# UNIVERSIDAD NACIONAL "SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

ESCUELA DE POSTGRADO

# PLANEAMIENTO DEL TRANSPORTE DE CLIENTES TURÍSTICOS EN HUARAZ BAJO UN ENFOQUE MULTICRITERIO

Tesis para optar el grado de Maestro
en Ciencias e Ingeniería
Mención en Computación e Informática

HENRRY ÁNGEL GARRIDO ANGULO

ASESOR: Dr. JESÚS EDILBERTO ESPINOLA GONZALES

Ancash - Perú

2010

N° Registro: T0210

**MIEMBROS DEL JURADO**

*Magíster* Esmelin Niquín Alayo Presidente

*Magíster* Rosa Vilchez Vásquez Secretaria

*Doctor* Jesús Edilberto Espinola Gonzáles Vocal

**ASESOR**

**Doctor Jesús Edilberto Espinola Gonzáles**

**ASESOR ASOCIADO**

**Doctor Stefan Nickel**

**Universität des Saarlandes-Deutschland**

## AGRADECIMIENTO

- A la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo por facilitarme un perfeccionamiento exterior por medio del Programa Alfa-E.U
- A mi asesor Dr. Jesús Espinola, quien con sus acertadas sugerencias y apoyo permanente hicieron posible la realización de la presente tesis.
- Al Prof. Dr. Stefan Níkel y Dr. Jörg Kalsics quienes dedicaron parte de su tiempo para orientarme y brindarme su apoyo incondicional a fin de cumplir mis metas trazadas.

## DEDICATORIA

A mi adorable esposa Ysabel, a mis hijas: Angenella y Nátaly, los joyas más valiosas de mi vida, razones de ser de mi existencia, quienes con su inmensa ternura me hicieron vislumbrar y esforzarme por aspirar a un futuro mejor.

A mi madre Paula y a la memoria de mi padre Juan, autores de mi existencia, ejemplos de amor y de lucha continua, a mis hermanos, mi familia que de una u otra manera me brindaron su comprensión constante para conseguir mis objetivos trazados.

## INDICE


| | Página |
|---|---|
| Resumen | ix |
| Abstract | x |
| I. INTRODUCCIÓN | 1 |
| Objetivos | 3 |
| Hipótesis | 3 |
| Variables | 4 |
| II. MARCO TEÓRICO | 6 |
| 2.1. Antecedentes | 6 |
| 2.2. Bases teóricas | 10 |
| Marco Legal | 10 |
| Fundamentos Matemáticos | 15 |
| Métricas | 15 |
| Teoría de Grafos | 17 |
| El Problema del Agente Viajero | 24 |
| El Problema de Rutas de Vehículos | 31 |
| El Problema de Rutas de Vehículos con Enfoque Multicriterio | 40 |
| El Método de las Ponderaciones | 52 |
| 2.3. Definición de términos | 55 |
| Algoritmo y Heurísticas | 57 |
| Optimización Multiobjetivo | 59 |
| III. MATERIALES Y MÉTODOS | 61 |
| 3.1. Tipo de Investigación | 61 |

3.2. Plan de recolección de datos 61

3.3. Instrumentos de recolección de datos 63

3.4. Plan de procesamiento de datos 64

3.5. Plan de análisis de datos 67

IV. RESULTADOS 72

V. DISCUSIÓN 92

VI. CONCLUSIONES 97

VII. RECOMENDACIONES 100

VIII. BIBLIOGRAFÍA 102

ANEXO 105

# RESUMEN

La optimización combinatoria bajo enfoque multicriterio se utiliza para modelar el problema del transporte de clientes turísticos asociado a un conjunto de hoteles dispersados geográficamente en la ciudad de Huaraz. Una flota de **k** vehículos se dispone para recoger en los hoteles a los clientes partiendo de un depósito bien ubicado con el propósito de diseñar un conjunto de rutas. Se determinan las rutas que se inician y finalizan en el depósito para el recojo de los clientes en cada hotel, logrando recorridos de distancia mínima y satisfacción en el cliente. Una heurística es propuesta para solucionar este modelo.

***Palabras Clave:*** *Optimización Combinatoria, Problema de rutas de Vehículos, Enfoque Multicriterio, Heurísticas.*

## ABSTRACT

*In this work combinatorial optimization is used to model the tourist transport vehicle routing problem associated to the set of hotels geographically dispersed in the city of Huaraz. A fleet of* ***k*** *vehicles is allowed to pick up customers at hotels outside starting at one well-placed depot with the purpose of designing a set of routes. It is determined the routes which starts and ends at a depot for picking of customers, obtaining routes with minimize distances allowing satisfied customers. To solve the model, a heuristic approach is proposed.*



***Key Words:*** *Combinatorial optimization, Vehicle routing problem, Multicriteria Focus, Heuristics.*

# I. INTRODUCCIÓN

Este proyecto tiene como propósito presentar en forma didáctica y metodológica el estudio de una investigación aplicada al planeamiento del transporte de clientes turísticos y que se fundamenta en el problema de rutas de vehículos bajo un enfoque de multicriterio, que va a permitir diseñar un conjunto de buenas rutas para los vehículos de transporte de servicios turísticos en la ciudad de Huaraz. Se parte del conocimiento de un conjunto de hoteles de nuestra ciudad, los cuales fueron elegidos con ciertos criterios, especialmente por el servicio de atención y comodidad al cliente; y considerando la propuesta de un lugar para el depósito de los vehículos, éstos puedan salir y retornar a dicho lugar desarrollando el servicio de recojo de los clientes en los hoteles y sobre lo que en la presente investigación significará el planeamiento del transporte del recojo de clientes, y por ello las conclusiones obtenidas permitan disponer de ciertas ventajas económicas para los prestadores del servicio de transporte, y las rutas obtenidas puedan servir de apoyo y guía en el ordenamiento del transporte de la ciudad y que esto permita brindar comodidad y seguridad a nuestros visitantes.

Por medio de la literatura científica se sabe que, la optimización de rutas ha sido y continúa siendo un problema de análisis en diversos campos de la investigación.

Hoy en día una ciudad moderna se compone de toda una serie de redes físicas y logísticas que estructuran una entidad compacta y compleja, podemos afirmar que la eficiencia en la organización de la ciudad como ente unitario y complejo depende directamente de una buena organización de las redes logísticas,

y en especial la del transporte y más aún cuando se presta servicio al cliente en un sector tan delicado como es la actividad turística.

En nuestro país, la actividad turística mantiene deficiencias en su organización sistemática, básicamente en el transporte que permita lograr propósitos técnicos-científicos respecto de quienes ofrecen los servicios turísticos, y a su vez inmersos en una identidad cultural de complejas características.

En el Perú, no existen trabajos con modelación matemática de problemas aplicados al transporte, específicamente en el sector turístico, y más aún tomando consciencia de la enorme complejidad real que presentan cada uno de ellos. También las limitaciones en el uso de programas computacionales especializados hacen que contribuyan al empirismo en la toma de decisiones para resolver los problemas de esta actividad.

Para ordenar los conceptos necesarios y proponer la solución al problema de planeamiento del transporte en el sector turístico se ha visto por conveniente tocar temas preliminares como el problema del agente viajero, el problema de rutas de vehículos con tiempos de ventana y finalmente el problema de rutas multiobjetivo, todos ellos adecuados al sector turístico.

La optimización de los problemas de rutas son de gran complejidad computacional, por ello un algoritmo de búsqueda heurística puede dar un enfoque apropiado para resolverlo.

Además, en los últimos tiempos, se ha producido un desarrollo muy fuerte en la aplicación de nuevas tecnologías en todos los aspectos de la actividad diaria, lo que supone proceder a su implantación como una necesidad imperiosa en un mundo cada vez más global y virtual. Dentro del desarrollo de las nuevas

tecnologías tiene especial importancia en el sector del transporte, ya no sólo como mero elemento de soporte físico para la distribución y movimiento de clientes, sino como auténtico motor de desarrollo económico.

**Objetivos del estudio**

**Objetivo General**

Aplicar modelos de la optimización combinatoria bajo un enfoque de criterio múltiple para planificar un conjunto de rutas para el transporte de servicios turísticos en el recojo de los clientes en los hoteles de nuestra ciudad de Huaraz.

**Objetivos Específicos**

a. Minimizar las rutas de los vehículos de transporte en el recojo a los clientes turísticos en los hoteles a partir de un depósito de vehículos logrando una satisfactoria atención al cliente en la ciudad de Huaraz.

b. Minimizar los tiempos de servicios en el recojo de los clientes en los hoteles de los vehículos de transportes logrando una atención oportuna.

c. Minimizar los costos operativos de los servicios de transporte en el recojo a los clientes turísticos.

d. Implementar computacionalmente la solución al problema del recojo de los clientes turísticos en los hoteles desde un depósito de vehículos en la ciudad de Huaraz, utilizando el lenguaje de programación Mosel XPress como herramienta computacional.

**Hipótesis**

El planeamiento del transporte de clientes turísticos bajo un enfoque multicriterio se logra mediante la aplicación de heurísticas de la optimización combinatoria

permitiendo disponer de rutas mínimas para los vehículos de transporte en servicios turísticos en la ciudad de Huaraz.

**Variables**

El planeamiento del transporte de clientes en el sector turístico en cuanto al problema de rutas permite tener en consideración la definición de las siguientes variables:

**Variables Independientes**

**Demanda de Clientes (DEM)**: Indica la cantidad tanto de visitantes turísticos nacionales como extranjeros alojados en los hoteles de la ciudad de Huaraz.

**Hoteles (Hotel)**: Indica el número de los servicios de hospedaje en la ciudad de Huaraz.

**Capacidad de los Vehículos (CAP)**: Indica la cantidad de pasajeros-clientes en cada uno de los vehículos homogéneos en cuanto a su capacidad para el servicio de transporte turístico.

**Variables Dependientes**

**Costos Operativos (C)**: Indica los gastos promedio que realizan los vehículos para el transporte de servicio turístico.

**Tiempo (T)**: Indica el tiempo promedio que realizan los vehículos de transporte turístico en el recojo de los clientes.

**Vehículos (Veh)**: Indica el número de vehículos en el depósito que se utilizarán en el recojo de clientes en los hoteles para el transporte del servicio turístico.

**Rutas (R)**: Indica el número de rutas empleado por los vehículos de transporte para el recojo de los clientes en los hoteles de la ciudad de Huaraz.

**Flujo de Vehículo (D)**: Indica una variable de decisión que permite encontrar tiempo mínimo de recorrido, número mínimo de rutas, costos mínimos de recorrido y servicio de atención mínima al cliente en el transporte del recojo de los clientes desde los hoteles para el servicio turístico.

# II. MARCO TEORICO

## 2.1. Antecedentes

En la literatura de la programación multicriterio aplicados a la planificación del transporte, existen aún pocas referencias de trabajos de investigación; pero entre los que se puede citar tenemos el realizado por Mariano Luque et al. (2003), "Problemas de rutas en caminos forestales considerando múltiples criterios"; el realizado por Garza Ríos (2001), "Procedimiento multicriterio para la planificación de las rutas de distribución" y "Diseño multicriterio de ruta en cadenas de productos lácteos" (2008), realizados en Cuba; "Planificación de rutas turísticas bajo un enfoque multicriterio" (2005), en la Universidad de Málaga, España; y últimamente el trabajo de Rafael Caballero et al. (2009) "Modelo de rutas biobjetivo. Aplicación al transporte escolar en áreas urbanas", en USA.

La planificación del transporte se relaciona con el concepto de logística urbana, y antecedentes claros se muestran en el libro de Larson y Odoni (1981) sobre investigación operativa urbana o el libro de Daganzo (1994) en logística, y va más allá de éstas visiones parciales, ya que ahora se trata de replantear todos los servicios y operaciones de la ciudad adaptando técnicas que se han aplicado con éxito en entornos privados y en muchos ámbitos del transporte y la logística empresarial: la reingeniería de los servicios urbanos.

Así de este modo, y como se trata en Robusté (1996), sería necesario englobar como línea de investigación, el problema de rutas de vehículos (VRP) para el transporte urbano en todas sus acepciones (transporte público, tráfico, aparcamiento, peatones, motos y bicicletas), el transporte de

mercancías, los servicios de correos, los servicios de limpieza, riego y mantenimiento de calles, el recojo de basura, los servicios de respuesta rápida (policía, bomberos, asistencia médica, etc.), las operaciones de mantenimiento de las redes de infraestructuras básicas urbanas, la gestión de parques y jardines, los servicios de nueva generación derivados del avance tecnológico en informática y telecomunicaciones.

Desde entonces se ha producido un gran número de aplicaciones con una gama de extensiones y variaciones originando algoritmos y heurísticas como soluciones alternativas en los problemas de rutas de vehículos clásicos.

Los trabajos iniciales de Solomon (1987) referidos a desarrollar algoritmos para los problemas de horarios y rutas para vehículos y más tarde incorporadas con condiciones de ventanas de tiempo permitieron mejorar los modelos matemáticos de situaciones reales y prácticas. Es importante resaltar los aportes realizados por Nickel (1999) en problemas de transporte que fortalecen enormemente este campo de investigación, como el transporte de pacientes en hospitales bajo un enfoque de optimización en línea logrando desarrollar un software de trabajo aplicativo como el OPTI-TRANS, realizado en Alemania.

Los problemas de optimización de criterio múltiple han tenido interés creciente de los investigadores de varias especializaciones a partir de los años 60 esencialmente, y en adelante varios investigadores han hecho contribuciones significativas al problema.

Desde el punto de vista de las aplicaciones en las organizaciones, el análisis multicriterio se utiliza en dos formas diferentes. Por una parte la decisión

multicriterio discreta, la cual se interesa por la elección entre un número finito de alternativas posibles (proyectos, inversiones, candidatos, etc.). El segundo se centra, fundamentalmente, en la programación lineal con criterios múltiples y sus algoritmos asociados (simplex multicriterio, programación por metas, etc.).

Esta parte del análisis multicriterio discreta permite tener una ayuda efectiva en la práctica de la toma de decisiones y de la gestión en las organizaciones.

El análisis multicriterio es un campo destinado principalmente a los gestores y decisores a fin de que sea de utilidad para sus responsabilidades profesionales.

A pesar de existir una importante literatura científica sobre la decisión multicriterio, las herramientas, los métodos, y hasta la propia reflexión multicriterio, permanecen casi totalmente desconocidos por los técnicos y los directivos a todos los niveles.

Pero aún continúa hoy en día la cultura científica que privilegia la noción de la "mejor decisión". Y sin embargo, en el análisis multicriterio, el óptimo, en el sentido estricto del término, no existe, ni por tanto en la inmensa mayoría de las situaciones reales de decisión.

El análisis multicriterio carece del inmenso arsenal de resultados matemáticos que dotan de tanta elegancia y encanto a la teoría de optimización, pero aporta no obstante algunas interesantes propiedades cuyo desconocimiento conduce a los decisores a redescubrir la rueda. Entre los más destacados está, Vilfredo Pareto, que contribuyó al desarrollo teórico de la optimización multicriterio.

Respecto de las investigaciones en la actividad turística mediante este campo de la optimización multicriterio aún son muy escasas, y más sobre aquellos que puedan estar referidos al estudio y análisis de nuestra realidad, la cual siquiera permita disponer de una guía para realizar una efectiva planificación global. Generalmente en nuestra idiosincrasia la costumbre y desconocimiento de técnicas científicas nos lleva a realizar y tomar decisiones de manera empírica, por tal motivo da mayor notoriedad abordar este tipo de problemas, y por consiguiente sentar las bases para servir de referente esta iniciativa investigativa en este rubro turístico.

La investigación está orientada exclusivamente a contribuir en una planificación de un servicio mejor en cuanto a rutas para el transporte del cliente turístico satisfaciendo sus expectativas de comodidad y seguridad en su visita a nuestra ciudad, asimismo generar ciertos beneficios económicos al prestatario del servicio de transporte.

Por otro lado, un elemento que participa de esta actividad del transporte de servicio turístico en nuestra ciudad, son las agencias de turismo. Según las estadísticas existen cerca un centenar de ellas dedicadas a la actividad turística, las cuales por falta de un sistema de trabajo técnico-científico brindan un servicio poco satisfactorio a los visitantes turísticos.

Durante los últimos años el evidente incremento del flujo turístico hacia la ciudad de Huaraz, como centro receptor ha incentivado la creación de un mayor número de agencias de turismo, de acuerdo a lo observado y a los estudios realizados anteriormente podemos afirmar que es, en este rubro de

la actividad turística donde se reflejan las mayores deficiencias en cuanto a la prestación del servicio al cliente turístico en el sistema del transporte.

## 2.2. Bases Teóricas

### 2.2.1 Marco Legal

El ente rector de la actividad turística es el Ministerio de Comercio Exterior y Turismo (**MINCETUR**), es el promotor principal a nivel nacional competente en materia de la actividad turística, sus atribuciones básicas son la formulación, establecimiento y ejecución de la política y estrategia nacional del turismo, así como la elaboración normativa, fiscalización, gestión y administración de toda la actividad turística, realizando coordinaciones que para su aplicación resulten necesarias con otras entidades públicas y privadas, y por ello cumple funciones incentivando el incremento del nivel técnico y profesional en el campo turístico. Es indispensable para la continuación del proyecto, conocer la normativa que rige en nuestro país de la actividad turística y sobre la cual la investigación pretende dar ciertas pautas y sugerencias para conseguir un efectiva planeación de la actividad turística en ciudades principales del país o al menos en un sector cardinal, si las condiciones lo permiten para el desarrollo de tal propósito.

El sector turismo está amparado por la ley para el desarrollo de la Actividad Turística, lo cual constituye el marco legal para el desarrollo y regulación de la actividad turística. Por ello es imperativo disponer del conjunto de políticas gubernamentales para la realización y estabilidad del trabajo donde la planeación del transporte turístico en la actividades turísticas de ciudades

principales del país conlleven a un ordenamiento de transporte y donde esencialmente la comodidad y satisfacción al turista es la prioridad en el desarrollo de esta actividad.

Básicamente en el planeamiento del transporte de servicios turísticos, los problemas de decisión pueden ser identificados sobre la complejidad del modelo resultante.

Nuestro país se privilegia por el gran número de destinos turísticos en sus regiones, y en ciudades como centro receptores tal como lo es la ciudad de Huaraz, se necesita ordenar muchas variables de la actividad del transporte turístico; asimismo las teorías respectivas permiten ofrecer resultados satisfactorios al problema, permitiendo ofrecer una nueva visión de administración al transporte de turistas en su visita a los destinos tradicionales para una efectiva eficiencia en el servicio.

**Ley para el Desarrollo de la Actividad Turística**

El sector turístico tiene gran importancia cultural y económica en el desarrollo del país ya que constituye una fuente generadora de empleo primario, y con crecimiento progresivo.

El marco legal para el desarrollo y la regulación de la actividad turística está normada según la ley N° 26961. Sus principios básicos de la actividad turística son:

- Estimular el desarrollo de la actividad turística, como un medio para contribuir al crecimiento económico y el desarrollo social del país, generando las condiciones más favorables para el desarrollo de la iniciativa privada.

- Contribuir al proceso de identidad e integración nacional con participación y beneficio de la comunidad.
- Establecer el uso turístico racional y sostenible del Patrimonio Cultural y Natural de la Nación.
- Promover la competitividad de los productos turísticos nacionales, fomentando el desarrollo de infraestructura, la calidad de los servicios para la adecuada satisfacción de los clientes.
- Conservar el Patrimonio Cultural de la Nación, el entorno natural, las formas de vida, costumbres, identidad, entre otros, de las comunidades en las que se encuentran los atractivos turísticos.

Además, se debe tener en cuenta algunos conceptos básicos[1] generales de la actividad turística, y para ello se entiende por:

- **Actividades Turísticas.**- Son aquellas derivadas de las interrelaciones entre los turistas, los prestadores de servicios turísticos y el Estado.
- **Prestadores de Servicios Turísticos**.- Son aquellas personas naturales y jurídicas cuyo objeto es brindar algún servicio turístico.
- **Servicios Turísticos**.- Son aquellos servicios que satisfacen las necesidades de los turistas.
- **Turismo Interno**.- Es el realizado dentro del territorio nacional por turistas domiciliados en el país.
- **Turismo Receptivo**.- Es el realizado dentro del territorio nacional por turistas domiciliados en el exterior.

En el mismo contexto, los objetivos establecidos por la política estatal, son:

[1] Normas Legales "El Peruano"

- Establecer las condiciones necesarias para el desarrollo sostenible del turismo a través del mantenimiento de un producto turístico competitivo.
- Contribuir al proceso de descentralización.
- Proteger al turista.
- Dotar de infraestructura básica para el desarrollo de los recursos turísticos en concordancia con las disposiciones específicas de la materia.
- Garantizar la libre iniciativa privada para el desarrollo de infraestructura complementaria y para la prestación de servicios turísticos.
- Propiciar la investigación, formación y capacitación técnica y profesional.
- Fomentar la conciencia turística.

Asimismo las competencias de las municipalidades correspondientes son órganos de gobierno local que tienen dentro de su competencia la facultad de promover los recursos turísticos de su localidad, ejecutando las acciones y programas en dicha materia, acorde con los principios básicos del Estado y con los objetivos y estrategias que formule el ente rector.

Aunque la complejidad del sector turístico se manifiesta en los prestadores de servicios turísticos ya sea como persona natural o jurídica, así tenemos:

- Agencias de viajes y turismo.
- Establecimientos de hospedajes en todas sus formas.
- Restaurantes y afines.

- Casinos de juego y similares.
- Empresas de transporte turístico.
- Uso turístico de fuentes de agua minero-medicinales.
- Guías de turismo, en sus diferentes especialidades.
- Empresas organizadoras de congresos y ferias internacionales.
- Otras que establezca el Ministerio de Industria.

