UNIVERSIDAD NACIONAL
”SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO”

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TÍTULO DE LA TESIS:

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE CAUCHY DIFUSO MEDIANTE EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN USANDO LA DIFERENCIABILIDAD GENERALIZADA DE HUKUHARA

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR:

Bach. LÓPEZ CHILCA Fredy Rolando

ASESOR:

Dr. ASÍS LÓPEZ Maximiliano Epifanio

HUARAZ-PERÚ

2021

N° Registro: T009

Jurado calificador

M.Sc. GARRIDO ANGULO Henrry Angel
(PRESIDENTE)

M.Sc. NINAQUISPE CASTILLO Mario
(SECRETARIO)

Dra. NUÑEZ BLAS Pilar Sara
(VOCAL)

Agradecimientos

Este trabajo de Tesis está dedicado para mis padres y hermanos, por apoyarme y orientarme en mi desarrollo profesional.

Además agradezco al Dr. ASÍS LÓPEZ Maximiliano por apoyarme como asesor y docente en la realización de la Tesis.

Finalmente agradezco a los docentes de la UNASAM que contribuyeron con sus enseñanzas en mi formación profesional.

Resumen

En la Tesis se ha estudiado el método de Runge-Kutta de cuarto orden bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara para aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales difusas de primer orden utilizando el Teorema de Caracterización Generalizada. En este método se utiliza los nuevos parámetros para mejorar el orden de precisión de las soluciones utilizando evaluaciones de f y f' en lugar de utilizar solo las evaluaciones de f. Por lo tanto se describe el Método de Runge-Kutta para un problema de Cauchy difuso autónomo para encontrar la solución numérica, posteriormente se grafican las soluciones numéricas y exactas obtenidas, esto se realiza con el apoyo del Software Matemático Matlab.

Palabras clave: Método de Runge-Kutta, Diferenciabilidad generalizada de Hukuhara, Teorema de Caracterización Generalizada, Cauchy, difuso, autónomo, Matlab.

Abstract

In the Thesis, the fourth order Runge-Kutta method has been studied under Hukuhara's generalized differentiability to approximate the solutions of the first order differential equations using the Generalized Characterization Theorem. In this method the new parameters are used to improve the order of precision of the solutions using evaluations of f and f' instead of using only the evaluations of f. Therefore, describe the Runge-Kutta Method for an autonomous diffuse Cauchy problem to find the numerical solution, then the numerical and exact solutions obtained are plotted, this is done with the support of Matlab Mathematical Software.

Keywords: Runge-Kutta Method, Hukuhara Generalized Differentiability, Generalized Characterization Theorem, Cauchy, fuzzy, autonomous, Matlab.

Índice general

Agradecimientos III
Resumen IV
Abstract V
Índice de figuras IX
Símbolos X
Introducción XI

1. EL PROBLEMA **14**
1.1. Selección del problema 14
1.1.1. Justificación de estudios 19
1.1.2. Objetivos de la investigación 19
1.1.2.1. Objetivo general 19
1.1.2.2. Objetivos específicos 19

2. BASES TEÓRICAS **20**
2.1. Antecedentes del problema 20
2.2. Planteamientos teóricos atingentes 24
2.2.1. Conjuntos difusos 24
2.2.1.1. Conjuntos clásicos 24
2.2.1.2. Subconjuntos difusos 25
2.2.1.3. Operaciones entre subconjuntos difusos 25
2.2.2. Números difusos 29

2.2.2.1. Definición de números difusos 29
2.2.2.2. Teorema de Caracterización de los Números Difusos . 33
2.2.2.3. Números difusos L-R 37
2.2.3. Aritmética difusa 40
2.2.3.1. Principio de Extensión de Zadeh 40
2.2.3.2. El producto de dos números difusos 48
2.2.3.3. Diferencia de números difusos 49
2.2.4. Análisis difuso 51
2.2.4.1. Espacios métricos de números difusos 51
2.2.4.2. Completación de espacios métricos de números difusos 54
2.2.4.3. Norma de un número difuso 59
2.2.4.4. Integración de funciones de valores numéricos difusos 60
2.2.4.5. Diferenciabilidad de Hukuhara 63
2.2.4.6. Diferenciabilidad generalizada 64
2.2.5. Ecuaciones diferenciales difusas 70
2.2.5.1. Ecuaciones diferenciales difusas bajo la diferenciabilidad de Hukuhara 71
2.2.6. Ecuaciones diferenciales difusas bajo diferenciabilidad generalizada 76
2.2.6.1. Existencia y unicidad de dos soluciones 76
2.2.6.2. Principio de extensión de Zadeh bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara 82
2.2.6.3. Extensión del Teorema de caracterización 84

3. METODOLOGÍA 89

3.1. Materiales y lugar de ejecución 89
3.1.1. Lugar 89
3.1.1.1. Materiales 89
3.1.1.2. Equipos 89

3.1.1.3. Otros 90
3.1.2. Métodos 90
3.1.2.1. Técnicas de recolección de datos 90
3.1.3. Tipo de investigación 90

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN 91

4.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara 91
4.1.1. Aplicación del método de Runge-Kutta a los teoremas de caracterización 93
4.1.1.1. Ejemplo numérico 94

5. CONCLUSIONES 103

6. BIBLIOGRAFÍA 105

7. ANEXOS 112

7.1. Conjunto numerable 112
7.2. Sucesión 112
7.3. Continuidad 113
7.4. Formulación del Método de Runge-Kutta 113
7.4.1. Método Runge-Kutta de cuarto para una EDO autónoma . . . 114
7.5. Puntos de solución del problema de Cauchy difuso 115

Índice de figuras

1. Subconjuntos difusos A y B. 26
2. (a) Unión de subconjuntos difusos A y B. 26
3. (b) Intersección de subconjuntos difusos A y B. 27
4. (c) Complemento del subconjunto difuso A. 27
5. α-niveles: $[A]^\alpha$ y $[A]^0 \neq X$. 28
6. α-niveles: $[A]^\alpha$ y $[A]^0 = X$. 28
7. Un número difuso singleton. 30
8. Número difuso trapezoidal. 39
9. Número difuso triangular. 39
10. Imagen de un subconjunto difuso a partir del Principio de Extensión para una función f 41
11. Extensión de Zadeh del número difuso triangular $A = (0; ln\ 2; ln\ 3)$ para $f(t) = e^t$. 43

1. Soluciones aproximadas y exactas difusas en (i)-diferenciabilidad. . . 100
2. Soluciones aproximadas y exactas difusas en (ii)-diferenciabilidad. . . 101

Símbolos

f, g, x, c	Elementos no difusos.
A	Subconjunto difuso.
y_A	Función característica del subconjunto difuso A.
$\mathcal{F}$	Colección de subconjuntos difusos de X.
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	Espacio de números difusos y convexos.
$[A]^{\alpha}$	α-nivel del subconjunto difuso A.
$suppA$	Soporte del subconjunto difuso A.
$[A]^1$	Núcleo del subconjunto difuso A.
$y_{\alpha} = [y_{\alpha}^{-}, y_{\alpha}^{+}]$	Intervalo cerrado con sus respectivos α-cortes.
$\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$	Espacio de números difusos triangulares.
$\widehat{f}$	Extensión de la función f.
$A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_A(x_i)}{x_i}$	Notación de un conjunto difuso discreto A.
$len(y)$	Longitud del intervalo difuso y.
d_{∞}	Métrica de Hausdorff para espacios de subconjuntos difusos.
$y'_g(x)$	Diferenciabilidad de Hukuhara de la función difusa y en x.
$y'_{gH}(x)$	gH-diferenciabilidad de la función difusa y en x.
K	Colección de subconjuntos convexos compactos.
$\overline{B}(0,1)$	Bola cerrada, tal que: $\overline{B}(0,1) = \{y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \mid d_{\infty}(y,0) \leq 1\}$.
$\overline{C}[0,1]$	Espacio de funciones continuas y acotadas.

Introducción

En muchos casos en las que se intenta modelar fenómenos del mundo real, como sucede con los modelos asociados en la dinámica poblacional, en la epidemiología, en las reacciones químicas, en los sistemas dinámicos, entre otros; la información sobre el comportamiento de los fenómenos en estudio se encuentra impregnada de incertidumbre, subjetividad, ambigüedad, imprecisión, o cualquier otro sustantivo que pueda reflejar una determinada característica no absoluta y objetiva. La naturaleza imprecisa, incierta o vaga de un determinado fenómeno puede estar asociado a diversos factores, entre ellos, la inhabilidad para obtener información completa, la falta de precisión en los sistemas de medición, y la ambigüedad relativa al uso de términos y conceptos. Por ejemplo, en el caso de los modelos poblacionales, la hipótesis establece relaciones, entre las variables de estado y las variaciones con respecto a las variables temporales, que involucran parámetros o datos tales como la tasa de crecimiento o mortalidad, datos iniciales, o fuerzas externas que afectan la dinámica, los cuales son normalmente simuladas u obtenidas empíricamente generando a su vez grados de incertidumbre e imprecisión.

Es por eso, que aparece el concepto de la función de valor difuso que fue introducido por Zadeh (1965). A partir de esto Dubois y Prade (Dubois y Prade 1982), desarrollaron el enfoque mediante la utilización del principio de extensión. Entonces, Puri y Ralescu (Puri y Ralescu 1983), extendieron el concepto de diferenciabilidad de Hukuhara (H-diferenciabilidad) para funciones con valores establecidos a la clase de funciones difusas. Después, Kaleva (Kaleva 1987) y Seikkala (Seikkala 1987) utilizaron la H-diferenciabilidad para desarrollar algunos teoremas de ecuaciones diferenciales para las ecuaciones diferenciales difusas (EDDs).

Posteriormente, se han realizado varios trabajos para fundamentar mejor las teorías de las EDDs en diferentes clasificaciones, como lo hicieron Song y Wu (Song y

Wu 2000); Ma, Friedman y Kandel (Ma, Friedman y Kandel 1999). Además, existen muchas investigaciones dedicadas a las soluciones numéricas de EDDs (Abbasbandy y Allahviranloo 2004) y (Ma, Friedman y Kandel 1999). Específicamente, los métodos Runge-Kutta se aplicaron para resolver las EDDs bajo la noción de H-diferenciabilidad.

Desafortunadamente, el significado de la H-diferenciabilidad es defectuosa de tal manera que las soluciones de una EDD siempre tienen una longitud de soporte mayor. Esto significa que el diámetro $len(y(t))$ de la solución no tiene limites cuando $t \to \infty$. Esta circunstancia lleva a la conclusión de que la incertidumbre de un sistema dinámico difuso no está acotada.

