned}$$

11-14:

$$\begin{aligned}c_{1114} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1114}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1114}^1) + w_2 S_2(d_{1114}^2) + w_3 S_3(d_{1114}^3) + w_4 S_4(d_{1114}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1114}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

#### DOCEAVA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

12-1:

$$\begin{aligned}c_{121} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{121}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{121}^1) + w_2 S_2(d_{121}^2) + w_3 S_3(d_{121}^3) + w_4 S_4(d_{121}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{121}^5) \\ &= 0.70\end{aligned}$$

12-2:

$$\begin{aligned}c_{122} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{122}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{122}^1) + w_2 S_2(d_{122}^2) + w_3 S_3(d_{122}^3) + w_4 S_4(d_{122}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{122}^5) \\ &= 0.46\end{aligned}$$

12-3:

$$\begin{aligned}c_{123} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{123}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{123}^1) + w_2 S_2(d_{123}^2) + w_3 S_3(d_{123}^3) + w_4 S_4(d_{123}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{123}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

12-4:

$$\begin{aligned}c_{124} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{124}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{124}^1) + w_2 S_2(d_{124}^2) + w_3 S_3(d_{124}^3) + w_4 S_4(d_{124}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{124}^5) \\ &= 0.40\end{aligned}$$

12-5:

$$\begin{aligned}c_{125} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{125}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{125}^1) + w_2 S_2(d_{125}^2) + w_3 S_3(d_{125}^3) + w_4 S_4(d_{125}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{125}^5) \\ &= 0.40\end{aligned}$$

12-6:

$$\begin{aligned}c_{126} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{126}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{126}^1) + w_2 S_2(d_{126}^2) + w_3 S_3(d_{126}^3) + w_4 S_4(d_{126}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{126}^5) \\ &= 0.17\end{aligned}$$

12-7:

$$\begin{aligned}c_{127} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{127}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{127}^1) + w_2 S_2(d_{127}^2) + w_3 S_3(d_{127}^3) + w_4 S_4(d_{127}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{127}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

12-8:

$$\begin{aligned}c_{128} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{128}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{128}^1) + w_2 S_2(d_{128}^2) + w_3 S_3(d_{128}^3) + w_4 S_4(d_{128}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{128}^5) \\ &= 0.30\end{aligned}$$

12-9:

$$\begin{aligned}c_{129} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{129}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{129}^1) + w_2 S_2(d_{129}^2) + w_3 S_3(d_{129}^3) + w_4 S_4(d_{129}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{129}^5) \\ &= 0.50\end{aligned}$$

12-10:

$$\begin{aligned}c_{1210} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1210}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1210}^1) + w_2 S_2(d_{1210}^2) + w_3 S_3(d_{1210}^3) + w_4 S_4(d_{1210}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1210}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

12-11:

$$\begin{aligned}c_{1211} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1211}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1211}^1) + w_2 S_2(d_{1211}^2) + w_3 S_3(d_{1211}^3) + w_4 S_4(d_{1211}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1211}^5) \\ &= 0.00\end{aligned}$$

12-13:

$$\begin{aligned}c_{1213} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1213}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1213}^1) + w_2 S_2(d_{1213}^2) + w_3 S_3(d_{1213}^3) + w_4 S_4(d_{1213}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1213}^5) \\ &= 0.28\end{aligned}$$

12-14:

$$\begin{aligned}c_{1214} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1214}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1214}^1) + w_2 S_2(d_{1214}^2) + w_3 S_3(d_{1214}^3) + w_4 S_4(d_{1214}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1214}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$



TRECEAVA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

13-1:

$$\begin{aligned}c_{131} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{131}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{131}^1) + w_2 S_2(d_{131}^2) + w_3 S_3(d_{131}^3) + w_4 S_4(d_{131}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{131}^5) \\ &= 0.90\end{aligned}$$

13-2:

$$\begin{aligned}c_{132} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{132}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{132}^1) + w_2 S_2(d_{132}^2) + w_3 S_3(d_{132}^3) + w_4 S_4(d_{132}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{132}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