**Clientes del Transporte Turístico Terrestre**

Los clientes tienen derecho a:

- Ser transportado en condiciones de seguridad, *calidad y comodidad* establecidas convenidas en el transporte.
- Exigir al conductor que su ascenso y descenso del vehículo se realice en los lugares permitidos o no prohibidos por la autoridad competente.
- Exigir y advertir que no se transporten drogas, armas de fuego, materiales inflamables, explosivos, corrosivos, venenos o similares que pongan en riesgo la seguridad del viaje.
- Llevar consigo equipaje acompañado de hasta treinta kilogramos de peso.
- Usar la capacidad del vehículo conforme el medio de transporte.

Los clientes tienen el deber de:

- Ascender y descender del vehículo en los lugares permitidos y sólo cuando éste se encuentre detenido.
- No alterar la tranquilidad de los demás clientes ni provocar riñas o altercados al interior del vehículo.

- Acatar las instrucciones sobre seguridad que emita el conductor o la tripulación.
- Estar presente en el lugar y hora señalada para el inicio del servicio.
- No portar en el vehículo artículos o paquetes que puedan molestar o incomodar a los demás clientes.
- No viajar acompañados de menores de edad sin autorización de los padres, tutores o autoridades judiciales.

### 2.2.2 Fundamentos Matemáticos

La línea de investigación que enmarca el problema de la planificación de rutas de transporte es principalmente la Optimización Combinatoria, que bajo un enfoque de criterio múltiple se involucra con el problema de encontrar sobre un conjunto de restricciones alternativas, la mejor elección logrando una solución que permita ofrecer resultados satisfactorios en el problema.

De acuerdo a las necesidades teóricas matemáticas se ha visto por conveniente tratar los temas referidos a métricas, la teoría de grafos, el problema del agente viajero, el problema de ruta de vehículos y el estudio del problema de rutas de vehículos bajo el de multicriterio.

#### 2.2.2.1 Métricas

**Definición1.-** dado un conjunto $X \neq \varnothing$ , una métrica o distancia sobre $X$ es una función $d : XxX \rightarrow R$ en $X$ , si se cumplen las propiedades:

- Positividad: para cada $(x,y) \in X$, se tiene que $d(x,y) \geq 0$.
- Idéntica: dado $(x,y) \in X$ , $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- Simetría: si $(x,y) \in X$, se tiene que $d(x,y) = d(y,x)$.

- Desigualdad triangular: para cada $(x,y) \in X \wedge (x,z) \in X \wedge (y,z) \in X$ , se tiene que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

La expresión $d(x,y)$ se lee como distancia de x a y, y el par $(X,d)$ se denomina espacio métrico.

**Métricas Equivalentes**

En particular, sobre $\mathbb{R}^n$ podemos definir la métrica producto inducido por la recta, sean los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ :

- La métrica del máximo $D_1 = d_{max} : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

  $d_{max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$

- La métrica suma $D_2 = d_{suma} : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

  $d_{suma}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

- La distancia euclidiana $D_3 = d_u : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$d_u(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ , el par $(d_u, \mathbb{R}^n)$ se llama espacio de dimensión **n**.

A continuación se muestra una representación gráfica de las métricas definidas:

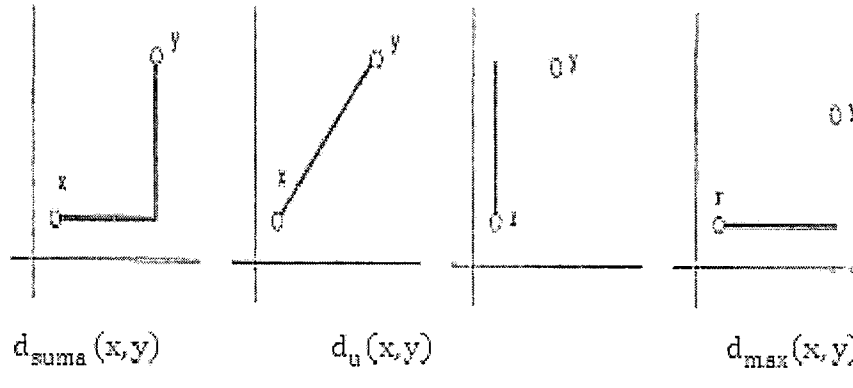


**Figura 1. Métricas de uso frecuente**

**Proposición 1.-** sean $(X,d)$, un espacio métrico y $(x,y),(x,z),(z,w),(y,w)$ en $X$, entonces $|d(x,z)-d(y,w)| \leq d(x,y)+d(z,w)$.

En particular, es $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$.

**Demostración:**

Aplicando dos veces consecutivas la desigualdad triangular, se tiene que

$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,w)+d(z,w)$,

Luego, $d(x,z)-d(y,w) \leq d(x,y)+d(z,w)$

Del mismo modo, $d(y,w) \leq d(y,x)+d(x,z)+d(w,z)$

Finalmente, $d(y,w)-d(x,z) \leq d(y,x)+d(w,z)$

### 2.2.2.2 Teoría de Grafos

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas aplicadas y la investigación operativa que se aplica en el tratamiento de diversos problemas del campo tecnológico, sociológico y económico.

Históricamente está comprobado que el hombre ante el planteo de un problema, tiende a hacer un diagrama en el que los puntos (o círculos) representan actividades, etapas de un proyecto o de un proceso, individuos, localidades entre otros, unidos estos por medio de líneas que indican una cierta relación entre ellos.

El matemático Alemán D. König, fue el pionero en proponer en un trabajo publicado en 1936 que tales diagramas recibieran el nombre de grafos, haciendo posteriormente un estudio sistemático de sus propiedades.

Los grafos son estructuras discretas compuestas por puntos (llamados vértices) y líneas (llamadas aristas) que conectan algunos pares de esos

puntos. Son una abstracción útil para modelar diversas situaciones reales como por ejemplo: sistemas de transporte y distribución de mercancías y sistemas organizacionales; redes de computadoras, redes telefónicas o eléctricas, circuitos eléctricos.

**Definición 2.-** Un grafo $G=(V,E)$ consiste en un conjunto finito $V$ cuyos elementos se llaman vértices y una familia finita $E$ en $VxV$ de pares no ordenados de vértices a cuyos elementos llamaremos aristas y denotaremos por $(u,v)$ donde $u,v$ están en $V$.

**Definición 3.-** El orden de un grafo $G$, denotado por $V$, es la cardinalidad del conjunto $V$. Por lo general se utiliza **n** para denotar el orden de $G$.

**Definición 4.-** La dimensión o tamaño del grafo $G$, denotado por $E$, es la cardinalidad del conjunto $E$. Por lo general se utiliza $m$ para denotar el tamaño de $G$.

**Definición 5.-** Dado un grafo $G=(V,E)$, entonces:

1. Se llama lazo o bucle a toda arista de la forma $(v,v)$
2. Se llama aristas múltiples a las aristas que aparecen repetidas en $E$.
3. Se dice que dos vértices son adyacentes si están unidos por una arista.
4. Se dice dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común.
5. Se dice que una arista y un vértice son incidentes si el vértice es extremo de la arista.
6. Se dice un vértice es aislado si no es adyacente a ningún otro vértice.
7. Se dice que un grafo es simple si no tiene bucles ni aristas múltiples.

**Definición 6-** Dado un grafo $G=(V,E)$, se llama grado de un vértice al número de aristas incidentes en él, contando los bucles como dos aristas. Se denota por $\deg(v)$ al grado del vértice v.

**Proposición 2.-** Dado un grafo $G=(V,E)$, se cumple que $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$

**Demostración**

Cada arista contribuye en 1 al grado de cada uno de los vértices en los cuales es incidente. Por lo tanto, si $G$ tiene $m$ aristas, debe tenerse:

$$2m=d(v_1)+\ldots+d(v_n)$$

**Corolario 1.-** El número de vértices de grado impar en un $G=(V,E)$ es par.

**Demostración**

Consideremos el conjunto de vértices $V$ en dos subconjuntos, los que tienen grado par $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ y grado impar $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$.

Sean $S=d(x_1)+\ldots+d(x_m)$ y $T=d(y_1)+\ldots+d(y_n)$ en cada subconjunto, luego $S+T$ es par.

Pero $S$ es suma de números pares, entonces es par; y es $T$ suma de números impares. Por lo tanto, el número de vértices de grado impar es par.

**Definición 7.-** Un grafo $H=(V_H,E_H)$ es un subgrafo de un grafo $G=(V,E)$, si y sólo si $V_H\subseteq V$ y $E_H\subseteq E$.

**Observación 1**: Particularmente los subgrafos importantes son aquellos que se obtienen de un grafo, suprimiendo uno o varios vértices y las aristas incidentes en estos vértices.

**Definición 8.-** Un grafo $G=(V,E)$ es simple si a lo sumo una arista de $E$ une dos vértices cualesquiera de $V$.

**Grafo Completo**

**Definición 9**.- Un grafo $G=(V,E)$ es completo, si para cada par de vértices de $V$ en el grafo $G$, siempre existe la unión de ellos mediante una arista.

Un grafo completo de $n$ vértices tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

**Camino**

**Definición 10.-** Sea $G=(V,E)$ un grafo no vacío. Un camino es un subgrafo si $P=(V_P,E_P)$ de $G$ tal que $V_P=\{v_0,v_1,...,v_k\}$ y $E_P=\{v_0v_1,v_1v_2,...,v_{k-1}v_k\}$ donde los $v_i$ son diferentes. Los vértices $v_0$ y $v_k$ asociados al camino $P$ se llaman extremos de $P$.

**Grafo Conexo**

**Definición 11-** Un grafo $G=(V,E)$ es conexo, si cada par de vértices está conectado por un camino. Es decir si para cualquier par de vértices $(u,v)$, existe al menos un camino posible desde u hacia v.

Un grafo es fuertemente conexo si cada par de vértices está conectado por al menos dos caminos disjuntos. Es decir, es conexo y no existe un vértice tal que al eliminarlo el grafo resultante es disconexo.

**Camino Hamiltoniano**

**Definición 12.-** Un camino es hamiltoniano si contiene cada arista del grafo exactamente una sola vez.

Ejemplo: Un caballo puede recorrer todas las casillas de un tablero de ajedrez sin pasar dos veces por la misma.

**Grafo Orientado**

**Definición 13.-** Un dígrafo o grafo orientado $D=(V,E)$, consiste de un conjunto finito no vacío $V$ cuyos elementos se llaman vértices y una familia finita $E$ de pares ordenados de vértices a cuyos elementos llamaremos aristas.

Al par $(u,v)$ en $E$ lo denotaremos por $uv$ y diremos que $u$ es el extremo inicial y que $v$ es el extremo final.

**Definición 14.-** Dado un dígrafo $D=(V,E)$, se llama grado de entrada de un vértice al número de aristas que lo tienen por extremo final y se llama grado de salida de un vértice al número de aristas que lo tienen por extremo inicial.

**Definición 15.-** Dado un grafo $G=(V,E)$. Si $P=v_0v_1...v_{k-1}$ es un camino en el grafo $G$ para $k\geq 3$, entonces el grafo **C** definido por $C=P+v_{k-1}v_0$ es un ciclo.

Se denota por $C_n$ al ciclo de $n$ vértices.

**Observación 2:** Un circuito es un camino cerrado en el que no se repiten aristas, es decir, una trayectoria cerrada donde el nodo inicial y el final de la trayectoria coinciden.

**Ciclos Hamiltonianos**

Los circuitos hamiltonianos son llamados así en honor de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), un matemático Irlandés quien patentó un juego con la forma de un dodecaedro regular, a mediados del siglo XIX. Cada esquina del dodecaedro tenía el nombre de una ciudad y el problema era comenzar en cualquier ciudad, viajar a lo largo de las líneas, visitar cada lugar exactamente una vez y volver al punto de partida.

**Definición 16.**-Dado un grafo no dirigido $G$, un ciclo hamiltoniano es un ciclo simple que visita todos los vértices.

Un ciclo hamiltoniano en un grafo es un camino que contiene a todos los vértices del grafo exactamente una vez (salvo el vértice inicial que coincide con el vértice final, cuando el camino es cerrado).

**Observación 3**: No existen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de los circuitos hamiltonianos que permitan verificar con facilidad. Es decir todo algoritmo conocido para establecer circuitos hamiltonianos requiere, al menos, un tiempo exponencial o factorial en el peor de los casos.

**Teorema 1:** (Ore, 1960).- Si un grafo tiene $n \geq 3$ vértices y la suma de los grados de cualquier par de vértices no adyacentes es mayor o igual que $n$, entonces el grafo es hamiltoniano.

**Demostración**

Consideremos el grafo completo $K$ con el mismo conjunto de vértices que $G$. De todos los ciclos hamiltonianos en $K$ tomemos uno $C$ que tenga el mayor número posible de aristas en $G$. Si x es un vértice de $C$, llamemos $x^+$ a su sucesor en el ciclo. Probaremos que C tiene todas sus aristas en $G$. Para ello supongamos por el absurdo que una arista $xx^+$ no pertenezca a $G$. Sea $S$ el conjunto de todos los vértices de $G$ adyacentes a x. Sea $S^+ = y^+ : y \in S$. Es claro que $\left|S^+\right| = |S| = g(x)$. Afirmamos que $x^+$ es adyacente a algún $y^+ \in S^+$. En efecto, si no fuese así, como $x^+ \notin S^+$, los vértices adyacentes a $x^+$ estarían contenidos en $V(G)\left(S^+ \cup x^+\right)$ y por lo tanto

$g\left(x^{+}\right) \leq n-\left|S^{+}\right|-1=n-g(x)-1$, de donde $g\left(x^{+}\right)+g(x) \leq n-1<n$, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto, existe $y^{+} \in S^{+}$ adyacente a $x^{+}$. Pero esto nos permite cambiar las aristas $xx^{+}$ y $yy^{+}$ de C por las aristas $xy$ y $xy^{+}$, obteniendo un nuevo ciclo hamiltoniano $C^{'}$ en $K$ que tiene al menos una arista más en $G$ que $C$, lo cual es absurdo.

Para determinar si un grafo no dirigido dado tiene un ciclo hamiltoniano, no conocemos ningún algoritmo eficiente para resolverlo, en tiempo polinomial.

El problema del ciclo hamiltoniano pertenece a un conjunto de problemas de difícil solución llamado problemas no determinísticos polinomial (NP).

La solución requiere básicamente evaluar todas las posibilidades, dando lugar a un orden de complejidad exponencial o factorial. Otra posibilidad es usar métodos heurísticas, que pueden funcionar en algunos casos y en otros no.

**Corolario 2**: (Dirac, 1952).- Si $G=(V,E)$ es un grafo de orden $n \geq 3$ y grado mínimo mayor o igual que $\frac{n}{2}$, entonces $G$ es un grafo hamiltoniano.

**Demostración**

Si $u, v$ son dos vértices no adyacentes de $G$, entonces $g(u)+g(v) \geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}$ y por el teorema 1, $G$ es hamiltoniano.

**Función de Coste.-** Sea $G=(V,E)$ un grafo, a la correspondencia dado por $f: A \rightarrow R$ en $G$, tal que a cada arista $e$ del grafo $G$ se le asigna un único valor $f(e)>0$, se le llama función de coste.

**Grafo ponderado**

**Definición 17.-** Se dice que un grafo $G$ está ponderado si sus aristas tienen asignado un valor. Si cada arista a tiene un valor numérico no negativo $u(a)$, llamado peso o longitud de a, se dice que $G$ tiene peso. En este caso, cada camino $P$ de $G$ tendrá asociado un peso o longitud que será la suma de las aristas que forman el camino $P$.

**2.2.2.3 El Problema del Agente Viajero** (*Traveling Salesman Problem - TSP*)

**Introducción**

Muchas actividades de transporte como la entrega de pedidos y la distribución de redes se dan a diario en una ciudad. La ciudad está compuesta por un grupo de vías, y cada vía tiene su propio sentido. Cuando se desea ir de un punto a otro por el camino más corto en busca de optimizar los recursos, es necesario resolver esta interrogante de forma eficiente.

El Problema del Agente Viajero tiene considerables aplicaciones prácticas, aparte de las más evidentes en áreas de logística de transporte. El problema del agente viajero es un problema de tipo difícil (NP-completo), con un orden de complejidad exponencial y para el cual no existe solución polinómica.

En el TSP multicriterio, se tienen varios enfoques o funciones o propósitos de costes, de modo que aparte de la distancia entre los nodos (lugares), se

considera la calidad de la ruta entre ellas, el tiempo requerido para pasar de una a otra o el consumo del combustible empleado por el vehículo.

**Antecedentes**

La primera noticia que se tiene del TSP data de 1831; en Alemania un libro fue publicado y titulado como "Der Handlungsreisende" o bien "El Agente Viajero", donde se hacia la pregunta ¿Cómo debe de ser un agente viajero y que debe hacer para vender más y ser exitoso en su negocio? Respondiendo a esta pregunta con un programa de recorridos para poder cubrir tantos lugares como fuera posible sin visitar un lugar dos veces.

El problema del viajante, consiste en encontrar la ruta que lleva a cabo un vendedor, que comenzando por un origen visita un determinado y preestablecido conjunto de ciudades y vuelve a ese origen, de manera que la distancia recorrida total es mínima y cada ciudad sólo se visita una vez.

El TSP es quizás el problema de optimización combinatoria computacional más conocido y estudiado desde su formulación matemática en 1985, a pesar de la aparente sencillez de su planteamiento, el TSP es uno de los más complejos de resolver y existen demostraciones que equiparan la complejidad de su solución a la de otros problemas aparentemente mucho más complejos que han retado a los matemáticos desde hace siglos.

**Formulación Matemática del TSP**

La red de transporte por la que circulan los vehículos se modela mediante un grafo ponderado $G=(V,E,C)$. Los nodos del grafo representan a los clientes y depósitos. En problemas con un depósito y $n$ clientes, el nodo 0 representa al depósito y los nodos $1,\ldots,n$ a los clientes. En algunos casos se agrega una

copia del depósito etiquetada con $n+1$ para simplificar la formulación.

Cada arco $(i,j) \in E$ representa el mejor camino para ir de desde el nodo **i** hacia el nodo **j** en la red del transporte y tiene asociado un costo $c_{ij}$ y un tiempo de viaje $t_{ij}$. Según la estructura de costos y los tiempos y las características de la red, el grafo puede ser simétrico o asimétrico. Puede suponerse que $G$ es completo, pues entre todo par de lugares de una red de transporte razonable, debería existir algún camino. Sin embargo por una cuestión de flexibilidad, los modelos serán planteados sin realizar dicha hipótesis.

Denotaremos por $\Delta^{+}(i)$ y $\Delta^{-}(i)$ al conjunto de nodos adyacentes e incidentes al nodo **i**, es decir, $\Delta^{+}(i) = \{j \in V / (i,j) \in E\}$ y $\Delta^{-}(i) = \{j \in V / (j,i) \in E\}$. De manera similar, el conjunto de arcos incidentes hacia el exterior e interior del nodo **i** se definen como $\delta^{+}(i) = \{(i,j) \in E\}$ y $\delta^{-}(i) = \{(j,i) \in E\}$.

En el Problema del Agente Viajero se dispone de un solo vehículo que debe visitar a todos los clientes en una sola ruta y a costo mínimo. No suele haber un depósito (y si lo hubiera no se distingue de los clientes), no hay demanda asociada a los clientes y tampoco hay restricciones temporales. El problema puede formularse como:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

$$s.a: \sum_{j\in\Delta^{+}(i)} x_{ij} = 1 \ \forall\ i \in V \qquad (2)$$

$$\sum_{i\in\Delta^{-}(j)} x_{ij} = 1 \ \forall\ \mathrm{j} \in V \qquad (3)$$

condiciones de Tucker

$$\mathrm{u_i} - u_j + n.x_{ij} \leq n-1 \ \forall(\mathrm{i,j}) \in E, i, j \neq 0 \qquad (4)$$

$$\mathrm{x}_{ij} \in \{0,1\} \ \forall\ (\mathrm{i,j}) \in E \qquad (5)$$

Esta formulación fue propuesta por Dantzig, Fulkerson y Johnson. Las variables binarias $x_{ij}$ indican si el arco $(i,j)$es utilizado en la solución. La función objetivo (1) establece que el costo total de la solución es la suma de los costos de los arcos utilizados. Las restricciones (2) y (3) indican que la ruta debe llegar y abandonar cada nodo exactamente una vez. Finalmente, las restricciones (4) son llamadas restricciones de eliminación de subrutas e indican que todo subconjunto de nodos S debe ser abandonado al menos una vez.

**Tipos de TSP**

Existen tres tipos de TSP, entre ellos tenemos:

- **TSP Simétrico:**

  Un TSP simétrico es aquel que dado un conjunto de **n** vértices y funciones de coste para cada par de vértices, se debe encontrar un circuito de coste mínimo que visite cada uno de los vértices exactamente una vez. El coste de ir del vértice i al vértice j es el mismo que de ir del vértice j al vértice i.

- **TSP Asimétrico:**

  Un TSP asimétrico trata de un grafo en el que el coste de ir de un vértice **i** a un vértice **j** no es necesariamente el mismo que de ir del vértice **j** al vértice **i**.

- **TSP Geométrico:**

  Un TSP geométrico, o llamado también euclidiano, es dado un conjunto de **n** vértices $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y utilizando la métrica euclidiana, se busca el circuito más corto que visite todos los vértices del conjunto dado.

**Técnicas de solución para el TSP**

Los algoritmos que existen para hallar la solución al problema, que requieren de búsquedas exhaustivas dentro del conjunto de posibles soluciones, reciben el nombre de algoritmos exactos.