Por este motivo, los estudios se centraron en establecer el mejor derivado para las EDDs, como lo hicieron Buckley y Feuring (Buckley y Feuring 2000), que aplicaron el principio de extensión de Zadeh para resolver las EDDs, y aún así tenían las dificultades del párrafo anterior. Para superar esto Bede y Gal (Bede y Gal 2004), presentaron un concepto de H-diferenciabilidad generalizada de mapeos con valores difusos que les permitía obtener las soluciones de EDDs con un diámetro decreciente de sus valores de solución. Esto fue seguido por (Bede y Gal 2005), (Chalco y Román 2009), (Chalco y Román 2008), (Chalco, Rojas y Román 2007), (Stefanini y Bede 2012), (Villamizar, Angulo y Chalco 2014), (Ahmadian et al. 2016) y (Ahmad, Hasan y De Baets 2018). Esta definición de la H-diferenciabilidad generalizada, nos permite resolver las desventajas mencionadas anteriormente. De hecho, la diferenciabilidad fuertemente generalizada se define para una clase mayor de funciones con valores difusos que en el caso de la derivada de hukuhara (H-derivada). Además, en (Khastan, Nieto y Rodríguez 2011), se presentaron aplicaciones de la H-diferenciabilidad generalizada a las soluciones numéricas de las EDDs. Sin embargo, Stefanini y Bede (Stefanini y Bede 2008) y (Stefanini y Bede 2012), generalizaron la diferencia de

Hukuhara (H-diferencia) e introdujeron la H-diferencibilidad generalizada para funciones con valores de intervalo.

Observamos que la aplicación de los métodos RK para la solución de EDODs autónomos han sido introducidos por Ghazanfari y Shakerami (Ghazanfari y Shakerami 2011). Sin embargo la mayoría de las EDODs solucionadas en dicho artículo tienen una solución inexacta, con este fin nuestro método propuesto utiliza los nuevos términos $k_i^{(j)}, (i = 1, \ldots, 4$ y $j = 1, 2)$ para derivar el método RK de cuarto orden para sistemas de EDODs. Por lo tanto, se maneja una multitud de detalles, no solo en el uso de las derivadas de primer orden f' y estimaciones de error adecuadas, sino también de la selección del tipo adecuado de diferenciabilidad difusa para garantizar que la fórmula propuesta, pueda emplearse en un estilo adaptativo para los sistemas de EDODs.

Entonces, el trabajo consiste en resolver numéricamente una EDOD o problema de Cauchy difuso obtenido mediante la extensión de Zadeh (Barros, Bassanezi y Tonelli) , bajo la H-diferenciabilidad generalizada y analizamos los resultados obtenidos en comparación con la H-diferenciabilidad para sistemas autónomos de EDDOs. Para esto se utiliza el Teorema de Caracterización formulada por Bede (Bede 2008), que describe que una EDD bajo la H-diferenciabilidad equivale a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en ciertas condiciones que es apropiado para resolver las EDD numéricamente. De hecho el método Runge-Kutta introducido por Wu y Xia (Wu y Xia 2006), se aplica a la Extensión del Teorema de Caracterización introducido por Bede y Gal (Bede y Gal 2010), y luego se describe el método Runge-Kutta de cuarto orden para el problema de Cauchy difuso autónomo, donde se resuelve un ejemplo para mostrar la efectividad del método RK para el caso difuso.

Capítulo 1

EL PROBLEMA

1.1. Selección del problema

Cuando se intenta modelar fenómenos del mundo real, como sucede con los modelos asociados en la dinámica poblacional, en la epidemiología, en las reacciones químicas, en los sistemas dinámicos, entre otros; la información sobre el comportamiento de los fenómenos en estudio se encuentra impregnada de incertidumbre, subjetividad, ambigüedad, imprecisión, o cualquier otro sustantivo que pueda reflejar una determinada característica no absoluta y objetiva. La naturaleza imprecisa, incierta o vaga de un determinado fenómeno puede estar asociado a diversos factores, entre ellos, la inhabilidad para obtener información completa, la falta de precisión en los sistemas de medición y la ambigüedad relativa al uso de términos y conceptos. Por ejemplo, en el caso de los modelos poblacionales, la hipótesis establece relaciones, entre las variables de estado y las variaciones con respecto a las variables temporales, que involucran parámetros o datos tales como la tasa de crecimiento o mortalidad, datos iniciales, o fuerzas externas que afectan la dinámica, las cuales son normalmente simuladas u obtenidas empíricamente generando a su vez grados de incertidumbre e imprecisión.

En este sentido para obtener modelos más realistas, es necesario tener en cuenta el comportamiento incierto de los fenómenos en estudio o de la información asociada a los mismos. Consideremos por ejemplo un modelo de crecimiento poblacional del tipo malthusiano de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \lambda P \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{1.1.1.1.1}$$

Donde $P(t)$ es el número de individuos en cada instante t, λ es una constante de proporcionalidad y P_0 indica el número inicial de individuos en la población. Por eso se plantea el problema de saber cómo se comporta la población en el futuro. Si consideramos que tanto λ como P_0 se encuentran bien determinadas, es decir que no hay datos inciertos, entonces todas las cantidades que actúan en el modelo son dados por números reales y el problema se puede resolver de manera determinística.

Ahora supongamos que el modelo (1.1.1.1.1) quiere describir la evaluación de la población $P(t)$ de personas consumidoras de alcohol dentro de un determinado país en cualquier instante de tiempo t, partiendo de una población inicial de consumidores P_0. Si cada individuo de la población puede ser clasificado dicotómicamente como consumidor de alcohol o no consumidor, el problema puede ser resuelto de manera determinista tomando de manera separada las poblaciones de consumidores y no consumidores. Por el contrario, si la característica de ser consumidor de alcohol depende del tipo, la cantidad, la frecuencia de consumo de alcohol, estamos forzados a caracterizar gradualmente la característica "ser consumidor de alcohol". Así, a cada individuo dentro de la población de consumidores de alcohol se le puede asignar un grado de pertenencia a dicha clase, de manera tal que un individuo que consume alcohol diariamente tenga un mayor grado de pertenencia a la clase que un individuo que consume un par de copas de vino en eventos sociales. Ante este último panorama, una manera de abordar el problema es considerarlo en el contexto del análisis difuso, viendo el problema (1.1.1.1.1) como un problema de valor inicial

difuso, para lo cual, se empieza por saber cómo modelar ese conjunto que describe la característica subjetiva proveniente de los grados de consumo de alcohol. Una manera eficiente de representar matemáticamente conjuntos en los que la transición entre la pertenencia y no pertenencia de una variable a un conjunto es gradual, es a través del concepto de conjunto difuso, concepto que fue introducido por Lofti Asker Zadeh, en su trabajo "Fuzzy Sets"1965.

Un conjunto difuso es una clase de objetos con grados continuos de membresía. Dicho conjunto se caracteriza por una función de membresía que varía entre cero y uno. Las nociones de inclusión, unión, intersección, complemento, relación, convexidad, etc., se extienden a tales conjuntos, y se establecen varias propiedades de estas nociones en el contexto de conjuntos difusos (Zadeh 1965).

La idea de Zadeh fue ampliar el recorrido de la función de pertenencia de un elemento a un conjunto, de tal manera que en lugar de limitarse a los valores del conjunto discreto $\{0, 1\}$ que describe un conjunto clásico, la imagen de la función de pertenencia pudiera variar en el intervalo compacto $[0, 1]$. A partir de la introducción del concepto de conjunto difuso, la investigación en el área ha venido creciendo desde el punto de vista teórico y en diversas aplicaciones como en la ingeniería (Bensick et al. 2006), (Guo, Xue y Li 2003), (Oberguggenberger y Pittschmann 1999), la medicina (Abbod et al. 2001), (Bassanezi y Marín 2002), (Helgason y Jobe 1998), (Nieto y Torres 2003), biología (Barros y Bassanezi 2010), (Barros, Bassanezi y Tonelli 2000), (Guo y Li 2003), (Massad et al. 2008), economía (Chang, Yao y Lee 1998), (Lee y Yao 1999), (Lin y Yao 2000), (Mahata y Mahata 2011) y análisis de imágenes (Espinola, Asís y Rodríguez 2011).

Además, la mayoría de las investigaciones mencionadas anteriormente se realizaron bajo la noción de H-diferenciabilidad para funciones difusas, que fueron introducidas

por Puri y Ralescu (1983). A partir de entonces, Kaleva (1987) y Seikkala (1987), usaron la H-diferenciabilidad para desarrollar conceptos y teoremas para las ecuaciones diferenciales difusas (EDDs).

Por tal razón, esta investigación se enmarca en la teoría de ecuaciones diferenciales difusas. Sabiendo que las ecuaciones diferenciales difusas sirven para modelar problemas de ciencia e ingeniería y otras áreas que involucran el cambio de una variable respecto a la otra. Por eso existen una gran cantidad de investigaciones con el fin de dar las mejores fundamentaciones teóricas de las EDDs, como el problema de Cauchy difuso (Song y Wu 2000), (Chalco, Rojas y Román 2007), ecuaciones integro-diferenciales difusas (Alikhani, Bahrami y Jabbari 2012), las ecuaciones relacionales difusas (De Baets 2000), las ecuaciones diferenciales difusas (Lupulescu 2009), las ecuaciones diferenciales estocásticas difusas (Feng 2000) y las ecuaciones diferenciales fraccionarias difusas (Agarwal, Lakshmikantham y Nieto 2010), (Allahviranloo y Abbasbandy 2012).

También se han realizado varios estudios para obtener las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales difusas bajo la noción de H-diferenciabilidad (Ahmad, Hasan y De Baets 2013), (Friedman, Ming y Kandel 1999); además se analizaron los métodos de Euler difuso, el método de Taylor difuso y los métodos de Runge-Kutta para EDDs (Abbasbandy y Allahviranloo 2004), (Ghazanfari y Shakerami 2011), (Palligkinis y Famelis 2009), (Pederson y Sambandham 2008) y observaron que la solución obtenida para una ecuación diferencial difusa no era muy adecuada, dado que el diámetro de la solución $y(t)$ no estaba acotado cuando $t \to \infty$; además el significado de H-diferenciabilidad era muy defectuosa puesto que muchas funciones de variables difusas no son diferenciables. Por lo tanto, se han desarrollado diferentes ideas y métodos para resolver ecuaciones diferenciales difusas (Bede 2013), por lo que varios investigadores aplicaron diferentes métodos para solucionar la EDD como

lo hicieron Buckley y Feuring (2000), donde aplicaron el principio de extensión de Zadeh y notaron también que la solución no era acotada en la mayoría de los casos. Y algunos autores resolvieron una EDD como un conjunto de inclusiones diferenciales (Chalco y Román 2013), (Laksmikantham y Mohapatra 2003). Entonces, para resolver numéricamente la ecuación diferencial difusa, llegaron a mejorar las deficiencias de la H-diferenciabilidad como lo hicieron Bede y Gal (2004), donde ellos presentaron un concepto de H-diferenciabilidad generalizada de asignaciones difusas que les permitió obtener las soluciones de una ecuación diferencial difusa con un diámetro decreciente de los valores de las soluciones.

En la investigación se utilizará los estudios de Bede (2008) que definió el **teorema de caracterización** que proporciona ciertas condiciones bajo las cuales una ecuación diferencial difusa es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, también se hará uso de los estudios realizados por Bede y Gal (2010) que propusieron la extensión del **teorema de caracterización** para resolver las ecuaciones diferenciales difusas bajo la H-diferenciabilidad generalizada mediante los métodos numéricos.

