UNIVERSIDAD NACIONAL
"SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

MÉTODO PARA OBTENER NÚMEROS PRIMOS QUE TERMINAN EN UNO.

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR

Bach. OBREGÓN TOLEDO, Graciano Santiago

ASESOR

Dr. CERNA MAGUIÑA, Bibiano Martín.

Huaraz – Perú

2019

N° Registro: T005

JURADO CALIFICADOR

***M.Sc*. ALAYO MEREGILDO Perpetua María**
(PRESIDENTE)

***M.Sc*. OLIVERA SÁNCHEZ Juan Modesto**
(SECRETARIO)

***M.Sc*. SILVA ADANAQUE José Baltazar**
(VOCAL)

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, a Dios por darme salud, por ser la fuente de toda sabiduría y por abrir a la humanidad las puertas del conocimiento que él mismo escribió con el lenguaje de las matemáticas.

Tus esfuerzos son impresionantes y tu amor es para mí invaluable. Junto con mi padre me has educado, me has proporcionado todo y cada cosa que he necesitado. Tus enseñanzas las aplico cada día; de vedad que tengo mucho por agradecer. Tus ayudas fueron fundamentales para la culminación de mi tesis. Te doy gracias, madre.

Al Dr.   por su valioso e indesmayable apoyo como docente, asesor y por su constante orientación en el desarrollo de la tesis.

A la UNASAM, por brindarme el espacio y contribuir a mi formación profesional.

Graciano.

DEDICATORIA

La presente tesis está dedicada a Dios, ya que gracias a él he logrado concluir mi carrera.

A mis padres, porque ellos siempre estuvieron a mi lado brindándome su apoyo y sus consejos para hacer de mi vida una mejor persona.

Graciano.

RESUMEN

Considerando que los números primos son importantes como base elemental en toda estructura matemática, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal “obtener un método para determinar números primos que terminan en uno, a partir de números primos fijos que terminan en uno”.

El trabajo es de tipo descriptivo, parte de un número primo de la forma $P + 10L$, L=1,2,3… donde P es un número primo que termina en uno, para luego haciendo uso del método de la inducción y deducción establecer y demostrar como parte fundamental del trabajo a los teoremas que a continuación se mencionan:

2.2.9 Teorema. Si P un número primo grande que termina en uno, entonces $P + 10L$,

$(L \in N)$ es un número primo que las siguientes condiciones son satisfechas:

$(\mathbf{1})$ $$\frac{P + 10L - 81}{90} ; \frac{P + 10L - 21}{70} ; \frac{P + 10L - 21}{30} \notin N$$

$(\mathbf{2})$ Los números enteros que pertenecen a los intervalos

$$< \frac{P - 81}{90} ; \frac{P + 10L - 81}{90} >$$

no constituyen solución entera de la ecuación $P + 10L = (10x + 9)(10y + 9)$

$(\mathbf{3})$ Los números enteros y_0 pertenecientes al intervalo

$$< \frac{P - 21}{70} ; \frac{P + 10L - 21}{70} >$$

y los números x_0 pertenecientes al intervalo

$$< \frac{P-21}{30}; \frac{P+10L-21}{30} >$$

no son soluciones de la ecuación $P + 10L = (10x + 7)(10y + 3)$

(**4**) Los números enteros que pertenecen al intervalo

$$< \frac{P-1}{10}; \frac{P+10L-1}{10} >$$

No son solución entera de la ecuación $P + 10L = (10x + 1)(10y + 1)$

2.2.10 Teorema A. P un número natural que termina en uno, entonces $(a, b) \in N \times N$ talque:

(i) $P = (10a + 7)(10b + 3)$

(ii) $P = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

(iii) $P = (10a + 1)(10b + 1)$, $a \geq 1;\ b \geq 1$. Entonces

$$\frac{P}{100} \leq AB \leq \frac{121P}{10^4}$$

donde $A = a + 1,\ B = b + 1$ d

para el primer caso (i) $A \geq 4$ y $B \geq 8$

para el caso (ii) $A \geq 2$ y $B \geq 2$

y para (iii) $A \geq 10$ y $B \geq 10$.

Por consiguiente, mediante los teoremas anteriores se logra generar los diferentes números primos que terminan en uno, tal como se puede observar en los resultados en la sección IV.

Palabras claves: Números primos, ecuaciones Diofánticas, teoremas.

ABSTRAC

Considering that prime numbers are important as an elementary basis in any mathematical structure, this research work has as its main objective "to obtain a method, to determine prime numbers that end in one, from fixed prime numbers that end in one".

The present work of descriptive type starts from a prime number of the form P + 10L, L = 1,2,3 ... where P is a prime number that ends in one, for then making use of the method of induction - deduction to establish and demonstrate as a fundamental part of the work to the theorems mentioned below:

2.2.9 Theorem. If P a large prime number that ends in one, then P + 10L, (L∈N) is a prime number that the following conditions are satisfied:

$$(\mathbf{1}) \quad \frac{P+10L-81}{90};\frac{P+10L-21}{70};\frac{P+10L-21}{30} \notin N$$

(2) The integers that belong to the intervals

$$< \frac{P-81}{90};\frac{P+10L-81}{90} >$$

they do not constitute a whole solution of the equation

P + 10L = (10x + 9) (10y + 9).

(3) The integers y_0 belonging to the interval

$$< \frac{P-21}{70};\frac{P+10L-21}{70} >$$

and the numbers x_0 belonging to the interval

$$< \frac{P-21}{30}; \frac{P+10L-21}{30} >$$

they are not solutions of the equation

$P + 10L = (10x + 7)(10y + 3).$

(4) The integers that belong to the interval

$$< \frac{P-1}{10}; \frac{P+10L-1}{10} >$$

They are not a whole solution of the equation:

$P + 10L = (10x + 1)(10y + 1).$

2.2.10 Theorem A. Let P be a natural number that ends in one, if there are

(a, b) $\in N \times N$ talque:

$(i)\ P = (10a+7)(10b+3)$

$(ii)\ P = (10a+9)(10b+9)$ ó

$(iii)\ P = (10a+1)(10b+1),\quad a \geq 1;\ b \geq 1.$ So

$$\frac{P}{100} \leq AB \leq \frac{121P}{10^4}$$

where A = a + 1, B = b + 1 so that

For the first case (i) A≥4 and B≥8; for the case (ii) A≥2 and B≥2; for the case (iii) A≥10 and B≥10.

Therefore, by means of the previous theorems it is possible to generate the different primes that end in one, as can be seen in the results in section IV.

Keywords: prime numbers, Diophantine equations, theorem.

INDICE GENERAL **pág.**

INTRODUCCIÓN

En este trabajo obtenemos algunos resultados para verificar cuando un número natural que termina en uno es un número primo, sin embargo, estos solo son válidos si el número natural es muy grande. Para números pequeños de tres, cuatro, cinco, seis cifras bajo ciertas condiciones se pueden establecer que si P es un número primo que termina en uno, entonces $P+10$, $P+20$, $P+30$ son números primos.

En el marco teórico se presentan definiciones y se analizan los números primos que terminan en uno y algunos teoremas importantes al respecto.

Así mismo en los resultados numéricos nos centraremos en la construcción de números primos $P+10L$, para ello se da un número primo P fijo que termina en uno y bajo ciertas condiciones y usando resultados de los teoremas se determinan si $P+10L$ cuando $L = 1; 2; 3$ es primo o no.

I. EL PROBLEMA

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema se inicia con la lectura del artículo cuyo título es “Algunos resultados sobre números Primos ver [3], “publicado el 04 de Abril del 2018 en la revista International journal of Pure and Applied Mathematics; pues dicho artículo se usan funciones discretas simples, las cuales son extendidas al espacio de las funciones continuas y usando los multiplicadores de Lagrange, se puede calcular la distancia entre las curvas que involucran el estudio de los números primos que terminan en siete y se obtienen ciertas condiciones para construir números primos que terminan en siete a partir de un número primo dado que termina en siete.

Nuestro problema se centra en el álgebra, específicamente en la teoría de números. Sabemos que no existe una fórmula que nos permita decir cuando un número es primo, existen tablas de números primos, pero no muestran el algoritmo que permita ver cuál es el que lleva a tal conclusión, además tampoco existe una fórmula para generar un número primo a partir de un número primo dado. Los mayores números primos obtenidos son en base a los números de Mersene. Sabemos que existen premios para aquel que descubra el mayor número primo, en ese sentido el mayor número primo corresponde descubierto por GIMPS/Curtis Cooper en el año 2018, y son primos de Mersene [8]. Motivados por estas informaciones, nuestro problema se reduce a la siguiente pregunta: ¿Es posible determinar algún método para obtener números primos que termina en uno a partir de un número primo fijo que termina en uno?

1.2 SELECCIÓN DEL PROBLEMA

Se seleccionó el problema tomando en consideración los siguientes criterios.

- Los números primos son muy interesantes, pues a partir de estos números se genera toda la matemática.
- Las bases teóricas adquiridas en la graduación me han permitido seleccionar dicho problema.
- Existe material bibliográfico y el tema abordado es comprensible.
- El trabajo sobre el cual me baso es un tema abordado por mi orientador durante varios años de investigación ver [2] y [3].

1.3 JUSTIFICACIÓN

El trabajo se justifica porque en base a los números primos se construye toda la matemática (teorema fundamental de la Aritmética). Además, sabemos que los números primos son útiles en la obtención de códigos criptográficos seguros. En ese sentido este trabajo puede ser útil a los estudiantes de ciencias e ingeniería, que el método a determinar para obtener números primos puede ser programado.

1.4 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Obtener un método, para determinar números primos que terminan en uno, a partir de números primos fijos que terminan en uno.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar el teorema de B.M.Cerna, en el cual afirma que si P es un número primo que termina en uno entonces bajo ciertas restricciones: $P+10L$, es un número primo, L es un número natural y P es un número fijo que termina en uno.
- Obtener números primos que terminan en uno, el cual será construido en base al primer objetivo específico cuando $L=1$ y P es un número primo fijo que termina en uno.
- Obtener números primos que terminan en uno, el cual será construido en base al primer objetivo específico cuando $L=2$ y P es un número primo fijo que termina en uno.
- Obtener números primos que terminan en uno, el cual será construido en base al primer objetivo específico cuando $L=3$ y P es un número primo fijo que termina en uno.

1.5 HIPÓTESIS

Es factible determinar un método que nos permite obtener números primos que termina en uno, a partir de un número primo fijo que termina en uno.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del problema

En el artículo "ALGORITMO FOR WRITTING OF A EVEN NUMBER AS THE SUM OF TWO PRIMES" de B. M. Cerna aceptado para publicación el año 2017 en la revista ASIAM ACADEMIC RESEARCH ASSOCIATES JOURNAL[2] observamos que el autor mencionado usa las funciones generadoras, para escribir un número par que termina en cuatro como la suma de dos números primos, es importante observar que usando estas funciones generadoras es posible determinar la primalidad de un número natural. En el artículo titulado "Some Results on Prime Numbers", el cual ha sido publicado el 04 de Abril del año 2018, en la Revista IJPAM (International Journal of pure and Applied Mathematics) aparecen los siguientes resultados que los enunciamos sin demostración.

2.2 Planteamiento teóricos atingentes

2.2.1 Definición de un múltiplo de un número

Un múltiplo de un número es el producto de ese número por algún entero. En otras palabras, para las cantidades A y B, se dice que B es múltiplo de A si: B=nA, para algún entero n (Haaser, 1992).

2.2.2 Ecuaciones Diofánticas

Son ecuaciones enteras cuyas soluciones también son enteras (Cerna, 2018).

2.2.3 Definición de funciones generadoras

Son aquellas funciones de la forma: $f_1(k) = 10k + 1$, $f_2(k) = 10k + 3$, $f_3(k) = 10k + 7$, $f_4(k) = 10k + 9$, donde k es un número natural, nosotros lo llamamos así, pues estas funciones nos generan un conjunto que contiene a todos los números primos excepto el número 2 y 5 (Cerna, 2018)**.**

2.2.4 Definición

Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X entonces

d(A; B) = inf {d(x; y) /x (x, y) ∈ $A \times B$} es llamado distancia entre los conjuntos A y B.