Para realizar la búsqueda exhaustiva de una solución óptima, se conocen dos técnicas de diseños generales; el de retroceso (backtracking) y tamiz (sieves). Los algoritmos para éstas técnicas requieren de tiempos exorbitantes, la aplicación de estos a una computadora no es práctica para casos con más de $10^8$ elementos. Es necesario emplear estructuras hechas a la medida para cada problema en particular.

La técnica del retroceso trata continuamente de extender una solución parcial. En cada etapa de la búsqueda, si una extensión de la solución parcial actual no es posible, se regresa a una solución parcial corta y se trata nuevamente. La segunda técnica, tamiz, es el complemento lógico del retroceso, se tratan de eliminar las no-soluciones en lugar de tratar de encontrar la solución. El método tamiz es útil principalmente en cálculos

numéricos teóricos.

La solución más directa es la que aplica la fuerza bruta: evaluar todas las posibles combinaciones de recorridos y quedarse con aquella cuyo trazado utiliza la menor distancia.

Dentro de los algoritmos exactos que existen para encontrar la solución del TSP, tenemos el de Programación Dinámica; de Ramificación y Acotación Ingenuo; de la Búsqueda Exhaustiva Ingenua, y una Mejor Ramificación y Acotación.

Los algoritmos generalmente basados en metaheurísticas no encuentran soluciones exactas pero permiten encontrar aproximaciones suficientemente buenas (un 97% de optimalidad) y se pueden aplicar a conjuntos de un gran número de vértices con tiempos de ejecución razonables en un superordenador (en semanas o meses). Entre las que más destacan, tenemos el de recocido simulado (*Simulated Annealing*); algoritmos genéticos (*Genetic Algorithms*); colonia de hormigas (*Ant Colony*); búsqueda prohibida (*Tabu Search*); redes neuronales (*Neural Networks*); entre otras.

A continuación mostramos algunas heurísticas sencillas que nos permite conseguir buenas soluciones al TSP.

**Heurística 1: Algoritmo del Vecino más Cercano**

Este método es de tipo constructivo y proporciona resultados razonablemente buenos para el TSP, ésta heurística tiene una ventaja en las primeras selecciones, sin embargo, el problema que presenta es que en los últimos pasos puede elegir aristas de longitud muy grande, especialmente en la última.

El procedimiento es el siguiente:

- Una solución será un cierto orden en el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ en el orden de visita de los vértices.
- Inicialización: seleccionar un vértice arbitrario.
- Función de selección: de los vértices candidatos seleccionar el más próximo al último (o al primero) de la secuencia actual $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$
- Se termina cuando se tenga a la **n** vértices.

**Heurística 2: La Inserción más Cercana**

Este procedimiento es también constructivo, pero en contraste con el anterior, en el cual se tiene un camino, y sólo al final se completa una ruta, aquí tenemos sub-rutas, los cuales van creciendo hasta completar una ruta que abarque todos los vértices.

Se inicia con una sub-ruta, al cual se llamará $T$, se quiere insertar el nodo "más cercano" a esta sub-ruta para ampliarlo. Así entonces examinamos primero todos los nodos j que no estén incluidos en $T$; definamos para estos nodos la distancia mínima a $T$ de la siguiente manera: $d(j,T)$ es la distancia mínima que hay desde el nodo j a cualquiera de los nodos que están en $T$. Ordenamos las distancias calculadas de menor a mayor, y llamamos $j^*$ al nodo que se encuentra al principio de la lista, éste será el nodo "más cercano " a $T$. Seleccionamos dentro de $T$ al nodo que se encuentre "más cerca" de $j^*$, esto es, medimos la distancia desde $j^*$ a cada uno de los nodos de $T$, y llamaremos $k^*$ aquel nodo dentro de $T$, cuya distancia a $j^*$ sea la menor de todas. Ampliaremos ahora la sub-ruta insertando a $j^*$ entre $k^*$ y alguno de sus dos vecinos en $T$, esto es, si $(k_1, k^*)$ y $(k^*, k_2)$ son dos aristas de $T$ y la

distancia de $j^*$ a $k_1$, es menor o igual que la distancia de $j^*$ a $k_2$, entonces $j^*$ se inserta entre $k_1$, $k^*$. El proceso termina cuando se haya construido una ruta completa.

**Complejidad Algorítmica del TSP**

El problema reside en el número de posibles combinaciones que viene dado por $(n-1)!$ respecto de **n** ciudades, cuando es fijado una de ellas y esto hace que la solución, por ejemplo con la fuerza bruta sea impracticable para valores de **n** incluso moderados con los medios computacionales actualmente a nuestro alcance. Por ejemplo, si un ordenador fuese capaz de calcular la longitud de cada combinación en un microsegundo, tardaría algo más de 3 segundos en resolver el problema para 10 ciudades, algo más de medio minuto en resolver el problema para 11 ciudades y 77 146 años en resolver el problema para sólo 20 ciudades.

### 2.2.2.4 El Problema de Rutas de Vehículos (VRP)

**Introducción**

El VRP es una generalización del TSP, consiste en encontrar un conjunto de rutas más cortas que recorre un vehículo con una capacidad limitada permitiendo la minimización de una función de tiempo o costos, que se inicia en un lugar fijo, visita un conjunto de otros lugares geográficamente dispersados una sola vez y retorna al lugar inicialmente fijado. Distintos algoritmos y heurísticas permiten la solución del problema.

El VRP surge naturalmente como el problema central en el área del transporte, distribución y logística. En algunos mercados, transporte

significa un alto porcentaje del valor agregado de los bienes. Es por esto que la utilización de métodos computarizados para el transporte resulta frecuentemente en ahorros significativos, variando entre un 5% y un 20% de los costos anuales, como informan Toth y Vigo (2001).

Los problemas de rutas de vehículos con tiempo de ventana surgieron de la necesidad de brindar una mejor atención al cliente en un sistema de transporte, específicamente en la atención precisa que se le puede brindar, el cual conlleva a regular un tiempo de servicio ya sea de característica rígida o flexible pero que con ello buscaríamos minimizar el tiempo de atención al cliente de modo definido y esto hace que un planteamiento de un problema real y concreto, el modelo matemático formulado sea muy cercano a lo que es en realidad la situación problemática.

Los VRP son uno de los problemas más conocidos y desafiantes de la programación entera y por ello de la optimización combinatoria, que cae en la categoría denominada NP-completos, esto es, los problemas que no pueden resolverse en tiempo polinomial en función del tamaño de la entrada. El tiempo y el esfuerzo computacional requerido para resolver este problema aumenta exponencialmente. Para este tipo de problemas es a menudo deseable obtener soluciones aproximadas, para que puedan ser encontradas lo bastante rápido y que sean suficientemente exactas para su propósito, Usualmente esta tarea es lograda usando varios métodos heurísticos y metaheurísticas, que dependen de cierta visión interna de la naturaleza del problema.

## Antecedentes

Los **Problemas de Rutas de Vehículos** (*Vehicle Routing Problem - VRP*) en realidad son un amplio conjunto de variantes y personalizaciones de problemas. Desde los que son más sencillos hasta algunos que hoy en día siguen siendo materia de investigación.

En ellos en general, se trata de averiguar las rutas de una flota de transporte para dar servicio a unos clientes. Este tipo de problemas pertenece a los problemas de optimización combinatoria. Según la literatura científica, Dantzig y Ramser fueron los primeros autores en 1959, cuando estudiaron la aplicación real en la distribución de gasolina para estaciones de carburante.

La función objetivo depende de la tipología y características del problema. Lo más habitual es intentar minimizar el coste total de operación (el tiempo total de transporte, la distancia total recorrida), minimizar el tiempo de espera, maximizar el beneficio, maximizar el servicio al cliente, minimizar la utilización de vehículos, equilibrar la utilización de los recursos, etc.

## Definición del VRP

El VRP consiste en encontrar un conjunto de rutas óptimas para realizar un reparto de una serie de objetos (demandas) a sus correspondientes destinos (clientes). Todos los objetos se encuentran inicialmente en un almacén (depósito) y los vehículos de transporte deben repartirlos de forma que se minimice el tiempo o coste de reparto. Además hay que tener en cuenta que los vehículos utilizados para el transporte tienen una capacidad limitada y una tasa de consumo de combustible determinada.

**Elementos de los VRP**

Los VRP obedecen principalmente a tres elementos básicos, los cuales explicamos a continuación:

**Los Clientes**

Cada cliente tiene cierta demanda que deberá ser satisfecha por algún vehículo. En muchos casos, la demanda es un bien que ocupa lugar en los vehículos y es usual que un mismo vehículo no pueda satisfacer la demanda de todos los clientes en una misma ruta. Un caso equivalente al anterior ocurre cuando los clientes son proveedores y lo que se desea es recoger la mercadería y transportarla hacia el depósito. También podría ocurrir que la mercadería deba ser transportada a los clientes pero no esté inicialmente en el depósito, sino distribuida en ciertos sitios proveedores. En este caso, los proveedores deben ser visitados antes que los clientes.

En otros casos la demanda no es un bien sino un servicio. El cliente simplemente debe ser visitado por el vehículo. Un mismo vehículo podría, potencialmente, visitar a todos los clientes. En otra variante del problema, cada cliente tiene una ubicación y desea ser transportado hacia otro sitio. Aquí la capacidad del vehículo impone una cota sobre la cantidad de clientes que puede alojar simultáneamente.

Es usual que cada cliente deba ser visitado exactamente una vez. Sin embargo, en ciertos casos se acepta que la demanda de un cliente sea satisfecha en momentos diferentes y por vehículos diferentes.

Los clientes podrían tener restricciones relativas a su horario de servicio. Usualmente estas restricciones se expresan en forma de intervalos de tiempo

(llamados ventanas de tiempo) en los que se puede arribar al cliente.

En problemas con varios vehículos diferentes podrían existir restricciones de compatibilidad entre éstos y los clientes. En otros casos, cada cliente sólo puede ser visitado por algunos de los vehículos (por ejemplo, algunos vehículos muy pesados no pueden ingresar en ciertas localidades)

**Los Depósitos**

Tanto los vehículos como las mercaderías a distribuir (si las hubiera) suelen estar ubicadas en depósitos. Usualmente se exige que cada ruta comience y termine en un mismo depósito, aunque este podría no ser el caso en algunas aplicaciones (por ejemplo, podría ser que el viaje debiera finalizar en el domicilio del conductor del vehículo).

En los problemas con múltiples depósitos cada uno de estos tiene diferentes características, por ejemplo, su ubicación y capacidad máxima de producción. Podría ocurrir que cada depósito tenga una flota de vehículos asignada *a priori* o que dicha asignación sea parte de lo que se desea determinar.

Los depósitos, al igual que los clientes, podrían tener ventanas de tiempo asociadas. En algunos casos debe considerarse el tiempo necesario para cargar o preparar un vehículo ante de que comience su ruta, o el tiempo invertido en su limpieza al regresar. Incluso, por limitaciones de los propios depósitos, podría querer evitarse que demasiados vehículos estén operando en un mismo depósito a la vez (es decir, la congestión del depósito).

**Los Vehículos**

La capacidad de un vehículo podría tener varias dimensiones, como por ejemplo peso y volumen. Cuando en un mismo problema existen diferentes mercaderías, los vehículos podrían tener compartimentos, de modo que la capacidad del vehículo depende de la mercadería de que se trate. En general, cada vehículo tiene asociado un costo fijo en el que se incurre al utilizarlo y un costo variable proporcional a la distancia que se recorra.

Los problemas en que los atributos (capacidad, costo, etc.) son los mismos para todos los vehículos se denominan de *flota homogénea*, y, si hay diferencias, de *flota heterogénea*. La cantidad de vehículos disponibles podría ser un dato de entrada o una variable de decisión. El objetivo más usual suele ser utilizar la menor cantidad de vehículos y minimizar la distancia recorrida ocupa un segundo lugar.

Regulaciones legales podrían imponer restricciones sobre el tiempo máximo que un vehículo puede estar en circulación e incluso prohibir el pasaje de ciertos vehículos por ciertas zonas. En algunos casos se desea que la cantidad de trabajo realizado por los vehículos por ciertas zonas (usualmente el tiempo de viaje) no sea muy dispar.

En general se asume que cada vehículo recorre una sola ruta en el período de planificación, pero últimamente se han estudiado modelos en los que un mismo vehículo puede recorrer más de una ruta.

**Formulación Matemática del VRP**

El VRP es una extensión del m-TSP en la cual cada cliente $i \in V - \{0\}$ tiene asociada una demanda $d^i$ y cada vehículo tiene una capacidad $C$ (la flota es

homogénea). En este problema la cantidad de rutas no es fijada de antemano como el TSP y en el m-TSP.

Para un conjunto de clientes $S$, $d(S) = \sum_{i \in S} d^i$ es su demanda total y $r(S)$ indica la mínima cantidad de vehículos necesarios para atender a todos. En la formulación llamada el *flujo de vehículos de dos índices*, se utilizan las variables binarias $x_{ij}$ para determinar si el arco $(i,j)$ se utiliza o no en la solución. El problema propuesto por Miller-Tuckin y Zemlin (1960), se formula de la siguiente manera:

$$(CVRP) \min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

s.a:

$$\sum_{i \in \Delta^-(j)} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V - \{0\} \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V - \{0\} \qquad (3)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(0)} x_{i0} = m \qquad (4)$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(0)} x_{0j} = m \qquad (5)$$

$$\sum_{i \in S, j \in \Delta^+(i) - S} x_{ij} \geq r(S) \quad \forall S \subset V - \{0\} \qquad (6)$$

$$m \geq 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in E \qquad (7)$$

Donde, la función objetivo en (1), representa el costo total de la solución. La variable $x_{ij}$, toma de valor de uno cuando el vehículo atiende la ruta que va del cliente ***i*** al cliente ***j***.

La restricción (2) y (3), restringen la asignación de cada cliente a una sola ruta vehicular, esto es, el cliente es atendido por un sólo vehículo. Además

deben de entrar y salir una sola vez (excepto del depósito).

La restricción (4) y (5) indican que $m$ es la cantidad de vehículos utilizados en la solución y que todos los vehículos que parten del depósito deben regresar. La restricción (6) actúa de restricción de eliminación de sub-rutas y a la vez impone que la demanda total de los clientes visitados por un vehículo no puede superar la cantidad ($C$). La restricción (7) son restricciones que definen al modelo como lineal entero binario.

**Variantes del VRP**

De acuerdo a las diferentes necesidades y situaciones problemáticas del transporte de vehículos, surgen las variantes del VRP que a continuación se mencionan, entre las más conocidas:

- Problema con capacidades (Capacitated VRP - CVRP)
- Problema con ventanas de tiempo (VRP with Time Windows -VRPTW)
- Problema con múltiples depósitos (Multiple Depot VRP - MDVRP)
- Problema con entregas y devoluciones (VRP with Pickup and Delivery - VRPPD)
- Problema de entregas divididas con diferentes vehículos (Split Delivery VRP - SDVRP)
- Problema con diferentes valores al azar como el número de clientes, tiempo de servicio, tiempo de recorrido, etc. (Stochastic VRP - SVRP).

**Técnicas de Solución del VRP**

Los métodos de búsqueda heurísticos (algoritmos metaheuristicos) han sido utilizados para resolver problemas de este tipo.

Las técnicas más comunes de resolución del VRP son casi todas heurísticas y metaheurísticas porque los métodos exactos de resolución no garantizan encontrar una solución óptima en un tiempo razonable de computación cuando el número de clientes es grande. Así tenemos:

- **Aproximaciones exactas.** Son métodos que garantizan encontrar una solución óptima, y pueden ser de ramificación y acotamiento (hasta 100 nodos); y de ramificación y corte.
- **Heurísticas.** Realizan una exploración limitada en el espacio de soluciones razonablemente buenas con tiempos de computación modestos, y que se orientan al tipo de problema en estudio. Así tenemos:

  **Métodos de construcción**: construyen de forma gradual una solución factible a la vez que tratan de minimizar el coste, pero de por si no tienen una fase de mejora. Entre éstos se encuentran:

  - Método de los ahorros de Clark y Wright (1964)
  - Método de emparejamientos
  - Heurística de mejora de multirutas.

  Además mediante el algoritmo de 2 fases: el problema se descompone en sus dos componentes naturales:

  - Agrupamiento de vehículos en rutas factibles.
  - Construcción de la ruta.

  A su vez dependiendo del orden en que se efectúan las dos tareas anteriores, se tienen:

  - Algoritmos de agrupamiento primero y enrutamiento después.
  - Algoritmos de enrutamiento primero y agrupamiento después.

- **Metaheurísticas.** Son métodos que realizan una exploración intensiva del espacio de soluciones. La calidad de las soluciones de estos métodos es mucho mayor que la obtenida por las heurísticas clásicas. Algunas de ellas son:
- Recocido simulado (Simulated Annealing, 1993).
- Algoritmos genéticos (Genetic Algorthms, 1994)
- Búsqueda tabú (Tabu Search, 1994).
- GRASP (1995)
- Algoritmos de colonia de hormigas (Ant Colony Algorithms, 1999)
- Búsqueda local guiada (1999).
- Búsqueda de la vecindad de variable (2003)

#### 2.2.2.5 El Problema de Rutas de Vehículos con Enfoque Multicriterio

**Introducción**

Hacer que la distribución de bienes o servicios sea lo más eficiente y flexible posible, es hoy un objetivo fundamental de cualquier organización en el desarrollo de sus actividades. Entiéndase por eficiente llegar al cliente con la calidad requerida, en el tiempo fijado y al menor costo. Un rol importante para obtener esto juega las actividades del transporte y dentro de éstas lo fundamental a desarrollar es la planificación de rutas de distribución.

Hasta ahora, el problema ha sido resuelto con enfoque poco flexible, considerando un criterio de optimización (generalmente la distancia recorrida por el sistema de distribución), y asignando restricciones a la satisfacción de los clientes y a las normas de explotación de los vehículos. Sin embargo, en condiciones de limitaciones de recursos, cuando los

principios de calidad total no pueden ser absolutizados, se requiere la aplicación de otros enfoques. Probablemente, la modelación multicriterio aporta la flexibilidad necesaria para la máxima satisfacción del cliente, con la mayor eficiencia posible, y en el marco de los recursos disponibles.

En presencia de múltiples criterios (satisfacción del cliente y costo) una respuesta a la pregunta sobre la mejor solución no se obtiene directamente como en el caso de un solo criterio. Para cada caso particular se debe construir un modelo global de preferencias del decisor, el cual podría ser aplicado para obtener la mejor solución.

Todo problema de decisión importante del mundo real involucra objetivos múltiples y conflictivos que necesitan ser unidos mientras varias restricciones, conducen a la complejidad de un problema.

En nuestros días las organizaciones hacen decisiones operativas como estratégicas para diseñar y administrar procesos bajo su responsabilidad logrando eficiencia y costos efectivos tanto como sea posible. En el caso del transporte significa lograr costos mínimos, mientras se consigue un servicio de calidad, minimizando al mismo tiempo las demoras para los clientes.

**Antecedentes**

La noción de criterios contradictorios está presente en el conflicto entre dos criterios igualmente deseables, denominado elección Corneliana. Desde un punto de vista científico, las investigaciones económicas de fines del siglo XIX y principios del XX son una de las fuentes de inspiración del campo que nos interesa. La formalización adoptada en aquella consistía en postular que dichos agentes buscaban maximizar sus funciones de utilidad. Tal

función de utilidad expresa, de una forma global, la elección del consumidor o del productor. Es decir, que la noción de criterios distintos y más o menos contradictorios aun no se contemplaba por entonces.

Vilfredo Pareto, economista y sociólogo, al igual que Walras y Cournot estudió aquellas situaciones económicas en las que varios agentes realizan elecciones diferentes y a menudo en conflicto. Una situación en la que los agentes no pueden mejorar su satisfacción todos a la vez se denomina un óptimo de Pareto.

Considerando un grupo formado por diversos agentes, cada uno con sus propias preferencias, como único agente colectivo que tiene varios criterios de elección diferentes recaemos en la problemática multicriterio.

Es preciso esperar a los albores de la segunda guerra mundial para que las corrientes económica y política converjan en las modernas teorías de la elección social, del voto y del análisis multicriterio, cuyos elementos básicos son comunes. En 1944, el libro de Von Neumann y Morgenstern hace una alusión directa al problema. En 1951, Koopmans introduce la noción de vector eficiente que es una nueva versión del óptimo de Pareto. El problema de criterios múltiples en programación lineal es abordado también por Kuhn y Tucker (1951) y después por diversos especialistas de la investigación operativa como Hitch (1953), Klahr (1958) y otros.

En los años 80 sucedió la introducción de la informática en la reflexión sobre la decisión multicriterio. Los métodos interactivos que habían sido propuestos en los 70 pueden ya ser fácilmente implantados, y las posibilidades de las máquinas, particularmente de las computadoras, son

ahora un factor importante en la concepción misma de los métodos. La visualización y la interactividad devienen elementos de estudio por si mismos (trabajos de Angehrn, Belton, Korhonen y Vander-Pooten). En fin, la informática teórica aporta también sus propios métodos como la inteligencia artificial o las redes neuronales (Bratko-Rajkovic, Lévine-Pomerol o Malakooti, por no mencionar más que los autores pioneros).

Hoy en día el enfoque o análisis multicriterio puede ser considerado como un campo de actividad en el que la aplicabilidad práctica y las herramientas informáticas son dominantes. Cierto que las investigaciones teóricas no están desprovistas de interés, pero suelen dedicarse más a la profundización que a los fundamentos. Por el contrario, las posibilidades informáticas no han sido aún totalmente exploradas, incluso se puede afirmar que la utilización efectiva de los métodos multicriterio en contextos profesionales no ha hecho más que comenzar.