Entonces, el trabajo será resolver un problema de Cauchy difuso. Puesto que muchos resultados sobre existencia y unicidad obtenidos para el problema de Cauchy difuso son estudiados por Song y Wu (2000), y que posteriormente Chalco, Rojas y Román (2007) demostraron la existencia y unicidad de soluciones bajo el concepto de H-diferenciabilidad generalizada. Por lo tanto, para resolver numéricamente el problema de Cauchy difuso, describiremos el método de Runge-Kutta de cuarto orden y también haremos uso del software matemático Matlab para graficar los puntos de solución.

1.1.1. Justificación de estudios

Esta investigación se realiza con el propósito de analizar y estudiar el nuevo campo de la matemática llamada lógica difusa, en la cual se brindará definiciones y proposiciones para resolver numéricamente la ecuación diferencial difusa bajo la H-diferenciabilidad generalizada. Además, este trabajo servirá de guía para los estudiantes que quieran investigar en el área de la lógica difusa.

1.1.2. Objetivos de la investigación

1.1.2.1. Objetivo general

Utilizar el método Runge-Kutta de cuarto orden para resolver el problema de Cauchy difuso bajo la H-diferenciabilidad generalizada.

1.1.2.2. Objetivos específicos

- Analizar la H-diferenciabilidad generalizada.
- Usar el teorema de caracterización y su extensión.
- Emplear la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales difusas.

Capítulo 2

BASES TEÓRICAS

2.1. Antecedentes del problema

El concepto de lógica y conjunto difuso fue introducido por Zadeh (1965): *Un conjunto difuso es una clase de objetos con grados contínuos de membresía. Tal conjunto se caracteriza por una función de membresía que varía entre cero y uno* (Zadeh 1965).

Posteriormente, se sumaron Dubois y Prade quienes dieron su aporte a la definición de la diferenciación difusa con un principio de extensión, ellos lo afirman así:

Este artículo trata sobre la diferenciación con características difusas. Es decir, primero estudiamos la diferenciación en un punto difuso... de un mapeo basado en valores reales no difusa diferenciable de valores reales. Luego nos dirigimos a la diferenciación de un mapeo basado en valores reales difusos en un punto ordinario. Ambas situaciones producen valores difusos para el derivado en general (Dubois y Prade 1981).

Después de esto Puri y Ralescu (1983), estudiaron en como extender el concepto de la diferenciabilidad de Hukuhara: «*El propósito de este artículo es definir el concepto*

del diferencial de una función difusa que extiende el diferencial de una función de valor establecido. Este último concepto fue definido por primera vez por Hukuhara » (Puri y Ralescu 1983).

Entonces Kaleva y Seikkala con investigaciones por separado utilizaron la H-diferenciabilidad para desarrollar teoremas de ecuaciones diferenciales difusas, por lo cual Kaleva afirma lo siguiente:

Este artículo trata sobre asignaciones de valores difusos de una variable real cuyos valores son normales, convexos, semicontinuos superiores y conjuntos difusos... Estudiamos las propiedades de diferenciabilidad e integrabilidad de tales funciones y damos un teorema de existencia y unicidad para una solución a una ecuación diferencial difusa (Kaleva 1987).

Y Seikkala afirma lo siguiente:

El problema de valor inicial $y'(t) = f(t, y(t)), y(0) = y_0$*, con valor inicial difuso y con función determinista o difusa* f *se considera... Se aplican el principio de extensión y el uso de soluciones extremas de problemas deterministas de valor inicial. Se indican generalizaciones a ecuaciones integrales difusas y ecuaciones diferenciales funcionales difusas* (Seikkala 1987).

Después de esos avances desarrollados, se comenzó a estudiar los problemas de ecuaciones diferenciales difusas como lo hicieran Song y Wu. «*El teorema de existencia y unicidad se obtiene para el problema de Cauchy* $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$*, cuando* f *satisface la condición de Lipschitz* » (Song y Wu 2000).

Además, de eso otros autores analizaron las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales difusas, como lo hicieron Ahmad, Hasan y De Baets (2013) que manifiestan:

Estudiamos las soluciones analíticas y numéricas de ecuaciones diferenciales difusas basadas en el principio de extensión. Para las ecuaciones diferenciales lineales difusas, establecemos algunos resultados sobre el comportamiento de las soluciones

y estudiamos su relación con el derivado general de Hukuhara (Ahmad et al. 2013).

Esto significa que los análisis posteriores con el método numérico se hicieron bajo la H-diferenciabilidad generalizada y con ello se analizó el método de Euler difuso, el método de Taylor difuso y los métodos de Runge-Kutta. Además, al respecto de cómo solucionar numéricamente con el método de Euler, Ahmad afirma lo siguiente:

Con el fin de aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales difusas lineales y no lineales, proponemos una nueva fusinificación del método de Euler clásico y luego incorporamos una técnica de optimización sin restricciones... También se proporciona un algoritmo computacional eficiente para garantizar la convexidad de las soluciones difusas en el dominio del tiempo (Ahmad et al. 2013).

Además, otros autores también analizaron las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales difusas y afirman lo siguiente:

Se consideran los algoritmos numéricos para resolver "ecuaciones diferenciales ordinarias difusas"(EDODs). Un esquema basado en el método clásico de Euler se discute en detalle y esto es seguido por un completo análisis de error. El algoritmo se ilustra resolviendo varios problemas de Cauchy difusos lineales y no lineales (Ma et al. 1999).

Posteriormente se estudiaron los métodos Runge-Kutta como lo hicieran Abbasbandy y Allahviranloo, donde ellos afirman:

En este artículo se consideran los algoritmos numéricos para resolver "ecuaciones diferenciales ordinarias difusas". Un esquema basado en el método de Runge-Kutta de cuarto orden que se discute en detalle y esto es seguido por un completo análisis de error. El algoritmo se ilustra resolviendo algunos problemas de Cauchy difusos lineales y no lineales (Abbasbandy y Allahviranloo 2002).

Luego Ghazanfari y Shakerami mejoraron los algoritmos de análisis que estudiaron los autores anteriormente y afirman lo siguiente:

Aplicamos un algoritmo numérico para resolver el problema de valor inicial difuso de primer orden, basada en formulas ampliadas del método de Runge-Kutta para mejorar el orden de precisión de las soluciones que utilizan las evaluaciones de f y f', en lugar de las evaluaciones de f solamente (Ghazanfari y Shakerami 2011).

Posteriormente se analizaron los inconvenientes que tenían las ecuaciones diferenciales difusas en su solución numérica bajo la H-diferenciabilidad, por eso Bhaskar y otros afirman lo siguiente:

Revisamos la formulación original de las ecuaciones diferenciales difusas y proporcionamos ejemplos para mostrar que la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas es más rica que la correspondiente teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias (Bhaskar et al. 2004).

Además, algunos autores resolvieron de manera diferente las ecuaciones diferenciales por los inconvenientes encontrados por Bhaskar, entonces Buckley y Feuring (2000), aplicaron el principio de la extensión de Zadeh para resolver las ecuaciones diferenciales difusas, y a pesar de eso las soluciones obtenidas no eran acotadas en la mayoría de los casos.

Posteriormente, Bede y Gal (2004), presentaron un concepto de H-diferenciabilidad generalizada de asignaciones difusas que les permitió obtener las soluciones de las ecuaciones diferenciales difusas con un diámetro decreciente de los valores de soluciones. Entonces, en la actualidad todas las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales difusas se realizan bajo el concepto de la H-diferenciabilidad generalizada.

2.2. Planteamientos teóricos atingentes

2.2.1. Conjuntos difusos

2.2.1.1. Conjuntos clásicos

El concepto de conjunto es fundamental en Matemáticas e intuitivamente se puede describir como una colección de objetos posiblemente vinculados a través de algunas propiedades. Un conjunto clásico tiene límites claros, es decir, $t \in A$ o $t \notin A$, que excluye cualquier otra posibilidad.

Teorema 2.2.1.1.1. Sea X un conjunto y A un subconjunto de X ($A \subseteq X$). Entonces la función

$$y_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A \\ 0 & \text{si } t \notin A \end{cases}$$

es llamada la función característica del conjunto en A.

Dados A y B dos conjuntos en X, con sus respectivas funciones características y_A y y_B, que cumplen las siguientes definiciones :

Definición 2.2.1.1.2 (Unión). $A \cup B = \{t \in X |\ t \in A \vee t \in B\}$. Su función característica es:

$$y_{A \cup B}(t) = \text{máx}\{y_A(t), y_B(t)\}$$

Definición 2.2.1.1.3 (Intersección). $A \cap B = \{t \in X |\ t \in A \wedge t \in B\}$. Su función característica es:

$$y_{A \cap B} = \text{mín}\{y_A(t), y_B(t)\}$$

Definición 2.2.1.1.4 (Complemento de A en X). $A' = \{t \in X |\ t \notin A\}$. Su función característica es:

$$y_{A'}(t) = 1 - y_A(t)$$

2.2.1.2. Subconjuntos difusos

Los conjuntos difusos fueron introducidos por L. Zadeh en (Zadeh 1965). La definición de un conjunto difuso dada por L. Zadeh es la siguiente: Un conjunto difuso es una clase de objetos con grados continuos de membresía. Entonces, un subconjunto difuso A en un referencial (universo del discurso) X se caracteriza por una función de membresía A que asocia con cada elemento $t \in X$ un número real $y_A(t) \in [0,1]$, que tiene la interpretación $y_A(t)$ es el grado de membresía de t en el subconjunto difuso A.

Definición 2.2.1.2.1 (Zadeh 1965). Un conjunto difuso A (subconjunto difuso de X) es una función

$$y_A : X \to [0,1]$$

donde $y_A(t)$ es el grado de pertenencia de t al subconjunto difuso A.

Observación 2.2.1.2.2. Denotaremos por $\mathcal{F}(X)$ la colección de todos los subconjuntos difusos de X, es decir $\mathcal{F}(X) = \{y/\ y : X \to [0,1]\}$.

Observación 2.2.1.2.3. Un subconjunto clásico es un caso particular de un conjunto difuso dado.

Observación 2.2.1.2.4. Un subconjunto clásico, en el lenguaje difuso, es denominado por *subconjunto crisp.*

Observación 2.2.1.2.5. Podemos decir que un subconjunto difuso y_A de X es dado por un conjunto clásico de pares ordenados:

$$A = \{(t, y_A(t)), \quad t \in X\}$$

2.2.1.3. Operaciones entre subconjuntos difusos

En esta subsección estudiaremos las operaciones típicas de subconjuntos difusos, como la unión, la intersección y el complemento. Sean $A, B \in X$ dos subconjuntos

difusos, con funciones de pertenencia indicadas por y_A y y_B respectivamente.

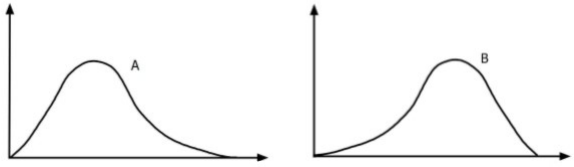

Figura 1: Subconjuntos difusos A y B.