2.2.5 Multiplicadores de Lagrange para máximos y mínimos

Un método para obtener los valores máximos o mínimos relativos de una función F(x, y, z) sujeta a una condición restrictiva H(x, y, z) = 0 es la formación auxiliar :

G(x, y, z, r) = F(x, y, z)+rH(x, y, z),

sujeta a las condiciones en la que las derivadas parciales respecto a las variables x, y, z son iguales a cero, estas condiciones son necesaria para encontrar un máximo o un mínimo relativo. El parámetro "r" que es independiente de x, y, z se llama multiplicador de Lagrange. [4], [5].

2.2.6 Teorema

Sea P un número natural que termina en uno. P es un número primo si y sólo si no existe solución entera positiva de las ecuaciones independientes:

- $P = (10x + 1) \times (10y + 1)$
- $P = (10x + 9) \times (10y + 9)$
- $P = (10x + 7) \times (10y + 3)$

Demostración es inmediato.

2.2.7 Teorema

Sea P un número natural que termina en uno. Entonces

$d(c_i\,;c_j) = \frac{\sqrt{2}}{10}(\sqrt{P+10L} - \sqrt{P}),\ i = 1,3,5\ ;\ j = 2,4,6$, $L \in N$ es un número menor que P.

Donde:

$c_1 = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0, y \geq 0 \ \wedge\ P = (10x + 1) \times (10y + 1)\}$

$c_2 = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0, y \geq 0 \ \wedge\ P + 10L = (10x + 1) \times (10y + 1)\}$

$c_3 = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0, y \geq 0 \ \wedge\ P = (10x + 9) \times (10y + 9)\}$

$c_4 = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0, y \geq 0 \ \wedge\ P + 10L = (10x + 9) \times (10y + 9)\}$

$c_5 = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0, y \geq 0 \ \wedge\ P = (10x + 7) \times (10y + 3)\}$

$c_6 = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0, y \geq 0 \ \wedge\ P + 10L = (10x + 7) \times (10y + 3)\}$

Demostración

Para demostrar el teorema usamos los multiplicadores de Lagrange.

Tome $(A,B) \in c_2$, entonces $P + 10L = (10A+1) \times (10B+1)$ y $(C,D) \in c_1$ entonces $P = (10C+1) \times (10D+1)$. Por lo tanto $d^2\big((A,B);(C,D)\big) = (A-C)^2 + (B-D)^2$ es la función a minimizar sujeto a las condiciones $(A,B) \in c_2$ y $(C,D) \in c_1$, luego tenemos.

$F(A,B,C,D,\lambda_1,\lambda_2) = (A-C)^2 + (B-D)^2 + \lambda_1\big((10A+1) \times (10B+1) - P - 10L\big) + \lambda_2((10C+1) \times (10D+1) - P)$

……………….(*)

$$\frac{\partial F}{\partial A} = 2(A-C) + \lambda_1 \times 10(10B+1) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial B} = 2(B-D) + \lambda_1 \times 10(10A+1) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$\frac{\partial F}{\partial C} = -2(A-C) + \lambda_2 \times 10(10D+1) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

$$\frac{\partial F}{\partial D} = -2(B-D) + \lambda_2 \times 10(10C+1) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = (10A+1) \times (10B+1) - P - 10L = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = (10C+1) \times (10D+1) - P = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (vi)$$

De (i)

$$2(A-C) = -\lambda_1 \times 10(10B+1) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (vii)$$

De (ii)

$$2(B-D) = -\lambda_1 \times 10(10A+1) \ldots\ldots\ldots\ldots (viii)$$

Luego $(vii) \div (viii)$ da lo siguiente:

$$\frac{(A-C)}{(B-D)} = \frac{(10B+1)}{(10A+1)} = \lambda \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (ix)$$

Análogamente de las relaciones (iii) y (iv) se obtiene:

$$\frac{(A-C)}{(B-D)} = \frac{(10D+1)}{(10C+1)} = \lambda \qquad \ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (x)$$

Es claro $\lambda_1 \neq 0$ pues si $\lambda_1 = 0$ entonces $A = C$ lo cual es falso.

Análogamente

$\lambda_2 \neq 0$, con lo cual queda justificado la división de $(vii) \div (viii)$.

De (ix) se obtiene:

$$(10B+1) = \lambda(10A+1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (xi)$$

De (x) se obtiene:

$$(10D+1) = \lambda(10C+1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (xii)$$

Luego restando $(xi) - (xii)$ se obtiene lo siguiente:

$$10(B-D) = \lambda \times 10(A-C)$$

$$B - D = \lambda(A-C) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (xiii)$$

De (ix) y $(xiii)$ se tiene:

$$\frac{A-C}{\lambda(A-C)} = \lambda$$

como $A \neq C$ se tiene $\lambda^2 = 1$ y como $\lambda > 0$ se tiene que $\lambda = 1$

Por lo tanto

$A - C = B - D$ … . (xiv)

Además, reemplazando $\lambda = 1$ en (ix) y (x) da lo siguiente:

$A = B$ y $C = D$ ……………………………………………… (xv)

Luego reemplazando (xv) en las relaciones $(v) y$ (vi) resulta:

$10A + 1 = \sqrt{P + 10L}$

$10C + 1 = \sqrt{P}$

De estas dos últimas relaciones se obtiene

$10(A - C) = \sqrt{P + 10L} - \sqrt{P}$ …………………………………..(xvi)

Así tenemos que la distancia entre las curvas c_1 y c_2 es:

$d(c_1;\ c_2) = \sqrt{(A - C)^2 + (B - D)^2} = \sqrt{2}\,|A - C|$ ……………... $(xvii)$

De $(xvii)$ y (xvi) tenemos:

$$d(c_1;\ c_2) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{P + 10L} - \sqrt{P}}{10}\right)$$

Análogamente se demuestra que la distancia entre las curvas c_3; c_4 esta dado por

$$d(c_3;\ c_4) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{P + 10L} - \sqrt{P}}{10}\right)$$

Pues $P = (10x + 9)(10y + 9) = (10x + 9 + 1 - 1)(10y + 9 + 1 - 1)$

$P = (10(x + 1) - 1)(10(y + 1) - 1)$,

si hacemos $x + 1 = -z$, $y + 1 = -w$ tenemos

$P = (10z + 1)(10w + 1)$ y $P + 10L = (10z + 1)(10w + 1)$

Donde $z \leq 0 \ \ y \ \ w \leq 0$.

A continuación, hallamos la distancia entre las curvas c_5 y c_6.

Las ecuaciones involucradas son similares a los obtenidos de $(*)$

$F(A,B,C,D,\lambda_1,\lambda_2) = (A-C)^2 + (B-D)^2 + \lambda_1\big((10A+7)\times$

$(10B+3) - P - 10L\big) + \lambda_2((10C+7)\times(10D+3) - P)$

$\frac{\partial F}{\partial A} = 2(A-C) + \ 10\lambda_1(10B+3) = 0$ ……………………………(a)

$\frac{\partial F}{\partial B} = 2(B-D) + \ 10\lambda_1(10A+7) = 0$ ………………..………… ..(b)

$\frac{\partial F}{\partial C} = -2(A-C) + \ 10\lambda_2(10D+3) = 0$ …………… ..…………..(c)

$\frac{\partial F}{\partial D} = -2(B-D) + \ 10\lambda_2(10C+7) = 0$ …………………………...(d)

$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \ (10A+7)\times(10B+3) - P - 10L \ = 0$ ……………...... (e)

$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = (10C+7)\times(10D+3) - P = 0$……………………………..$(f)$

De las relaciones $(a)\ y\ (b)$ obtenemos

$$\frac{(A-C)}{(B-D)} = \frac{(10B+3)}{(10A+7)} = \lambda \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(**)$$

De las relaciones $(c)\ y\ (d)$ obtenemos:

$$\frac{(A-C)}{(B-D)} = \frac{(10D+3)}{(10C+7)} = \lambda \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(***)$$

De $(**)\ y\ (***)$ se obtiene

$10B + 3 = \lambda(10A+7)$

$10D + 3 = \lambda(10C + 7)$

Restando estas dos últimas relaciones se obtiene:

$B - D = \lambda(A - C)$ ……………………………………………..(∗∗∗∗)

De $(∗∗∗)$ y $(∗∗∗∗)$ se obtiene λ=1, este valor reemplazando en $(∗∗)$ y $(∗∗∗)$ resulta

$10A + 7 = 10B + 3$

$10D + 3 = 10C + 7$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en (e) y (f) resulta lo siguiente:

$10A + 7 = \sqrt{P + 10L}$

$10C + 7 = \sqrt{P}$

Restando estas dos últimas ecuaciones se tiene:

$$A - C = \frac{\sqrt{P + 10L} - \sqrt{P}}{10}$$

Así tenemos que

$$d(c_5, c_6) = \frac{\sqrt{2}}{10}(\sqrt{P + 10L} - \sqrt{P})$$

Con lo cual se completa la demostración del teorema.

2.2.8 Teorema

Sea P un número natural que termina en uno, si acontece lo siguiente

a) (A, B) solución entera positiva de la ecuación:

$90x + 90y = P - 81 - 10\alpha$

donde $\alpha \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ y

$$\frac{\mathrm{P} - 81 - 10\alpha}{90} \in N\ ;\ \frac{(P - 90A - 81)}{10(10A + 9)} \in N;\ \frac{P - 90B - 81}{10(10B + 9)} \notin N$$

b) (C, D) solución entera positiva de la ecuación: $10x + 10y = P - 1$

Con $C \geq 1, D \geq 1$ y

$$\frac{(P - 10C - 1)}{10(10C + 1)}\ y\ \frac{(P - 10D - 1)}{10(10D + 1)} \notin N.$$

c) (E, F) solución entera positiva de la ecuación:

$70x + 70y = P - 21 - 10\beta$

Donde $\beta \in \{1,2,3,4,5,6\}$ y

$$\frac{P - 21 - 10\beta}{70} \in N\ \ y\ \ \frac{P - 30E - 21}{10(10E + 7)};\frac{P - 70F - 21}{10(10F + 3)} \notin N$$

Entonces P es un número primo.

Demostración

Como P es un número natural que termina en uno entonces:

$i)$ $P = (10x + 9)(10y + 9)$ ó

$ii)$ $P = (10x + 1)(10y + 1)$ ó

$iii)$ $P = (10x + 7)(10y + 3)$.

Si P es expresado por la ecuación (i) entonces la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{P-81}{90}, 0\right); \left(0, \frac{P-81}{90}\right)$ tiene por pendiente $m = -1$, por lo tanto, la ecuación de esta recta es:

$$y = -x + \frac{P-81}{90}$$

entonces $90x + 90y = P - 81$, luego exista $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ talque

$$\frac{P - 81 - 10\alpha}{90} \in N$$

Así escogemos la recta paralela de ecuación:

$90x + 90y = P - 81 - 10\alpha$……………………………………..(*)

Si (A, B) es solución entera de (*) tenemos que:

$$A + B = \frac{P - 81 - 10\alpha}{90} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (**)$$

La recta $x = A$ corta la curva $P = (10x + 9)(10y + 9)$

$P = (10A + 9)(10y + 9)$ entonces

$$y = \frac{P - 90A - 81}{10(10A + 9)}$$

Si P tiene que ser un número primo entonces

$$\frac{P - 90A - 81}{10(10A + 9)} \notin N.$$

Análogamente la recta $y = B$ corta la curva

$P = (10x+9)(10y+9)$

Entonces

$$x = \frac{P - 90B - 21}{10(10B+9)} \notin N$$

con esto queda demostrados los requerimientos del ítem (a).

Si acontece (ii) tenemos que P es expresado por la ecuación(ii) entonces la recta que pasa por los puntos $(\frac{P-1}{10}, 0)$ y $(0, \frac{P-1}{10})$ tiene por ecuación:

$10x + 10y = P - 1$

como $\frac{P-1}{10} \in N$ tenemos que esta recta es ideal.

Si (C, D) es la solución entera que está en esta recta entonces

$10C + 10D = P - 1$, la recta $x = C$ corta la curva

$P = (10x+1)(10y+1)$ lo cual equivale decir

$P = (10C+1)(10y+1)$.

Así tenemos que

$$\frac{P - 10C - 1}{10(10C+1)} \notin N \; y \; \frac{P - 10D - 1}{10(10D+1)} \notin N$$

pues P debe ser primo, con lo cual queda demostrado la afirmación (b).