En el tema del VRP multicriterio o multiobjetivo, la literatura es ya amplia pero más o menos reciente, de variantes de modelos de rutas con múltiples objetivos. Current y Marsh (1993) publicaron una recopilación sobre problemas de rutas multiobjetivos. Posteriormente tenemos los trabajos de Bowerman et al. (1995) que trata un problema de transporte escolar, Shan and Cuff (1996). Baugh et al. (1998), Chang and Wei (1999). Y más recientemente los trabajos de Osman et al. (2005), Cheng et al. (2005), Tan and Hu (2005), Tan et al. (2006) y (2007). Muchos de estos problemas con varios objetivos tratan aspectos, como localización de servicios, además del diseño de rutas.

**El Problema de Programación Multicriterio.**[2]

En la resolución de un problema mediante la programación multicriterio debe haber un continuo intercambio de información crítica entre el decisor y analista, sobre los diferentes aspectos del modelo que haya que tener en consideración, hasta que se produzca un total acuerdo entre ambas partes, sobre todo desde el punto de vista del decisor. Una vez hechas las consideraciones oportunas, el analista calculará una o varias soluciones que presentará al decisor. El conjunto de acciones u opciones en el que se ha de obtener la solución al problema recibe el nombre de alternativas. El conjunto de todas las alternativas posibles definen el conjunto de oportunidades.

A partir de esto, tenemos una situación en la que un decisor (a veces varias) trata de encontrar la alternativa que más le satisfaga, dentro de las posibles, en base a determinados criterios u objetivos. Dada una alternativa posible, conocida como alternativa eficiente, los valores correspondientes para cada uno de los criterios u objetivos con dicha alternativa, constituyen el vector criterio. El conjunto de todos los vectores criterio que se obtienen a partir de todas las alternativas eficientes, recibe el nombre de espacio criterio.

La misión del análisis multicriterio es encontrar la alternativa que más se desea o prefiere el decisor (en el caso de que el decisor prefiera varias alternativas, bastaría con conseguir una de ellas, ya que al decisor le sería indiferente entre todas ellas). Lo ideal sería tener una alternativa que fuese más preferida o indiferente en cada uno de los criterios que cualquier otra alternativa posible, ya que en ese caso, la buscada sería ésta. El problema va

[2] Gal T.

a estar en que los criterios están en conflicto, lo cual implica que cuando estamos mejorando uno de los criterios, al menos vamos a estar empeorando otro (u otros), haciendo imposible que exista dicha alternativa.

Parece lógico que la alternativa que más satisface al decisor va a estar entre las alternativas eficientes. Este hecho básico en el análisis de la toma de decisiones multicriterio, responde a la representación de las preferencias de un decisor por un orden parcial de tipo paretiano, de ahí, que a las alternativas eficientes también se les conozca como óptimo de Pareto. Este concepto constituye un aspecto básico en todo el campo de la toma de decisiones multicriterio.

La idea de dirigir sistemáticamente al decisor hacia el conjunto de alternativas eficientes, puede parecer en determinadas ocasiones una mala idea, ya que puede dirigir rápidamente al decisor a razonar en términos de compensación: qué debo perder en un criterio para esperar ganar en otro; quizás es preferido que el decisor incremente progresivamente su satisfacción encontrándose con una sucesión de alternativas eventualmente no eficientes, hasta la última o últimas que son eficientes.

**Formulación General de un Problema Multicriterio**

Un Problema de Programación Multiobjetivo responde a la siguiente formulación:

$$opt\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\right)$$

$$\text{s.a: } x \in X$$

Donde:

- $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ son las variables de decisión en $R^n$

- $X$ es el conjunto de oportunidades
- $f_i$ son cada uno de los objetivos, para i desde 1 hasta p.
- $f = (f_1, f_2, ..., f_p,)$ es la función objetivo en $R^p$
- $Y = f(x)$ es el espacio de objetivos o espacio imagen.

Si se supone que en el problema original todos los objetivos se maximizan, dicha consideración no plantea ninguna limitación, dado que si alguno de ellos fuera de mínimo tomaríamos la función opuesta del problema, así:

$$\max\left(f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)\right)$$

$$\text{s.a } x \in X$$

se generan **p** problemas que serían:

$$(\mathrm{P_i}) \text{ Max } f_i(x)$$

$$\text{s.a } x \in X$$

Luego de la solución obtendremos **p** puntos correspondientes a los máximos individuales de cada uno de ellos, denotándolos por: $x_1^*, x_2^*, ..., x_p^*$

La evaluación de los puntos óptimos en sus correspondientes objetivos nos determinará un punto que se denomina punto ideal:

$$\left(f_1(x_1^*), f_2(x_2^*), ..., f_p(x_p^*)\right)$$

Es evidente que si existiera un punto en el cual todas las funciones alcanzan su máximo, el problema estaría resuelto, pero esto es algo utópico, por tanto, tendremos que proceder a intentar buscar una solución para el problema. Inicialmente se construye la denominada Matriz de Pagos, en el cual se evalúa todas las funciones objetivo en los óptimos individuales obtenidos en

cada uno de ellos. La diagonal principal de esta matriz de tamaño $pxp$, corresponde al punto ideal, y las correspondientes columnas indican el campo de variación de los objetivos en los puntos obtenidos.

Estos intervalos se construyen tomando el valor máximo y mínimo de la correspondiente columna, así para cada objetivo se determina:

$$\left[f_i^{\min}, f_i^{\max}\right]$$

Obtenida la matriz de pagos asociada al problema, se plantea de forma natural, con qué punto decidir; ahora bien cómo se compara si los resultados que se tiene son vectores. De este hecho surge la necesidad de establecer un orden, es decir, una relación que establezca cuándo un vector es preferido a otro.

Dentro del espacio vectorial $R^p$ y dado el problema general de la Programación Multiobjetivo:

$$\max\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\right)$$

$$\text{s.a} \quad x \in X$$

Definimos dos tipos de órdenes (la relación se establece atendiendo al valor que tomen los objetivos en dichos puntos) (Caballero, R. 1997):

1. **Orden de Pareto**: Se dice que un punto $x$ es preferido a $x'$ si se verifica que: $f_i(x) \geq f_i(x') \forall$ i=1,..., p con al menos un j tal que $f_j(x) \geq f_j(x')$

2. **Orden débil de Pareto**: Se dice que un punto $x$ es preferido a $x'$ si se verifica que: $f_i(x) \geq f_i(x') \forall$ i=1,..., p

El orden de Pareto y el orden débil de Pareto son órdenes parciales y establecen que una combinación es preferida a otra siempre que en el primer caso mejore a todos los objetivos, mejorando a uno de ellos de forma estricta, y en el segundo, denominado débil, siempre que mejore todos los objetivos estrictamente.

En general, no existe una combinación que sea a la vez solución de todos los objetivos. De esta forma el primer concepto que se pierde es el de óptimo tal y como se entiende en la programación mono objetivo tradicional, y lo que se busca para solucionar el problema son las denominadas soluciones eficientes.

Así en cualquier problema existe más de una solución eficiente y evidentemente éstas no serán comparables. Por tanto, el problema continúa, y se plantean dos cuestiones importantes: por un lado, ¿cómo resolver estos problemas? y, por otro lado, una vez resueltos ¿cómo realizar la elección entre soluciones no comparables?

El enfoque multicriterio utiliza dos elementos indispensables en su proceso que son: el **Analista o Modelizador**, que es la persona encargada de aplicar las técnicas adecuadas y posteriormente resolver el problema. No tiene poder para manipular el problema y sólo actúa con los datos del problema una vez planteado. Cuando se resuelve es la persona encargada de proporcionar la información obtenida al centro decidor; y el **Decisor o Centro Decisor**, que es la persona encargada de tomar la elección final una vez que conozca la información dada por el modelizador de las posibles combinaciones factibles para el problema.

Y esto conlleva al uso de una terminología específica que incluye los siguientes conceptos:

- **El conjunto de elección:** Son las elecciones que el decisor debe ejercer con respecto a un número finito de alternativas. Al conjunto de tales alternativas le denominamos conjunto de elección. Las alternativas son consideradas diferentes, excluyentes y exhaustivas.
- **Atributos**: Son los ejes de evaluación en términos de sus características que hace el decisor relacionadas con una realidad objetiva, usualmente puede ser expresada como una función matemática de las variables de decisión.
- **Objetivos**: Aspiraciones que indican direcciones de perfeccionamiento de los atributos seleccionados. La mejora puede interpretarse en el sentido más del atributo mejor o bien menos del atributo mejor.
- **Matriz de Decisión:** La matriz $\left[a_{ij}\right]$ se llama la matriz de decisión, si cada fila de esta matriz expresa las cualidades de la alternativa i con respecto a los **n** atributos considerados. Cada columna j recoge las evaluaciones, hechas por el decisor, de todas las alternativas con respecto al atributo. Es decir la matriz de decisión expresa las preferencias del decisor, capaz de dar para cada uno de los atributos considerados y para cada alternativa del conjunto de elección, un valor numérico o simbólico $a_{ij}$.
- **Criterio**: Término que engloba los conceptos de: atributos, objetivos y metas que se consideran relevantes en un problema de decisión.

Por otro lado, existe un elemento que relaciona dos o más criterios denominada la tasa de intercambio.

**Tasa de Intercambio:** dados dos criterios, $f_j$ y $f_k$, es la cantidad de logro de un criterio que debe sacrificarse para conseguir a cambio un incremento unitario en el otro criterio.

$$T_{jk} = \frac{f_j(x_1) - f_j(x_2)}{f_k(x_1) - f_k(x_2)}$$

En muchas situaciones de la vida real surge la necesidad de plasmar en un modelo mediante la información disponible sobre un problema real, con el fin de facilitar una comunicación fluida de las ideas aportadas por las personas implicadas en la resolución del mismo. En esta labor se destacan por su importancia dos figuras específicas del dúo problema-modelo: el decisor y analista. (Caballero, R. 1997)

**El Problema de Rutas de Vehículos con Enfoque Multicriterio**

En realidad no sería más que una extensión del VRP, en el sentido siguiente: Dado un conjunto de clientes y depósitos dispersos geográficamente y una flota de vehículos, determinar un conjunto de rutas de costo mínimo que comiencen y terminen en los depósitos, para que los vehículos visiten a los clientes. Las características de los clientes, depósitos y vehículos, así como diferentes restricciones operativas sobre las rutas, dan lugar a diferentes variantes del problema. La variante de ruta de vehículos con capacidades en caso multiobjetivo se manifiesta por ejemplo en determinar el orden en que cada vehículo debe visitar a sus clientes, reduciendo el costo total; determinar el mínimo número de vehículos utilizados; y minimizar la suma

de los tiempos de espera de los clientes, o maximizar el servicio al cliente, equilibrar la utilización de los recursos, entre otros.

**Técnicas de Solución para el VRP Multicriterio**

En cuanto a las técnicas de solución mediante el enfoque multicriterio para problemas en general se cuentan con más de un centenar de métodos de solución. Respecto de los problemas de rutas de vehículos con enfoque multicriterio, aún no se ha realizado un estudio completo, en tal sentido se continúa investigando y enriqueciendo las alternativas de métodos de solución principalmente metaheurísticas al VRP. Se destacan los siguientes:

- **Algoritmos Evolutivos** (AEs), que son procedimientos estocásticos de búsqueda y optimización que tienen sus orígenes e inspiración en el mundo biológico. Se caracterizan por imitar procesos adaptativos de los sistemas naturales basándose en la supervivencia del individuo, siendo un individuo una solución potencial del problema que se implementa con estructura de datos. Se trabajan sobre poblaciones de soluciones que evolucionan de generación en generación mediante operadores genéticos adaptados al problema.
- **Algoritmos Meméticos** (AM), son técnicas de optimización que combinan sinérgicamente conceptos tomados de otras metaheurísticas, tales como la búsqueda basada en poblaciones (como en los algoritmos evolutivos), y la mejora (como en las técnicas de seguimiento del gradiente).

Desde el punto de vista de las técnicas para el caso continuo, y en algunos casos discretos se continúa explorando las técnicas de multicriterio siguientes:

- El método de las restricciones.
- El método de las ponderaciones.
- El método de programación de metas.
- El método Analítico Jerárquico, entre muchos otros.

En la presente investigación interesa desarrollar el método de las ponderaciones:

**El Método de las Ponderaciones**

**Zadeh** (1963) demostró que, si en un problema multiobjetivo, a cada objetivo se le asocia un peso no negativo y, seguidamente, se procede a la agregación de todos los objetivos, la optimización de dicha función agregada y ponderada genera para cada conjunto de pesos un punto extremo eficiente. Así, para un problema decisional con **p** objetivos a maximizar, la aplicación del método de las ponderaciones conduce al siguiente programa matemático de tipo paramétrico,

$$\text{Max } w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \ldots + w_p f_p(x)$$
$$\text{Sujeto a: } \begin{array}{l} x \in X \\ W \geq 0 \end{array}$$

Para cada vector de pesos $W$ se obtiene un punto extremo eficiente. Por tanto, variando paramétricamente los pesos, se puede generar, o al menos aproximar, el conjunto eficiente. El método de las ponderaciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando todos los pesos elegidos son mayores que cero. En caso que uno de los pesos sea cero y además existan óptimos alternativos, entonces la solución generada por el método de las ponderaciones ***puede*** ser no eficiente. Una situación aunque factible teóricamente, no suele presentarse en la práctica, por lo que no

queda dañada la potencialidad operativa del método. Este método no genera puntos interiores sino sólo puntos extremos eficientes. En efecto, para un conjunto dado de peso, el método de las ponderaciones detecta como punto eficiente el punto de tangencia de la poligonal que define el conjunto eficiente con la familia de rectas para el caso bi-objetivo: $w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) = \lambda$ o de hiperplanos para el caso general de $p$ objetivos:

$$\sum_{i=1}^{p} W_i f_i(x) = \lambda$$

El método de las ponderaciones conduce al siguiente programa lineal paramétrico:

$$\text{Max. } w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \ldots + w_p f_p(x)$$
$$\text{Sujeto a: } x \in X$$
$$W \geq 0$$

**Los pesos**

En la decisión multicriterio es usual tener que unos criterios tengan para el decisor mayor relevancia que otros. Por circunstancias muy diversas, entre las que lógicamente están sus preferencias personales. Los pesos o ponderaciones son medidas de importancia relativa que los criterios tienen para el decisor.

Consideremos $w_j$ al peso asignado al criterio j, cualquiera sea el carácter del mismo (cualitativo, ordinal o cardinal). Asimismo sea $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ el vector de pesos cuando quiera referirse al conjunto de todos ellos. La matriz de decisión junto con el vector de pesos, constituyen toda la información necesaria, en principio para "resolver" el problema de la decisión multicriterio discreta desde una óptica de métodos sin información progresiva.

Suponga por un momento que tales pesos están ya determinados y se ha logrado asignarles unos valores incluso cardinales ratio. El método de la suma ponderada

lineal, ayuda a tomar una decisión multicriterio, cuya principal virtud es la de ser muy intuitivo y simple de aplicar.

**Suma ponderada lineal**

**A. Datos de partida**

- Se supone un problema con **m** alternativas $a_1, a_2, ..., a_m$ y **n** criterios $C_1, C_2, ..., C_n$. Cada criterio está representado por una función de utilidad $U_j$. la utilidad $U_j(a_i)$ que, para el criterio j, el decisor estima tiene la alternativa **i**, la recoge la evaluación $a_{ij} = U_j(a_i)$ de la matriz de decisión (fila **i** y columna **j** de la misma). Cada valor $a_{ij}$ proviene, bien de la construcción de una verdadera función de utilidad, bien de una evaluación natural, si se trata de un criterio cuantitativo como el precio o la edad. Supondremos, un caso que estas evaluaciones son de tipo cardinal ratio.
- Se supone también que cada criterio $C_j$ está provisto de un peso $w_j$ positivo o nulo. Que tenga peso nulo el criterio $C_n$ permite la eliminación de ese criterio, por lo que en lo sucesivo siempre se manejará que $w_j > 0$, para todo j. Asimismo se supondrá que los pesos son del tipo "cardinal ratio", lo que significa que todo otro vector de pesos $w'$, equivalente a $w$ en el espíritu del decisor, verifica $w' = kw$ (k es una escalar estrictamente positivo).

**B. Transformación de datos**

Se normalizan las evaluaciones $a_{ij}$ por cualquiera de los procedimientos dados que conservan la cardinalidad. Los nuevos valores $a_{ij}$ deben quedar comprendidos entre 0 y 1, con mejor evaluación cuanto más cercano a 1.

Luego, se normaliza los pesos $w_j$ de forma que sumen la unidad.

A partir de ahora se considera que los $a_{ij}$ y los $w_j$ ya están normalizados.

**C. Aplicación del método de la Suma Ponderada**

Para cada alternativa $a_i$ se calcula su evaluación global:

$$R(a_i) = \sum_j w_j a_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

**La determinación de los pesos**

Es evidente, que los valores que toman los pesos van a influir de forma determinante en los resultados del método de ponderación. Esta influencia de los valores de los pesos es consecuencia natural del papel que juegan en la decisión multicriterio como indicadores de la importancia que el decisor atribuye a cada uno de los criterios. Es pues indispensable intentar evaluar los pesos de tal forma que reflejen, lo más fielmente posible, las preferencias del decisor.

## 2.3 Definición de Términos

Los términos que se necesita conocer para el propósito de la investigación, en orden lexicográfico son:

- **Agencia de viajes y turismo:** Persona jurídica dedicada al ejercicio de actividades de coordinación, mediación, producción, promoción, organización y venta de servicios turísticos.

- **Calidad de Servicio**.- Conjunto de características y cualidades en la prestación del servicio de transporte turístico terrestre, consistente en la existencia de condiciones de seguridad, puntualidad, salubridad, disponibilidad permanente, comodidad y otras, que procuren la satisfacción de las exigencias del usuario.
- **Cliente o Usuario**.- Turista y/o excursionista que utiliza el servicio de transporte turístico terrestre.
- **Condiciones de Seguridad**.-Conjunto de exigencias de carácter técnico que deberán cumplir los transportistas con el objeto de minimizar los riesgos de ocurrencia de accidentes de tránsito durante la prestación del servicio.
- **Demanda Turística:** El conjunto de turistas que de forma individual o colectiva están motivados por una serie de productos y servicios turísticos con el objeto de cubrir sus necesidades de descanso, recreo, esparcimiento, cultura en su periodo de tiempo libre o vacacional.
- **Flota Vehicular**.- Conjunto de vehículos habilitados con los que el transportista presta el servicio de transporte turístico terrestre.
- **Planeamiento**.- Según el diccionario de la Real Academia Española, planeamiento, es la acción y efecto de planear; trazar un plan.
- **Servicio del Transporte Turístico Terrestre**.- Servicio de transporte especial de personas que tiene por objeto el traslado de turistas, por vía terrestre, hacia los centros de interés turístico y viceversa, con el fin de posibilitar el disfrute de sus atractivos, mediante las modalidades de visitas locales, excursiones, giras y circuitos. Se incluye el traslado de

turistas desde los terminales de arribo hacia los establecimientos de hospedaje y viceversa.

- **Transporte Turístico:** Los que en forma habitual y organizada se dedican al traslado de personas a lugares de interés turístico.
- **Turismo:** El turismo es el conjunto de los viajes cuyo objeto es el placer o por motivos comerciales o profesionales y otros análogos, y durante los cuales la ausencia de la residencia habitual es temporal, es decir el turismo es el conjunto de relaciones y fenómenos producidos por el desplazamiento y permanencia de personas fuera del lugar de su domicilio, en tanto que dichos desplazamientos y permanencias no están motivadas por una actividad lucrativa.
- **Turista o cliente turístico**.- Es toda persona que se desplaza a un lugar distinto al de su entorno habitual, que permanece una noche por lo menos y no más de un año, en un medio de alojamiento colectivo o privado en el lugar visitado y cuya finalidad principal del viaje no es la de ejercer una actividad que se remunere en dicho lugar.

También se da algunos conceptos básicos de la optimización matemática, para una mejor comprensión del trabajo de investigación.

- **Algoritmo.-**Es un sistema de reglas, que de una sucesión estricta de operaciones matemáticas lleven al resultado buscado en un problema. Se construye un proceso infinito que converge con la solución buscada. El proceso se interrumpe en un paso (los cómputos no pueden continuarse infinitamente), y el valor obtenido de tal modo se considera aproximadamente como la solución del problema considerado.

• **Heurísticas.-** Son aquellas que realizan una exploración limitada del espacio de búsqueda y típicamente producen soluciones buenas en poco tiempo; relativamente son simple en su implementación y pueden ser fácilmente adaptadas para incluir restricciones encontradas en aplicaciones reales. Una heurística es la aproximación de los algoritmos que permiten tener ambos de estos objetivos fundamentales en la implementación computacional, encontrar algoritmos comprobablemente buenos y de calidad en la solución óptima. Es decir, es usual conseguir soluciones bastante buenas pero hay pruebas de las soluciones que podrían determinar fácilmente lo óptimo o que usualmente la implementación corre razonablemente rápido pero no se argumenta que esto puede suceder.

• **Modelo Matemático.-** La construcción de un modelo es, en esencia, un proceso consistente en decidir cuales son las características o aspectos de un problema o aplicación del mundo real que hay que representar para su análisis o estudio.

El modelo matemático nunca es idéntico al objeto en consideración, no reproduce todas sus propiedades y particularidades. Basado en la simplificación e idealización, es su reflejo aproximado. Por eso los resultados obtenidos en base del análisis del modelo siempre tienen un carácter de aproximación con respecto al objeto. Su exactitud se determina por el grado de correspondencia, de adecuación del modelo al objeto. El problema de exactitud y la autenticidad de los resultados es uno de los más delicados en las matemáticas aplicadas.