13-3:

$$\begin{aligned}c_{133} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{133}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{133}^1) + w_2 S_2(d_{133}^2) + w_3 S_3(d_{133}^3) + w_4 S_4(d_{133}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{133}^5) \\ &= 0.54\end{aligned}$$

13-4:

$$\begin{aligned}c_{134} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{134}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{134}^1) + w_2 S_2(d_{134}^2) + w_3 S_3(d_{134}^3) + w_4 S_4(d_{134}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{134}^5) \\ &= 0.70\end{aligned}$$

13-5:

$$\begin{aligned}c_{135} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{135}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{135}^1) + w_2 S_2(d_{135}^2) + w_3 S_3(d_{135}^3) + w_4 S_4(d_{135}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{135}^5) \\ &= 0.45\end{aligned}$$

13-6:

$$\begin{aligned}c_{136} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{136}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{136}^1) + w_2 S_2(d_{136}^2) + w_3 S_3(d_{136}^3) + w_4 S_4(d_{136}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{136}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

13-7:

$$\begin{aligned}c_{137} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{137}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{137}^1) + w_2 S_2(d_{137}^2) + w_3 S_3(d_{137}^3) + w_4 S_4(d_{137}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{137}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

13-8:

$$\begin{aligned}c_{138} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{138}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{138}^1) + w_2 S_2(d_{138}^2) + w_3 S_3(d_{138}^3) + w_4 S_4(d_{138}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{138}^5) \\ &= 0.43\end{aligned}$$

13-9:

$$\begin{aligned}c_{139} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{139}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{139}^1) + w_2 S_2(d_{139}^2) + w_3 S_3(d_{139}^3) + w_4 S_4(d_{139}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{139}^5) \\ &= 1.00\end{aligned}$$

13-10:

$$\begin{aligned}c_{1310} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1013}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1310}^1) + w_2 S_2(d_{1310}^2) + w_3 S_3(d_{1310}^3) + w_4 S_4(d_{1310}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1310}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

13-11:

$$\begin{aligned}c_{1311} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1311}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1311}^1) + w_2 S_2(d_{1311}^2) + w_3 S_3(d_{1311}^3) + w_4 S_4(d_{1311}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1311}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

13-12:

$$\begin{aligned}c_{1312} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1312}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1312}^1) + w_2 S_2(d_{1312}^2) + w_3 S_3(d_{1312}^3) + w_4 S_4(d_{1312}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1312}^5) \\ &= 0.65\end{aligned}$$

13-14:

$$\begin{aligned}c_{1314} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1314}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1314}^1) + w_2 S_2(d_{1314}^2) + w_3 S_3(d_{1314}^3) + w_4 S_4(d_{1314}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1314}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

#### CATORCEAVA FILA – MATRIZ DE PREFERENCIA

14-1:

$$\begin{aligned}c_{141} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{141}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{141}^1) + w_2 S_2(d_{141}^2) + w_3 S_3(d_{141}^3) + w_4 S_4(d_{141}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{141}^5) \\ &= 0.73\end{aligned}$$

14-2:

$$\begin{aligned}c_{142} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{142}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{142}^1) + w_2 S_2(d_{142}^2) + w_3 S_3(d_{142}^3) + w_4 S_4(d_{142}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{142}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

14-3:

$$\begin{aligned}c_{143} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{143}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{143}^1) + w_2 S_2(d_{143}^2) + w_3 S_3(d_{143}^3) + w_4 S_4(d_{143}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{143}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

14-4:

$$\begin{aligned}c_{144} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{144}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{144}^1) + w_2 S_2(d_{144}^2) + w_3 S_3(d_{144}^3) + w_4 S_4(d_{144}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{144}^5) \\ &= 0.54\end{aligned}$$

14-5:

$$\begin{aligned}c_{145} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{145}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{145}^1) + w_2 S_2(d_{145}^2) + w_3 S_3(d_{145}^3) + w_4 S_4(d_{145}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{145}^5) \\ &= 0.69\end{aligned}$$

14-6:

$$\begin{aligned}c_{146} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{146}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{146}^1) + w_2 S_2(d_{146}^2) + w_3 S_3(d_{146}^3) + w_4 S_4(d_{146}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{146}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