Si el número $P = (10x+7)(10y+3)$ entonces la recta que pasa por los puntos $(\frac{P-21}{30}, 0)$ y $(0, \frac{P-21}{70})$ tiene por ecuación

$$y = -\frac{3}{7}x + \frac{P-21}{70} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (**)$$

Esta recta involucra muchas soluciones enteras (C, D) donde ambos son enteros o solo uno de ellos es entero, lo cual no es conveniente.

Entre los números $\frac{P-21}{30}$ y $\frac{P-21}{70}$ tomamos el menor, en este caso $\frac{P-21}{70}$ es el menor, trazamos una recta que pase por los puntos $(\frac{P-21}{70}, 0)$ y $(0, \frac{P-21}{70})$ el cual tiene por ecuación:

$$y = -x + \frac{P-21}{70}$$

Entonces

$70x + 70y = P - 21$, si queremos que P sea un número primo es claro que P diferente que múltiplo de 7.

Por lo tanto, la recta $70x + 70y = P - 21$, no es la ideal.

Sí P tiene que ser un número primo entonces debe ser una recta paralela a esta. Esta recta es la siguiente:

$$70x + 70y = P - 21 - 10\beta \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (***)$$

Donde

$$\frac{P - 21 - 10\beta}{70} \in N \;\; y \;\; \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Si (E, F) es solución entera positiva de (***) entonces:

$$70E + 70F = P - 21 - 10\beta$$

Es decir E y F son ambos enteros positivos y no acontece en (**)

La recta $x = E$ corta la curva de ecuación $P = (10x + 7)(10y + 3)$

es decir $P = (10E + 9)(10y + 9)$

es decir, si queremos que P sea un número primo entonces

$$\frac{P - 30E - 21}{10(10E + 7)} \notin N$$

Análogamente la recta $y = F$ corta la curva de la ecuación

$P = (10x + 7)(10y + 3)$ es decir

$P = (10x + 7)(10F + 3)$ lo cual implica que

$$\frac{P - 70F - 21}{10(10F + 7)} \notin N$$

Para que P sea un número primo. Con lo cual queda demostrado el ítem(c).

Finalmente queda demostrado el teorema.

2.2.9 Teorema

Sea P un número primo grande que termina en uno, entonces

$P + 10L$, $(L \in N)$ es un número primo si las siguientes condiciones son satisfechas:

1) Donde

$$\{\frac{P + 10L - 81}{90}; \frac{P + 10L - 21}{70}; \frac{P + 10L - 21}{30}\} \notin N.$$

2) Los números enteros que pertenecen a los intervalos

$$< \frac{P - 81}{90}; \frac{P + 10L - 81}{90} >$$

No son solución entera de la ecuación $P + 10L = (10x + 9)(10y + 9)$.

3) Los números enteros y_0 pertenecientes al intervalo

$$< \frac{P-21}{70};\frac{P+10L-21}{70} >$$

y los números x_0 pertenecientes al intervalo

$$< \frac{P-21}{30};\frac{P+10L-21}{30} >$$

No son soluciones de la ecuación $P+10L=(10x+7)(10y+3)$

4) Los números enteros que pertenecen al intervalo

$$< \frac{P-1}{10};\frac{P+10L-1}{10} >$$

No son solución entera de la ecuación $P+10L=(10x+1)(10y+1)$.

Demostración

Supongamos que $P+10L$ no es un número primo. En este caso L es un número natural fijo.

Por lo tanto, se presentan tres casos posibles:

$$P+10L=(10A+9)(10B+9),(A,B)\in N\times N \quad (1)$$

$$P+10L=(10C+7)(10D+3),(C,D)\in N\times N \quad (2)$$

$$P+10L=(10E+1)(10F+1),(E,F)\in N\times N \quad (3)$$

De las condiciones (1) y (2) tenemos que

De (1) como $(A,B)\in N\times N$ es solución entera de la ecuación:

$$P+10L=(10x+9)(10y+9). \quad (4)$$

La recta $y=B$

intersecta la curva de la ecuación

$P = (10x + 9)(10y + 9)$ en el punto (x_0, B),

$$P = (10x_0 + 9)(10B + 9) \tag{5}$$

De (1) y (5) tenemos

$$10L = [10(A - x_0)][10B + 9]$$

$$A - x_0 = \frac{L}{10B + 9} \tag{6}$$

Análogamente la recta $x = A$ intersecta la curva de ecuación

$P = (10x + 9)(10y + 9)$

En el punto (A, y_0), luego tenemos

$$B - y_0 = \frac{L}{10A + 9} \tag{7}$$

Además de (1)

$$\sqrt{P + 10L} \leq 10A + 9 \vee \sqrt{P + 10L} \leq 10B + 9 \tag{8}$$

De las relaciones (8), (6) y (7) tenemos

$$0 < A - x_0 \leq \frac{L}{\sqrt{P + 10L}} \vee 0 < B - y_0 \leq \frac{L}{\sqrt{P + 10L}} \tag{9}$$

Para P grande y siendo L fijo de la relación anterior tenemos

$A = x_0 \vee B = y_0$, con lo cual (A, B) seria solución de la ecuación

$P = (10x + 9)(10y + 9)$, lo cual es falso pues P es un primo.

De las condiciones (1) y (3) y de la relación (2) se obtiene resultado similar a lo obtenido de las condiciones (1), (2) y la relación (1).

Resultado análogo se obtiene de la condición (4) y la relación (3).

A continuación, enunciamos tres teoremas cuyas demostraciones están en un artículo de B. M. Cerna en el IJPAM (international journal of mathematics).

2.2.10 Teorema A

Sea P un número natural que termina en uno, si existen $(a, b) \in N \times N$ talque:

(i) $P = (10a + 7)(10b + 3)$

(ii) $P = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

(iii) $P = (10a + 1)(10b + 1)$, $a \geq 1$; $b \geq 1$. Entonces

$$\frac{P}{100} \leq AB \leq \frac{121P}{10^4}$$

donde $A = a + 1$, $B = b + 1$

De modo que: Para el primer caso (i) $A \geq 4$ y $B \geq 8$; para el caso (ii) $A \geq 2$ y $B \geq 2$; para el caso (iii) $A \geq 10$ y $B \geq 10$.

2.2.11 Teorema B

Sea P un número natural que termina en uno y suponga que existen $(a(p), b(p)) \in N \times N$ talque:

(i) $P = (10a(p) + 7)(10b(p) + 3)$

(ii) $P = (10a(p) + 9)(10b(p) + 9)$

(iii) $P = (10a(p) + 1)(10b(p) + 1)$. Entonces

$$1 \leq \frac{A(p+10)B(p+10)}{A(p)B(p)} \leq e^{0.000201} \times (1+\frac{10}{p})^{(0.101)^2}$$

Donde $A(p) = a(p) + 1$, $B(p) = b(p) + 1$.

De modo que: Para el caso (i) $A(p) \geq 31\ y, B(p) \geq 71$; para el caso (ii) $A(p) \geq 1$; $B(p) \geq 1$; para el caso (iii) $A(p) \geq 91$, $B(p) \geq 91$.

2.2.12 Teorema C

Sea $(a, b) \in N \times N$ solución de la ecuación

(i) $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$

(ii) $P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$

(iii) $P + 10 = (10a + 1)(10b + 1)$,

donde P es un primo que termina en uno. Si (x_0, b) pertenece a la curva $P = (10ax + 7)(10y + 3)$ entonces:

(i) $1 < \frac{A}{X_0} < (1 + \frac{10}{P}) \times \frac{11}{10}$

Donde para $A \geq 4$, donde $A = a + 1$, $X_0 = x_0 + 1$

(ii) $1 < \frac{A}{X_0} < 1 + \frac{P}{10}$

2.2.13 Número primo.

Es aquel número natural que solo es divisible por sí mismo y por la unidad, además la importancia radica de que nos generan a todos los números compuestos. El número uno no es considerado primo (Cerna, 2018).

III. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Tipo de investigación

La investigación es de tipo descriptiva debido a que derivan de teorías formalizadas y a su vez el problema está planteado con relativa claridad, ya que se hace un estudio y análisis correspondiente usando los métodos de inducción y deducción.

Tomamos aleatoriamente un número primo P que termina en uno; P de cuatro, cinco y seis cifras respectivamente. Luego usamos los teoremas 2.2.9 y 2.2.10 cuando $L = 1; 2; 3$ respectivamente para contruir $P + 10L$ y determinar su primalidad.

IV. RESULTADOS

4.1 Construcción de números primos P+10L, con L=1,2,3

4.1.1 Construiremos números primos de la forma P + 10L, para L=1

Construiremos números primos $P + 10L$, para $L = 1$ y P un número primo que termina en uno. Para ello usaremos el teorema 2.2.9 y 2.2.10, específicamente el siguiente corolario.

Corolario 1. Sea P un número primo grande que termina en uno, entonces $P + 10$ es un número primo si las siguientes condiciones son satisfechas:

(1) Donde

$$\{\frac{P-71}{90}; \frac{P-11}{70}; \frac{P-11}{30}\} \notin N$$

(2) Los números enteros que pertenecen a los intervalos

$$< \frac{P-81}{90}, \frac{P-71}{90} >$$

no son solución entera de la ecuación $P + 10 = (10x + 9)(10y + 9)$.

(3) Los números enteros y_0 pertenece al intervalo

$$< \frac{P-21}{70}, \frac{P-11}{70} >$$

y los números enteros x_0 pertenece al intervalo

$$< \frac{P-21}{30}, \frac{P-11}{30} >$$

no son solución de la ecuación

$P+10=(10x+7)(10x+3)$

(4) Los números enteros que pertenecen al intervalo

$$< \frac{P-1}{10}, \frac{P+9}{10} >$$

no son solución entera de la ecuación

$P+10=(10x+1)(10y+1).$

Demostración

Basta poner $L=1$ en el teorema 2.2.9.

Ejemplo 1.

Sea $P=3331$ entonces $P+10=3341$ es primo?

Veamos las condiciones

(1) Donde

$$\{\frac{3331-71}{90}; \frac{3331-11}{70}; \frac{3331-11}{30}\} \notin N$$

(**2**) $x_0 \in N$ talque $x_0 \in < 36.11; 36.222 >$ entonces $x_0 \in \phi$.

3) $y_0 \in N$ talque $y_0 \in < 47.28; 47.42 >$ entonces $y_0 \in \phi$, $x_0 \in N$

talque $x_0 \in < 110.33; 110.66 >$ entonces $x_0 \in \phi$.

(**4**) $\boldsymbol{x_0} \in N$ talque $x_0 \in < 333; 334 >$ entonces $x_0 \in \phi$.

Los requisitos se cumplen, pero $P=3331$ es un número pequeño, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P+10=3341$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que $A = a + 1$, $B = b + 1$ son soluciones de:

$i)$ $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)$ $P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)$ $P + 10 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos:

$$\frac{3341}{100} \leq AB \leq \frac{121(3341)}{10^4}$$

$$33.41 \leq AB \leq 40.4261$$

Entonces

AB = {34; 35; 36; …; 40}

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$$A^2 < AB \leq 40.4261$$

$$A \leq \sqrt{40.4261}$$

$$4 \leq A \leq 6.36$$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$$3 \leq a \leq 5.36 \qquad a = 3; 4; 5 \qquad a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{3341}{37}; \frac{3341}{47}\} \notin N$.

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

  $B^2 < AB \leq 40.4261$

  $B \leq \sqrt{}40.4261$

  $8 \leq B \leq 6.36$ lo cual es falso.

  Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4$

  Además, $A = a + 1$; $B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos

  $a \leq 3$, $a = 0; 1; 2; 3$ $\quad a \neq 2$.

  Ahora reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$

  tenemos

  $\{\frac{3341}{7}; \frac{3341}{17}\} \notin N$

- Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7$,

  $b = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.$ $\qquad b \neq 3,6$

  Luego reemplazando en la ecuación

  $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$

  tenemos

$\frac{3341}{3} \notin N; \frac{3341}{13} = 257 \ \in N; \{\frac{3341}{23}; \frac{3341}{43}; \frac{3341}{53}\} \ \notin N$

Como hay una división exacta hallamos el valor de a cuando $b = 1$ reemplazando en la ecuación

$P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$257 = 10a + 7$ entonces $a = 25$

Luego $a = 25$ y $b = 1$ es solución entera de la ecuación.