El modelo de la aplicación dependerá mucho del punto de vista u objetivo que tenga quien haga el modelo de dicha aplicación. Los buenos modelos captan la esencia del mundo real que resulta interesante (esto es, tiene el punto de vista de quien hace el modelo) e ignoraran los detalles irrelevantes para que ese punto de vista. Además los buenos modelos son robustos, esto es, siguen siendo relevantes aun cuando cambien las aplicaciones.

- **Metaheurísticas.-** Son técnicas de resolución iterativa que guía a una heurística subordinada combinando de forma inteligente diferentes técnicas de exploración del espacio de búsqueda, y utilizando estrategias de aprendizaje para estructurar la información con objeto de encontrar de forma eficiente soluciones cercanas al óptimo (Osman y Laporte, 1996).
- **Optimización**.- Es la ciencia de seleccionar lo mejor de muchas posibles decisiones en un ambiente complejo de la vida real.
- **Optimización combinatoria.-** La optimización combinatoria es una rama de la optimización matemática y en ciencias de la computación, relacionada a la investigación de operaciones, teoría de algoritmos y teoría de la complejidad computacional, que estudia instancias de problemas que se creen ser difíciles en general, explorando el espacio de soluciones (usualmente grande) para estas instancias.
- **Optimización Multiobjetivo**.- Enmarcado en un problema de decisión multicriterio, es cuando existen al menos dos criterios en conflicto y al menos dos alternativas de solución, siendo la decisión el resultado de un compromiso entre todos ellos, la cual produzca el mejor resultado (Nieto y García, 1996; Toskano, 2000; Garza y González, 2002). Las alternativas de

solución hay que evaluarlas y de acuerdo con Artola (2002), la evaluación desde el punto de vista matemático se caracteriza por tener múltiples criterios generalmente en conflicto por el grado de desigualdad de desarrollo en que éstos suelen encontrarse suscitándose un problema multicriterio. Toskano (2000), plantea que aquellos problemas en los que las alternativas de decisión son finitas se denominan problemas de decisiones multicriterios discretos. Estos problemas son los más comunes en la realidad (Munda, 2004).

# III. MATERIALES Y MÉTODOS

## 3.1 Tipo de Investigación: Explicativa y Aplicada

## 3.2 Plan de recolección de datos

En base a la situación problemática planteada, y debido a la complejidad del mismo se siguió el siguiente plan de recolección de datos:

- Se visitó la oficina del sector turístico en la ciudad de Huaraz, con el propósito de obtener información de tipo legal, de los responsables de esta actividad, el Ministerio de Comercio Exterior y Turismo.

- Obtención del mapa de la ciudad, en la municipalidad de Huaraz.

- Conocimiento de los elementos principales del problema, es decir tener información del número y calidad de hoteles, agencias de viajes de turismo, empresas de transporte dedicadas al servicio turístico, y posibles rutas de recorrido por los vehículos en la ciudad de Huaraz.

- Revisión de trabajos de investigación referidos a la actividad turística y relacionadas con la utilización de la teoría del enfoque multicriterio, de la cual es escasa la información.

- Revisión y análisis de las publicaciones relacionados al tema aplicado, el cual es muy amplio en aplicaciones a otras actividades, así como en cuanto al número de técnicas de solución correspondientes.

- Adecuación de las teorías matemáticas al problema planteado, mediante los modelos matemáticos, específicamente se estudió la optimización combinatoria bajo el enfoque multicriterio. Se adecuó el problema del

Agente Viajero y el Problema de Rutas de Vehículos con enfoque multicriterio.

- Se estudió y análizó los algoritmos de solución a los modelos matemáticos planteados. Los modelos matemáticos fueron desarrollados utilizando técnicas de programación lineal entera.

- Se estudió paquetes computacionales y lenguaje de programación como soporte para la implementación de los modelos matemáticos. En cuanto al lenguaje de programación, se estudió el lenguaje Mosel Xpress, y en el cual fueron implementados los modelos matemáticos formulados.

  Asimismo se utilizó el programa Autocad-2009, para la obtención de los puntos en 2D de la ubicación de los hoteles considerados en el problema, y también las distancias entre ellos.

- Visitas a los operarios de vehículos de transportes de servicios turísticos, administradores de agencias de turismo, administradores de hospedajes, para conocer los problemas que se tienen cuando se desarrolla la actividad turística en cuanto al recojo de los clientes turísticos en la ciudad de Huaraz.

- Buscar asesoramiento principalmente externo para la orientación técnica-científica en este tipo de problemas, y que fue conseguida gracias al apoyo de enorme importancia del proyecto Alfa y la Comunidad Europea, específicamente desarrollada en el país de Alemania.

- Realización de las pruebas necesarias para comprobar la validez del programa con soluciones mecánicas obtenidas manualmente dado que no existen otros trabajos aplicados en este actividad.

**Población:**

De acuerdo a la naturaleza del estudio se conformó el marco poblacional determinado por el conjunto de hoteles elegidos con un criterio de comodidad y atención al cliente en la ciudad de Huaraz, considerado como un centro-turístico receptivo cumpliendo con los criterios de legalidad en la zona de estudio y que son:

- Visitantes turísticos de modo regular en sus instalaciones.
- Atención a sus visitantes turísticos mediante los vehículos turísticos desde los lugares de hospedajes.

La población final quedó conformada de la siguiente manera:

Conjunto de Hoteles = 14 y un (01) depósito.

**Muestra.**

Se ha elegido como muestra la mitad de la población:

Conjunto de Hoteles = 07 y un (01) depósito.

## 3.3 Instrumentos de recolección de datos

En el presente trabajo se utilizó los siguientes instrumentos que permitieron obtener la información:

- Sistema Cartográfico (mapas) de la ciudad de Huaraz.
- Los organismos competentes de información turística de la ciudad de Huaraz.

- La bibliografía especializada, mediante libros, artículos, publicaciones y revistas.
- Las páginas electrónicas de redes virtuales de área especializada.
- Los operadores de la actividad turística.

### 3.4 Plan de procesamiento de datos

El procesamiento de los datos en la investigación se realizó del modo siguiente:

Una vez obtenida la información en base a la exploración de los instrumentos de recolección de datos, iniciamos el estudio de algunos modelos matemáticos afines al estudio considerando desde el modelo más simple hasta el más complejo, pero la información teórica a este tipo de actividad económica bajo el enfoque de multicriterio es escasa, por tanto resulta muy limitada y compleja abordar este problema de investigación.

La actividad turística, se ha adecuado para determinar el recojo de clientes desde los hoteles partiendo considerando la existencia de un depósito (Parqueo San Martín), tal cual actualmente es utilizado y que cuenta con una flota definida de vehículos acondicionados para el servicio turístico y cuyo propósito posterior es visitar a los destinos turísticos convencionales de nuestra región, determinando así las rutas óptimas de recojo desde los diversos lugares de hospedaje aquí en nuestra ciudad de Huaraz.

Los problemas de rutas clásicos de la optimización combinatoria, ya sea el problema del agente viajero y el problema de rutas de vehículos fueron adecuados al caso de estudio de la actividad turística, en lo respecta a su modelamiento matemático.

Para el TSP y el VRP, se necesitó disponer de la siguiente información:

- Un depósito:

  0.- PARQUEO San Martín, representa al punto 0.

  Ubicación: Pasaje ubicado en la cuadra 7 de la Av. Luzuriaga y el Jr. San Martín.

  Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

  (580, 375)

- Un conjunto de hoteles:

  1.- Hotel **"GALAXIA"**, representa al punto 1.

  Ubicación: Jr. Juan De la Cruz Romero Nº 638

  Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

  (546, 258)

  **2.-** Hotel **"CASABLANCA"**, representa al punto 2.

  Ubicación: Jr. 27 de Noviembre Nº 138

  Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

  (331,200)

  **3.-** Hotel **"AMERICAN HUARAZ"**, representa al punto 3.

  Ubicación: Av. Luzuriaga Nº 479

  Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

(373, 485)

**4.-** Hotel **"GRAND CESAR'S HOTEL"**, representa al punto 4.

Ubicación: Jr. Larrea y Laredo N° 721

Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

(725, 646)

**5.-** Hotel **"ANDINO"**, representa al punto 5.

Ubicación: Jr. Pedro Cochachin N° 357

Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

(1237, 1055)

**6-** Hotel **"NOPAL"**, representa al punto 6.

Ubicación: Jr. Las Magnolias N° 879

Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

(1494,748)

**7-** Hotel **"TUMI I"**, representa al punto 7.

Ubicación: Jr. José de San Martín N° 1121

Localización, según el Autocad-2009, en 2D distancia en metros:

(1116,284)

- La demanda de clientes en los hoteles (número de clientes en cada uno de los hoteles, es bajo un supuesto variable, y a lo más de 30 clientes, de

acuerdo a la capacidad algunos buses de transporte turístico de uso frecuente).

- Distancias:

  Las distancias (o en otros casos tiempo o costes) entre cada uno de los hoteles considerados, y con el depósito de vehículos elegido se calculó en base al uso del Autocad-2009, y en cuanto a los tiempos o costes se ha estimado en base a la información proporcionado por los operadores de los buses de transporte turístico.

## 3.5 Plan de análisis de datos

Para el análisis de datos fue necesario utilizar los siguientes materiales indispensables en el desarrollo de la tesis:

Material tangible:

- Una Laptop Intel Pentium Centrino. Mobile Technology. Procesador M 735-A (1, 7 GHz, 2 MB Cache).
- Una memoria externa USB Memorex, 8 Gigas.
- Una impresora HP 1600, para copias en A4 y A3.
- Un Scanner

Material Intangible:

- Lenguaje de Programación Mosel XPress. Versión Estudiante
- Programa Windows XP- Profesional
- Programa Microsoft Office XP
- Autocad - 2009

Mediante la información procesada, la cual fue generada cuando los clientes turísticos tienen que ser recogidos por los vehículos desde los diferentes

lugares de hospedajes de la ciudad de Huaraz, y conocido el lugar que fue tomado como el depósito de los vehículos, y conocida la matriz de distancias (o tiempos o costos), el vehículo (o los vehículos salen de un depósito para realizar dicho servicio) de transportes pueden llevar hasta 30 pasajeros en promedio. Asimismo respecto al número de los hoteles se consideraron los hoteles, que brindan un mejor servicio de atención al cliente, y además considerando la ubicación que haga propicio un recorrido dentro de la ciudad de Huaraz.

Respecto a las agencias de viajes de servicios turísticos, como elementos primordiales de la actividad turística en la ciudad de Huaraz, no han sido consideradas como tal en el problema de rutas, pero si a cambio de ellas se ha considerado un lugar o punto de frecuencia en base a la experiencia del servicio en esta actividad turística dado actualmente, el cual es el punto de parqueo San Martín (señalado anteriormente), que puede o no representar a una agencia de viaje, pero para el propósito del trabajo representa el depósito de los vehículos de transporte de servicio turístico donde se inicie y finalice el recorrido de los vehículos en el recojo de los clientes desde sus lugares de estancia.

Luego se procedió a implementar los modelos matemáticos; en el caso del TSP, se utilizó la heurística de la reinserción más cercana, y en el caso del VRP, la heurística de Ahorros, ambos implementados mediante el lenguaje de programación Mosel Xpress.

Al respecto información complementaria sobre el uso del lenguaje Mosel Xpress.

**El Lenguaje de Programación: Mosel Xpress**

Es un lenguaje de programación desarrollado por la empresa FICO. Este software es líder en el mundo utilizado para modelar y optimizar problemas de gran envergadura que se presentan en las organizaciones y permite mejorar la toma de decisiones, encontrando resultados de beneficios financieros en áreas tales como administración de cadenas de abastecimientos, operaciones, logísticas y administraciones de bienes y servicios, entre muchas otras, y ha sido aplicado en sectores tan diversos como manufactura, procesamientos, distribución, ventas al por menor, transporte, finanzas e inversión.

Mosel Xpress permite implementar el problema y encontrar un buen resultado mediante un motor solucionador disponible, y analiza la solución, usando un lenguaje de programación completamente funcional, específicamente diseñado para el propósito. Los programas Mosel son compiladores, los cuales los hacen rápidos y pueden ser corridos interactivamente o incrustados dentro de una aplicación.

El Lenguaje Mosel contiene al optimizador Xpress, el cual es una sofisticada máquina de optimización multi-funcional disponible.

Dentro de las aplicaciones a las cuales son utilizadas tenemos:

- Problemas de programación lineal
- Problemas de programación Entera Mixta
- Problemas de Programación Entera
- Problemas de Programación No Lineal.
- Problemas de Localización

- Problemas de Optimización Multicriterio

El problema es considerado exclusivamente de recojo de clientes turísticos desde un lugar supuesto y apropiado llamado depósito de vehículos (o una agencia de viajes, en su defecto) y 7 hoteles elegidos de modo aleatorios distribuidos geográficamente en la ciudad de Huaraz según los criterios arriba mencionados. La formulación matemática, se representa mediante un grafo, el cual muestra siete vértices o puntos representados por los hoteles y el depósito de vehículos. Los clientes se encuentran en los hoteles y tienen que ser recogidos por los vehículos de transporte turístico hasta el límite de su capacidad (30 pasajeros) si fuese necesario, también se recogerán clientes en cantidades menores hasta completar su capacidad, lo cual generará una red de rutas en la ciudad. Cuando el recojo haya sido completado, los vehículos retornan al depósito para luego iniciar la visita a los destino turístico de nuestra zona.

**Diagrama de la heurística de solución al problema formulado**

El trabajo de investigación contempla el fundamento del problema de rutas de vehículos de tipo estático. Por eso en este trabajo presentamos una heurística basada en la característica de ahorro. De esta forma se obtienen buenas soluciones, en un tiempo muy corto de procesamiento, acorde al tamaño del problema y lo que se requiere en este tipo de aplicaciones. En el marco del desarrollo de la heurística se estudiaron varias estrategias de construcción de rutas y definición de vecinos, algunas de ellas basadas en las estrategias exitosas para el problema estático.

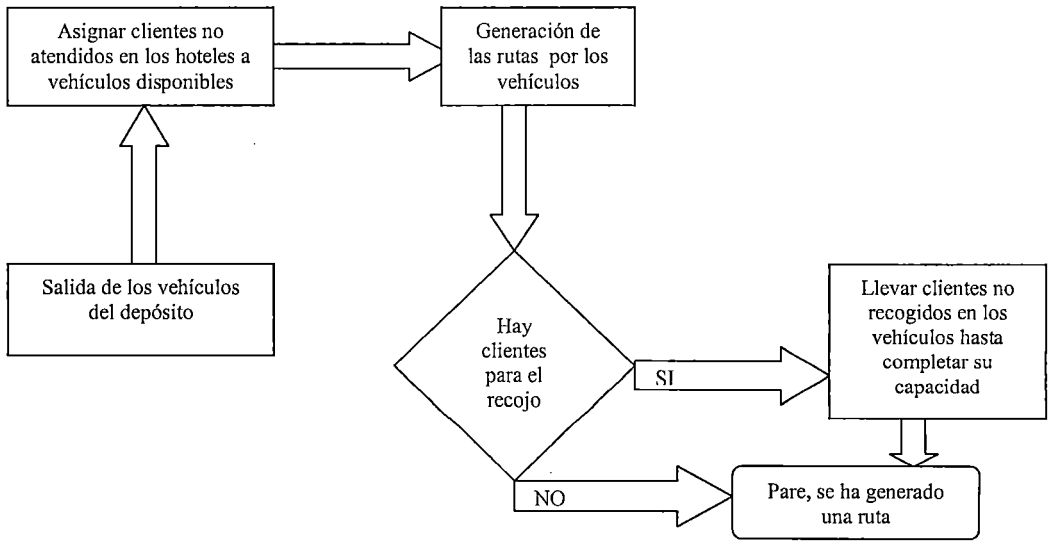


**Figura 2. Esquema de desarrollo del VRP**

# IV. RESULTADOS

Tomando como punto de partida la información disponible para el desarrollo y solución de la aplicación, se cuenta con una base de datos que corresponde a la ubicación de cada uno de los siete (07) puntos que representan a cada uno de los hoteles así como el punto 0 que representa al depósito de vehículos, para ello se tiene las siguientes tablas:

**BASE DE DATOS DE LA UBICACIÓN DE LOS HOTELES Y EL DEPÓSITO**

| **DEPOT: PUNTO 6** | | PUNTO 1: H1 | PUNTO 2: H2 | PUNTO 3: H3 | PUNTO 4: H4 | PUNTO 5: H5 | PUNTO 6: H6 | PUNTO 7: H7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **POS** | [580 375] | [546 258] | [331 200] | [373 485] | [725 646] | [1237 1055] | [1494 748] | [1116 284] |
| **QCUST(2)** | | 20 | 14 | 13 | 10 | 15 | 20 | 15 |

En cuanto a la capacidad de los vehículos de transporte para el servicio de transporte, tipo Coaster, en promedio es para **30** pasajeros cómodamente sentados.

**CAPACIDAD DE LOS VEHÍCULOS**

| | |
|---|---|
| CAP | 30 |

Asimismo, mostramos la tabla correspondiente a las distancias, tiempos y costes respecto del problema, dado de la siguiente manera.

**DISTANCIAS (En metros)**

| **DEPÓSITO PUNTO 0** | PUNTO 0 | PUNTO 1: H1 | PUNTO 2: H2 | PUNTO 3: H3 | PUNTO 4: H4 | PUNTO 5: H5 | PUNTO 6: H6 | PUNTO 7: H7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PUNTO 0: | 0 | 122 | 403 | 456 | 446 | 1288 | 1348 | 543 |
| PUNTO 1: H1 | | 0 | 281 | 517 | 520 | 1410 | 1470 | 665 |
| PUNTO 2: H2 | | | 0 | 388 | 801 | 1691 | 1751 | 946 |
| PUNTO 3: H3 | | | | 0 | 542 | 1388 | 1479 | 834 |
| PUNTO 4: H4 | | | | | 0 | 897 | 989 | 783 |
| PUNTO 5: H5 | | | | | | 0 | 435 | 928 |
| PUNTO 6: H6 | | | | | | | 0 | 752 |
| PUNTO 7: H7 | | | | | | | | 0 |

**TIEMPOS (En minutos)**

| **DEPÓSITO PUNTO 0** | PUNTO 0 | PUNTO 1: H1 | PUNTO 2: H2 | PUNTO 3: H3 | PUNTO 4: H4 | PUNTO 5: H5 | PUNTO 6: H6 | PUNTO 7: H7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PUNTO 0 | 0 | 0.5 | 3.5 | 4 | 4 | 10 | 11 | 5 |
| PUNTO 1: H1 | | 0 | 6 | 5 | 5 | 13 | 13 | 6.5 |
| PUNTO 2: H2 | | | 0 | 4 | 10 | 20 | 21 | 6 |
| PUNTO 3: H3 | | | | 0 | 4 | 7 | 15 | 10 |
| PUNTO 4: H4 | | | | | 0 | 7 | 9 | 8 |
| PUNTO 5: H5 | | | | | | 0 | 4 | 15 |
| PUNTO 6: H6 | | | | | | | 0 | 7 |
| PUNTO 7: H7 | | | | | | | | 0 |

**COSTOS (En nuevos soles)**

| **DEPÓSITO PUNTO 0** | PUNTO 0 | PUNTO 1: H1 | PUNTO 2: H2 | PUNTO 3: H3 | PUNTO 4: H4 | PUNTO 5: H5 | PUNTO 6: H6 | PUNTO 7: H7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PUNTO 0 | 0 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 0.7 | 1.0 | 1.3 | 0.9 |
| PUNTO 1: H1 | | 0 | 0.7 | 0.6 | 0.6 | 1.5 | 1.5 | 0.7 |
| PUNTO 2: H2 | | | 0 | 0.6 | 1.0 | 2.0 | 2.1 | 0.6 |
| PUNTO 3: H3 | | | | 0 | 0.9 | 0.8 | 1.5 | 1.0 |
| PUNTO 4: H4 | | | | | 0 | 0.8 | 0.9 | 0.8 |
| PUNTO 5: H5 | | | | | | 0 | 0.9 | 1.5 |
| PUNTO 6: H6 | | | | | | | 0 | 0.7 |
| PUNTO 7: H7 | | | | | | | | 0 |

A continuación, presentamos las adaptaciones de los modelos matemáticos estudiados a cada uno de los casos formulados anteriormente:

- Primera Aplicación: **Adaptación del Problema del Agente Viajero con Enfoque Multicriterio**

Un conjunto seleccionado de hoteles y dispersados geográficamente, cuya ubicación es estimada en un mapa de la ciudad de Huaraz tiene que ser visitado por un vehículo una sola vez, iniciando y finalizando su ruta en el depósito fijado previamente.

**Formulación del Problema**

La red de transporte por la que deben circular los vehículos de transporte turístico se modela mediante un grafo ponderado $G=(V,E,C)$. Los nodos del grafo representan a los hoteles geográficamente dispersados en la ciudad de

Huaraz, así como el depósito de los vehículos. En este caso el problema se plantea con un depósito y $n = 7$ hoteles, el nodo 0 representa al depósito y los nodos $1,\ldots,n$ a los hoteles. En algunos casos se agrega una copia del depósito etiquetado con $n+1$ para simplificar la formulación.

Cada arco o distancia o tiempo o coste $(i,j) \in E$ representa el mejor camino para ir de desde el hotel **i** hacia el hotel **j** en la red del transporte y tiene asociado una distancia $d_{ij}$ o un costo $c_{ij}$ o un tiempo de viaje $t_{ij}$. Según la estructura de distancias, los costos y los tiempos y las características de la red, el grafo considerado para nuestro problema es simétrico. Puede suponerse que $G$ es completo, pues entre todo par de hoteles y el depósito de una red de transporte razonable existe un camino.