Escribimos $A \subset B$, si $y_A(t) \leq y_B(t)$ para todo $t \in X$. Recordemos que la función de pertenencia del conjunto vacío ($\emptyset$) es dada por $y_\emptyset(t) = 0$ en cuanto al conjunto universo (X), tiene la función de pertenencia $y_X(t) = 1$, para todo $t \in X$. Así mismo podemos decir que $\emptyset \subset A$ y que $A \subset X$ para todo A (Barros y Bassanezi 2010).

Definición 2.2.1.3.1 (Unión). Sean $A, B \in \mathcal{F}(X)$. La unión de A y B es el subconjunto difuso $\mathcal{F}(X)$, cuya función de pertenencia es dado por

$$y_{(A \cup B)}(t) = \text{máx}\{y_A(t), y_B(t)\}, \ \forall t \in X$$

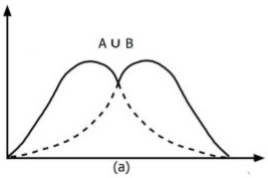

Figura 2: (a) Unión de subconjuntos difusos A y B.

Definición 2.2.1.3.2 (Intersección). Sean $A, B \in \mathcal{F}(X)$. La intersección de A y B es el subconjunto difuso $\mathcal{F}(X)$ cuya función de pertenencia es dado por

$$y_{(A \cap B)}(t) = \text{mín}\{y_A(t), y_B(t)\}, \ \forall t \in X$$

Definición 2.2.1.3.3 (Complemento). Sea $A \in \mathcal{F}(X)$ un subconjunto difuso. El complemento de A es el subconjunto difuso A' de X cuya función de pertenencia es dado por

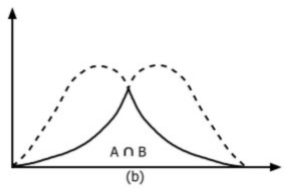

Figura 3: (b) Intersección de subconjuntos difusos A y B.

$$y_{A'}(t) = 1 - u_A(t),\ \forall t \in X$$

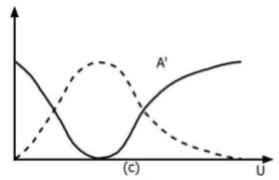

Figura 4: (c) Complemento del subconjunto difuso A.

Definición 2.2.1.3.4. Los subconjuntos difusos A y B de X son iguales si sus funciones de pertenencia coinciden, esto es, si $y_A(t) = y_B(t)$ para todo $t \in X$.

Definición 2.2.1.3.5 (α**-nivel**)**.** Sea A un subconjunto difuso de X y $\alpha \in [0, 1]$. Los conjuntos de α-**nivel** de A son definidos como los conjuntos clásicos

$$[A]^\alpha = \{t \in X :\ y_A(t) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Definición 2.2.1.3.6. Si $supp\ A = \{t \in X :\ y_A(t) > 0\}$ se llama el **soporte** del subconjunto difuso A.

Observación 2.2.1.3.7. En el lenguaje matemático, $[A]^0$ es el cierre del soporte de A y es indicado por $\overline{supp}A$. Esta consideración es imprescindible para atender ciertas situaciones teóricas. Note que el conjunto $\{t \in X : y_A(t) \geq 0\} = X$ no es necesariamente igual a $[A]^0 = \overline{supp}A$.

Ejemplo 1. Sea $X = \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y A un subconjunto

difuso de $\mathbb{R}$ con la siguiente función de pertenencia

$$y_A(t) = \begin{cases} t-1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 3-t & \text{si } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{si } t \notin [1,3) \end{cases}$$

Solución: En este caso tenemos su α de corte dado por:

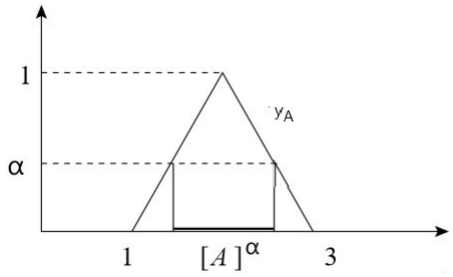

Figura 5: α-niveles: $[A]^\alpha$ y $[A]^0 \neq X$.

$[A]^\alpha = [\alpha(a_2 - a_1) + a_1, -\alpha(a_3 - a_2) + a_2] = [\alpha(2-1)+1, -\alpha(3-2)+3]$
$[A]^\alpha = [a+1, 3-\alpha]$ y $[A]^0 = \overline{[1,3[} = [1,3]$.

Ejemplo 2. Sea $X = [0,1]$ y A un subconjunto difuso de X cuya función de pertenencia es dada por $y_A(t) = 4(t-t^2)$. Entonces, dado que $4(t-t^2) = \alpha$, tenemos:

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\alpha})\right] \text{ para todo } \alpha \in [0,1].$$

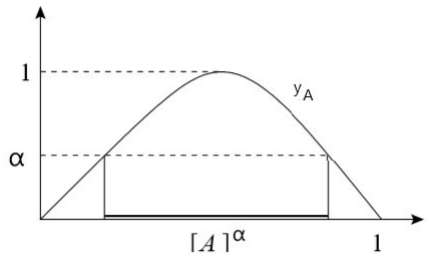

Figura 6: α-niveles: $[A]^\alpha$ y $[A]^0 = X$.

Definición 2.2.1.3.8. Si $[A]^1 = \{t \in X : \ y_A(t) \geq 1\}$ se llama el **núcleo** del subconjunto difuso A.

Teorema 2.2.1.3.9. Sean A y B subconjuntos difusos de X. Una condición necesaria y suficiente para que $A = B$ es que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

Demostración: Es claro que $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.
Supongamos ahora que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Si $A \neq B$ entonces existe $t \in X$ tal que $y_A(t) \neq y_B(t)$. Luego, tenemos que $y_A(t) < y_B(t)$ o $y_A(t) > y_B(t)$. Suponiendo $y_A(t) > y_B(t)$, podemos concluir que $t \in [A]^{y_A(t)}$ y $t \notin [B]^{y_A(t)}$ y por tanto, $[A]^{y_A(t)} \neq [B]^{y_A(t)}$, lo que contradice la hipótesis $[A]^\alpha = [B]^\alpha$. De manera análoga llegamos a una contradicción si admitimos que $y_A(t) < y_B(t)$. ■

Corolario 2.2.1.3.10. La función de pertenencia $y_A(t)$ de un subconjunto difuso A puede ser expresada en términos de su función característica de sus α-niveles, esto es

$$y_A(t) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \text{mín}[\alpha, y_{[A]^\alpha}(t)], \text{ donde } y_{[A]^\alpha}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [A]^\alpha \\ 0 & \text{si } t \notin [A]^\alpha \end{cases}$$

2.2.2. Números difusos

2.2.2.1. Definición de números difusos

Los números difusos generalizan los números reales y además, un número difuso es un subconjunto difuso de la recta real que tiene algunas propiedades adicionales. El concepto de número difuso es básico para el análisis difuso y las ecuaciones diferenciales difusas, y es una herramienta muy útil en varias aplicaciones de conjuntos difusos y la lógica difusa.

Definición 2.2.2.1.1 (Diamond y Kloeden 2002). Considere un subconjunto difuso de la recta real $y : \mathbb{R} \to [0,1]$. Entonces y es un número difuso si satisface las siguientes propiedades

i. y es normal, es decir $\exists\ t_0 \in \mathbb{R}$ con $y(t_0) = 1$;

ii. y es difuso convexo, es decir; $y(ht + (1-h)x) \geq \text{mín}\{y(t), y(x)\}, \forall h \in [0,1]$, $t, x \in \mathbb{R}$;

iii. y es semicontinuo superior en $\mathbb{R}$, es decir; $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $|y(t) - y(t_0)| < \varepsilon, |t - t_0| < \delta$.

iv. y es apoyada de manera compacta, es decir; $cl\{t \in \mathbb{R}; y(t) > 0\}$ es compacta, donde $cl(A)$ denota la cerradura del subconjunto A.

Observación 2.2.2.1.2. Denotamos por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ el espacio de los números difusos y convexos, además se usará esta notación $[y]^{\alpha} = y_{\alpha}$.

Observación 2.2.2.1.3. Obviamente, cualquier número real también es un número difuso, es decir, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Aquí $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se entiende como

$$\mathbb{R} = \{y_{\{t\}}; es\ un\ numero\ real\}$$

$y_{\{t\}}$ es un número difuso singleton para cualquier número real dado $t \in \mathbb{R}$.
Además, los números difusos generalizan los intervalos cerrados. De hecho, si $\mathbb{I}$ denota el conjunto de todos los intervalos reales, entonces $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, donde

$$\mathbb{I} = \{y_{\{[a,b]\}};\ [a,b]\ es\ un\ intervalo\ real\}$$

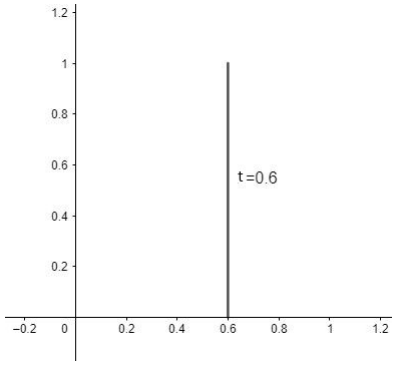

Figura 7: Un número difuso singleton.

Teorema 2.2.2.1.4 (Teorema de Apilamiento (Negoita y Ralescu 1975)). Si $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es un número difuso y y_{α} son sus conjuntos de α-nivel, entonces:

i. y_{α} es un intervalo cerrado $y_{\alpha} = [y_{\alpha}^{-}, y_{\alpha}^{+}]$, para cualquier $\alpha \in [0, 1]$;

ii. Si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, entonces $y_{\alpha_2} \subseteq y_{\alpha_1}$.

iii. Para cualquier sucesión α_n que converge inferiormente a $\alpha \in (0,1]$, tenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} = y_\alpha.$$

iv. Para cualquier sucesión α_n que converge superiormente a 0 , tenemos

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right) = y_0.$$

Demostración: (i) Veamos primero que todos los conjuntos y_α son no vacíos y acotadas, ya que $y_1 \neq \emptyset$ y porque y_0 está acotado (un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ está cerrado y acotado). Sea y un número difuso y $\alpha \in (0,1]$. Si $a, b \in y_\alpha$, entonces $y(a) \geq \alpha$ y $y(b) \geq \alpha$. Entonces, de la convexidad difusa, si $t \in [a,b]$ obtenemos

$$y(t) \geq \text{mín}\{y(a), y(b)\} = \alpha$$

es decir, $t \in [a,b]$. Como conclusión y contiene cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ junto con los puntos $[a,b]$ esto significa que y_α es convexo. Todo lo que queda por demostrar es que y_α es cerrado. La semicontinuidad superior implica que si $y(t_0) < \alpha$, entonces hay un intervalo abierto W con $t_0 \in W$ tal que $y(t) < \alpha, \forall t \in W$. Inmediatamente se deduce que el conjunto $\{t|\ y(t) < \alpha\}$ es abierto y luego tiene un complemento cerrado, es decir, y_α es cerrado. En la recta real, los conjuntos cerrados convexos son intervalos cerrados, por lo que y_α es un intervalo cerrado para cualquier $\alpha \in [0,1]$.