Para el caso ii: $A \geq 2 \wedge \ B \geq 2.$

Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 40.4261$

$A \leq \sqrt{40.4261}$

$2 \leq A \leq 6.36$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$1 \leq a \leq 5.36 \quad\quad a = 1; 2; 3; 4; 5 \quad a \neq 3; 4$

Luego reemplazando en la ecuación

$P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$ tenemos

$\{\frac{3341}{19}; \frac{3341}{29}; \frac{3341}{59}\} \notin N.$

Por lo tanto, no hay solución

Para el caso iii: Análogamente $A \geq 10$, $B \geq 10$ entonces

Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 40.4261$

$A \leq \sqrt{40.4261}$

$10 \leq A \leq 6.36$ lo cual es falso.

Por lo tanto, no hay solución para $A \geq 10$, $B \geq 10$

Ahora verificamos para $A \leq 10; B \leq 10$ entonces $b + 1 \leq 10$ entonces $b \leq 9$ $\quad b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ $\quad b \neq \dot{3} + 2$ luego reemplazando en la ecuación se tiene:

$$\{\frac{3341}{11}; \frac{3341}{31}; \frac{3341}{41}; \frac{3341}{61}; \frac{3341}{71}; \frac{3341}{91}\} \notin N.$$

Finalmente, como hay división exacta entonces el número $P + 10 = 3341$ no es primo.

Ejemplo 2.

Sea $P = 3541$ entonces ¿ $P + 10 = 3551$, es primo?

Veamos las condiciones $(1), (2), (3), (4)$ igual al ejemplo anterior.

(1) Donde

$$\left\{\frac{3541 - 71}{90}; \frac{3541 - 11}{70}; \frac{3541 - 11}{30}\right\} \quad \rightarrow \{\frac{347}{9}; \frac{353}{7}; \frac{353}{3}\}$$

Entonces $\{38.556; 50.438; 117.667\} \notin N$

$(\mathbf{2})$ $\quad x_0 \in N$ $\qquad$ talque

$$x_0 \in < \frac{3541 - 81}{90}; \frac{3541 - 71}{90} > \rightarrow x_0 \in < \frac{346}{9}; \frac{347}{9} >$$

$x_0 \in < 38.444; 38.556 >$ entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in < \frac{3541-21}{70}; \frac{3541-11}{70} > \rightarrow y_0 \in < \frac{352}{7}; \frac{353}{7} >$$

$y_0 \in < 50.286; 50.438 >$ entonces $y_0 \in \phi$.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{3541-21}{30}; \frac{3541-11}{30} > \rightarrow x_0 \in < \frac{352}{3}; \frac{353}{3} >$$

$x_0 \in < 117.333; 117.667 >$ entonces $x_0 \in \phi$

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{3541-1}{10}; \frac{3541+9}{10} > \rightarrow x_0 \in < 354; 355 >$$

entonces $x_0 \in \phi$.

Los requisitos se cumplen, pero $P = 3541$ es un número pequeño, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 10 = 3551$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)$ $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)$ $P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)$ $P + 10 = (10a + 1)(10b + 1)$

Similarmente apliquemos el teorema (A) y (B).

$35.51 \leq AB \leq 1.21 \times 35.51 = 42.96$

Entonces $AB = \{35, 36, 37, 38, \dots, 42\}$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 42.96$

$A \leq \sqrt{42.96}$

$4 \leq A \leq 6.55$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$3 \leq a \leq 6.55 \quad a = 3; 4; 5; 6 \quad a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación

$P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{3541}{37}; \frac{3541}{47}; \frac{3541}{67}\} \notin N.$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

$B^2 < AB \leq 42.96$

$B \leq \sqrt{42.96}$

$8 \leq B \leq 6.55.$ lo cual es falso.

Además, sabemos $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$7 \leq b \leq 5.55$ lo cual es falso.

Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4\,; B \leq 8$

Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos

$a \leq 3,\quad a = 0; 1; 2; 3 \quad a \neq 2$ ahora reemplazando en la ecuación (i) se tiene:

$\{\frac{3551}{7}; \frac{3551}{17}\} \notin N$

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7,\ \ b \neq 0{,}3{,}6$

$\{\frac{3551}{3}; \frac{3551}{13}; \frac{3551}{23}; \frac{3551}{43}\} \notin N\,; \frac{3551}{53} = 67 \in N$

Como hay una división exacta ahora hallamos el valor de a cuando $b = 5$.

Para ello reemplazamos en la ecuación

$P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ se tiene:

$67 = 10a + 7$ entonces $a = 6$

Luego $a = 6$ y $b = 5$ es solución entera.

Por lo tanto $P + 10 = 3551$ no es un número primo.

Si en estas divisiones no hay división exacta entonces se continua casos (ii) y (iii) similar al ejemplo anterior**.**

Ejemplo 3.

Sea $P = 74521$ entonces ¿ $P + 10 = 74531$ es primo?

Veamos las condiciones:

(**1**) Donde

$$\left\{\frac{74521-71}{90};\frac{74521-11}{70};\frac{74521-11}{30}\right\}\rightarrow\{\frac{7445}{9};\frac{7451}{7};\frac{7451}{3}\}$$

Entonces $\{827.22;1064.43;2483.67\}\notin N$

(2) $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{74521-81}{90};\frac{74521-71}{90} > \rightarrow x_0 \in < \frac{7444}{9};\frac{7445}{9} >$$

Entonces $x_0 \in \phi$

(3) $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in < \frac{74521-21}{70};\frac{74521-11}{70} > \rightarrow y_0 \in < \frac{7450}{7};\frac{7451}{7} >$$

entonces $y_0 \in \phi$.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{74521-21}{30};\frac{74521-11}{30} > \rightarrow x_0 \in < \frac{7450}{3};\frac{7451}{3} >$$

entonces $x_0 \in \phi$.

(**4**) $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{74521-1}{10};\frac{74521+9}{10} > \rightarrow x_0 \in < 7452;7453 >$$

entonces $x_0 \in \phi$.

Los requisitos se cumplen, pero $P = 74521$ es un número pequeño, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 10 = 74531$ es un número primo o no. Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)\ P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)\ P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)\ P + 10 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos: $745.31 \leq AB \leq 1.21(745.31) = 901.83$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 901.83$

$A \leq \sqrt{901.83}$

$4 \leq A \leq 30.03$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos $3 \leq a \leq 29.03$ $a = 3; 4; 5$ $a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$$\frac{74531}{37};\frac{74531}{47};\frac{74531}{67};\frac{74531}{97};\frac{74531}{107};\frac{74531}{127};\frac{74531}{137};\frac{74531}{157};\frac{74531}{167};$$

$\frac{74531}{187};\frac{74531}{197};\frac{74531}{227};\frac{74531}{247};\frac{74531}{257};\frac{74531}{277};\frac{74531}{297}\} \notin N$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

  $B^2 < AB \leq 901.83$

  $B \leq \sqrt{901.83}$

  $8 \leq B \leq 30.03$

  Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

  $7 \leq b \leq 29.03$ $\quad b \neq \dot{3}$. Luego reemplazando en la ecuación se tiene:

  $\{\frac{74531}{83};\frac{74531}{103};\frac{74531}{113};\frac{74531}{133};\frac{74531}{143};\frac{74531}{163};\frac{74531}{173};\frac{74531}{193};$

  $\frac{74531}{203};\frac{74531}{223};\frac{74531}{233};\frac{74531}{253};\frac{74531}{263};\frac{74531}{283};\frac{74531}{293}\} \notin N$

  Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4\,; B \leq 8$

  Además, sabemos que: $A = a + 1$; $B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos $a \leq 3$, $a = 0; 1; 2; 3$ $\quad a \neq 2$. Luego reemplazando en la ecuación

  $P = (10a + 7)(10b + 3)$ se tiene:

  $\{\frac{74531}{7};\frac{74531}{17}\} \notin N$

  Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7$, $b \neq 0,3,6$

$\{\frac{74531}{3};\frac{74531}{13};\frac{74531}{23};\frac{74531}{43};\frac{74531}{53}\} \notin N$

Por lo tanto, no hay solución para $A \leq 4\,; B \leq 8$

Para el caso ii: $A \geq 2 \wedge\ B \geq 2.$

Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 901.83$

$A \leq \sqrt{}901.83$

$2 \leq A \leq 30.03$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior

tendríamos $1 \leq a \leq 29.3 \quad a = 1; 2; 3; 4; 5; \ldots; 29. \quad a \neq 0; 3$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$

tenemos

$\{\frac{74531}{19};\frac{74531}{29};\frac{74531}{49};\frac{74531}{59};\frac{74531}{79};\frac{74531}{89};\frac{74531}{109};\frac{74531}{119};$

$\frac{74531}{139};\frac{74531}{149}\frac{74531}{169};\frac{74531}{179};\frac{74531}{199};\ \frac{74531}{209};\frac{74531}{229};\frac{74531}{239};$

$\frac{74531}{259}\frac{74531}{269};\ \frac{74531}{289};\frac{74531}{299}\} \notin N$

Como no hay una división exacta. Por lo tanto, no hay solución.

Para el caso iii: Análogamente $A \geq 10$, $B \geq 10$ entonces

Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 901.83$

$A \leq \sqrt{901.83}$

$10 \leq A \leq 30.03$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos $9 \leq a \leq 29.3$ $a = 1; 2; 3; 4; 5; \ldots; 29$ $a \neq \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 1)(10b + 1)$ tenemos

$$\{\frac{74531}{91}; \frac{74531}{101}; \frac{74531}{121}; \frac{74531}{131}; \frac{74531}{151}; \frac{74531}{161} \frac{74531}{181}; \frac{74531}{191};$$
$$\frac{74531}{211}; \frac{74531}{221}; \frac{74531}{241}; \frac{74531}{251}; \frac{74531}{271}; \frac{74531}{281}\} \notin N$$

Por tanto, no hay solución para $A \geq 10$, $B \geq 10$.

Ahora verificamos para $A \leq 10; B \leq 10$ entonces $b + 1 \leq 10$ entonces $b \leq 9$ $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ $b \neq \dot{3} + 2$ luego reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 1)(10b + 1)$ tendríamos

$$\{\frac{74531}{11}; \frac{74531}{31}; \frac{74531}{41}; \frac{74531}{61}; \frac{74531}{71}; \frac{74531}{91}\} \notin N.$$

No hay división exacta.

Por tanto, no hay solución para $A \leq 10; B \leq 10$.

Finalmente, $P + 10 = 74531$ es un número primo.

Ejemplo 4.

Sea $P = 971021$ entonces $P + 10 = 971031$ es primo?

Veamos las condiciones:

(1) Donde

$$\frac{971021-71}{90};\frac{971021-11}{70};\frac{971021-11}{30}\rightarrow\frac{97095}{9};\frac{97101}{7};\ \frac{97101}{3}$$

entonces $\{10788.44; 13871.71; 32367.33\} \notin N$

$(\mathbf{2})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\frac{971021-81}{90};\ \frac{971021-71}{90}> \rightarrow x_0 \in <\frac{97094}{9};\ \frac{97095}{9}>$$

Entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in <\ \frac{971021-21}{70};\ \frac{971021-11}{70}> \rightarrow y_0 \in <\ \frac{97100}{7};\ \frac{97101}{7}>$$

entonces $y_0 \in \phi$.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\ \frac{971021-21}{30};\frac{971021-11}{30}> \rightarrow x_0 \in <\frac{97100}{3};\ \frac{97101}{3}>$$

entonces $x_0 \in\ \phi$.

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\ \frac{971021-1}{10};\ \frac{971021+9}{10}>$$

entonces $x_0 \in\ <\ 97102; 97103>$ entonces $x_0 \in \phi$.