14-7:

$$\begin{aligned}c_{147} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{147}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{147}^1) + w_2 S_2(d_{147}^2) + w_3 S_3(d_{147}^3) + w_4 S_4(d_{147}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{147}^5) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

14-8:

$$\begin{aligned}c_{148} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{148}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{148}^1) + w_2 S_2(d_{148}^2) + w_3 S_3(d_{148}^3) + w_4 S_4(d_{148}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{148}^5) \\ &= 0.55\end{aligned}$$

14-9:

$$\begin{aligned}c_{149} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{149}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{149}^1) + w_2 S_2(d_{149}^2) + w_3 S_3(d_{149}^3) + w_4 S_4(d_{149}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{149}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

14-10:

$$\begin{aligned}c_{1410} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1410}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1410}^1) + w_2 S_2(d_{1410}^2) + w_3 S_3(d_{1410}^3) + w_4 S_4(d_{1410}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1410}^5) \\ &= 0.54\end{aligned}$$

14-11:

$$\begin{aligned}c_{1411} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1411}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1411}^1) + w_2 S_2(d_{1411}^2) + w_3 S_3(d_{1411}^3) + w_4 S_4(d_{1411}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1411}^5) \\ &= 0.74\end{aligned}$$

14-12:

$$\begin{aligned}c_{1412} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1412}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1412}^1) + w_2 S_2(d_{1412}^2) + w_3 S_3(d_{1412}^3) + w_4 S_4(d_{1412}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1412}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

14-13:

$$\begin{aligned}c_{1413} &= \sum_{j=1}^5 w_j S_j(d_{1413}^j) \\ &= w_1 S_1(d_{1413}^1) + w_2 S_2(d_{1413}^2) + w_3 S_3(d_{1413}^3) + w_4 S_4(d_{1413}^4) \\ &\quad + w_5 S_5(d_{1413}^5) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

**Tabla 15**

Matriz de índices de preferencia

$c_{a_i a_k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0.2	0.1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.2	0.0	0.2
		2	0	6	4	4	2	7	0	0	1	1	4	5
2	0.7	0	0.1	0.2	0.4	0.2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.2	0.4	0.2	0.2
	0		0	5	0	6	5	9	5	5	5	5	7	5
3	0.9	0.7	0	0.2	0.9	0.7	0.2	0.2	0.9	0.7	0.7	0.7	0.4	0.2
	0	5		5	0	5	5	5	2	5	5	5	5	5
4	0.6	0.6	0.7	0	0.7	0.6	0.0	0.0	0.7	0.5	0.5	0.5	0.2	0.0
	5	6	5		5	7	0	6	5	0	0	0	0	0
5	0.9	0.5	0.1	0.3	0	0.5	0.3	0.3	0.8	0.4	0.5	0.5	0.2	0.2
	4	6	0	0		7	0	5	5	5	5	5	8	5
6	0.9	0.5	0.0	0.2	0.4	0	0.2	0.2	1.0	0.4	0.5	0.7	0.2	0.2
	0	0	9	5	0		5	8	0	5	0	5	5	5
7	0.9	0.6	0.7	0.9	0.6	0.6	0	0.9	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	0.7
	0	5	5	0	5	7		5	5	5	5	5	7	5
8	0.9	0.6	0.7	0.7	0.6	0.6	0.0	0	0.7	0.7	0.5	0.5	0.5	0.2
	0	5	1	0	5	5	0		3	5	0	0	0	5
9	0.9	0.5	0.0	0.2	0.1	0.0	0.0	0.2	0	0.4	0.5	0.5	0.0	0.2
	0	0	0	5	5	0	0	5		5	0	0	0	5
10	0.6	0.7	0.2	0.4	0.1	0.5	0.2	0.2	0.5	0	0.5	0.7	0.5	0.7
	9	1	5	5	5	2	1	5	5		0	0	3	0
11	0.9	0.6	0.2	0.4	0.4	0.1	0.2	0.3	0.8	0.2	0	0.7	0.2	0.2
	0	6	5	0	0	7	5	1	0	5		5	8	5
12	0.7	0.4	0.2	0.4	0.4	0.1	0.2	0.3	0.5	0.2	0.0	0	0.2	0.2
	0	6	5	0	0	7	5	0	0	5	0		8	5
13	0.9	0.6	0.5	0.7	0.4	0.6	0.2	0.4	1.0	0.7	0.6	0.6	0	0.2
	0	5	4	0	5	5	5	3	0	5	5	5		5
14	0.7	0.7	0.7	0.5	0.6	0.7	0.2	0.5	0.7	0.5	0.7	0.7	0.7	0
	3	5	5	4	9	5	5	5	5	4	4	5	5	