(ii) Se comprueba que (ii) se cumple. De hecho, si $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ entonces si $t \in y_{\alpha_2}$ entonces $y(t) \geq \alpha_2 \geq \alpha_1$ y así, $t \in y_{\alpha_1}$. Si $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_2 = 0$ entonces la demostración de (ii) es inmediata.

(iii) Sea $\alpha_n \to \alpha$ no decreciente. Entonces $y_{\alpha_n} \subseteq y_{\alpha_{n-1}}$, es una sucesión decreciente de intervalos cerrados $y_{\alpha_n} = [y^-_{\alpha_n}, y^+_{\alpha_n}]$. Entonces vemos que $y^-_{\alpha_n}, y^+_{\alpha_n}$ convergen, en cuyo caso $y^-_{\alpha_n} \to a, y^+_{\alpha_n} \to b$ y

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}.$$

Tenemos que probar que $y_\alpha = [a,b]$. Para un determinado $t \in [a,b]$ tenemos

$$y(t) \geq \text{mín}\{y(a), y(b)\}.$$

Entonces, es suficiente mostrar que $y(a) \geq \alpha$ y $y(b) \geq \alpha$. Supongamos que $y(a) < \alpha$, entonces como y es semicontinua superior, hay una vecindad W de a, tal que $y(t) < \alpha$. Esto implica la existencia de un rango $N \in \mathbb{N}$ con $y(y^-_{\alpha_n}) < \alpha$ para cualquier $n \geq N$. Entonces, como $\alpha_n \to \alpha$ obtenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y(y^-_{\alpha_n}) < \alpha_n$ que es una contradicción. Luego se sigue que $y(a) \geq \alpha$. De manera similar, podemos mostrar que $y(b) \geq \alpha$, entonces $y(t) \geq \alpha$ y luego $[a,b] \subseteq y_\alpha$. De (ii), tenemos que $y_\alpha \subseteq y_{\alpha_n}$ e implica $y_\alpha \subseteq [a,b]$. Luego, finalmente obtenemos $y_\alpha = [a,b]$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} = y_\alpha.$$

(iv) Para (iv) observamos que la inclusión

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} \subseteq y_0$$

es admitida. Como y_0 es cerrado, obtenemos

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right) \subseteq y_0$$

Recíprocamente, $t \in y_0$ implica que hay una secuencia

$$t_n \in \{x \in \mathbb{R}; y(t) > 0\}$$

que converge a t. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$t_n \in y_{\alpha_n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}.$$

Entonces obtenemos

$$t \in cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right).$$

Las dos inclusiones conducen a la conclusión requerida. ■

Observación 2.2.2.1.5. Los puntos extremos de α-nivel del conjunto y_α están dados por $y_\alpha^- = \inf y_\alpha$ y $y_\alpha^+ = \sup y_\alpha$. Entonces también $y_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$.

2.2.2.2. Teorema de Caracterización de los Números Difusos

El siguiente Teorema es el Teorema de Caracterización de Negoita-Ralescu, y es el recíproco del Teorema de Apilamiento.

Teorema 2.2.2.2.1 (**Teorema de Caracterización (Negoita y Ralescu 1975)**). Dada una familia de subconjuntos $\{M_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ que satisface las condiciones (i)-(iv)

i. M_α es un intervalo cerrado no vacío para cualquier $\alpha \in [0,1]$.

ii. Si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, tenemos $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$;

iii. Para cualquier secuencia α_n que converge inferiormente a $\alpha \in (0,1]$ tenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_\alpha;$$

iv. Para cualquier secuencia α_n que converge superiormente a 0, tenemos

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}\right) = M_0.$$

Entonces existe un único $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tal que $y_\alpha = M_\alpha$, para cualquier $\alpha \in [0,1]$.

Demostración: Sea M_α que cumple las propiedades de (i)-(iv). Entonces, definiendo

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin M_0 \\ \sup\{\alpha \in [0,1] | t \in M_\alpha\} & \text{si } t \in M_0 \end{cases}$$

Obtenemos un número difuso (es decir, y es un conjunto difuso normal, convexo, semicontinuo superior y con soporte compacto). Los conjuntos de niveles de y son $y_\alpha = M_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$ y $y_0 \subseteq M_0$. Ahora probamos estas declaraciones paso a paso.

Normal: Como M_1 no es vacío, para $t \in M_1$ tenemos $y(t_0) = 1$, para algún $t_0 \in M_0$, entonces y es normal.

Convexo difuso: Para probar la convexidad difusa consideramos ahora un elemento fijo en un intervalo fijo

$t \in [a,b] \subseteq M_0$. Suponer que

$$y(a) = \alpha_a = \sup\{\alpha | a \in M_\alpha\}$$

y

$$y(b) = \alpha_b = \sup\{\alpha | b \in M_\alpha\}.$$

Supongamos que $\alpha_a \leq \alpha_b$. Luego de (ii) tenemos $M_{\alpha_b} \subseteq M_{\alpha_a}$ así que $b \in M_{\alpha_b} \subseteq M_{\alpha_a}$. Ahora dados $a, b \in M_{\alpha_a}$ como M_{α_a} son intervalos cerrados, se sigue que $[a,b] \subseteq M_{\alpha_a}$. Entonces

$$y(t) \geq \alpha_a = y(a) = \text{mín}\{y(a), y(b)\}.$$

Se puede seguir, en el caso de que $\alpha_a \geq \alpha_b$.

"$y_\alpha = M_\alpha$" Ahora probemos que $y_\alpha = \{t | y(t) \geq \alpha\} = M_\alpha$ por doble inclusión. Sea $\alpha_0 \in (0,1]$ es fijo y $t \in M_{\alpha_0}$. Luego $\alpha_0 \in \{\alpha | t \in M_\alpha\}$. Entonces

$$y(t) = \sup\{\alpha | t \in M_\alpha\} \geq \alpha_0$$

y esto implica $t \in y_{\alpha_0}$. Por lo tanto hemos obtenido $M_{\alpha_0} \subseteq y_{\alpha_0}$. Para la inclusión simétrica consideramos $t \in y_{\alpha_0}$, es decir, $y(t) \geq \alpha_0$. Ahora supongamos que se mantiene la desigualdad estricta $y(t) > \alpha_0$. Entonces $\sup\{t \in M_\alpha\} > \alpha_0$ y existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ con $t \in M_{\alpha_1}$. Dado que $M_{\alpha_1} \subseteq M_{\alpha_0}$ de acuerdo con (ii), obtenemos $t \in M_{\alpha_0}$ que completa el razonamiento en este caso.

Si suponemos

$$y(t) = \alpha_0 = \sup\{\alpha | t \in M_\alpha\}$$

luego existe una secuencia α_n que converge inferiormente a α_0, de modo que $t \in M_{\alpha_n}$, $n \geq 1$. De (iii) tenemos

$$t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_{\alpha_0}.$$

Como conclusión obtenemos $y_{\alpha_0} \subseteq M_{\alpha_0}$. Así que $y_{\alpha_0} = M_{\alpha_0}$.

Semicontinuidad superior: Dado que $y_\alpha = M_\alpha$ están cerrados de acuerdo con (i) tenemos el complemento de y_α, que es $\mathbb{R} \setminus\ y_\alpha = \{t | y(t) < \alpha\}$ un conjunto abierto. Esto implica que y es semicontinuo superior.

Soporte compacto: Observamos que

$$y_0 = cl\{t|y(t) > 0\} = cl \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t|y(t) \geq \alpha_n\} = cl \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$$

es cerrado y tenemos $y_0 = M_0$. Finalmente obtenemos que y_0 es un subconjunto acotado de la recta real. Entonces, es compacto. ■

Observación 2.2.2.2.2. El siguiente par de teoremas se debe a Goetschel y Voxman (Goetschel y Voxman 1986) y ofrece otra representación de un número difuso como un par de funciones que satisfacen algunas propiedades. La representación proporcionada por este teorema se denomina representación LU (Inferior-Superior) de un número difuso.

Teorema 2.2.2.2.3 (Representación-LU (Goetschel y Voxman 1986)). Sea y un número difuso y sea $y_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^-] = \{t|\ y(t) \geq \alpha\}$. Entonces las funciones $y^-, y^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$, definen los puntos finales del conjunto de α-nivel, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $y^-(\alpha) = y_\alpha^- \in \mathbb{R}$ es una función acotada, no decreciente, continua a izquierda en $(0,1]$ y es continua por la derecha a 0.

(ii) $y^+(\alpha) = y_\alpha^+ \in \mathbb{R}$ es una función acotada no creciente, continua a izquierda en $(0,1]$ y es continua por la derecha a 0.

(iii) $y_1^- \leq y_1^+$

Demostración: Para un $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dado, y dado $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, del Teorema de Apilamiento, obtenemos $y_{\alpha_2} \subseteq y_{\alpha_1}$. Entonces, tenemos

$$y^-_{\alpha_1} \leq y^-_{\alpha_2} \leq y^-_1 \leq y^+_1 \leq y^+_{\alpha_2} \leq y^+_{\alpha_1},$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ lo que implica inmediatamente las propiedades de monotonicidad y (iii). La continuidad a izquierda en $(0, 1]$ se deriva de la propiedad (iii) del Teorema de Apilamiento. En efecto, sea $\alpha_0 \in (0, 1]$ fijo y α_n converge inferiormente a α_0, es decir, $\alpha_n \to \alpha_0$. Luego de la propiedad (iii) del Teorema de Apilamiento, obtenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} = y_{\alpha_0},$$

lo que inmediatamente implica $y^-_{\alpha_n} \to y^-_{\alpha_0}$ y $y^+_{\alpha_n} \to y^+_{\alpha_0}$, es decir, ambas funciones son continuas a izquierda en $\alpha_0 \in (0, 1]$ arbitrario. Para probar la continuidad a derecha en 0 consideramos $\alpha_n \to 0$, una secuencia que converge superiormente a 0. Tenemos

$$y_0 = cl\{t|\ y(t) > 0\} = cl \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t|\ y(t) \geq \alpha_n\} = cl \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} \right).$$

Como y_0 es compacto, es cerrado y acotado, obtenemos $y^-_{\alpha_n} \to y^-_0$ y $y^+_{\alpha_n} \to y^+_0$, lo que implica una continuidad por la derecha a 0. ■

Observación 2.2.2.2.4. El recíproco de la Representación-LU es el Teorema de Caracterización de Goetschel y Voxman.

Teorema 2.2.2.2.5 (Goetschel y Voxman 1986). Consideremos las funciones $y^-, y^+ : [0, 1] \to \mathbb{R}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $y^-(\alpha) = y^-_\alpha \in \mathbb{R}$ es una función acotada, no decreciente, continua a izquierda en $(0, 1]$ y es continua por la derecha a 0.

(ii) $y^+(\alpha) = y^+_\alpha \in \mathbb{R}$ es una función acotada, no decreciente, continua a izquierda en $(0, 1]$ y es continua por la derecha a 0.

(iii) $y_1^- \leq y_1^+$.

Entonces existe un número difuso $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ que tiene y_α^-, y_α^+ como puntos extremos de sus conjuntos de α-nivel, y_α.