Los requisitos se cumplen para $P = 971021$, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 10 = 971031$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)\ P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)\ P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)\ P + 10 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos: $9710.31 \leq AB \leq 1.21(9710.31) = 11749.48$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 11749.48$

$A \leq \sqrt{11749.48}$

$4 \leq A \leq 108.39$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior

tendríamos $3 \leq a \leq 107.39$ $\quad a = 3; 4; 5; \ldots; 107. \quad a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$

tenemos

$\{\frac{971041}{37}; \frac{971041}{47}; \frac{971041}{67}; \frac{971041}{97}; \frac{971041}{107}; \frac{971041}{127}; \frac{971041}{137};$

$\frac{971041}{157}; \frac{971041}{167}; \frac{971041}{187}; \frac{971041}{197}; \frac{971041}{227}; \frac{971041}{247}; \frac{971041}{257};$

$\frac{971041}{277}; \frac{971041}{297}; \frac{971041}{307}; \frac{971041}{317}; \frac{971041}{337}; \frac{971041}{347}; \frac{971041}{367};$

$$\frac{971041}{377};\frac{971041}{397};\frac{971041}{407};\frac{971041}{437};\frac{971041}{457};\frac{971041}{467};\frac{971041}{487};$$

$$\frac{971041}{497};\frac{971041}{517};\frac{971041}{527};\frac{971041}{547};\frac{971041}{557};\frac{971041}{577};\frac{971041}{587};$$

$$\frac{971041}{607};\frac{971041}{617};\frac{971041}{647};\frac{971041}{667};\frac{971041}{677};\frac{971041}{697};\frac{971041}{727};$$

$$\frac{971041}{737};\frac{971041}{757};\frac{971041}{767}\frac{971041}{787};\frac{971041}{797};\frac{971041}{817};\frac{971041}{827};$$

$$\frac{971041}{857};\frac{971041}{877};\frac{971041}{887};\frac{971041}{907};\frac{971041}{927};\frac{971041}{937};\frac{971041}{947};$$

$$\frac{971041}{967};\frac{971041}{977};\frac{971041}{997};\frac{971041}{1007};\frac{971041}{1027};\frac{971041}{1037};\frac{971041}{1057};$$

$$\frac{971041}{1067};\frac{971041}{1077}\} \notin N$$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

  $B^2 < AB \leq 11749.59$

  $B \leq \sqrt{11749.59}$

  $8 \leq B \leq 108.39$

  Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

  $7 \leq b \leq 108.39 \quad b \neq \dot{3}$. Ahora reemplazando los valores de b en la ecuación

  $P = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$$\{\frac{971031}{73};\frac{971031}{83};\frac{971031}{103};\frac{971031}{113};\frac{971031}{133};\frac{971031}{143};\frac{971031}{163};$$

$$\frac{971031}{173};\frac{971031}{193};\frac{971031}{193};\frac{971031}{203};\frac{971031}{223}\frac{971031}{233};\frac{971031}{253};$$

$$\frac{971031}{263};\frac{971031}{283};\frac{971031}{293};\frac{971031}{313}\frac{971031}{313};\frac{971031}{323};\frac{971031}{343};$$

$$\frac{971031}{353};\frac{971031}{373};\frac{971031}{383};\frac{971031}{403};\frac{971031}{413};\frac{971031}{433};\frac{971031}{443};$$

$$\frac{971031}{463};\frac{971031}{473};\frac{971031}{493};\frac{971031}{503};\frac{971031}{523};\frac{971031}{533};\frac{971031}{553};$$

$$\frac{971031}{563};\frac{971031}{583};\frac{971031}{593};\frac{971031}{613};\frac{971031}{623};\frac{971031}{643};\frac{971031}{653};$$

$$\frac{971031}{673};\frac{97101}{683};\frac{971031}{703};\frac{971031}{713};\frac{971031}{733};\frac{971031}{743};\frac{971031}{763};$$

$$\frac{971031}{773};\frac{971031}{793};\frac{971031}{803};\frac{971031}{823};\frac{971031}{833};\frac{971031}{853};\frac{971031}{863};$$

$$\frac{971031}{883};\frac{971031}{893};\frac{971031}{913};\frac{971031}{923};\frac{971031}{943};\frac{971031}{953};\frac{971031}{973};$$

$$\frac{971031}{983};\frac{971031}{1003};\frac{971031}{1013};\frac{971031}{1033};\frac{971031}{1043};\frac{971031}{1053};\frac{971031}{1073}\} \notin N$$

Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4\,; B \leq 8$

Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos $a \leq 3,\ a = 0; 1; 2; 3 \quad a \neq 2.$ Ahora reemplazamos en la ecuación (i) se tiene:

$$\{\frac{971031}{7};\frac{971031}{17}\} \notin N$$

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b+1 \leq 8$ entonces $b \leq 7$, $b \neq 3{,}6$

$$\frac{971031}{3} = 323677 \in N; \{\frac{971031}{13};\frac{971031}{23};\frac{971031}{43};\frac{97101}{53}\} \notin N$$

Como hay una división exacta para $b = 0$ entonces podemos hallar el valor de a para ello reemplazamos en la ecuación

$P + 10 = (10a + 7)(10b + 3)$

Reemplazando se tiene $323677 = 10a + 7$ entonces $a = 32367$

Luego $a = 32367$ y $b = 0$ es una solución entera.

Por lo tanto; $P + 10 = 971031$ no es primo.

4.1.2 Construiremos números primos de la forma P + 10L, para L=2

Construiremos números primos $P + 10L$, con $L = 2$ y P un número primo que termina en uno. Para ello usaremos el teorema 2.2.9 y 2.2.10, específicamente el siguiente corolario.

Corolario 2. Sea P un número primo grande que termina en uno, entonces $P + 20$ es un número primo si las siguientes condiciones son satisfechas:

(1) Donde

$$\{\frac{P-61}{90};\frac{P-1}{70};\frac{P-1}{30}\} \notin N$$

(2) Los números enteros que pertenecen a los intervalos

$$< \frac{P-81}{90}, \frac{P-61}{90} >$$

no son solución entera de la ecuación $P + 20 = (10x + 9)(10y + 9)$.

(3) Los números enteros y_0 pertenece al intervalo

$$< \frac{P-21}{70}, \frac{P-1}{70} >$$

y los números enteros x_0 pertenece al intervalo

$$< \frac{P-21}{30}, \frac{P-1}{30} >$$

no son solución de la ecuación

$$P + 20 = (10x + 7)(10x + 3)$$

(4) Los números enteros que pertenecen al intervalo

$$< \frac{P-1}{10}, \frac{P+19}{10} >$$

No son solución entera de la ecuación

$$P + 20 = (10x + 1)(10y + 1).$$

Demostración

Basta poner $L = 2$ en el teorema 2.2.9.

Ejemplo 1.

Sea $P = 8521$ entonces $P + 20 = 8541$ es primo?

Para lo cual veamos las condiciones:

$(\mathbf{1})$ Donde

$\{\frac{8521-61}{90};\frac{8521-1}{70};\frac{8521-1}{30}\} \notin N$

$(\mathbf{2})$ $x_0 \in N$ talque $x_0 \in < 93.77; 94 >$ entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque $y_0 \in < 121.428; 121.71 >$ entonces $y_0 \in \phi$, $x_0 \in N$

talque $x_0 \in < 283.33; 284 >$ entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque $x_0 \in < 852; 854 >$ entonces

$x_0 = 853$. Pero no es solución.

Los requisitos se cumplen, pero $P = 8521$ es un número pequeño, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 20 = 8541$ es un número primo o no. Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1$, $B = b + 1$ son soluciones de:

$i)$ $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)$ $P + 20 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)$ $P + 20 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos

$$\frac{8541}{100} \leq AB \leq \frac{121(8541)}{10^4}$$

$$85.41 \leq AB \leq 103.104$$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 103.35$

$A \leq \sqrt{}103.35$

$4 \leq A \leq 10.17$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$3 \leq a \leq 9.17 \quad a = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \quad a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{8541}{37}; \frac{8541}{47}; \frac{8541}{67}; \frac{8541}{97}\} \notin N.$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

$B^2 < AB \leq 103.35$

$B \leq \sqrt{}103.35$

$8 \leq B \leq 10.17$

Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$7 \leq b \leq 9.17 \quad b = 7; 8 \;\; b \neq \dot{3}$

Luego reemplazando los valores b en la ecuación

$P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{8541}{73}; \frac{8541}{83}\} \notin N.$

Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4\ ; B \leq 8$

Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos $a \leq 3,\ \ a = 0; 1; 2; 3 \quad a \neq 2$. Ahora reemplazando los valores en la ecuación (i) se tiene:

$\{\frac{8541}{7}; \frac{8541}{17}\} \notin N$

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7,\ \ b \neq 0{,}3{,}6$

$\{\frac{8541}{3} = 2847; \frac{8541}{13} = 657\} \in N; \{\frac{8541}{23}; \frac{8541}{43}; \frac{8541}{53}\} \notin N$

Como hay divisiones exactas ahora hallamos el valor de a cuando $b = 1$ reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$

$657 = 10a + 7$ entonces $a = 65$

Luego $a = 65$ y $b = 1$ es solución entera.

Por lo tanto $P + 20 = 8541$ no es un número primo.

Si en estas divisiones no hay división exacta entonces se continua con los casos (ii) y (iii) similar al ejemplo anterior.

Ejemplo 2.

Sea $P = 8191$ entonces $P + 20 = 8211$ es primo?

Veamos las condiciones:

$(\mathbf{1})$ Donde se tiene

$$\frac{8191-61}{90};\frac{8191-1}{70};\frac{8191-1}{30} \rightarrow \quad \frac{813}{9};\frac{819}{7};\frac{819}{3}$$

$$\rightarrow 90.33;\ 117; 273$$

$(\mathbf{2})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{8191-81}{90};\frac{8191-61}{90} > \rightarrow x_0 \in < \frac{811}{9};\frac{813}{9} >$$

Entonces $x_0 \in < 90.11; 90.33 >$entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in < \frac{8191-21}{70};\frac{8191-1}{70} > \rightarrow y_0 \in < \frac{817}{7};\frac{819}{7} > \rightarrow y_0 \in$$

$$< 116.71; 117 >$$

entonces $y_0 \in \phi$.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{8191-21}{30};\frac{8191-1}{30} > \ \rightarrow x_0 \in < \frac{817}{3};\frac{817}{3} >$$

$\rightarrow x_0 \in < 272.33; 273 >$ entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{8191-1}{10};\frac{8191+19}{10} > \rightarrow x_0 \in < 819; 821 >$$

Entonces $x_0 = 820 \in N$.

Ahora verificamos si es solución, para ello reemplazamos en la ecuación

$$8211 = (10x+1)(10y+1)$$

Reemplazando $x_0 = 820$ en la ecuación anterior entonces tenemos

$8211 = (10(820) + 1)(10y_0 + 1)$

$$10y_0 = \frac{8211}{8201} - 1$$

$$y_0 = \frac{8211 - 8201}{8201} = \frac{1}{8201} \notin N$$

Por lo tanto, no es solución

Los requisitos se cumplen, pero $P = 8191$ es un número pequeño, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 20 = 8211$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)\ P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)\ P + 20 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)\ P + 20 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos:

$$\frac{8211}{100} \leq AB \leq \frac{121(8211)}{10^4}$$

Entonces $82.11 \leq AB \leq 99.35$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que:

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

  $A^2 < AB \leq 99.35$

$A \leq \sqrt{99.35}$

$4 \leq A \leq 9.97$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$3 \leq a \leq 8.97$ $a = 3; 4; 5; 6; 7; 8$ $a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{8211}{37}; \frac{8211}{47}; \frac{8211}{67}\} \notin N.$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

$B^2 < AB \leq 99.35$

$B \leq \sqrt{99.35}$

$8 \leq B \leq 9.97$

Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$7 \leq b \leq 8.97$ $b = 7; 8$ $b \neq \dot{3}$

Luego reemplazando en la ecuación

$P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{8211}{73}; \frac{8211}{83}\} \notin N.$

Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4\,; B \leq 8$

  Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos

  $a \leq 3, \quad a = 0; 1; 2; 3 \quad a \neq 2$. Ahora reemplazamos en la ecuación

  $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ se tiene:

  $$\frac{8211}{7} = 1173 \in N; \frac{8211}{17} = 483 \ \in N$$

  Ahora hallamos b cuando $a = 1$ reemplazando en la ecuación

  $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ se tiene:

  $483 = 10b + 3$ entonces $b = 48$.

  Luego $a = 1$ y $b = 48$ son las soluciones.

  Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7, \quad b \neq 0{,}3{,}6$

  $$\frac{8211}{3} = 2737 \in N; \frac{8211}{13} \notin N; \frac{8211}{23} = 357 \ \in N; \{\frac{8211}{43}; \frac{8211}{53}\} \ \notin N$$

  Ahora hallamos el valor de a cuando $b = 2$ reemplazando en la ecuación.