**Paso 3.** Los flujos de orden saliente y entrante se calculan con las relaciones:

$$\phi_{a_i}^+ = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{a_i x} \quad y \quad \phi_{a_i}^- = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} c_{x a_i}$$

$$\phi_1^+ = 0.105 \quad \phi_2^+ = 0.313 \quad \phi_3^+ = 0.609 \quad \phi_4^+ = 0.461 \quad \phi_5^+ = 0.465$$

$$\phi_6^+ = 0.452 \quad \phi_7^+ = 0.688 \quad \phi_8^+ = 0.576 \quad \phi_9^+ = 0.288 \quad \phi_{10}^+ = 0.478$$

$$\phi_{11}^+ = 0.437 \quad \phi_{12}^+ = 0.324 \quad \phi_{13}^+ = 0.605 \quad \phi_{14}^+ = 0.657$$

Asimismo,

$$\phi_1^- = 0.824 \quad \phi_2^- = 0.594 \quad \phi_3^- = 0.357 \quad \phi_4^- = 0.435 \quad \phi_5^- = 0.464$$

$$\phi_6^- = 0.452 \quad \phi_7^- = 0.175 \quad \phi_8^- = 0.334 \quad \phi_9^- = 0.696 \quad \phi_{10}^- = 0.472$$

$$\phi_{11}^- = 0.469 \quad \phi_{12}^- = 0.593 \quad \phi_{13}^- = 0.346 \quad \phi_{14}^- = 0.304$$

**Tabla 16**

Matriz de índices de preferencia con flujos

$c_{a_i a_k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\phi_{a_i}^+$
1	0	0.2	0.1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.2	0.0	0.2	0.1
		2	0	6	4	4	2	7	0	0	1	1	4	5	05
2	0.7	0	0.1	0.2	0.4	0.2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.2	0.4	0.2	0.2	0.3
	0		0	5	0	6	5	9	5	5	5	5	7	5	13
3	0.9	0.7	0	0.2	0.9	0.7	0.2	0.2	0.9	0.7	0.7	0.7	0.4	0.2	0.6
	0	5		5	0	5	5	5	2	5	5	5	5	5	09
4	0.6	0.6	0.7	0	0.7	0.6	0.0	0.0	0.7	0.5	0.5	0.5	0.2	0.0	0.4
	5	6	5		5	7	0	6	5	0	0	0	0	0	61
5	0.9	0.5	0.1	0.3	0	0.5	0.3	0.3	0.8	0.4	0.5	0.5	0.2	0.2	0.4
	4	6	0	0		7	0	5	5	5	5	5	8	5	65
6	0.9	0.5	0.0	0.2	0.4	0	0.2	0.2	1.0	0.4	0.5	0.7	0.2	0.2	0.4
	0	0	9	5	0		5	8	0	5	0	5	5	5	52
7	0.9	0.6	0.7	0.9	0.6	0.6	0	0.9	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	0.7	0.6
	0	5	5	0	5	7		5	5	5	5	5	7	5	88
8	0.9	0.6	0.7	0.7	0.6	0.6	0.0	0	0.7	0.7	0.5	0.5	0.5	0.2	0.5
	0	5	1	0	5	5	0		3	5	0	0	0	5	76
9	0.9	0.5	0.0	0.2	0.1	0.0	0.0	0.2	0	0.4	0.5	0.5	0.0	0.2	0.2
	0	0	0	5	5	0	0	5		5	0	0	0	5	88
10	0.6	0.7	0.2	0.4	0.1	0.5	0.2	0.2	0.5	0	0.5	0.7	0.5	0.7	0.4
	9	1	5	5	5	2	1	5	5		0	0	3	0	78
11	0.9	0.6	0.2	0.4	0.4	0.1	0.2	0.3	0.8	0.2	0	0.7	0.2	0.2	0.4
	0	6	5	0	0	7	5	1	0	5		5	8	5	37
12	0.7	0.4	0.2	0.4	0.4	0.1	0.2	0.3	0.5	0.2	0.0	0	0.2	0.2	0.3
	0	6	5	0	0	7	5	0	0	5	0		8	5	24
13	0.9	0.6	0.5	0.7	0.4	0.6	0.2	0.4	1.0	0.7	0.6	0.6	0	0.2	0.6
	0	5	4	0	5	5	5	3	0	5	5	5		5	05
14	0.7	0.7	0.7	0.5	0.6	0.7	0.2	0.5	0.7	0.5	0.7	0.7	0.7	0	0.6
	3	5	5	4	9	5	5	5	5	4	4	5	5		57