Demostración: Probaremos que los conjuntos $M_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$ satisfacen las condiciones del Teorema de Caracterización de Negoita y Ralescu y luego esta familia de subconjuntos define un número difuso $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. De las propiedades de monotonicidad y de (iii), obtenemos inmediatamente $y_{\alpha_1}^- \leq y_{\alpha_2}^- \leq y_1^+ \leq y_1^+ \leq y_{\alpha_2}^+ \leq y_{\alpha_1}^+$ y esto implica que $M_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$ no son intervalos cerrados vacíos y que $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$, para cualquier $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Consideremos ahora una sucesión α_n que converge inferiormente a $\alpha \in (0, 1]$. Luego, a partir de las propiedades de continuidad por la izquierda obtenemos $y_{\alpha_n}^- \to y_\alpha^-$ y $y_{\alpha_n}^+ \to y_\alpha^+$ y luego, tenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_\alpha.$$

De la continuidad por la derecha a 0, obtenemos

$$cl\{t \in \mathbb{R} : \ y(t) > 0\} = M_0.$$

Entonces existe $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tal que

$$y_\alpha = M_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$$

para cualquier $\alpha \in [0, 1]$. ■

2.2.2.3. Números difusos L-R

Los llamados números difusos $L - R$ se consideran importantes en la teoría de conjuntos difusos. Los números difusos $L - R$ y sus casos particulares, como por ejemplo los números difusos triangulares y trapezoidales, son muy útiles en las aplicaciones (Bede 2013).

Definición 2.2.2.3.1 (Dubois y Prade 1987). Sea $L, R : [0, 1] \to [0, 1]$ dos funciones continuas crecientes que cumplen $L(0) = R(0) = 0, L(1) = R(1) = 1$.

Sea $a_0^- \leq a_1^- \leq a_1^+ \leq a_0^+$ números reales. El conjunto difuso $y : \mathbb{R} \to [0,1]$ es un número difuso L-R si

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a_0^- \\ L\left(\frac{t-a_0^-}{a_1^- - a_0^-}\right) & \text{si } a_0^- \leq t < a_1^- \\ 1 & \text{si } a_1^- \leq t < a_1^+ \\ R\left(\frac{a_0^+ - t}{a_0^+ - a_1^+}\right) & \text{si } a_1^+ \leq t < a_0^+ \\ 0 & \text{si } a_0^+ \leq t \end{cases}$$

Simbólicamente, escribimos $y = (a_0^-, a_1^-, a_1^+, a_0^+)_{L,R}$, donde $[a_1^-, a_1^+]$ es el núcleo de y, y $\underline{a} = a_1^- - a_0^-, \overline{a} = a_0^+ - a_1^+$ se denominan propagación a izquierda y derecha respectivamente. Si y es un número difuso L-R, entonces sus conjuntos de α-nivel se pueden calcular como

$$y_\alpha = [a_0^- + L^{-1}(\alpha)\underline{a}, a_0^+ - R^{-1}(\alpha)\overline{a}].$$

Como un caso particular, obtenemos los **números difusos trapezoidales** cuando las funciones L y R son lineales. Un número difuso trapezoidal u puede representarse por el cuádruple $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a \leq b \leq c \leq d$,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leq t < b \\ 1 & \text{si } b \leq t \leq c \\ \frac{d-t}{d-c} & \text{si } d < c \end{cases}$$

En este caso, los puntos finales de los conjuntos de α-nivel están dados por

$$y_\alpha^- = a + \alpha(b - a)$$

y

$$y_\alpha^+ = d - \alpha(d - c)$$

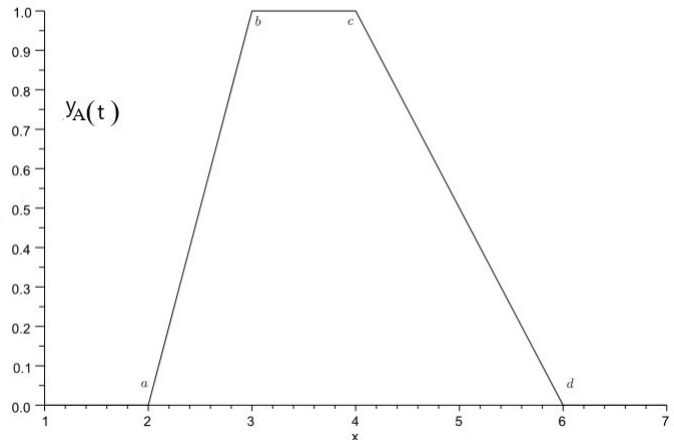

Figura 8: Número difuso trapezoidal.

Si $b = c$ en la representación (a, b, c, d), es número difuso llamado **número difuso triangular**. Entonces el triplete $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \leq b \leq c$ es suficiente para representarlo (Bede 2013).

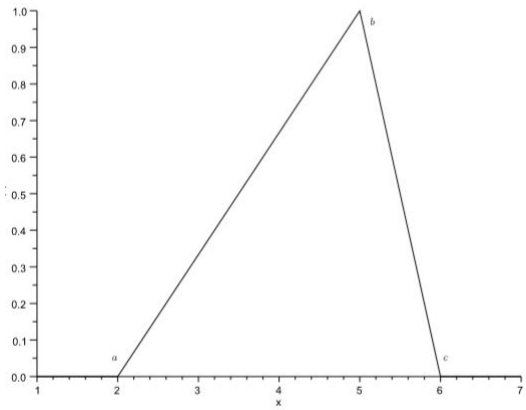

Figura 9: Número difuso triangular.

Ejemplo 2. Consideremos $L, R : [0, 1] \to [0, 1], L(t) = R(t) = t^2$. Sea $a_1^- = a_1^+ = 1$ y $\underline{a} = 1, \overline{a} = 2$ respectivamente. Entonces, el número difuso $L - R$ tiene su conjunto de nivel como:

$\underline{a} = a_1^- - a_0^- \Rightarrow 1 = 1 - a_0^- \Rightarrow a_0^- = 0$

$\overline{a} = a_0^+ - a_1^+ \Rightarrow 2 = a_0^+ - 1 \rightarrow a_0^+ = 3$

Sea $x = t^2$ entonces la inversa es $t = \sqrt{x} = \text{Ł}^{-1}(x)$

$y_\alpha = [a_0^- + L^{-1}(\alpha)\underline{a}, a_0^+ - R^{-1}(\alpha)\overline{a}]$

$y_\alpha = [\sqrt{\alpha}, 3 - 2\sqrt{\alpha}]$.

2.2.3. Aritmética difusa

2.2.3.1. Principio de Extensión de Zadeh

A menudo, tenemos que realizar operaciones con parámetros inciertos. En este caso, tendremos que definir las contrapartidas difusas de las operaciones clásicas entre números reales.

Comenzamos nuestra discusión sobre la aritmética difusa con el Principio de Extensión de Zadeh, que sirve para extender una función de valor real en una función difusa correspondiente.

Definición 2.2.3.1.1 (Principio de Extensión de Zadeh). Sea f una función tal que $f : X \rightarrow Z$ y A un subconjunto difuso de X. La *extensión de Zadeh* de f es la función $\widehat{f}$ que aplicada a A, proporciona un subconjunto difuso $\widehat{f}(A)$ de Z, cuya función de pertenencia es dada por (Barros y Bassanezi 2010)

$$y_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} y_A(t) & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

donde $f^{-1}(z) = \{t; f(t) = z\}$ se denomina la *pre-imagén* de z .

Observación 2.2.3.1.2. Podemos observar que si f fuera una función biyectora, entonces

$$\{t : f(t) = z\} = \{f^{-1}(z)\},$$

y que f^{-1} es la función inversa de f.

Observación 2.2.3.1.3. Observamos que si A es un subconjunto difuso de X, con función de pertenencia u_A, y si f es biyectora, entonces la función de pertenencia

de $\widehat{y}(A)$ es dada por

$$y_{\widehat{f}(A)}(z) = \sup_{\{t:f(t)=z\}} y_A(t) = \sup_{\{t\in f^{-1}(z)\}} y_A(t) = y_A(f^{-1}(z)).$$

El proceso del gráfico para la obtención de la extensión $\widehat{f}$ de f está ilustrado a seguir (Figura 10), en el caso en que f sea biyectora.

Observación 2.2.3.1.4. Sea $f : X \to Z$ una función inyectora y A un subconjunto difuso de X, numerable (o finito), es dado por

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} y_A(t_i)/t_i.$$

Entonces, el principio de extensión garantiza que $\widehat{f}(A)$ es un subconjunto difuso de Z, dado por

$$\widehat{f}(A) = \widehat{f}\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_A(t_i)/t_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} y_A(t_i)/f(t_i).$$

Por tanto, la imagen de A por f puede ser deducida del conocimiento de las imágenes de t_i por f. El grado de pertenencia de $z_i = f(t_i)$ en $\widehat{f}(A)$ es el mismo de t_i en A.

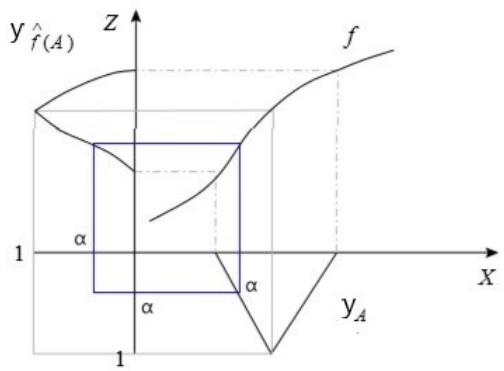

Figura 10: Imagen de un subconjunto difuso a partir del Principio de Extensión para una función f .

Ejemplo 1. Sea $f(t) = t^2, t \geq 0$ y A un conjunto difuso con soporte enumerable. Entonces

$$\widehat{f}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} y_A(t_i)/f(t_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_A(t_i)/t_i^2.$$

El Principio de Extensión extiende el concepto de una función aplicada a un subconjunto clásico de X. De hecho, sea $f : X \to Z$ y A un subconjunto (clásico) de X. La función de pertenencia de A es su función característica. La extensión de Zadeh de f aplicada a A, es el subconjunto $\widehat{f}(A)$ de Z, cuya función característica es

$$y_{\widehat{f}(A)}(z) = \sup_{\{t:f(t)=z\}} x_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in f(A) \\ 0 & \text{si } z \notin f(A) \end{cases} = x_{f(A)}(z)$$

Por tanto, la función de pertenencia del conjunto difuso $\widehat{f}(A)$ coincide con la función característica del conjunto crisp $f(A)$, esto es, el conjunto difuso $\widehat{f}(A)$ coincide con el conjunto clásico $f(A)$:

$$\widehat{f}(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Teorema 2.2.3.1.5. Sea $f : X \to Z$ una función continua y A un subconjunto difuso de X. Entonces, para todo $\alpha \in [0, 1]$ vale

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$$

Ejemplo 2. Considere el subconjunto difuso A de números reales cuya función de pertenencia es dado por

$$y_A(t) = \begin{cases} 4(t - t^2) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \end{cases}$$

Hallamos los α niveles de la función de pertenencia dada:

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\right]$$

Consideremos la función real $f(t) = t^2$ para $t \geq 0$. Como f es creciente, tenemos

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha] &= \left[f(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha})), f(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha}))\right] \\ &= \left[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{1-\alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1-\alpha})^2\right] \\ &= [\widehat{f}(A)]^\alpha \end{aligned}$$

Observación 2.2.3.1.6. Naturalmente, se plantea la pregunta si un número difuso en la entrada genera un número difuso en la salida.