  $357 = 10a + 7$ entonces $a = 35$

  Luego $a = 35$ y $b = 2$ también es solución.

  Por lo tanto, $P + 20 = 8211$ no es un número primo.

  Para el caso ii: $A \geq 2 \wedge\ B \geq 2$.

  Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

  $A^2 < AB \leq 99.35$

  $A \leq \sqrt{99.35}$

$2 \leq A \leq 9.97$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$1 \leq a \leq 8.97 \quad a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \quad a \neq 3; 4; 6$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 9)(10b + 9)$ tenemos

$\{\frac{8211}{19}; \frac{8211}{29}; \frac{8211}{59}; \frac{8211}{79}; \frac{8211}{89}\} \notin N.$

Por lo tanto, no hay solución.

Para el caso iii: Análogamente $A \geq 10$, $B \geq 10$ entonces

Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 99.35$

$A \leq \sqrt{99.35}$

$10 \leq A \leq 9.97$ lo cual es falso.

Por lo tanto, no hay solución para $A \geq 10$, $B \geq 10$

Ahora verificamos para $A \leq 10; B \leq 10$ entonces $b + 1 \leq 10$ entonces $b \leq 9, \quad b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \quad b \neq \dot{3} + 2$ luego reemplazamos en la ecuación

$P + 20 = (10a + 1)(10b + 1)$ tendríamos

$\{\frac{8211}{11}; \frac{8211}{31}; \frac{8211}{41}; \frac{8211}{61}; \frac{8211}{71}; \frac{8211}{91}\} \notin N.$

Finalmente, como hay solución entera el número P+20=8211 no es primo.

Ejemplo 3.

Sea $P = 78311$ entonces $P + 20 = 78331$ es primo?

Veamos las condiciones:

(1) Donde tenemos

$$\frac{78311-61}{90};\frac{78311-1}{70};\frac{78311-1}{30} \rightarrow \frac{7825}{9};\frac{7831}{7};\frac{7831}{3}$$

entonces $\{869.444; 1118.714; 2610.333\} \notin N$

$(\mathbf{2})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{78311-81}{90}; \frac{78311-61}{90} > \rightarrow x_0 \in < \frac{7823}{9}; \frac{7825}{9} >$$

Entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in < \frac{78311-21}{70}; \frac{78311-1}{70} > \rightarrow y_0 \in < \frac{7829}{7}; \frac{7831}{7} >$$

entonces $y_0 \in \phi$.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{78311-21}{30}; \frac{78311-1}{30} > \rightarrow x_0 \in < \frac{7829}{3}; \frac{7831}{3} >$$

entonces $x_0 \in < 2609.667; 2610.333 >$entonces $x_0 = 2610 \in N$. Pero no es solución.

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{78311-1}{10}; \frac{78311+19}{10} >$$

entonces $x_0 \in \ < 7831; 7833 >$ entonces $x_0 = 7832 \in N$. Pero no es solución.

Los requisitos se cumplen para $P = 78311$. Por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 20 = 78331$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B) es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)\ P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)\ P + 20 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)\ P + 20 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos: $783.31 \leq AB \leq 1.21(783.31) = 947.8051$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 947.8051$

$A \leq \sqrt{}947.8051$

$4 \leq A \leq 30.79$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos $3 \leq a \leq 29.79$ $a = 3; 4; 5; \dots; 29.$ $a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación

$P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{78331}{37}; \frac{78331}{47}; \frac{78331}{67}; \frac{78331}{97}; \frac{78331}{107}; \frac{78331}{127}; \frac{78331}{137}; \frac{78331}{157};$

$\frac{78331}{167}; \frac{78331}{187}; \frac{78331}{197}; \frac{78331}{227}; \frac{78331}{247}; \frac{78331}{257}; \frac{78331}{277}; \frac{78331}{297}\} \notin N$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

  $B^2 < AB \leq 947.8051$

  $B \leq \sqrt{947.8051}$

  $8 \leq B \leq 30.79$

  Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

  $7 \leq b \leq 29.79 \quad b \neq \dot{3}$. Luego

  $\{\frac{78331}{83}; \frac{78331}{103}; \frac{78331}{113}; \frac{78331}{133}; \frac{78331}{143}; \frac{78331}{163}; \frac{78331}{173}; \frac{78331}{193};$

  $\frac{78331}{203}; \frac{78331}{223}; \frac{78331}{233}; \frac{78331}{253}; \frac{78331}{263}; \frac{78331}{283}; \frac{78331}{293}\} \notin N$

  Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4\,; B \leq 8$

  Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos

  $a \leq 3, \quad a = 0; 1; 2; 3 \quad a \neq 2$. Ahora reemplazamos en la ecuación (i) se tiene:

  $\{\frac{78331}{7}; \frac{78331}{17}\} \notin N$

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7$, $b \neq 0{,}3{,}6$.

Reemplazando en la ecuación (i) se tiene:

$$\{\frac{78331}{3}; \frac{78331}{13}; \frac{78331}{23}; \frac{78331}{43}; \frac{78331}{53}\} \notin N$$

Por lo tanto, no hay solución para $A \leq 4$; $B \leq 8$

Para el caso ii: $A \geq 2 \wedge B \geq 2$.

Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$$A^2 < AB \leq 947.8051$$

$$A \leq \sqrt{947.8051}$$

$$2 \leq A \leq 30.79$$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos $1 \leq a \leq 29.79$ $a = 1; 2; 3; 4; 5; \ldots; 29.$ $a \neq 0; 3$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 10 = (10a + 9)(10b + 9)$ tenemos

$$\{\frac{78331}{19}; \frac{78331}{29}; \frac{78331}{49}; \frac{78331}{59}; \frac{78331}{79}; \frac{78331}{89}; \frac{78331}{109}; \frac{78331}{119};$$

$$\frac{78331}{139}; \frac{78331}{149}; \frac{78331}{169}; \frac{78331}{179}; \frac{78331}{199}; \frac{78331}{209}; \frac{78331}{229}; \frac{78331}{239};$$

$$\frac{78331}{259}; \frac{78331}{269}; \frac{78331}{289}; \frac{78331}{299}\} \notin N$$

Como no hay una división exacta.

Por lo tanto, no hay solución.

Para el caso iii: Análogamente $A \geq 10$, $B \geq 10$ entonces

Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 947.8051$

$A \leq \sqrt{947.8051}$

$10 \leq A \leq 30.79$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$9 \leq a \leq 29.79 \quad a = 1; 2; 3; 4; 5; \dots; 29 \quad a \neq \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 1)(10b + 1)$ tenemos

$\{\frac{78331}{91}; \frac{78331}{101}; \frac{78331}{121}; \frac{78331}{131}; \frac{78331}{151}; \frac{78331}{161}; \frac{78331}{181};$

$\frac{78331}{191}; \frac{78331}{211}; \frac{78331}{221}; \frac{78331}{241}; \frac{78331}{251}; \frac{78331}{271}; \frac{78331}{281}\} \notin N$

No hay división exacta.

Por tanto, no hay solución para $A \geq 10$, $B \geq 10$.

Ahora verificamos para $A \leq 10; B \leq 10$ entonces $b + 1 \leq 10$ entonces $b \leq 9 \quad b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \quad b \neq \dot{3} + 2$ luego reemplazamos en la ecuación tendríamos:

$\frac{78331}{11} = 7121 \in N; \{\frac{78331}{31}; \frac{78331}{41}; \frac{78331}{61}; \frac{78331}{71}; \frac{78331}{91}\} \notin N.$

Como hay una división exacta hallamos el valor de a cuando $b = 1$ reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 1)(10b + 1)$

$7121 = 10a + 1$ entonces $a = 712$

Luego $a = 712$ y $b = 1$ es solución entera.

Finalmente, como hay una división exacta entonces P+20=78331 no es primo.

Ejemplo 4.

Sea $P = 974261$ entonces $P + 20 = 974281$ es primo?

Veamos las condiciones:

(1) Donde

$$\left\{\frac{974261 - 61}{90}; \frac{974261 - 1}{70}; \frac{974261 - 1}{30}\right\} \rightarrow \left\{\frac{97420}{9}; \frac{97426}{7}; \frac{97426}{3}\right\}$$

entonces $10824.44; 13918; 32475.33 \notin N$

$(\mathbf{2})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{974261 - 81}{90}; \frac{974261 - 61}{90} > \rightarrow x_0 \in < \frac{97418}{9}; \frac{97420}{9} >$$

entonces $x_0 \in \phi$.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in < \frac{974261 - 21}{70}; \frac{974261 - 1}{70} > \rightarrow y_0 \in < \frac{97424}{7}; \frac{97426}{7} >$$

entonces $y_0 \in \phi$.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{974261-21}{30}; \frac{974261-1}{30} > \rightarrow x_0 \in < \frac{97424}{3}; \frac{97426}{3} >$$

entonces $x_0 = 32475 \in N$. Pero no es solución.

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{974261-1}{10}; \frac{974261+19}{10} >$$

entonces $x_0 \in < 97426; 97428 >$ entonces $x_0 = 97427 \in N$. Pero no es solución.

Los requisitos se cumplen para $P = 974261$, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 20 = 974281$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que $A = a + 1$, $B = b + 1$ son soluciones de:

$i)$ $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)$ $P + 20 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)$ $P + 20 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos: $9742.81 \leq AB \leq 1.21(9742.81) = 11788.8$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

  $A^2 < AB \leq 11788.8$

  $A \leq \sqrt{11788.8}$

$4 \leq A \leq 108.58$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior

tendríamos $3 \leq a \leq 107.58$ $a = 3; 4; 5; \ldots; 107.$ $a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$

tenemos

$$\{\frac{974281}{37};\frac{974281}{47};\frac{974281}{67};\frac{974281}{97};\frac{974281}{107};\frac{974281}{127};\frac{974281}{137};$$

$$\frac{974281}{157}\frac{974281}{167};\frac{974281}{187};\frac{974281}{197};\frac{974281}{227};\frac{974281}{247};\frac{974281}{257};$$

$$\frac{974281}{277};\frac{974281}{297};\frac{974281}{307};\frac{974281}{317};\frac{974281}{337};\frac{974281}{347};\frac{974281}{367};$$

$$\frac{974281}{377};\frac{974281}{397};\frac{974281}{407};\frac{974281}{437};\frac{974281}{457};\frac{974281}{467};\frac{974281}{487};$$

$$\frac{974281}{497};\frac{974281}{517};\frac{974281}{527};\frac{974281}{547};\frac{974281}{557};\frac{974281}{577};\frac{974281}{587};$$

$$\frac{974281}{607}\frac{974281}{617};\frac{974281}{647};\frac{974281}{667};\frac{974281}{677};\frac{974281}{697};\frac{974281}{727};$$

$$\frac{974281}{737};\frac{974281}{757};\frac{974281}{767};\frac{974281}{787};\frac{974281}{797};\frac{974281}{817};\frac{974281}{827};$$

$$\frac{974281}{857};\frac{974281}{877};\frac{974281}{887};\frac{974281}{907};\frac{974281}{927};\frac{974281}{937};\frac{974281}{947};$$

$$\frac{974281}{967};\frac{974281}{977};\frac{974281}{997};\frac{974281}{1007};\frac{974281}{1027};\frac{974281}{1037};\frac{974281}{1057};$$

$$\frac{974281}{1067};\frac{974281}{1077}\} \notin N$$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

  $B^2 < AB \leq 11788.8$

  $B \leq \surd 11788.8$

  $8 \leq B \leq 108.58$

Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$7 \leq b \leq 108.58 \quad b \neq \dot{3}$. Luego

$\{\frac{974281}{73};\frac{974281}{83};\frac{974281}{103};\frac{974281}{113};\frac{974281}{133};\frac{974281}{143};\frac{974281}{163};$

$\frac{974281}{173};\frac{974281}{193};\frac{974281}{193};\frac{974281}{203};\frac{974281}{223};\frac{974281}{233};\frac{974281}{253};$

$\frac{974281}{263};\frac{974281}{283};\frac{974281}{293};\frac{974281}{313}\frac{974281}{313};\frac{974281}{323};\frac{974281}{343};$

$\frac{974281}{353};\frac{974281}{373};\frac{974281}{383};\frac{974281}{403};\frac{974281}{413};\frac{974281}{433};\frac{974281}{443};$

$\frac{974281}{463};\frac{974281}{473};\frac{974281}{493};\frac{974281}{503};\frac{974281}{523};\frac{974281}{533};\frac{974281}{553};$

$\frac{974281}{563};\frac{974281}{583};\frac{974281}{593};\frac{974281}{613};\frac{974281}{623};\frac{974281}{643};\frac{974281}{653};$

$\frac{974281}{673};\frac{974281}{683};\frac{974281}{703};\frac{974281}{713};\frac{974281}{733};\frac{974281}{743};\frac{974281}{763};$

$\frac{974281}{773};\frac{974281}{793};\frac{974281}{803};\frac{974281}{823};\frac{974281}{833};\frac{974281}{853};\frac{974281}{863};$

$\frac{974281}{883};\frac{974281}{893};\frac{974281}{913};\frac{974281}{923};\frac{974281}{943};\frac{974281}{953};\frac{974281}{973};$

$\frac{974281}{983}; \frac{974281}{1003}; \frac{974281}{1013}; \frac{974281}{1033}; \frac{974281}{1043}; \frac{974281}{1053};$

$\frac{974281}{1073}\} \notin N$

Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4$; $B \leq 8$

Además, $A = a + 1$; $B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos

$a \leq 3$, $a = 0; 1; 2; 3.$ $a \neq 2$. Ahora reemplazamos en la ecuación

$P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$ se tiene:

$\frac{974281}{7} = 13983 \in N; \frac{974281}{17} \notin N$

Como hay una división exacta cuando $a = 0$, entonces calculamos el valor de b reemplazando en la ecuación $P + 20 = (10a + 7)(10b + 3)$

$13983 = 10b + 3$ entonces $b = 1398.$

Luego $a = 0$ y $b = 1398$ es solución entera de la ecuación.