$\phi_{a_i}^-$	0.8	0.5	0.3	0.4	0.4	0.4	0.1	0.3	0.6	0.4	0.4	0.5	0.3	0.3	0
	24	94	57	35	64	52	75	34	96	72	69	93	46	04	

Luego, se establece las relaciones de superación con las siguientes relaciones:  $a_i$  supera a  $a_k$  si y solo si:

$$\phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^- \text{ o } \phi_{a_i}^+ > \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- = \phi_{a_k}^- \text{ o } \phi_{a_i}^+ = \phi_{a_k}^+ \text{ y } \phi_{a_i}^- < \phi_{a_k}^-$$

Es decir:

7 supera a: 14,3,13,8,10,5,4,6,11,12,2,9,1

14 supera a: 3,13,8,10,5,4,6,11,12,2,9,1

3 supera a: 8,10,5,4,6,11,12,2,9,1

13 supera a: 10,5,4,6,11,12,2,9,1

8 supera a: 10,5,4,6,11,12,2,9,1

10 supera a: 5,4,6,11,12,2,9,1

5 supera a: 6,11,12,2,9,1

4 supera a: 6,11,12,2,9,1

6 supera a: 11,12,2,9,1

11 supera a: 12,2,9,1

12 supera a: 2,9,1

2 supera a: 9,1

9 supera a: 1

**Paso 4.** Cálculo del flujo neto para cada alternativa mediante la siguiente relación:

$$\phi_{a_i} = \phi_{a_i}^+ - \phi_{a_i}^- \text{ la cual determina la ordenación final: PROMETHEE II.}$$

$$\varphi_1 = 0.105 - 0.824 = -0.719 \quad \varphi_2 = 0.313 - 0.594 = -0.281$$

$$\varphi_3 = 0.609 - 0.357 = 0.252 \quad \varphi_4 = 0.461 - 0.435 = 0.026$$

$$\varphi_5 = 0.465 - 0.464 = 0.001 \quad \varphi_6 = 0.452 - 0.452 = 0.000$$

$$\varphi_7 = 0.688 - 0.175 = 0.513 \quad \varphi_8 = 0.576 - 0.334 = 0.242$$

$$\varphi_9 = 0.288 - 0.696 = -0.408 \quad \varphi_{10} = 0.478 - 0.472 = 0.006$$

$$\varphi_{11} = 0.437 - 0.469 = -0.032 \quad \varphi_{12} = 0.324 - 0.593 = -0.269$$

$$\varphi_{13} = 0.605 - 0.346 = 0.259 \quad \varphi_{14} = 0.657 - 0.304 = 0.353$$

Luego, una alternativa  $a_i$  supera a otra alternativa  $a_k$  si y solo si:  $\phi_i \geq \phi_k$ , y se obtiene un preorden completo, es decir, la ordenación final es:

Finalmente, se concluye que  $a_i$  supera a  $a_k$  si y solo si  $\phi_{a_i} \geq \phi_{a_k}$ , el preorden completo, y por tanto la ordenación final:

$$a_7 > a_{14} > a_{13} > a_3 > a_8 > a_4 > a_{10} > a_5 > a_6 > a_{11} > a_{12} > a_2 > a_9 > a_1$$

## DISCUSIÓN

La metodología multicriterio discreta PROMETHEE ha sido aplicada en un caso de estudio sobre un proceso de concurso de contrato anual 2021 de docentes en la Facultad de Ciencias.