Ejemplo 3. Consideremos la función $f(t) = e^t$ y el número difuso triangular dado por la terna $A = (0; ln\ 2; ln\ 3)$. De acuerdo a los teoremas estudiados, $\widehat{f}(A)$ queda determinada por sus α-niveles.Vemos que los α-niveles de A son los intervalos (Barros, Bassanezi 2010)

$$[A]^\alpha = [(ln\ 2)\alpha, (ln\ 2 - ln\ 3)\alpha + ln\ 3] = \left[ln\ 2^\alpha, ln\ \left(3\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha\right)\right],$$

con $\alpha \in [0, 1]$.

Vamos ahora a obtener los α-niveles de $\widehat{f}(A)$ por medio del Teorema 2.2.3.1.5, o sea

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha) = f\left(\left[ln\ 2^\alpha, ln\ 3\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha\right]\right) = \left[2^\alpha, 3\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha\right],$$

con $\alpha \in [0, 1]$. La Figura 11 ilustra $\widehat{f}(A)$ de este ejemplo. Por tanto,

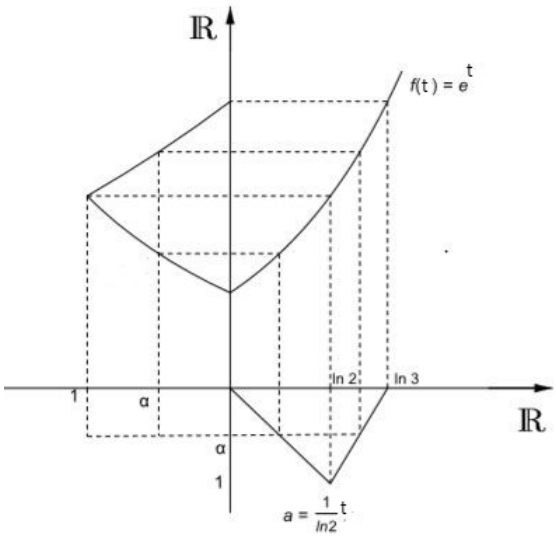

Figura 11: Extensión de Zadeh del número difuso triangular $A = (0; ln\ 2; ln\ 3)$ para $f(t) = e^t$.

- Si $\alpha = 0$ entonces $[\widehat{f}(A)]^0 = [1, 3]$;

- Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ entonces $[\widehat{f}(A)]^{1/2} = [\sqrt{2}, \sqrt{6}]$;
- Si $\alpha = 1$ entonces $[\widehat{f}(A)]^{1} = \{2\}$.

Ahora verificamos que los puntos $(1,0); (\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ y $(2,1)$ no están alineados. Luego $\widehat{f}(A)$ no es número difuso triangular.

Teorema 2.2.3.1.7 (**(Nguyen 1978) y (Barros, Bassanezi y Tonelli)**). Dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede extender a una función difusa $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, y dado $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ podemos determinar $y = F(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ por sus conjuntos de α-nivel $y_\alpha = F(x_\alpha), \forall \alpha \in [0,1]$, es decir, tenemos $y_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$, donde

$$y_\alpha^- = \text{ínf}\{f(t) | t \in y_\alpha\}$$
$$y_\alpha^+ = \sup\{f(t) | t \in y_\alpha\}.$$

$y_\alpha, \alpha \in [0,1]$ denota el conjunto α-nivel de y.

Demostración: Primero probaremos que si y_α y x_α son conjuntos de α-nivel de los conjuntos difusos y y $y = F(x)$ respectivamente, entonces $x_\alpha = f(y_\alpha)$.
El caso $f^{-1}(p) = \emptyset$ se cumple. Si $f^{-1}(p) = \emptyset$ tenemos $x = F(y)$ dado como

$$x(p) = \sup\{y(t) | t \in X, f(t) = p\}.$$

Si $t \in y_\alpha$ entonces $y(t) \geq \alpha$ e implica también que $x(p) \geq \alpha$ y entonces $p = f(t) \in x_\alpha$, es decir, $f(y_\alpha) \subseteq x_\alpha$. Por otro lado si $x(p) \geq \alpha$ entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $t \in f^{-1}(p)$ tal que

$$x(p) - \epsilon < y(t)$$

lo que implica $y(t) \geq \alpha$ y así, obtenemos que la extensión de Zadeh satisface $x_\alpha \subseteq f(y_\alpha)$, por lo que finalmente $x_\alpha = f(y_\alpha)$. Entonces, si $x_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$, obtenemos

$$x_\alpha^- = \text{ínf}\{f(t) | t \in y_\alpha\}$$
$$x_\alpha^+ = \sup\{f(t) | t \in y_\alpha\}.$$

Probemos ahora que si y_α son conjuntos de α-nivel de un número difuso $y \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ entonces $x_\alpha = f(y_\alpha)$ define los conjuntos de α-nivel de un número difuso $x \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$, $x = F(y)$. Para este objetivo demostraremos que x_α satisface las hipótesis de la caracterización de Negoita-Ralescu. Primero observamos que dado y_α son intervalos convexos compactos y como f es continuo, obtenemos $x_\alpha = f(y_\alpha)$ convexo compacto. Esto significa que x_α es un intervalo cerrado para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.
Si $\alpha \leq \beta$ entonces tenemos $y_\beta \subseteq y_\alpha$. Esto implica

$$x_\beta = f(y_\beta) \subseteq f(y_\alpha) = x_\alpha.$$

Consideremos la secuencia α_n que converge inferiormente a α. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} = y_\alpha.$$

Vamos a demostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} x_{\alpha_n} = x_\alpha,$$

es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f(y_{\alpha_n}) = f(y_\alpha)$$

lo cuál es equivalente a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f(y_{\alpha_n}) = f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right)$$

Sea

$$p \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right).$$

Entonces existe un $x \in y_{\alpha_n}, \forall n = 1, 2, ...$ tal que $p = f(t)$. Entonces $p \in f(y_{\alpha_n})$, $\forall n = 1, 2, ...$, es decir,

$$p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(y_{\alpha_n}).$$

Por otro lado sea

$$p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(y_{\alpha_n}).$$

Entonces, $p \in f(y_{\alpha_n}), \forall n = 1, 2, ...$ Entonces existe un $t_n \in u_{\alpha_n}$ con $p = f(t_n)$, $\forall n = 1, 2, ...$ Como t_n es una secuencia acotada y como $t_n \in y_0$ con y_0 compacto, obtenemos la existencia de una subsecuencia $t_{n_k}, k = 1, 2, ...$ que converge. Sea $t = \lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k}$. Vemos que $t \in y_\alpha$. De hecho, $y_\alpha \subseteq y_{\alpha_n}, \forall n = 1, 2, ...$ y si suponemos que $t \notin y_\alpha$ obtenemos que existe k tal que $t \notin y_k$.Teniendo en cuenta que $t = \lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k}$ obtenemos una contradicción.

Combinando las dos inclusiones, obtenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} x_{\alpha_n} = x_\alpha.$$

Consideremos la sucesión α_n que converge superiormente a 0. Entonces se sabe que

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right) = y_0$$

Comprobamos que dado un f continuo, tenemos $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$, y entonces

$$x_0 = f\left(cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right)\right) \subseteq cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(y_{\alpha_n})\right) = cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_{\alpha_n}\right),$$

lo que inmediatamente implica

$$x_0 = cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_{\alpha_n}\right),$$

y así se cumplen las hipótesis del Teorema de Caracterización de Negoita y Ralescu. Usando el Teorema, hemos demostrado que x_α son conjuntos de α-niveles de un número difuso, es decir, $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. ■

Definición 2.2.3.1.8. En el caso de dos variables ($f : X \times Y \to Z$) la función puede ser extendida a $F : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Z)$ tal que $w = F(y, x)$, donde

$$w(z) = \begin{cases} \sup\limits_{t\in X, s\in Y} \{\text{mín}\{y(t), x(s)\} f(t, s) = z\} & \text{si} f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Teorema 2.2.3.1.9 ((**Nguyen 1978**) **y** (**Barros, Bassanezi y Tonelli**)).
Si asumimos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, entonces podemos extenderlo a $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $w = F(y, x)$ tiene su conjunto de nivel

$$w_\alpha = \{f(t,s)|t \in y_\alpha, s \in x_\alpha\}.$$

para cualquier $y, x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, es decir, si $w_\alpha = [w_\alpha^-, w_\alpha^+]$, entonces

$$w_\alpha^- = \text{ínf}\{f(t,s)|t \in y_\alpha, s \in x_\alpha\}$$
$$w_\alpha^+ = \sup\{f(t,s)|t \in y_\alpha, s \in x_\alpha\}.$$

Demostración: Primero probemos que si y_α, x_α y w_α son conjuntos de niveles de los conjuntos difusos y, x y $w = F(y,x)$ respectivamente, entonces $w_\alpha = f(y_\alpha, x_\alpha)$. El caso $f^{-1}(z) = \emptyset$ se cumple. Si $f^{-1}(z) \neq \emptyset$, tenemos $w = F(y,x)$ dado que

$$w(s) = \sup\{\text{mín}\{y(t), x(s)\} : t \in X, s \in Y, f(t,s) = z\}.$$

Si $t \in y_\alpha, s \in x_\alpha$, entonces $y(t) \geq \alpha, x(s) \geq \alpha$ y para $z = f(t,s)$ implica también que $w(z) \geq \alpha$, es decir, $f(y_\alpha, x_\alpha) \subseteq w_\alpha$. Por otro lado, si $w(s) \geq \alpha$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $(t,s) \in f^{-1}(z)$ tal que

$$w(z) - \varepsilon < y(t) \text{ y } w(z) - \varepsilon < x(s)$$

lo que implica $y(t) \geq \alpha$ y $x(s) \geq \alpha$ por lo tanto, obtenemos $w_\alpha = f(y_\alpha, x_\alpha)$. A partir de ahora el razonamiento es similar al resultado anterior.

Como y_α, x_α son intervalos convexos en $\mathbb{R}$ y dado que f es continua, obtenemos $w_\alpha = f(y_\alpha, x_\alpha)$ convexo compacto.