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7$, $b \neq 3{,}6$

$\{\frac{974281}{3}; \frac{974281}{13}; \frac{974281}{23}; \frac{974281}{43}; \frac{974281}{53}\} \notin N$

No hay solución entera para $B \leq 8$

Finalmente, como hemos encontrado una división exacta entonces

$P + 20 = 974281$ no es primo.

4.1.3 Construiremos números primos de la forma P + 10L, para L=3

Construiremos números primos $P + 10L$, con $L = 3$ y P un número primo que termina en uno. Para ello usaremos el teorema 2.2.9 y 2.2.10 específicamente el siguiente corolario.

Corolario 3. Sea P un número primo grande que termina en uno, entonces $P + 30$ es un primo si las siguientes condiciones son satisfechas:

(1) Donde

$$\frac{P-51}{90};\frac{P+9}{70};\frac{P+9}{30} \notin N$$

(2) Los números enteros que pertenecen a los intervalos

$$< \frac{P-81}{90},\frac{P-51}{90} >$$

no son solución entera de la ecuación $P + 30 = (10x + 9)(10y + 9)$.

(3) Los números enteros y_0 pertenece al intervalo

$$< \frac{P-21}{70},\frac{P+9}{70} >$$

y los números enteros x_0 pertenece al intervalo

$$< \frac{P-21}{30},\frac{P+9}{30} >$$

no son solución de la ecuación

$$P + 30 = (10x + 7)(10x + 3)$$

(4). Los números enteros que pertenecen al intervalo

$$< \frac{P-1}{10}, \frac{P+29}{10} >$$

no son solución entera de la ecuación

$P + 30 = (10x + 1)(10y + 1).$

Demostración

Basta poner $L = 3$ en el teorema 2.2.9

Ejemplo 1.

Sea $P = 8741$ entonces $P + 30 = 3371$ es primo?

Veamos las condiciones:

(1) Donde tenemos

$$\frac{8741-51}{90}; \frac{8741+9}{70}; \frac{8741+9}{30} \quad \rightarrow \quad \frac{869}{9}; \frac{875}{7}; \frac{875}{3}$$

Entonces $96.67 \notin N;\ 125 \in N; 291.67 \notin N$

(2) $x_0 \in N$ talque entonces

$$x_0 \in < \frac{8741-81}{90}; \frac{8741-51}{90} > \rightarrow x_0 \in < \frac{866}{9}; \frac{869}{9} >$$

$x_0 \in < 96.22; 96.556 >$ Entonces $x_0 \in \phi$.

(3) $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in < \frac{8741-21}{70}; \frac{8741+9}{70} > \rightarrow y_0 \in < \frac{872}{7}; \frac{875}{7} > \rightarrow x_0 \in$$

$$< 124.5; 125 >$$

$x_0 \in N$ talque

$x_0 \in < \frac{8741-21}{30}; \frac{8741+9}{30} > \ \rightarrow x_0 \in < \frac{872}{3}; \frac{875}{3} >$

$x_0 \in \ < 290.67; 291.67 \ >$ entonces $x_0 = 291 \in N.$

Ahora verificamos si es solución, para ello reemplazamos en la ecuación

$8771 = (10x + 7)(10y + 3)$

Reemplazando $x_0 = 291$ en la ecuación anterior entonces tenemos

$8771 = (10(291) + 7)(10y + 3)$

$10y_0 = \frac{8771}{2917} - 3$

$y_0 = \frac{8771 - 2917(3)}{29170} = \frac{20}{29170} \notin N$

Por lo tanto, no es solución.

(4) $x_0 \in N$ talque

$x_0 \in < \frac{8741-1}{10}; \frac{8741+29}{10} > \rightarrow x_0 \in < 874; 877 >$

entonces $x_0 = 875; 876 \in N.$

Ahora verificamos si es solución, para ello reemplazamos en la ecuación

$8771 = (10x + 1)(10y + 1)$

Reemplazando $x_0 = 875$ en la ecuación anterior entonces tenemos

$8771 = (10(875) + 1)(10y_0 + 1)$

$10y_0 = \frac{8771}{8751} - 1$

$$y_0 = \frac{8771 - 8751}{87510} = \frac{20}{87510} \notin N.$$

Por lo tanto, no es solución.

Los requisitos se cumplen, pero $P = 8741$ es un número pequeño, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 30 = 8771$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)\ P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)\ P + 30 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)\ P + 30 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos:

$$\frac{8771}{100} \leq AB \leq \frac{121(8771)}{10^4}$$

entonces

$87.71 \leq AB \leq 106.1291$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 106.1291$

$A \leq \sqrt{106.1291}$

$4 \leq A \leq 10.3$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$3 \leq a \leq 9.3 \quad a = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. \quad a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos:

$\{\frac{8771}{37}; \frac{8771}{47}; \frac{8771}{67}; \frac{8871}{97}\} \notin N.$

- Si B<A entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

$B^2 < AB \leq 106.1291$

$B \leq \sqrt{}106.1291$

$8 \leq B \leq 10.3$

Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$7 \leq b \leq 9.3 \quad b = 7; 8; 9. \quad b \neq \dot{3}$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{8771}{73}; \frac{8771}{83}\} \notin N.$

Luego no hay solución si $B \geq 8 \wedge$ A≥ 4

- Ahora hallamos para $A \leq 4$; $B \leq 8$

Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos

$a \leq 3$, $a = 0; 1; 2; 3.$ $a \neq 2$. Ahora reemplazando en la ecuación

$P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ se tiene

$\frac{8771}{7} = 1253 \in N; \frac{8771}{17} \notin N$

Ahora calculamos el valor de b cuando $a = 0$ reemplazando en la ecuación anterior tenemos.

$1253 = 10b + 3$ entonces $b = 125.$

Luego $a = 0$ y $b = 125$ son las soluciones enteras.

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7,$ $b \neq 0{,}3{,}6$

$\{\frac{8771}{3}; \frac{8771}{13}; \frac{8771}{23}; \frac{8871}{43}; \frac{8871}{53}\} \notin N$

Para el caso ii: $A \geq 2 \wedge B \geq 2.$

Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 106.1291$

$A \leq \sqrt{106.1291}$

$2 \leq A \leq 10.3$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos $1 \leq a \leq 9.3$ $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.$ $a \neq 3; 4; 6; 9$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 9)(10b + 9)$ tenemos

$\{\frac{8771}{19}; \frac{8771}{29}; \frac{8771}{59}; \frac{8871}{79}; \frac{8871}{89}\} \notin N.$

Por lo tanto, no hay solución exacta.

Para el caso iii: Análogamente $A \geq 9$, $B \geq 9$ entonces

Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 106.1291$

$A \leq \sqrt{106.1291}$

$9 \leq A \leq 10.3$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos $8 \leq a \leq 9.3$ $\quad a = 8; 9 \quad a \neq 8$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 1)(10b + 1)$ tenemos

$\frac{8771}{91} \notin N.$

Ahora verificamos para $A \leq 10; B \leq 10$ entonces $b + 1 \leq 10$ entonces $b \leq 9,$ $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ $\quad b \neq \dot{3} + 2$ luego reemplazando en la ecuación tendríamos:

$P + 30 = (10a + 1)(10b + 1)$ se tiene:

$\{\frac{8771}{11}; \frac{8771}{31}; \frac{8771}{41}; \frac{8871}{61}; \frac{8871}{71}; \frac{8871}{91}\} \notin N.$

Finalmente, como hay solución exacta el número $P + 30 = 8771$ no es primo.

Ejemplo 2.

Sea $P = 9151$ entonces $P + 30 = 9181$ es primo?

Veamos las condiciones:

$(\mathbf{1})$ Donde tenemos

$$\left\{\frac{9151-51}{90};\frac{9151+9}{70};\frac{9151+9}{30}\right\} \to \{\frac{910}{9};\frac{916}{7};\frac{916}{3}\}$$

Entonces $\{101.111; 130.857; 305.333\} \notin N$

$(\mathbf{2})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\frac{9151-81}{90};\frac{9151-51}{90}> \to x_0 \in <\frac{907}{9};\frac{910}{9}>$$

$x_0 \in < 100.778; 101.111 >$ entonces $x_0 = 101 \in N$.

Pero $x_0 = 101$ no es solución.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in <\frac{9151-21}{70};\frac{9151+9}{70}> \to y_0 \in <\frac{913}{7};\frac{916}{7}>$$

$$\to x_0 \in < 130.42; 130.857 >$$

entonces $y_0 \in \phi$.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\frac{9151-21}{30};\frac{9151+9}{30}> \to x_0 \in <\frac{913}{3};\frac{916}{3}>$$

$x_0 \in < 304.333; 305.33 >$ entonces $x_0 = 305 \in N$. Pero x_0 no es solución.

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in < \frac{9151-1}{10}; \frac{9151+29}{10} > \ \rightarrow x_0 \in < 915; 918 >$$

entonces $x_0 = 916; 917 \in N$. Pero no es solución.

Los requisitos se cumplen, pero $P = 9151$ es un número pequeño. Por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 30 = 9181$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)\ P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)\ P + 30 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)\ P + 30 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos

$$\frac{9181}{100} \leq AB \leq \frac{121(9181)}{10^4}$$

entonces $91.81 \leq AB \leq 111.09$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 111.09$

$A \leq \sqrt{111.09}$

$4 \leq A \leq 10.54$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$3 \leq a \leq 9.54 \quad a = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \quad a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{9181}{37}; \frac{9181}{47}; \frac{9181}{67}; \frac{9181}{97}\} \notin N.$

- Si B<A entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

$B^2 < AB \leq 111.09$

$B \leq \sqrt{}111.09$

$8 \leq B \leq 10.54$

Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$7 \leq b \leq 9.3 \quad b = 7; 8; 9 \quad b \neq \dot{3}$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{9181}{73}; \frac{9181}{83}\} \notin N.$

Luego no hay solución si $B \geq 8 \wedge$ A≥ 4

- Ahora hallamos para $A \leq 4\,; B \leq 8$

Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos $a \leq 3$, $a = 0; 1; 2; 3.$ $a \neq 2$. Ahora reemplazamos en la ecuación anterior se tiene

$\{\frac{9181}{7}; \frac{9181}{17}\} \notin N$

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7$, $b \neq 0{,}3{,}6$

$\{\frac{9181}{3}; \frac{9181}{13}; \frac{9181}{23}; \frac{9181}{43}; \frac{9181}{53}\} \notin N$

No hay solución para $A \leq 4$; $B \leq 8$

Para el caso ii: $A \geq 2 \wedge B \geq 2$.

Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 111.09$

$A \leq \sqrt{111.09}$

$2 \leq A \leq 10.54$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$1 \leq a \leq 9.54$ $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ $a \neq 3; 4; 6; 9$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 9)(10b + 9)$ tenemos:

$\{\frac{9181}{19}; \frac{9181}{29}; \frac{9181}{59}; \frac{9181}{79}; \frac{9181}{89}\} \notin N.$

Por lo tanto, no hay solución entera.

Para el caso iii: Análogamente $A \geq 9$, $B \geq 9$ entonces

Si A<B entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 111.09$

$A \leq \sqrt{111.09}$

$9 \leq A \leq 10.54$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

$8 \leq a \leq 9.54 \quad a = 8; 9 \quad a \neq 8$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 1)(10b + 1)$ tenemos:

$\frac{9181}{91} \notin N.$

Ahora verificamos para $A \leq 10; B \leq 10$ entonces $b + 1 \leq 10$ entonces $b \leq 9 \quad b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \quad b \neq \dot{3} + 2$ luego reemplazamos en la ecuación $P + 30 = (10a + 1)(10b + 1)$ tendríamos

$\{\frac{8771}{11}; \frac{8771}{31}; \frac{8771}{41}; \frac{8871}{61}; \frac{8871}{71}; \frac{8871}{91}\} \notin N.$

Finalmente, como no hay una división exacta entonces P+30=9181 es primo.

Ejemplo 3.

Sea $P = 81331$ entonces $P + 30 = 81361$ es primo?

Veamos las condiciones:

$(\mathbf{1})$ Donde tenemos

$$\left\{\frac{81331-51}{90},\frac{81331+9}{70},\frac{81331+9}{30}\right\} \to \{\frac{8128}{9};\frac{8134}{7};\frac{8134}{3}\}$$

Entonces $\{903.11; 1164; 2711.33\} \notin N$

$(\mathbf{2})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\frac{81331-81}{90};\frac{81331-51}{90}> \to x_0 \in <\frac{8125}{9};\frac{8128}{9}>$$

$x_0 = 903 \in N$. Pero no es solución.

$(\mathbf{3})$ $y_0 \in N$ talque

$$y_0 \in <\frac{81331-21}{70};\frac{81331+9}{70}> \to y_0 \in <\frac{8131}{7};\frac{8134}{7}>$$

entonces $y_0 = 1162; 1163 \in N$.

Pero no es solución.

$x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\frac{81331-21}{30};\frac{81331+9}{30}> \to x_0 \in <\frac{8131}{3};\frac{8134}{3}>$$

entonces $x_0 \in <2710.33; 2711.33>$entonces $x_0 = 2711 \in N$. Pero no es solución.

$(\mathbf{4})$ $x_0 \in N$ talque

$$x_0 \in <\frac{81331-1}{10};\frac{81331+29}{10}>$$

entonces $x_0 \in <8133; 8136>$ entonces $x_0 = 8134; 8135 \in N$. Pero no es solución.

Los requisitos se cumplen para $P = 81331$, por lo tanto, no podemos aun afirmar si $P + 30 = 81361$ es un número primo o no.

Para ello usamos el teorema (A) y (B), es decir supongamos que

$A = a + 1,\ B = b + 1$ son soluciones de:

$i)\ P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ ó

$ii)\ P + 30 = (10a + 9)(10b + 9)$ ó

$iii)\ P + 30 = (10a + 1)(10b + 1)$

Luego tenemos: $813.61 \leq AB \leq 1.21(813.61) = 984.47$

Para el caso i: $A \geq 4 \wedge B \geq 8$ tenemos que

- Si $A < B$ entonces multiplicando por A en ambos miembros tenemos

$A^2 < AB \leq 984.47$

$A \leq \sqrt{984.47}$

$4 \leq A \leq 31.38$

Además, sabemos que $A = a + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos $3 \leq a \leq 30.38$ $\quad a = 3; 4; 5; \ldots; 30.$ $\quad a \neq \dot{7}; \dot{3} + 2$

Luego reemplazando en la ecuación $P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ tenemos

$\{\frac{81361}{37}; \frac{81361}{47}; \frac{81361}{67}; \frac{81361}{97}; \frac{81361}{107}; \frac{81361}{127}; \frac{81361}{137};$

$\frac{81361}{157}; \frac{81361}{167}; \frac{81361}{187}; \frac{81361}{197}; \frac{81361}{227}; \frac{81361}{247}; \frac{81361}{257};$

$\frac{81361}{277};\frac{81361}{307}\} \notin N$

- Si $B < A$ entonces multiplicando por B en ambos miembros tenemos

  $B^2 < AB \leq 984.47$

  $B \leq \sqrt{984.47}$

  $8 \leq B \leq 31.38$

  Además, sabemos que $B = b + 1$ reemplazando en la desigualdad anterior tendríamos

  $7 \leq b \leq 31.38 \quad b \neq \dot{3}$. Luego

  $\{\frac{81361}{83};\frac{81361}{103};\frac{81361}{113};\frac{81361}{133};\frac{81361}{143};\frac{81361}{163};\frac{81361}{173};$

  $\frac{81361}{193};\frac{81361}{203};\frac{81361}{223};\frac{81361}{233};\frac{81361}{253};\frac{81361}{263};\frac{81361}{283};$

  $\frac{81361}{293}\} \notin N$

  Luego no hay solución si $A \geq 4 \wedge B \geq 8$.

- Ahora hallamos para $A \leq 4 ; B \leq 8$

  Además, $A = a + 1;\ B = b + 1$ reemplazando en las desigualdades tenemos

  $a \leq 3, \quad a = 0; 1; 2; 3 \quad a \neq 2.$ Ahora reemplazamos en la ecuación

  $P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$ se tiene:

  $\frac{81361}{7} = 11623 \in N;\ \frac{81361}{17} \notin N$

Como hemos encontrado una división exacta cuando $a = 0$ entonces podemos hallar el valor de b reemplazando en la ecuación

$P + 30 = (10a + 7)(10b + 3)$.

$11623 = 10b + 3$ entonces $b = 1162$.

Luego como $a = 0$ y $b = 1162$ son valores de enteros entonces es solución.

Verifiquemos para $B \leq 8$ entonces $b + 1 \leq 8$ entonces $b \leq 7$, $b \neq 0,3,6$

$\{\frac{81361}{3}; \frac{81361}{13}; \frac{81361}{23}; \frac{81361}{43}; \frac{81361}{53}\} \notin N$

Como hay una división exacta para $A \leq 4$; $B \leq 8$.

Por lo tanto, $P + 30 = 81361$ no es un número primo.

V. DISCUSIÓN

- Se obtuvo teoremas que nos permitan obtener números primos de la forma $P + 10L$; $L = 1; 2; 3$ cuando P es un número primo que termina en uno. Pensábamos que al hallar la distancia entre curvas $d(c_i\,; c_j)$ (ver teorema 2.2.7) podríamos obtener algún resultado; pero esto no ayuda cuando se requiere determinar la primalidad de $P + 10L$; $L = 1; 2; 3$ cuando P es un número primo que termina en uno y P es un número pequeño.

- Para número primo P mayor de 6 cifras se sugiere generar un lenguaje de programación que nos ayude en la construcción de nuestro objetivo.

VI. CONCLUSIONES

1 Al analizar los teoremas de B.M. Cerna dado en [3] se observa que es muy necesario el estudio de las ecuaciones de la forma: $Axy + Bx + Cy = D$ donde $A, B, C, D \in Z$, para obtener soluciones enteras.

2 Ha sido posible obtener un método para determinar que $P + 10L$ un número primo P que termina en 1, donde L=1,2,3.

3 Al estudiar las ecuaciones particulares de la forma:

i) $P = (10x + 7) \times (10y + 3)$

ii) $P = (10x + 9) \times (10y + 9)$

iii)$P = (10x + 1) \times (10y + 1)$

Se obtuvieron desigualdades del teorema 2.2.10 que nos permitieron determinar la primalidad de un número natural P que terminan en uno.

4 Para P primo que termina en uno, cuando $L = 4,5,6,\ldots$ el estudio de la primalidad de $P + 10L$ se vuelve más extenso lo cual se sugiere un lenguaje de programación.

VII. RECOMENDACIONES

1 Es recomendable trabajar con número primo P que termina en uno; de siete, ocho, nueve o 10 cifras y realizar el mismo proceso descrito en la tesis para obtener número primo de la forma: $P + 10L$; $L = 1,2,3$.

2 Para P un número primo mayor a 10 cifras y para obtener número primo $P + 10L$; $L = 1,2,3$ se recomienda hacer uso de un lenguaje de programación.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]:A.J.Pettofrezzo.D.R.Byrkit,1972. Introducion a la teoría de números, Editorial Prentice, Hall Internacional.

[2]: B.M.CERNA, 2017. Algorithm for writing of a even number as the sum of two primes" Asian academic research associates journal India. Aceptado para publicación.

[3]: B.M.CERNA,2018. Some results on prime numbers.International journal of pure and Applied Mathematics,IJPAM.

[4]: HAASER, N. LA SALLE, J. SULLIVAN, J.1992. Análisis Matemático: curso de introducción, Editorial Trillas, México.

[5]: Murray R. Spiegel,1982. Cálculo Superior, Editorial MC. Graw-hill, USA.

[6]:I.Niven,H.S.Zuckerman,andH.L.Montgomery,1991.An Introduction to the Theory of Number,Jhon Wiley Sons,Inc.

[7]: W.Sierpinski,Elementary,1988. Theory of Number, North-Holland Mathematical Library,Vol.#1.

BIBLIOGRAFÍAS ELECTRÓNICAS

[8]: Antonio, D. (1999). TeoriaAritmetica.pdf, Madri, España: matdiscreta. http://www. dma.fi.upm.es/docencia/primercic[9]: Hitos, J.R. (2017). Pensamiento

matemático Brasil file:///C:/Users/INTEL/ Documents/ Dialnet – Ecuaciones Diofanticas.

[10]: Número Primo de Mersenne-Wikipedia,la encyclopedia libre.

https:/es.wikipedia.org/wiki/Número_primo_de_Mersenne.

[11]: SCHMIDT R.F. y THEWS G. (1993) “Fisiología humana”. Interamericana, Madrid, / Mc Graw-Hill.https://talentomatematico.files.wordpress.com

[12]:Valverde, J. L. (2013). Jochinchilla @.ter,ac. Montevideo, Uruguay: https// Semur.edu.uy. cibem.org

[13]: SCHMIDT R.F. y THEWS G. (1993) “Fisiología humana”. Interamericana, Madrid, / Mc Graw-Hill.https://talentomatematico.files.wordpress.com

[14] B. M Cerna, H. Blas y V.H. López Solis. arXiv: 1808.06145v1[math.NT].18 aug 2018.

ANEXO

1. Datos del Autor:

Apellidos y Nombres: OBREGÓN TOLEDO GRACIANO SANTIAGO

Código de alumno: 03.0606.0. EO Teléfono: 921982281

Correo electrónico:gracianoobregon@hotmail.com DNI: 43160755

2. Modalidad de trabajo de investigación:

( ) Trabajo de Investigación ( ) Trabajo académico

( ) Trabajo de suficiencia personal (X) Tesis

3. Título profesional o grado académico

( ) Bachiller (X) Titulo ( ) Segunda especialidad

( ) Licenciado ( ) Magister ( ) Doctor

4. Título del trabajo de investigación

"Método para obtener números primos que termina en uno"

5. Facultad de Ciencias

6. Escuela, Carrera o programa: Escuela Académica Profesional de Matemática.

7. Asesor:

Apellidos y Nombres: Dr. CERNA MAGUIÑA, BIBIANO MARTÍN.

Teléfono: 943756087

Correo electrónico: mcm1508@hotmail.com DNI: 06908215

A través de este medio autorizo a la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, publicar el trabajo de investigación en formato digital en el Repositorio Institucional Digital, Repositorio Nacional Digital de Acceso Libre (ALICIA) y el Registro Nacional de Trabajos de Investigación (RENATI).

Asimismo, por la presente dejo constancia que los documentos entregados a la UNASAM, versión impresión y digital, son las versiones finales del trabajo sustentado y aprobado por el jurado y son de autoría del suscrito en estricto respeto a la legislación en materia de propiedad intelectual

FIRMA……………………………………

DNI: 43160755

28 de Febrero del 2019.