El PROMETHEE I permite un resultado parcial sobre la selección del personal docente, en la cual se observa que de la comparación de a pares entre todas las alternativas de docentes participantes no siempre resultan sujetarse a las relaciones de superación, es decir, no indican claramente que una alternativa docente supere a otra, esto sucede con la alternativa docente 3 que no supera totalmente a la alternativa docente 13; la alternativa docente 13 no supera totalmente a la alternativa docente 8; la alternativa docente 10 no supera totalmente a la alternativa docente 5; tampoco la alternativa docente 5 no supera totalmente a la alternativa docente 4. La relación de superación significa que una alternativa docente tiene prioridad o es seleccionada en relación a otra alternativa docente.

El PROMETHEE II, permite complementar el PROMETHEE I, es decir, orienta y genera un resultado final o completo sobre todo el proceso de selección de contratos docentes. Observamos que la alternativa docente 07 ha superado a todas las demás alternativas docentes restantes, y constituye la primera opción de selección sobre los demás.

Asimismo, indicar que todas las alternativas docentes estuvieron sujetos a un conjunto de criterios condicionantes, en un número de cinco (05), si bien en el proceso real de selección no se sujetaron a todas ellas, pero esto a su vez constituye una propuesta de separar las evaluaciones de criterios condicionantes necesarias cuando se pueda contratar docentes en instituciones académicas.

Parece razonable que una vez discutida tanto la naturaleza como el funcionamiento de algunos métodos multicriterios discretos, planteemos la evaluación comparativa de las ventajas e inconvenientes que presentan dichos métodos. En la metodología PROMETHEE existen un componente importante que lo enriquece y permite una rigurosidad matemática cuando se incorporan los denominados criterios generalizados que consisten en un conjunto de funciones matemáticas del tipo reales y que, continúan en perfeccionamiento para ser asignar el modelamiento matemático a través de las funciones de preferencias; pero cuestionarse sobre cuál es el método multicriterio más adecuado. Al respecto, la respuesta, no es sencilla, pues cada método conlleva una serie de ventajas e inconvenientes.

El problema de decisión multicriterio tiene una amplia aplicabilidad, pero a su vez cuenta con un considerable conjunto de métodos de solución, en este caso el estudio y análisis de la metodología PROMETHEE permite conocer de las posibilidades de métodos de solución a determinados problemas frecuentes y ser conscientes de su utilización en los problemas de decisiones multicriterio.

Los modelos matemáticos especialmente de aquellos que se plantean en optimización matemática, se basan en los problemas matemáticos que sirve de gran ayuda en el cálculo de prioridades o preferencias y que complementa el procedimiento del PROMETHEE para lograr las soluciones del problema de decisiones.

## CONCLUSIONES

Las aplicaciones en una amplia gama de situaciones problemáticas evidencian la importancia de la metodología PROMETHEE para solucionar los problemas organizaciones y contribuye una ayuda a la toma de decisiones multicriterio.

La exploración de los criterios generalizados se evidencia en la aplicación del caso de estudio de los seis tipos de ellos establecidos, tales como el de tipo II y el de tipo V.

La investigación de la aplicación sobre el caso de estudio de contrato anual docente 2021 mediante la metodología de solución PROMETHEE es una propuesta sobre selección de personal docente en la Facultad de Ciencias ordenado y jerarquizado, con una visión distinta y que plantea la incorporación de exigencias académicas docentes indicadas a través de los criterios establecidos.

La existencia relativamente escasa de un soporte computacional indujo al desarrollo manual, laborioso para alcanzar los resultados determinados.