Denotaremos por $\Delta^{+}(i)$ y $\Delta^{-}(i)$ al conjunto de hoteles adyacentes e incidentes al depósito **i**, es decir, $\Delta^{+}(i) = \{j \in V / (i,j) \in E\}$ y $\Delta^{-}(i) = \{j \in V / (j,i) \in E\}$. De manera similar, el conjunto de distancias incidentes hacia el exterior e interior del depósito **i** se definen como $\delta^{+}(i) = \{(i,j) \in E\}$ y $\delta^{-}(i) = \{(j,i) \in E\}$.

En el Problema del Agente Viajero se dispone de un solo vehículo que debe visitar a todos los hoteles para recoger a los clientes en una sola ruta y a una distancia o tiempo o coste mínimo, partiendo del depósito. Se puede asociar una demanda de clientes en los hoteles para recoger y cada hotel debe ser visitado exactamente una sola vez.

**Modelo Matemático**

$$Z_{tsp} = Min \sum_{k \in veh} \sum_{(i,j) \in ubicacionxubicacion} t_{ij} \, X_{ij}^{k}$$

$$s.a: \sum_{k \in veh} \sum_{j \in ubicacion} X_{ij}^{k} = 1 \, , \forall \; i \in hotel$$

$$\sum_{k \in veh} \sum_{i \in ubicacion} X_{ij}^{k} = 1 \, , \forall \; j \in hotel$$

$$\sum_{j \in ubicacion} X_{1j}^{k} = 1 \, , \forall \; k \in veh$$

$$\sum_{i \in ubicacion} X_{ih}^{k} = \sum_{j \in ubicacion} X_{hj}^{k} \, , \forall \; h \in hotel \; \forall \; k \in veh$$

$$\sum_{j \in ubicacion} X_{1n+1}^{k} = 1 \, , \forall \; k \in veh$$

$$X_{ij}^{k} \in \{0,1\} \, , \; (i,j) \in ubicacionxubicacion \, , \forall \; k \in veh$$

Donde, $Z_{tsp}$ se refiere a minimizar la función objetivo, en este caso por ejemplo el tiempo $t_{ij}$ desde el depósito a los hoteles **j**.

$$X^{k}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si el vehiculo llega del hotel i al hotel j} \\ 0, \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La solución se obtiene mediante la reinserción más cercana del TSP, implementado mediante el lenguaje de programación Mosel Xpress.

Mediante los resultados gráficos, se muestran la distancia (longitud), tiempo, y costes mínimos, indicando el número de las iteraciones gráficas que conducen al resultado final de la ruta de recojo de los clientes desde los hoteles de la ciudad de Huaraz.

**TSP-DISTANCIA**

Al realizar cuatro (04) iteraciones en el proceso computacional, se obtuvo el resultado del tsp-distancia, cuya gráfica se muestra a continuación:

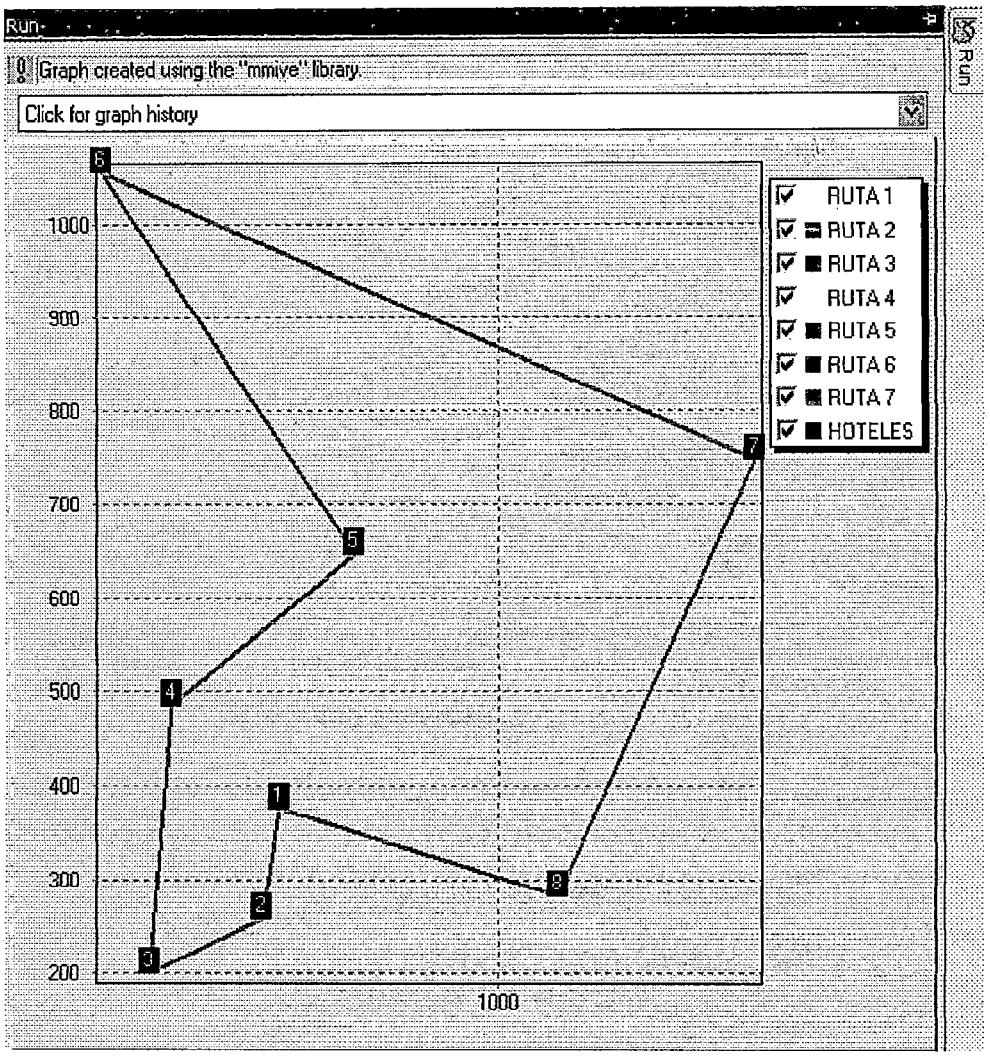


**Figura N° 03: Cuarta Iteración Gráfica para el TSP con 07 hoteles y un depósito**

**Solución: Total de distancia recorrida: 3456 m.**

**01 Ruta:** 1-2-3-4-5-6-7-8-1

**TSP-TIEMPO**

Al realizar cinco (05) iteraciones en el proceso computacional, se obtuvo el resultado del tsp-tiempo, cuya gráfica se muestra a continuación:

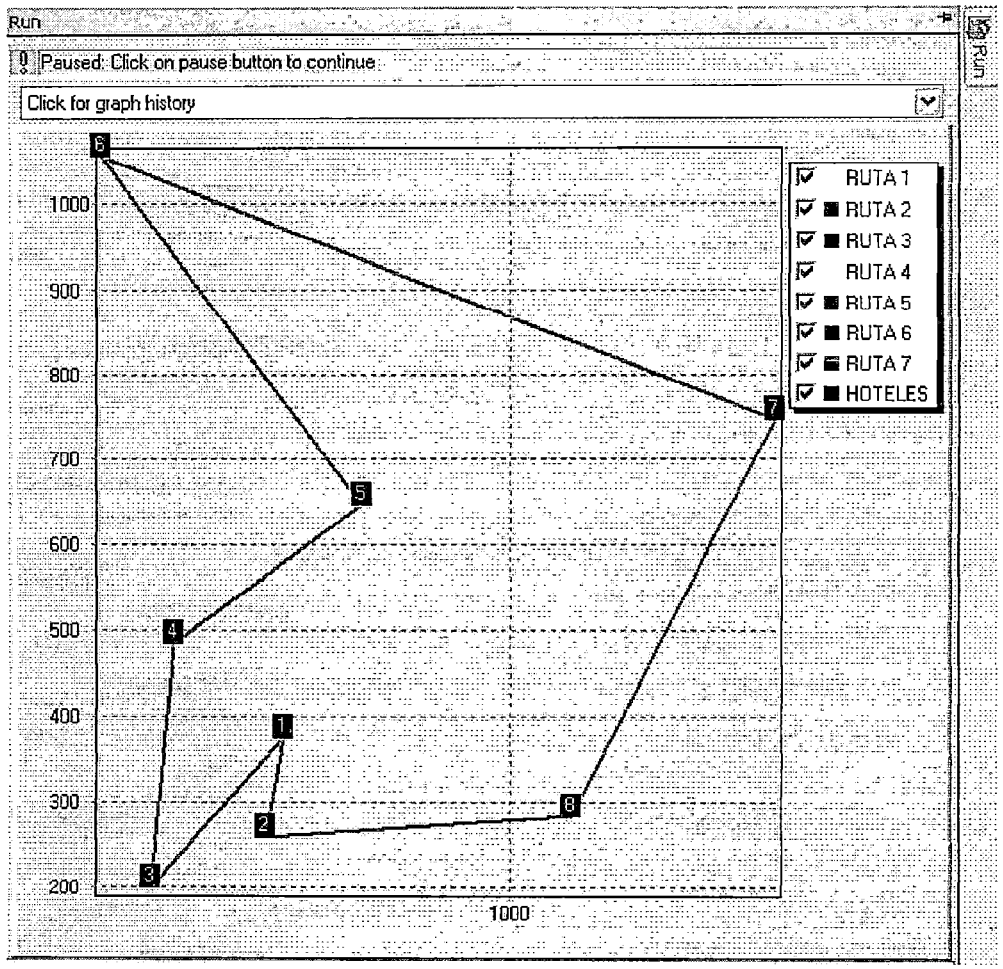


**Figura N° 04: Quinta Iteración Gráfica para el TSP con 07 hoteles y un depósito**

**Solución: Tiempo total recorrido: 20 minutos**

**01 Ruta:** 1-3-4-5-6-7-8-2-1

## TSP-COSTE

Al realizar tres (03) iteraciones en el proceso computacional, se obtuvo el resultado del tsp-coste, cuya gráfica se muestra a continuación:

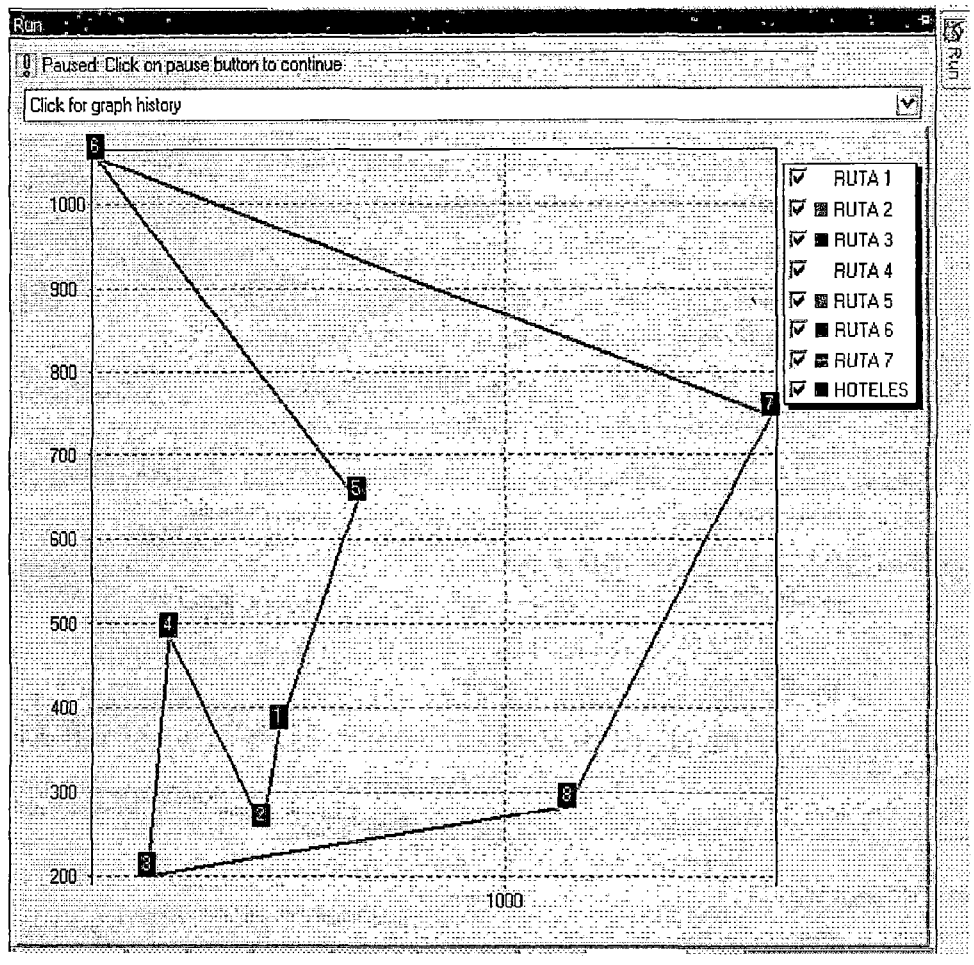


**Figura N° 05: Tercera Iteración Gráfica para el TSP con 07 hoteles y un depósito**

**Solución: Total de Coste: S/. 5,2**

**01 Ruta:** 1-2-4-3-8-7-6-5-1

A continuación se utiliza la técnica multicriterio de las ponderaciones. Las alternativas seleccionadas que caracterizan al problema de ruta con enfoque multicriterio son la longitud, tiempo y costo.

Para evaluar estas alternativas se han definido previamente un conjunto de indicadores que permitirán tomar una decisión sobre la elección de las mismas. Estos indicadores son: rapidez del servicio, satisfacción del cliente y preferencias del cliente. La idea principal es converger de manera simultánea con estos

indicadores respecto de las rutas. La solución resultante no puede ser óptima respecto a todos los criterios, posiblemente en conflicto, sino eficiente.

Los criterios que se consideran son los siguientes:

Criterio 1: rapidez del servicio, expresado en valor numérico entre 0 y 10.

Criterio 2: satisfacción del cliente, entre 0 y 10.

Criterio 3: preferencias del cliente, entre 0 y 10.

La valoración en cada uno de los criterios de 0 y 10, es de peor a mejor.

**Pre-Análisis de Dominación**

En el cuadro siguiente se da la matriz de decisión que recoge las evaluaciones (valoraciones supuestas) de cada una de las rutas, y todos los criterios son a maximizar.

| **Criterios:** **Alternativas:** | **C1 MAX** | **C2 MAX** | **C3 MAX** | **Pre análisis de dominación** |
|---|---|---|---|---|
| **RUTA 1**[longitud] | **4** | **7** | **9** | |
| **RUTA 2**[tiempo] | **6** | **8** | **9** | |
| **RUTA 3**[coste] | **2** | **3** | **3** | **DOMINADA** |

**Tabla 01: la matriz de decisión y el pre análisis de dominación**

Se observa que no existe una ***alternativa dominante***. Una alternativa tal, si existe, será sin duda la mejor elección. Luego de analizar las alternativas y los criterios, se determina que existe una alternativa dominada, la ruta 3.

**Pre-Análisis de Satisfacción**

La noción de nivel de satisfacción se entenderá bajo la forma de un *umbral o nivel de satisfacción* para cada criterio a optimizar. Para cada criterio supuesto bajo la forma de un pre orden total, el decisor sabe cuál es la alternativa, o el nivel de utilidad no forzosamente representado por una alternativa, con el que se lograría estar satisfecho.

| Criterios: Alternativas: | C1 MAX | C2 MAX | C3 MAX | Pre análisis de satisfacción |
|---|---|---|---|---|
| RUTA 1[longitud] | 4 | 7 | 7 | |
| RUTA 2[tiempo] | 6 | 8 | 9 | |
| RUTA 3[coste] | 2 | 3 | 3 | DOMINADA |
| Nivel de Satisfacción | 4 INF | 7 INF | 7 INF | |

**Tabla 02: la matriz de decisión y el pre análisis de satisfacción**

Se observa que no existe ninguna alternativa que sea no satisfactoria, y por cierto los resultados del pre análisis de dominación y de satisfacción no siempre son coincidentes, es decir ambos pre análisis, de dominación y de satisfacción, son independientes y complementarios.

Realizados los pre análisis de dominación y satisfacción, en el siguiente cuadro se prosigue con las evaluaciones y se considera una valoración (escala de 0 a 5) realizado en base a la importancia o peso que se atribuye a cada criterio.

| Criterios: Alternativas: | C1:MAX | C2:MAX | C3:MAX |
|---|---|---|---|
| RUTA 1[longitud] | 4 | 7 | 7 |
| RUTA 2[tiempo] | 6 | 8 | 9 |
| Peso | 4 | 7 | 5 |

**Tabla 03: la matriz de decisión y los pesos considerados**

Aquí, se realiza las transformaciones de normalización.

| Criterios: Alternativas: | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|
| RUTA 1[longitud] | 0.4 | 0.5 | 0.4 |
| RUTA 2[tiempo] | 0.6 | 0.5 | 0.6 |
| Peso | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

**Tabla 04: la matriz de decisión ponderada**

Se finaliza con el método de las ponderaciones lineales calculando las evaluaciones globales de cada candidato, según $R(a_i) = \sum_j w_j a_{ij} \quad (i = 1,2,3)$

RUTA 1 = 0.44

RUTA 2 = 0.56

Por lo que la ruta 2 sería la ruta que cumple mucho mejor los criterios exigidos (supuestos) para la elección de la rutas, y en segunda opción de decisión sería la ruta 1.

- Segunda Aplicación: **Adaptación del Problema de Rutas de Vehículos con Enfoque Multicriterio**

Un conjunto de hoteles dispersados geográficamente en la ciudad de Huaraz, cuya ubicación fue calculado mediante el Autocad – 2009 en un mapa de la ciudad de Huaraz y con un determinado número de clientes que tiene que ser visitado por los vehículos de transporte turístico una sola vez, y con una capacidad limitada de 30 pasajeros, debe iniciar y finalizar en un depósito fijado un recorrido determinando un conjunto de rutas de distancia o tiempo o coste mínimo. Asimismo resulta que el conjunto de vehículos en el transporte utilizados es mínimo.

**Formulación del Problema**

Sea la red de transporte generalizada y similarmente al TSP deben circular los vehículos de transporte turístico, la cual es modelado mediante un grafo ponderado $G = (V,E,C)$. Los nodos del grafo representan a los hoteles geográficamente dispersados en la ciudad de Huaraz, así como el depósito de los vehículos. En este caso el problema se plantea con un depósito y $n = 7$ hoteles, el nodo 0 representa al depósito y los nodos $1,\ldots,n$ a los hoteles.

Cada arco o distancia o tiempo o coste $(i,j) \in E$ representa el mejor camino para ir de desde el hotel **i** hacia el hotel **j** en la red y tiene asociado una distancia $d_{ij}$ o un costo $c_{ij}$ o un tiempo de viaje $t_{ij}$. Según la estructura de distancias, los costos y los tiempos y las características de la red, el grafo considerado para nuestro problema es simétrico. Puede suponerse que $G$ es completo, pues entre todo par de hoteles y el depósito de una red de transporte razonable existe una ruta.

Denotaremos por $\Delta^{+}(i)$ y $\Delta^{-}(i)$ al conjunto de hoteles adyacentes e incidentes al depósito **i**, es decir, $\Delta^{+}(i) = \{j \in V / (i,j) \in E\}$ y $\Delta^{-}(i) = \{j \in V / (j,i) \in E\}$. De manera similar, el conjunto de distancias incidentes hacia el exterior e interior del depósito **i** se definen como $\delta^{+}(i) = \{(i,j) \in E\}$ y $\delta^{-}(i) = \{(j,i) \in E\}$.

Para el recojo de los clientes desde los hoteles, existe una flota de vehículos $U = \{1, 2, ..., m\}$ con una capacidad conocida CAP donde el número de vehículos es considerado como una variable en el problema, conociendo el tiempo de viaje $t_{ij}$ el número de vehículos **k** será minimizado cuando el servicio de vehículos efectúe el recojo, logrando reducir tiempos y costos operativos de transporte.

**Modelo Matemático**

La formulación de este modelo implica la siguiente variable $x(i,j,k)$, variables de decisión, $(i,j)$ en E, k en U, donde $x(i,j,k)$ en {0,1} y $x(i,j,k) = 1$, si el vehículo **k** conduce desde el hotel i al hotel j si y

solamente si el hotel en el tiempo $t_{ij}$ (o distancia o coste) es atendido por el vehículo **k**, y 0 en otros casos.

$$Z_{vrp} = Min \sum_{k \in veh} \sum_{(i,j) \in ubicacionxubicacion} t_{ij} X_{ij}^{k}$$

$$s.a: \sum_{k \in veh} \sum_{j \in ubicacion} X_{ij}^{k} = 1 \ , \forall \ i \in hotel$$

$$\sum_{k \in veh} \sum_{i \in ubicacion} X_{ij}^{k} = 1 \ , \forall \ j \in hotel$$

$$\sum_{j \in ubicacion} X_{1j}^{k} = 1 \ , \forall \ k \in veh$$

$$\sum_{i \in hotel} \sum_{j \in ubicacion} QCUST_i \ X_{ij}^{k} \leq CAP \ , \ \forall \ k \in veh$$

$$\sum_{i \in ubicacion} X_{ih}^{k} = \sum_{j \in ubicacion} X_{hj}^{k} \ , \forall \ h \in hotel \ \forall \ k \in veh$$

$$\sum_{j \in ubicacion} X_{1n+1}^{k} = 1 \ , \forall \ k \in veh$$

$$X_{ij}^{k} \in \{0,1\} \ , \ (i,j) \in ubicacionxubicacion \ , \forall \ k \in veh$$

Donde $Z_{vrp}$ indica que el tiempo total de viaje es minimizado.

La solución al VRP mediante el algoritmo de Ahorros, utilizando el lenguaje de programación Mosel Xpress es el siguiente:

**DISTANCIA**

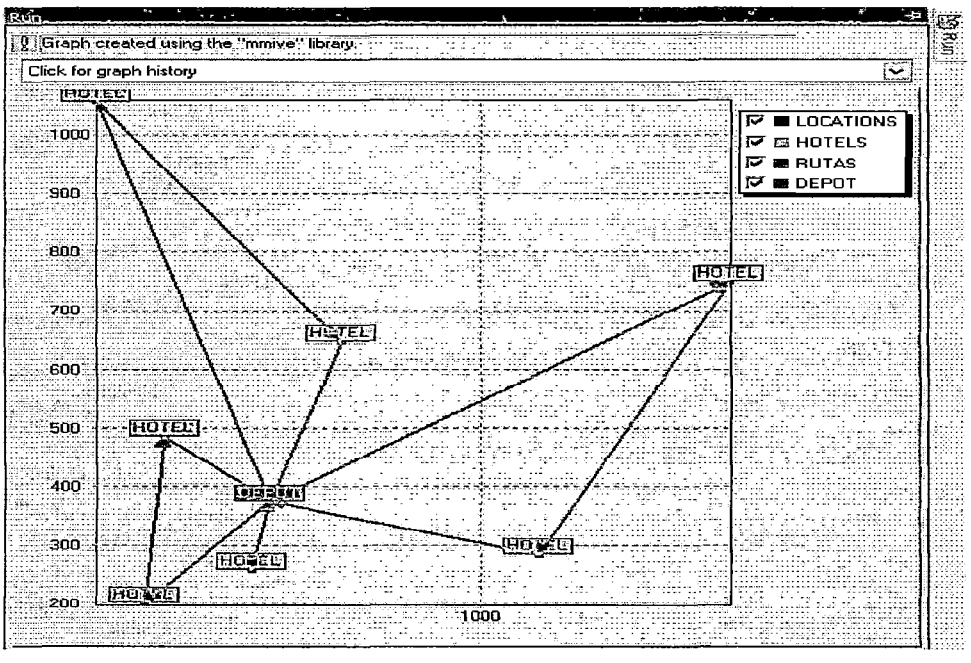


**Figura Nº 15: rutas de distancia mínima para el VRP**

**Solución: total de distancia 6462 m.**

**Número de Rutas de los Vehículos**

- ***R1: 1-2-1*** ***20 clientes***
- ***R2: 1-3-4-1*** ***27 clientes***
- ***R3: 1-6-5-1*** ***22 clientes***
- ***R4: 1-7-8-1*** ***30 clientes***

Luego se utiliza la técnica multicriterio de las ponderaciones. Las alternativas seleccionadas que caracterizan al problema de ruta con enfoque multicriterio son las rutas determinadas por los vehículos.

Para evaluar estas alternativas se definen previamente un conjunto de indicadores que permiten tomar una decisión sobre elegir el orden de las rutas según los criterios establecidos. Estos indicadores son: rapidez del servicio, satisfacción del cliente y preferencias del cliente. La idea principal es converger de manera simultánea con estos indicadores respecto de las rutas. La solución resultante no puede ser óptima respecto a todos los criterios, posiblemente en conflicto, sino eficiente y satisfactoria.

Los criterios que se consideran son los siguientes:

- Criterio 1: rapidez del servicio, expresado en valor numérico entre 0 y 10.
- Criterio 2: satisfacción del cliente, entre 0 y 10.

La valoración en cada uno de los criterios de 0 y 10, es de peor a mejor, y es necesario tener en cuenta que por ejemplo el criterio 1, según los clientes desean que su recojo en los hoteles de la ciudad sean lo más rápido posible, sin tomar en cuenta detalles, e iniciar la visita a los destinos turísticos de la

región; sin embargo el criterio 2, desea tener complacencia en el recojo, pues cuando el vehículo recorre la ciudad desea pasar por los lugares que cuentan con cierto atractivo cultural o notorio de la ciudad, y para ello posiblemente desea que el recojo en los hoteles sea por grupos pequeños y así de ese modo el vehículo debe recorrer más la ciudad.

**Pre-Análisis de Dominación**

En el cuadro siguiente se da la matriz de decisión que recoge las evaluaciones (valoraciones supuestas) de cada una de las rutas, y todos los criterios son a maximizar.

| Criterios: Alternativas: | C1 MAX | C2 MAX | Pre análisis de dominación |
|---|---|---|---|
| RUTA 1 | 10 | 2 | |
| RUTA 2 | 7 | 6 | |
| RUTA 3 | 5 | 7 | |
| RUTA 4 | 5 | 6 | DOMINADA |

**Tabla 05: la matriz de decisión y el pre análisis de dominación**

Se observa que no existe una ***alternativa dominante***. Una alternativa tal, si existe, será sin duda la mejor elección. Luego de analizar las alternativas y los criterios, se determina que existe una alternativa dominada (la ruta 4) por las rutas 2 y 3.

**Pre-Análisis de Satisfacción**

Según la tabla anterior, como debe entenderse que no siempre, en este caso la ruta dominada puede ser descartada dentro del pre-análisis de satisfacción.

| Criterios:<br>Alternativas: | C1<br>MAX | C2<br>MAX | Pre análisis<br>de satisfacción |
|---|---|---|---|
| RUTA 1 | 10 | 2 | NO SATISFACTORIA |
| RUTA 2 | 7 | 6 | |
| RUTA 3 | 5 | 7 | |
| RUTA 4 | 5 | 6 | DOMINADA |
| Nivel de satisfacción | 5<br>INF | 5<br>INF | |

**Tabla 06: la matriz de decisión y el pre análisis de satisfacción**

Se observa que existe una alternativa que es no satisfactoria, y como se ve los resultados del pre análisis de dominación y de satisfacción son diferentes.

Realizados los pre análisis de dominación y satisfacción, en el siguiente cuadro se prosigue con las evaluaciones y se considera una valoración (escala de 0 a 5) realizado en base a la importancia o peso que se atribuye a cada criterio.

| Criterios:<br>Alternativas: | C1:MAX | C2:MAX |
|---|---|---|
| RUTA 1 | 10 | 2 |
| RUTA 2 | 7 | 6 |
| RUTA 3 | 5 | 7 |
| RUTA 4 | 5 | 6 |
| Peso | 2 | 5 |

**Tabla 07: la matriz de decisión y los pesos considerados**

Aquí, en la siguiente tabla se muestran las transformaciones de normalización.

| Criterios: Alternativas: | C1:MAX | C2:MAX |
|---|---|---|
| RUTA 1 | 0.37 | 0.10 |
| RUTA 2 | 0.26 | 0.29 |
| RUTA 3 | 0.19 | 0.33 |
| RUTA 4 | 0.19 | 0.29 |
| Peso | 0.29 | 0.71 |

**Tabla 08: la matriz de decisión ponderada**

Finalmente se calcula las evaluaciones globales de cada candidato, según

$R(a_i) = \sum_j w_j a_{ij} \quad (i = 1,2,3)$

RUTA 1 = 0.178

RUTA 2 = 0.281

RUTA 3 = 0.289

RUTA 4 = 0.261

Se ordena las rutas según los resultados obtenidos por el método de ponderación lineal, y según los criterios establecidos:

RUTA 3 = 0.289

RUTA 2 = 0.281

RUTA 4 = 0.261

RUTA 1 = 0.178

Observándose que la ruta 3 es la ruta que satisface en la mejor de la medida las exigencias establecidas según los clientes.

Asimismo, se puede disponer para las rutas según el VRP respecto del coste y el tiempo como se muestran en las figuras siguientes:

## COSTE

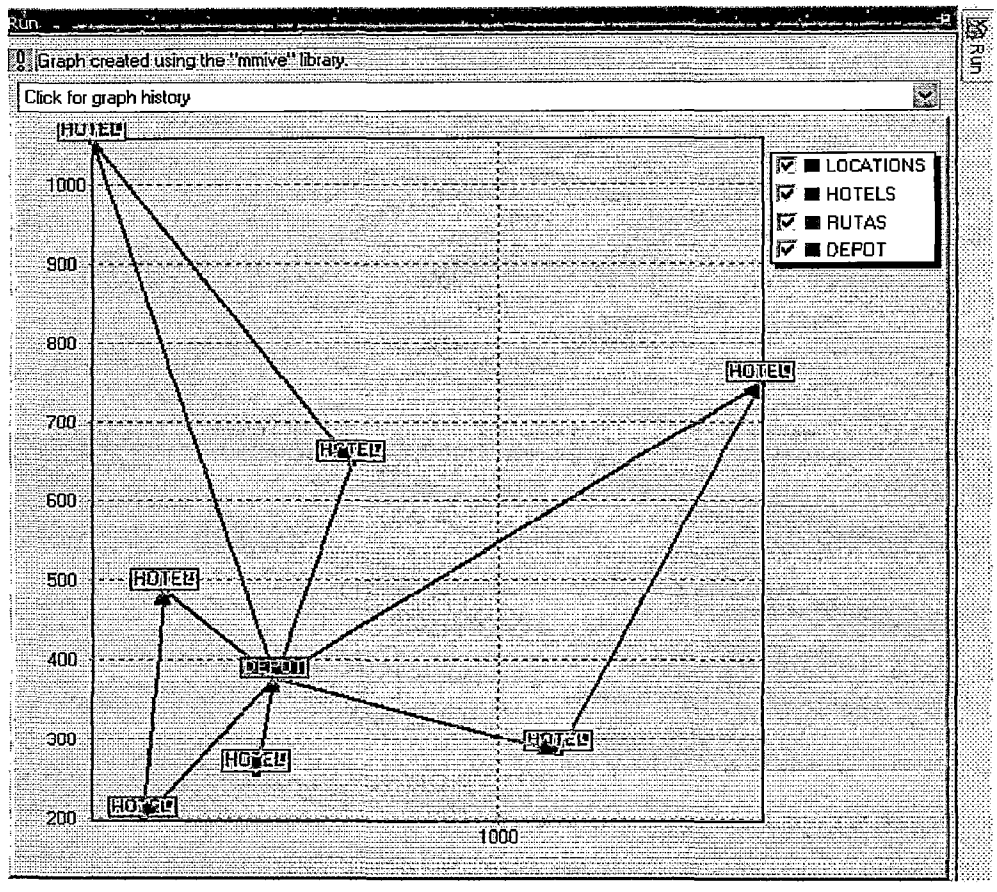


**Figura Nº 16: rutas de coste mínimo para el VRP**

**Solución: total de coste 8,6 nuevos soles.**

**Número de Rutas de los Vehículos**

- ***R1: 1-2-1*** ***20 clientes***
- ***R2: 1-3-4-1*** ***27 clientes***
- ***R3: 1-6-5-1*** ***22 clientes***
- ***R4: 1-7-8-1*** ***30 clientes***

**TIEMPO**

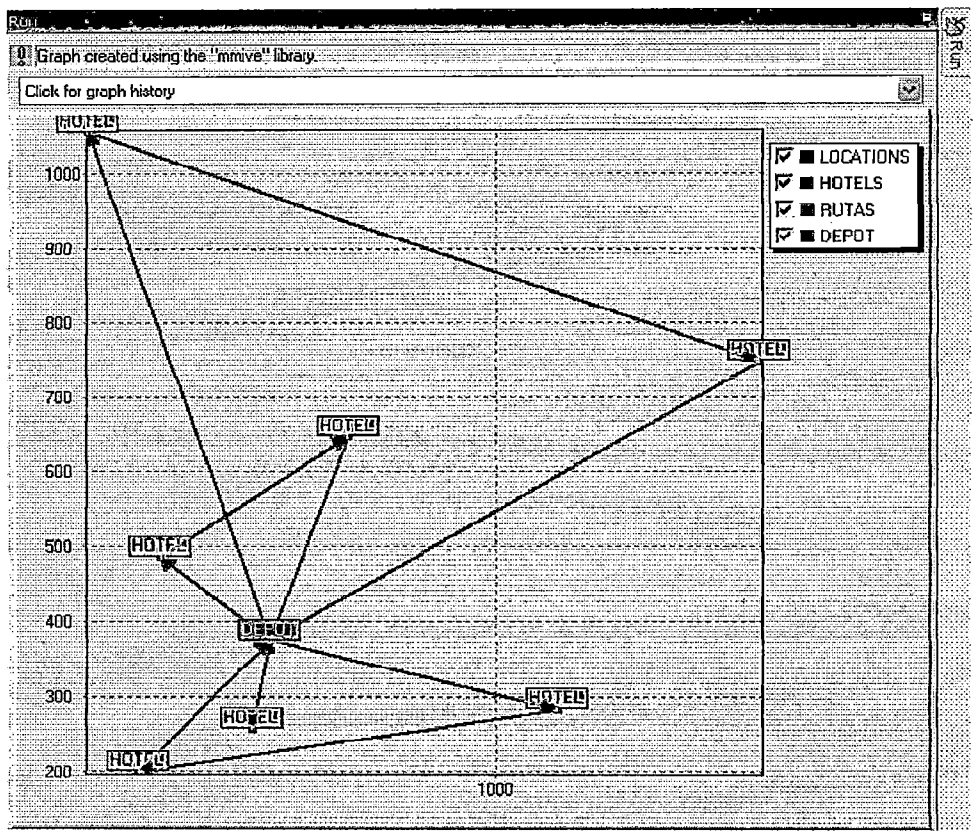


**Figura Nº 17: rutas de tiempo mínimo para el VRP**

**Solución: total de tiempo 52,5 minutos.**

**Número de Rutas de los Vehículos**

- ***R1: 1-2-1*** ***20 clientes***
- ***R2: 1-4-5-1*** ***25 clientes***
- ***R3: 1-6-7-1*** ***25 clientes***
- ***R4: 1-8-3-1*** ***29 clientes***

Todas las aplicaciones adaptadas se desarrollaron utilizando el lenguaje de programación Mosel Xpress-MP 2009 y corrió sobre una PC Pentium 4 CPU, 2.40 GHz, 512 MB de RAM bajo el Microsoft Windows XP Professional y una Laptop Intel Pentium Centrino. Mobile Technology. Procesador M 735-A

(1,7 GHz, 2 MB Cache).

Este problema tiene 64 variables de decisión, donde cada una es bidimensional.

En el caso del VRP para la distancia total de 6462 metros tomó 01 segundos conseguir la solución óptima.

En el caso del VRP para el coste total de 8,6 nuevos soles tomó 01 segundos conseguir la solución óptima.

En el caso del VRP para el tiempo total de 52,5 minutos tomó 01 segundos conseguir la solución óptima.

# V. DISCUSIÓN

El análisis de los procesos logísticos de la situación problemática, en la prestación de servicios de transportes en los hoteles para el recojo de sus clientes en la ciudad de Huaraz, y asumiendo que el punto 0: parqueo San Martín sea el depósito de la flota de vehículos, conlleva a un tema bastante complejo. Las flotas de vehículos de transporte que prestan el servicio turístico son distintas especialmente en cuanto a su capacidad, y por otro lado los clientes deben ser recogidos desde los hoteles. Los vehículos tienen que llegar puntualmente a recoger a los clientes turísticos en los hoteles sin tener demora. Además la incertidumbre en la información disponible, origina un desorden en la organización de esta actividad y por ende a un malestar principalmente a quienes se debe, los clientes que desean no tener contratiempos en el abordaje de los vehículos, o en el tiempo de espera en sus hospedajes o incluso en la misma agencia de turismo donde por respeto no debe realizarse el recojo de los clientes.

Respecto de algún otro trabajo en esta actividad turística en una situación similar no se ha encontrado, ni en la bibliografía ni en la WEB, y los que escasamente existen tienen un enfoque distinto. Del mismo modo instancias de problemas de rutas de vehículos con enfoque multicriterio, no se tiene como para poder comparar los resultados.

El planeamiento del transporte de clientes turísticos en la ciudad de Huaraz involucra varias etapas secuenciales desde el caso simple de la aplicación del algoritmo del Agente Viajero determinando una sola ruta y eligiendo el lugar de inicio y finalización para obtener una función de coste (longitud, tiempo, costo), luego el Problema de Rutas de Vehículos determinando un conjunto de rutas que

involucran un lugar fijo y otras dispersadas con variables de distancias y además la capacidad de los vehículos que permite lograr el recojo de los clientes desde los hoteles puede ser variables, en función del tipo de vehículo de transporte que se elija por ello medimos la distancia al desarrollar el conjunto de rutas.

En el caso de multicriterio, donde aún más se percibe las situaciones problemáticas cercanas a este análisis y modelos, debemos cuantificar y cualificar variables simultáneamente, en una situación de punto de equilibrio para conseguir no óptimos pero si satisfactorios (eficientes) a las exigencias de la formulación del modelo matemático.

Podemos observar que el problema resulta muy complejo aún para los tipos de problemas considerados y entonces tenemos que realizar muchas restricciones, pero no obstante estas dificultades nos permite augurar ciertas resultados satisfactorios al caso planteado, además es importante resaltar que los resultados pueden ser aún mejores si disponemos de ciertos software como son los SIG (sistema de información geográfica) que ayuda para el caso de la ubicación de los hoteles y el depósito.

También el conjunto de los vehículos se consideraron idénticos, entonces ahí el modelo puede ser simplificado y no es necesario identificar al vehículo si va de de la localización i a la localización j a través de la conexión (i,j). Así el número de 0-1 variables decrece dado que es suficiente definir una única variable 0-1 X (i,j), indicando si el vehículo viaja desde i a j o no. Así, esta reducción hace posible resolver el modelo con un número grande de localizaciones en una cantidad razonable de tiempo computacional.

La solución de problemas normalmente está asociada a un proceso de búsqueda,

salvo en problemas muy simples, la búsqueda de soluciones no puede realizarse en forma exhaustiva, por lo que las investigaciones han desarrollado una gran cantidad de métodos alternativos de búsqueda que encuentren soluciones aceptables y en muchos casos inclusive óptimas. Lo mismo se aplica para solucionar problemas de optimización para los cuales se han desarrollado métodos aproximativos, a veces involucrando cierta aleatoriedad. Finalmente, el proceso de aprendizaje de nuevos conceptos también puede ser visto como un proceso de búsqueda.

También los operadores principales de la actividad turística, por decir las agencias de turismo, no cuentan con políticas para seguir un proceso sistemático de reclutamiento, selección, contratación y capacitación del personal que brinda atención directa al público usuario, dando información distorsionada en el recorrido de las rutas en la ciudad para el recojo de los clientes y su posterior visita a los destinos turísticos, desacreditando la veracidad de la información, entrando en constantes contradicciones y agregando un factor de incredulidad a los clientes.

El único canal de comercialización que utilizan la mayoría de Agencias de turismo es el directo (empresa – cliente).

Existen pocas Agencias de turismo que cuentan con tecnología implementada y con sistemas de información, que les permitan agilizar los procesos de servicios.

No existe una real coordinación entre empresas turísticas y la Dirección Regional de Industria y Turismo.

Sería recomendable disponer, por ejemplo que cada agencia de viajes, así como los hoteles dispusieran de una base de datos (DB) donde se reporte la cantidad de clientes, los costos operativos de los vehículos de servicios turísticos, los tiempos

de viaje en los recorridos hacia los hospedajes, los tiempos de servicios y las duraciones de los tiempos de servicio en cada uno de los lugares de hospedajes.

La información disponible de la actividad turística en bases de datos, existen en muy pocas agencias de viajes y en algunos pocos hoteles, pero se observa como paulatinamente en algunas de ellas se está sistematizando esta información en las computadoras, las cuales facilitan el trabajo y se hace mucho más simple. De este modo permite usar una base de datos con información útil para ser utilizada por las agencias de viajes y hoteles especialmente.

Es importante señalar que según esta base se dispondría de la información sobre el número de visitantes en cada uno de los hoteles, los lugares que desean visitar, el número de los días que ellos desearían permanecer. Los hoteles tendrían que reportar a los encargados de los vehículos para su transporte, y solicitar los requerimientos para los transportistas, los tiempos de recorridos desde el depósito a los hospedajes, números y capacidad de los vehículos y el tiempo de servicio en cada uno de los hoteles. La situación problemática podría ser mucho mejor si una DB es implementada en cada uno de los hoteles y serían conectadas vía un sistema interno con tecnología de red y así se conseguiría una mejor información para la actividad turística, en este caso la comunicación se recomendaría mantenerse en línea.

Por otro lado, sabemos que nuestra región tiene grandes perspectivas de crecimiento turístico por la fuerte presencia de factores básicos (recursos naturales únicos), con microclimas variados y diversificadas tradiciones culturales, con los cuales tiene un enorme potencial para atender a todos los segmentos del mercado en los variados destinos turísticos.

Existe entonces la necesidad de brindar una atención especial a las opciones de visita y permanencia de visitantes a los destinos turísticos, entre los cuales, los atractivos y recursos turísticos deben adquirir importancia y niveles de competitividad que haga posible concentrar a importantes segmentos turísticos con crecientes preferencias por el turismo tradicional.

Las tendencias de la oferta y la demanda del turismo tradicional en nuestra región muestran un crecimiento progresivo.