## RECOMENDACIONES

- En futuras investigaciones se sugiere explorar otras metodologías de solución existentes al problema de decisión multicriterio discreta, entre ellas TOPSIS.
- Cada criterio generalizado utilizado en la metodología PROMETHEE permite adecuar, profundizar y justificar el estudio de diversas situaciones problemáticas, por ello se hace necesario hacer uso de mayores y mejores de los criterios generalizados establecidos.
- El PROMETHEE es una metodología que estructura e integra de forma natural todos los criterios relevantes del problema, ya sea se trate de naturaleza con variables cualitativos y/o cuantitativos.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barba-Romero, S. y Pomerol, J.C. (1997). *Decisiones Multicriterio: Fundamentos teóricos y utilización práctica*. Servicios de Publicaciones de la Universidad Alcalá de Henares.
- Begoña, V. (2007). *Teoría de la Decisión*. Servicios de Publicaciones de la Universidad Complutense de Madrid.
- Brans, J.P. (1982). *L'Ingénierie de la decision. Elaboration d'instruments d'Aide á la decision. La method PROMETHEE*. Université LAVAL. Colloque d'Aide á la decision, Québec, pp. 183-213.
- Brans, J.P., Mareschal, B. y Vincke, P. (1984). PROMETHEE: A new family of outranking methods in MCDM. Edit. Operational Research 84. North Holland (1100 p.): pp. 447-490.
- Brans, J.P. (1985). A Preference Ranking Organisation Method. Management Science. Vol. 31. N°6. Informs. University of Brussels.
- Brans, J.P., Mareschal, B. y Vincke, P. (1986). How to select and how to rank projects: The PROMETHEE Method. Edit. European Journal of Operational Research 24, pp. 228-238. North Holland.
- Briggs, John et Al (1990). Spatial and temporal patterns of vegetation within the Flint Hills.
- Chávez, H. (2013). Metodología de análisis multicriterio aplicación al crecimiento sostenible en la Unión Europea. Alicia <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/administrativas/article/view/8668>

- De Keyser, W. y Peeters, P. (1996). Theory and Methodology. A note on the use of PROMETHEE multicriteria methods. *European Journal of Operational Research* 89. Elsevier. 457-461.
- Division of Biology Ackert Hall, Kansas State University, Manhattan, KS 66506. *Academy Science*
- Fernández, G. (1998). Los Métodos PROMETHEE: Una metodología de ayuda a la toma de Decisiones Multicriterio Discreta. Universidad San Pablo-CEU.
- Gradevinski Institut, Faculty of Civil Engineering, University of Split, Yugoslavia
- Hermans, C., Erickson, J. (2007). Collaborative environmental planning in river management. An application of multicriteria decision analysis in the White River Watershed in Vermont. *Elsevier*
- Martin, B., St. Onge y Waub, JP. (2010). Multiple criteria decision analysis and geographic information systems. Springer
- Martinez, E. et Al, (1998). Evaluación y Decisión Multicriterio-Reflexiones y Experiencias. Chile. Editorial Universidad de Santiago de Chile /UNESCO.
- Noor Azizah, K. M. (2007). A Review of Selected Multi-Criteria Decision Analysis Techniques and Applications. Reino Unido. Intelligent Modeling and Analysis Research Group.
- Romero, C. (1993). Teoría de la Decisión Multicriterio. Alianza Editorial de publicaciones de la U.A.H.
- Rosales, M. (2017). Estudio comparativo de los métodos promethee como herramienta de solución del problema de decisión multicriterio discreta. [Repositorio.unasam.edu.pe](http://repositorio.unasam.edu.pe)
- Seminario, R. (2020). Búsqueda y selección de proveedores. Alicia. <http://repositorio.unp.edu.pe/handle/20.500.12676/2408>

Vojislav Tomic, Z.M. (2011). Promethee Method Implementation with Multicriteria Decisions. Mechanical Engineering Faculty. Serbia.

Ribarovic, Zoran y Mladineo, Nenad (1987). Application of multicriterional analysis to the ranking and evaluation of the investment programmes in the ready mixed concrete industry.

Waub, Jean-Philippe (2000). Évaluation des impacts sur L'environnement en péril. La nécessité d'agir. ISSN. 0711-2440, France