Finalmente el ordenamiento del transporte, especialmente el turístico en nuestra ciudad tiene un carácter urgente, pues el recojo a los clientes se realizan de manera informal, lo que origina desazón, desaliento, pérdida de tiempo y por tanto incomodidad, inseguridad e insatisfacción a los clientes. Por ello es imperativo y necesario hacer un planeamiento del transporte en este servicio, teniendo en cuenta que el servicio turístico es un sector muy delicado y potencialmente en crecimiento. Para ello en esta investigación se pretende generar un sistema que apoye la decisión sobre que rutas debe tomar el transporte de servicios turísticos de recojo al cliente desde los hoteles, utilizando herramientas científicas para ofrecer una alternativa de solución al transporte turístico en nuestra ciudad que redundará en beneficio de los prestadores del servicio como clientes.

# VI. CONCLUSIONES

- Los modelos de la optimización combinatoria, especialmente el problema de rutas de vehículos enfocados con multicriterio si permiten realizar una planeación en la simulación de los problemas que se suscitan en nuestro entorno real y concreto, permitiendo tener resultados que nos puedan resultar de soporte técnico-científico en la mejora de la toma de decisiones de los problemas de transporte, como son la elección de rutas.
- Los objetivos de tiempos y costes en los diseños de rutas planificados mediante los modelos matemáticos permiten economizar variables que permiten mejorar los servicios de atención y comodidad al cliente.
- El uso de herramientas tecnológicas, como lo son los programas computacionales (Autocad-2009) y software (Mosel Xpress) constituyen elementos indispensables actualmente para la obtención de resultados de los problemas reales y concretos y sirven de gran ayuda en la toma de decisiones de los responsables en las actividades turísticas.
- Los modelos están orientados a establecer solo una aproximación de los problemas reales y concretos estudiados, no obstante esto constituyen instrumentos valiosos en la solución de estos problemas en el sistema de transporte turístico. Así tanto el TSP como el VRP engloban todo un amplio conjunto de variantes y personalizaciones de problemas, siendo en muchos casos aún materia de investigación.
- Los modelos han sido construidos esencialmente tomando las variables más relevantes de la situación problemática, aquellas que más reflejan. Evidentemente se pueden formular modelos más finos y de mayor rigor

matemático; ésta es una propuesta. que definitivamente generará entre los investigadores un mayor aporte en la implementación de nuevos modelos, metodología y técnicas para realizar estudios técnicas-científicas.

- La validez y significación de los resultados que proporcionan los modelos, estudiados dependerá de la confiabilidad y variedad de los datos, y de la lógica en la formulación de las respectivas hipótesis.
- La actividad turística es un campo muy complejo y nada fácil de realizar ordenamientos inmediatos que permitan un mejor desarrollo. El usuario turístico es la prioridad principal de esta actividad turística logrando su comodidad y atención que reflejen su satisfacción personal y permita realizar un efecto multiplicador del servicio brindado y contribuya al crecimiento progresivo del turismo.
- Si en la actividad turística, se brinda una adecuada calidad de servicio con el fin de satisfacer las necesidades del cliente, puede llevar directamente a un incremento de la demanda que se refleja en un mayor porcentaje de afluencia en el mercado y contribuir en la disminución de costos y por consiguiente, en un aumento de las utilidades.
- Para que los servicios transporte turísticos en la ciudad de Huaraz, se desarrollen de manera satisfactoria éstos deben ser prestados por personas que tengan una verdadera cultura de servicio, por empleados que respondan con interés y dedicación a las necesidades del cliente, con ejecutivos que tengan una definida y clara visión de futuro y que sean capaces de implementar herramientas de gestión tecnológicas dentro de sus empresas,

que mas allá de ver a esta actividad con visión rentista, conciban esto como un satisfactor de las necesidades humanas.

- El enfoque multicriterio introduce un tratamiento más flexible del sistema de restricciones.
- El enfoque presentado en el presente trabajo es el primer intento de tratar el problema de rutas como un problema de decisión en presencia de múltiples atributos.

# VII. RECOMENDACIONES

1. Para el caso de los TSP, debido al grado de complejidad de su solución cuando el número de vértices es grande (mayor que 8), se sugiere aplicar otro tipo de programación como es el caso de la programación dinámica la cual permite una mejor ejecución y con menor coste posible.
2. Cuando se hace un estudio de este tipo de problemas de rutas se sugiere iniciar con el modelo más simple, restringiendo muchas de sus variables, y luego poco a poco incorporarlas para aproximar al caso real y por tanto los resultados al problema serán cada vez mejores al caso ideal de la optimalidad.
3. Los algoritmos desarrollados no consideran el carácter multiobjetivo de modo directo, pero a partir de los resultados de la solución del problema: minimizar la distancia o costo o tiempo, maximizando el nivel de satisfacción del cliente; los métodos para resolver la optimización multiobjetivo presentan las mismas limitaciones que los métodos clásicos de optimización, pues de hecho no son más que técnicas basadas en estos métodos, es decir generan problemas NP completos, lo que ha motivado que en ocasiones sea necesario utilizar un enfoque de solución basado en la creación de un conjunto de alternativas no dominadas y luego aplicarles a este nuevo conjunto, técnicas multicriterios en espacios discretos o multiatributo, las cuales se identifican con problemas donde el número de alternativas es finito y normalmente no muy elevado, al convertir el conjunto de alternativas infinitas en un número limitado de ellas y dentro de

éste realizar el proceso de selección con la ayuda de los criterios que se desean considerar y las preferencias del decisor.

4. Se sugiere emprender el estudio de esta línea de investigación pues existe una amplia gama de aplicaciones que permite resolverlos y obtener buenos resultados satisfactorios.
5. Abordar un problema real y concreto en todo su amplitud requiere de un tipo de matemática muy fina, y para ello una preparación en líneas de especialización es indispensable para abordarlas con éxito.
6. Ser conscientes que gran número de problemas no solo requieren el uso de una teoría aislada sino de un conjunto de éstas, lo que hace que la preparación sea más amplia y rigurosa.

## VIII. BIBLIOGRAFÍA


- BALCAZAR, J. (1986), *"Algoritmos de Distancias Mínimas en Grafos"*. Edit. Facultad de Informática, UPC. Lima, Perú. 86-92.
- BARBA-ROMERO S. (1997), *"Decisiones Multicriterio"*. Colección de Economía, Universidad de Alcalá. España.
- BERTSIMAS D.J. (1996), *"A New Generation of Vehicle Routing Research: Robust Algorithms, Addressing Uncertanity. Operations Research"*, Edit. John Wiley, USA.
- CALVETE H., (2005), *"A Goal Programming Approach to Vehicle Routing Problems with Soft Time Windows"*. ElSevier. European Journal of Operational Research.United Kingdon.
- COLLETE, (2003), *"Multiobjective Optimization Principles and Case Studies"*. Edit. Springer. Germany.
- CORDEAU J. (1997), *"A Tabu Search Heuristic for Periodic and Multi-Depot Vehicle Routing Problems"*. Networks. Spain.
- DANTZIG, G. B.; RAMSER, R. H. (1959), *"The Truck Dispatching Problem"*. Management Science.USA. 6- 80.
- EHRGOTT (2002), *"Multiple Criteria Optimization"* Edit. Springer, Germany.
- GAL T. (1999), *"Multicriteria Decision Making-Advances in MCDM models, Algorithms, Theory and Applications"*. Edit. Kluwer Academic Publishers, USA.

- GARZA, R. (2001), *"Procedimiento Multicriterio para la Planificación de Rutas de Distribución"*. Tesis para optar el grado de Doctor en Ciencias Técnicas, La Habana, CUBA.
- JOHNSONBAUGH R. (1990), *"Matemática Discreta"* Edit. Iberoamericana, México.


- JOHNSONBAUGH R. (1990), *"Matemática Discreta"* Edit. Iberoamericana, México.


- KEENEY, R.L y RAIFFA, H. (1976), *"Decisions with Multiple Objectives. Preferences and Value Trade Offs"*. New York, Wiley. USA.
- LIN C.,(2005), *"Multi-objective Metaheuristics for a Location-Routing Problem with Multiple use of Vehicles on Real Data and Simulated Data"*. ElSevier.European Journal of Operational Research, USA.
- MITSUO Gen. (2000), *"Engineering Optimization"*. Ashikaga Institute of Technology. Edit. John Wiley, Japan.
- NIKEL S.(1999),*"Planning and Organization in the Hospital. Operations Research Proceedings"*. Edit. Springer,Germany.
- NORMAS LEGALES: *"El Peruano"*. Periódico de difusión Nacional del Estado, 3 de Junio de 1998.
- NORMAS LEGALES: *"El Peruano"*. Periódico de difusión Nacional del Estado, 11 de Noviembre de 2004.
- NORMAS LEGALES: *"El Peruano"*. Periódico de difusión Nacional del Estado, 23 de Enero de 2005.
- PATRIKSSON (2002), *"Transportation Planning"*, Edit. John Wiley, USA.

- SOLOMON M. (1987), *"Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints"*. Operations Research, 35(2):254-265. New York, USA.
- STEUER R. (1996), *"Multiple Criteria Optimization. Theory, Computation and Application"* Edit. Wiley, New York, USA.
- TAN K. (2000), *"Heuristic Methods for Vehicle Routing Problem with Time Windows"*. ElSevier. Artificial Intelligence in Engineering. USA.
- TOTH P. (1997), *"Heuristics Algorithms for the Handicapped Persons Transportation Problems"*. Transportation Science. USA.
- VINCKE P. (1992), *"Multicriteria Decision-Aid"* Edit. Wiley, Chichester.USA.


**PAGINAS ELECTRÓNICAS**


1. www.sisting.net
2. http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_rutas_de_veh%C3%ADculos
3. www.spmac.org
4. www.itla2004.org
5. www.elsevier.com
6. www.sciencedirect
7. www.matematicas.org/edp/grafos

# ANEXOS

**Anexo 1: Código del Programa del Problema del Agente Viajero mediante el Lenguaje de Programación Mosel Xpress**

```
(!*************************************************************
  Mosel TSP
  =========
  TIPO:                Problema del Agente Viajero Simétrico
  CARACTERÍSTICAS:     Problema Entero, bucle de subruta del TSP.
                       Algoritmo de Eliminación; procedimiento de generaciones
                       de restricciones adicionales y llamadas de subrutinas
                       recursivas.
  DESCRIPCIÓN:         Una ruta de viaje se inicia desde un depósito 0, visita todos
                       los hoteles y luego regresa al punto de inicio.
                       La distancia o tiempo o costes entre los hoteles son
                       simétricos. El programa nos permite conocer el orden
                       deberían ser los hoteles visitados para minimizar la
                       distancia total recorrida
*************************************************************!)
model "RUTA TSP-DISTANCE"
 uses "mmxprs", "mmive"
 forward procedure break_subtour
 forward procedure print_sol
 forward procedure draw_sol
 declarations
 NHOTEL = 8
 HOTEL = 1..NHOTEL                          ! hoteles
 COST: array(HOTEL,HOTEL) of real           ! distancia entre los hoteles
 NEXTC: array(HOTEL) of integer             ! siguiente hotel después i en la solución
 X,Y: array(HOTEL) of integer               ! x-y-coordenadas para la solución gráfica
 DRIVE: array(HOTEL,HOTEL) of mpvar         ! 1 si recorre de i a j
end-declarations
initializations from 'TSPH.dat'
 COST [X,Y] as 'POS'
end-initializations
forall(i,j in HOTEL | i<j) COST(j,i):=COST(i,j)
! Objetivo: tiempo total
COSTETOTAL:= sum(i,j in HOTEL | i<>j) COST(i,j)*DRIVE(i,j)
! visita cada hotel una vez
forall(i in HOTEL) OneVisitI(i):= sum(j in HOTEL | i<>j) DRIVE(i,j) = 1
forall(j in HOTEL) OneVisitJ(j):= sum(i in HOTEL | i<>j) DRIVE(i,j) = 1
forall(i,j in HOTEL | i<>j) DRIVE(i,j) is_binary
! solución del problema
minimize(COSTETOTAL)
! eliminación de subrutas
break_subtour
!-------------------------------------------------------------------------------------------
procedure break_subtour
```

```
declarations
 TOUR,SMALLEST,ALLHOTEL: set of integer
end-declarations
forall(i in HOTEL)
 NEXTC(i):= integer(round(getsol(sum(j in HOTEL) j*DRIVE(i,j) )))
        ! imprime la solución actual
print_sol
draw_sol
        ! lograr (sub)ruta que contiene al depósito 0
TOUR:={}
first:=1
repeat
TOUR+={first}
first:=NEXTC(first)
until first=1
size:=getsize(TOUR)
        ! encontrar la subruta más pequeña
if size < NHOTEL then
SMALLEST:=TOUR
if size>2 then
  ALLHOTEL:=TOUR
  forall(i in HOTEL) do
  if(i not in ALLHOTEL) then
TOUR:={}
    first:=i
    repeat
TOUR+={first}
    first:=NEXTC(first)
    until first=i
ALLHOTEL+=TOUR
    if getsize(TOUR)<size then
     SMALLEST:=TOUR
     size:=getsize(SMALLEST)
    end-if
    if size=2 then
     break
    end-if
   end-if
  end-do
 end-if
        ! agregar una subruta que rompe las restricciones
sum(i in SMALLEST) DRIVE(i,NEXTC(i)) <= getsize(SMALLEST) - 1
        ! re-solución del problema
 minimize(COSTETOTAL)
 break_subtour
end-if
end-procedure
!-----------------------------------------------------------------------------------------
```

```
        ! imprime la solución actual
procedure print_sol
declarations
  ALLHOTEL: set of integer
end-declarations
 writeln("COSTE TOTAL: ", getobjval)
 ALLHOTEL:={}
 forall(i in HOTEL) do
  if(i not in ALLHOTEL) then
  write(i)
   first:=i
  repeat
    ALLHOTEL+={first}
    write(" - ", NEXTC(first))
    first:=NEXTC(first)
   until first=i
   writeln
  end-if
 end-do
end-procedure
!-----------------------------------------------------------------------------------------------
                  ! dibuja la solución actual
procedure draw_sol
declarations
  ALLHOTEL: set of integer
  GRAPH: array(0..6) of integer
  COLOR: array(0..6) of integer
end-declarations
 COLOR::[IVE_YELLOW, IVE_CYAN, IVE_RED, IVE_WHITE,
IVE_GREEN,   IVE_MAGENTA,   IVE_BLUE]
 IVEerase
 IVEzoom(min(i in HOTEL) X(i)-10, min(i in HOTEL) Y(i)-10,
       max(i in HOTEL) X(i)+10, max(i in HOTEL) Y(i)+10)
         ! Dibujar las ruta(s)
 ALLHOTEL:={}; ct:=0
 forall(i in HOTEL) do
  if(i not in ALLHOTEL) then
  if ct<7 then
    GRAPH(ct):= IVEaddplot("RUTA "+(ct+1), COLOR(ct mod 7))
  end-if
   first:=i
  repeat
    ALLCITIES+={first}
   write(" - ", NEXTC(first))
    IVEdrawline(GRAPH(ct mod 7),
              X(first), Y(first), X(NEXTC(first)), Y(NEXTC(first)))
    first:=NEXTC(first)
   until first=i
```

```
  ct+=1
 end-if
end-do
        ! dibuja los hoteles
HotelGraph:= IVEaddplot("HOTELES", IVE_BLACK)
forall(i in HOTEL) IVEdrawlabel(HotelGraph, X(i), Y(i), string(i))
        ! etapas en cada iteración:
 IVEpause("Click on pause button to continue")
end-procedure
end-model
```

**Anexo 2: Código del Programa del Problema de Rutas de Vehículos mediante el Lenguaje de Programación Mosel Xpress**

```
(!*************************************************************
  Mosel VRP
  ========
  TIPO:                Problema de Rutas de Vehículos
  CARACTERÍSTICAS:     Problema Entero, formulación de las restricciones
                       para eliminar subrutas no admisibles. Definición del modelo
                       de cortes, algoritmo de rutas, solución de representación
                       gráfica.
                       Algoritmo de Eliminación; procedimiento de generaciones
                       de restricciones adicionales y llamadas de subrutinas
                       recursivas.
  DESCRIPCIÓN:         Un transportista tiene que recoger clientes desde un
                       depósito a un cierto número de hoteles. Las distancias entre
                       los hoteles y el depósito y la cantidad de clientes para los
                       diferentes hoteles son conocidas. La compañía de transporte
                       utiliza vehículos con una capacidad de 30 personas para el
                       recojo.
                       La distancia o tiempo o costes entre los hoteles son
                       simétricos. El programa nos permite conocer las rutas
                       mínimas para el recojo de todos los clientes determinándose
                       el número total de metros recorridos.

*************************************************************!)
model "VRP-DISTANCE"
uses "mmxprs", "mmive", "mmsystem"
declarations
 NL = 8
 LOCATIONS = 1..NL                          ! conjunto de lugares, 1=depósito
 HOTELS = 2..NL
 X,Y: array(LOCATIONS) of integer           ! x-y-coordenadas de los lugares
 DEM: array(LOCATIONS) of integer           ! demanda de clientes en los hoteles
 DIST: array(LOCATIONS,LOCATIONS) of integer ! distancias entre los
                                             lugares
 CAP: integer                                ! capacidad de los vehículos
drive: array(LOCATIONS,LOCATIONS) of mpvar   ! 1 si i immediatamente
                                             precede a j,
                                             ! 0 en cualquier otro caso
 quant: array(HOTELS) of mpvar               ! cantidad de recojo hasta i
end-declarations
initializations from 'TSPH.dat'
 [X,Y] as 'POS'
 DEM CAP
end-initializations
              ! function objetivo
```

```
forall(i,j in LOCATIONS | i<j) DIST(i,j):=abs(X(i)-X(j))+ abs(Y(i)-Y(j))
                !distancias simétricas
forall(i,j in LOCATIONS | i<j) DIST(j,i):=DIST(i,j)
                ! objetivo: distancia total conducida
Lenght:= sum(i,j in LOCATIONS | i<>j) DIST(i,j)*drive(i,j)
                ! Entrada y salida en cada hotel una sola vez (excepto el depósito)
 forall(j in HOTELS) sum(i in LOCATIONS| i<>j) drive(i,j) = 1
 forall(i in HOTELS) sum(j in LOCATIONS| i<>j) drive(i,j) = 1
                ! Si i es el primer hotel de una ruta, luego quant(i)=DEM(i)
 forall(i in HOTELS) quant(i) <= CAP + (DEM(i)-CAP)*drive(1,i)
                ! Si j retorna después de i en una ruta, luego quant(j) es más grande
                ! que la cantidad recogida durante la rtuta hasta i más la cantidad a
                ! ser recogida  en j (para permitir bucles y mantener el límite de la
                !capacidad del vehículo)
 forall(i,j in HOTELS| i<>j) quant(j) >= quant(i) + DEM(j) - CAP +
CAP*drive(i,j) + (CAP-DEM(j)-DEM(i))*drive(j,i)
                ! restricciones adicionales:
                ! si i no es el primer hotel de una ruta, quant(i) es más grande que
                ! la suma de las cantidades a recoger i y a su predecesor en la ruta
 declarations
  modcut: array(HOTELS) of linctr
 end-declarations

 forall(i in HOTELS) do
        modcut(i):= quant(i) >= DEM(i) + sum(j in
        LOCATIONS|i<>j)DEM(j)*drive(j,i)
  setmodcut(modcut(i))
 end-do
 forall(i in HOTELS) do
  quant(i) <= CAP
  quant(i) >= DEM(i)
 end-do
 forall(i,j in LOCATIONS| i<>j) drive(i,j) is_binary
                ! solución al problema
 minimize(Lenght)
                ! impresión de la solución
 writeln("DISTANCIA TOTAL: ", getobjval)
 forall(i in HOTELS)
 if(getsol(drive(1,i))>0) then
   ct:=DEM(i)
 writeln(1, " -> ", i)
   d:=i
  while(d<>1) do
    n:= integer(round(sum(j in LOCATIONS )j*getsol(drive(d,j))))
    writeln(d, " -> ", n)
    ct+=DEM(n)
    d:=n
   end-do
```

```
  writeln("CANTIDAD DE CLIENTES RECOGIDOS: ", ct)
 end-if
!-----------------------------------------------------------------------------------------------
IVEzoom(min(i in LOCATIONS)X(i)-3, min(i in LOCATIONS)Y(i)-3,
      max(i in LOCATIONS)X(i)+3, max(i in LOCATIONS)Y(i)+3)
 SITEGRAPH: = IVEaddplot("LOCATIONS", IVE_BLACK)
 HOTELGRAPH: = IVEaddplot("HOTELS", IVE_GREEN)
 ROUTEGRAPH: = IVEaddplot("PICK UP ROUTES", IVE_BLUE)
 DEPGRAPH: = IVEaddplot("DEPOT", IVE_RED)
  forall(i in HOTELS) do
  IVEdrawpoint(SITEGRAPH, X(i), Y(i))
  IVEdrawlabel(SITEGRAPH, X(i), Y(i)+1, string(i))
  IVEdrawlabel(HOTELGRAPH, X(i), Y(i)+1, "HOTEL")
 End-do
 IVEdrawpoint(DEPGRAPH, X(1), Y(1))
 IVEdrawlabel(DEPGRAPH, X(1), Y(1)+1, "DEPOT")
 forall(i in HOTELS)
 if(getsol(drive(1,i))>0) then
   IVEdrawarrow(ROUTEGRAPH, X(1), Y(1), X(i), Y(i))
   d:=i
 while(d<>1) do
    n:= integer(round(sum(j in LOCATIONS) j*getsol(drive(d,j))))
    IVEdrawarrow(ROUTEGRAPH, X(d), Y(d), X(n), Y(n))
    d:=n
   end-do
  end-if
end-model
```

**Anexo 3: Mapa de la Ciudad Huaraz con la propuesta de una ruta de recojo según el TSP y un conjunto de rutas según el VRP.**