Si $\alpha \geq \beta$ entonces, tenemos $y_\beta \subseteq y_\alpha$ y $x_\beta \subseteq x_\alpha$. Esto implica

$$w_\beta = f(y_\beta, x_\beta) \subseteq f(y_\alpha, x_\alpha) = w_\alpha.$$

Sea ahora α_n una secuencia que converge inferiormente a α. Entonces,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} w_{\alpha_n} = w_\alpha$$

Se puede obtener de una manera similar a la del teorema anterior. Finalmente, si α_n converge superiormente a 0, obtenemos

$$w_0 = cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} w_{\alpha_n}\right),$$

y así, las hipótesis del Teorema de Caracterización de Negoita-Ralescu se cumple y finalmente obtenemos $w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. ■

2.2.3.2. El producto de dos números difusos

El producto $w = y.x$ de números difusos y y x, es definido a base del Principio de Extensión de Zadeh. Usando el Teorema anterior, tenemos que definir sus puntos finales como

$$w_\alpha^- = \text{ínf}\{t.s|\ t \in y_\alpha, s \in x_\alpha\}$$
$$w_\alpha^+ = \sup\{t.s|\ t \in y_\alpha, s \in x_\alpha\}$$

El producto alcanza sus extremos en las esquinas de su dominio. Entonces

$$(y.x)_\alpha^- = \text{mín}\{y_\alpha^- x_\alpha^-, y_\alpha^- x_\alpha^+, y_\alpha^+ x_\alpha^-, y_\alpha^+ x_\alpha^+\}$$

y

$$(y.x)_\alpha^+ = \text{máx}\{y_\alpha^- x_\alpha^-, y_\alpha^- x_\alpha^+, y_\alpha^+ x_\alpha^-, y_\alpha^+ x_\alpha^+\}$$

Ejemplo 4. Como un ejemplo, consideramos $y = (0, 2, 4, 6)$ y $x = (2, 3, 8)$. Entonces sus α-cortes son:
$y_\alpha^- = 0 + \alpha(2 - 0) = 2\alpha$ y $y_\alpha^+ = 6 - \alpha(6 - 4) = 6 - 2\alpha$
$x_\alpha^- = (3 - 2)\alpha + 2 = \alpha + 2$ y $x_\alpha^+ = -(8 - 3)\alpha + 8 = 3 - 5\alpha$
Entonces, los puntos finales de conjunto α-nivel de $y.x$ son

$$(y.x)_\alpha^- = 2\alpha.(\alpha + 2)$$

$$(y.x)_\alpha^+ = (6 - 2\alpha).(8 - 5\alpha)$$

que lleva $(y.x)_1 = [6, 12], (y.x)_0 = [0, 48]$.

Proposición 2.2.3.2.1 (**(Ban y Bede 2003) y (Bede y Fodor 2006)**). Si u y v son números difusos positivos, entonces $w = y.x$ es definido por $w_\alpha = [w_\alpha^-, w_\alpha^+]$, donde

$$w_\alpha^- = y_\alpha^- x_1^- + y_1^- x_\alpha^- - y_1^- x_1^-$$

y

$$w_\alpha^+ = y_\alpha^+ x_1^+ + y_1^+ x_\alpha^+ - y_1^+ x_1^+,$$

para cada $\alpha \in [0,1]$, es un número difuso positivo.

Demostración: Tenemos que

$$w_\alpha^+ - w_\alpha^- = (y_\alpha^+ - y_1^+)x_1^+ + (y_1^- - y_\alpha^-)x_1^- + y_1^+ x_\alpha^+ - y_1^- x_\alpha^- \geq 0,$$

para cada $\alpha \geq 0$, y entonces $w_\alpha = [w_\alpha^-, w_\alpha^+]$, es un intervalo cerrado.
Consideremos $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1], \alpha_1 \leq \alpha_2$. Porque $y_{\alpha_2} \subseteq y_{\alpha_1}$ y $x_{\alpha_2} \subseteq x_{\alpha_1}$, obtenemos

$$w_{\alpha_1}^- = y_{\alpha_1}^- x_1^- + y_1^- x_{\alpha_1}^- - y_1^- x_1^- \leq y_{\alpha_2}^- x_1^- + y_1^- x_{\alpha_2}^- - y_1^- x_1^- = w_{\alpha_2}^-$$

y

$$w_{\alpha_1}^+ = y_{\alpha_1}^+ x_1^+ + y_1^+ x_{\alpha_1}^+ - y_1^+ x_1^+ \leq y_{\alpha_2}^+ x_1^+ + x_1^+ y_{\alpha_2}^+ - y_1^+ x_1^+ = w_{\alpha_2}^+$$

Consideremos $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $\alpha \in [0,1]$. Entonces, implican que

$$y_{\alpha_n}^- x_1^- + y_1^- x_{\alpha_n}^- - y_1^- x_1^- \to y_\alpha^- x_1^- + y_1^- x_\alpha^- - y_1^- x_1^-$$

y

$$y_{\alpha_n}^+ x_1^+ + y_1^+ x_{\alpha_n}^+ - y_1^+ x_1^+ \to y_\alpha^+ x_1^+ + y_1^+ x_\alpha^+ - y_1^+ x_1^+.$$

entonces, obtenemos que w_α define un número difuso. ■

2.2.3.3. Diferencia de números difusos

La diferencia estándar, tiene la propiedad de que $y - y \neq 0$. Esto es un defecto en algunos resultados teóricos y aplicaciones de números difusos. Para evitar este inconveniente se propusieron nuevas diferencias.

Ejemplo 5: Sea $y = [0,1]$

$$y - y = [0,1] - [0,1] = [-1,1] \neq 0$$

La siguiente definición introducida por Hukuhara (Hukuhara 1967), fue uno de los primeros métodos para solucionar el problema anterior de la diferencia ($y - y \neq \{0\}$).

Definición 2.2.3.3.1 (**(Hukuhara 1967) y (Puri y Ralescu 1983)**). La diferencia de Hukuhara (H-diferencia $\ominus_H$) es definido por

$$y \ominus_H x = w \Longleftrightarrow y = x + w,$$

Proposición 2.2.3.3.2. Sean y, x intervalos cerrados y acotados, entonces $y \ominus_H x$ existe si y solo si $len(y) \geq len(x)$, siendo len la longitud del intervalo.

Ejemplo 6. Sea $[-1, 2] \ominus_H [0, 2]$ existe ya que $len([-1, 2] \geq len([0, 2])$. Se tiene que $[-1, 2] \ominus_H [0, 2]$.
$[-1, 2] \ominus_H [1, 6]$ no existe ya que $len([1, 6]) > len([-1, 2])$.

Observación 2.2.3.3.3. Si $y \ominus_H x$ existe, sus α-cortes son

$$[y \ominus_H x]_\alpha = [y_\alpha^- - x_\alpha^-, y_\alpha^+ - x_\alpha^+].$$

Observación 2.2.3.3.4. Se verifica que $y \ominus_H y = 0$ para cualquier número difuso y.

La diferencia de Hukuhara rara vez existe, por lo que se propusieron varias alternativas y generalizaciones, por ejemplo la diferencia generalizada de Hukuhara.

Definición 2.2.3.3.5 (**(Stefanini 2008) y (Stefanini y Bede 2012)**). Dados dos números difusos $y, x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, la diferencia generalizada de Hukuhara (gH-diferencia abreviado) es el número difuso w, si existe, tal que

$$y \ominus_{gH} x = w \Longleftrightarrow \begin{cases} & (i)\ y = x + w \\ o & (ii)\ x = y - w \end{cases}$$

Vemos que en el caso (i) la gH-diferencia coincide con la H-diferencia, viendo así que la gH-diferencia generaliza a la H-diferencia.
Con esto, podemos afirmar que, dados dos intervalos $y, x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, se tiene:

$$y \ominus_{gH} x \text{ existe en caso } (i) \text{ si y solo si } len(y) \geq len(x)$$
$$y \ominus_{gH} x \text{ existe en caso } (ii) \text{ si y solo si } len(y) \leq len(x).$$

Luego tenemos que la gH-diferencia de dos intervalos siempre existe. Podemos afirmar que dados $y = [\underline{y}, \overline{y}], x = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, la gH-diferencia de ambos intervalos viene dada por

$$y \ominus_{gH} x = [\text{mín}\{\underline{y} - \underline{x}, \overline{y} - \overline{x}\}, \text{máx}\{\underline{y} - \underline{x}, \overline{y} - \overline{x}\}]$$

Veamos un ejemplo en el que existe la gH-diferencia y sin embargo no existe la H-diferencia.

Ejemplo 7. Sea $y = [1, 2]$ y $x = [4, 8]$

$$y \ominus_{gH} x = [1, 2] \ominus_{gH} [4, 8] = [\text{mín}\{-3, -6\}, \text{máx}\{-3, -6\}] = [-6, -3].$$

Sin embargo, $y \ominus_H x = [1, 2] \ominus_H [4, 8]$ no existe pues $len(y) \leq len(x)$.

Proposición 2.2.3.3.6. Para cualquier $y, x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tenemos

$$[y \ominus_{gH} x]_\alpha = [\text{mín}\{y_\alpha^- - x_\alpha^-, y_\alpha^+ - x_\alpha^+\}, \text{máx}\{y_\alpha^- - x_\alpha^-, y_\alpha^+ - x_\alpha^+\}].$$

2.2.4. Análisis difuso

2.2.4.1. Espacios métricos de números difusos

La métrica más conocida y también la más empleada en el espacio de números difusos, es la distancia de Hausdorff. La distancia de Hausdorff para los números difusos se basa en la distancia clásica de Hausdorff entre los subconjuntos convexos compactos en $\mathbb{R}^n$. Recordemos la definición de distancia en este caso (Bede 2013)

i. Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos convexos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathcal{K}$. La distancia desde un punto t al conjunto A es

$$d(t, A) = \text{ínf}\{||t - a|| : \ a \in A\}$$

ii. Sean $A, B \in \mathcal{K}$. La separación de Hausdorff de B y A y de A a B respectivamente, son

$$d_H^*(B,A) = \sup\{d(b,A) : \ b \in B\}$$
$$d_H^*(A,B) = \sup\{d(a,B); \ a \in A\}$$

iii. La distancia de Hausdorff entre $A, B \in \mathcal{K}$ es

$$d_H(A,B) = \text{máx}\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\}.$$

Para el caso particular cuando $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ son dos intervalos (denotamos $A, B \in \mathbb{I}$), la distancia de Hausdorff es

$$d_H(A,B) = \text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

Se sabe que con respecto a la distancia de Hausdorff, $\mathcal{K}$ (y en particular $\mathbb{I}$) es un espacio métrico completo.

Observación 2.2.4.1.1. Además en toda la Tesis $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ denota el espacio de todos los conjuntos difusos compactos y convexos.

Definición 2.2.4.1.2 (Diamond y Kloeden 2002). Sea
$D_\infty : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,

$$D_\infty(y,x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \text{máx}\{|y_\alpha^- - x_\alpha^-|, |y_\alpha^+ - x_\alpha^+|\} = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{d_H(y_\alpha, x_\alpha)\}$$

donde $y_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+], x_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+] \subseteq \mathbb{R}$ y d_H es la distancia clásica de Hausdorff entre intervalos reales. Entonces, D_∞ es llamado la distancia de Hausdorff entre números difusos.

Definición 2.2.4.1.3 (Diamond y Kloeden 2002). Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos la distancia D_p entre números difusos como

$$D_p(y,x) = \left(\int_0^1 d_H(y_\alpha, x_\alpha)^p d\alpha\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \text{máx}\{|y_\alpha^- - x_\alpha^-|, |y_\alpha^+ - x_\alpha^+|\}^p d\alpha\right)^{1/p}.$$

Proposición 2.2.4.1.4 (Diamond y Kloeden 2002). (i) $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ es un espacio métrico y además, las siguientes propiedades son verdaderas:
(ii)

$$D_\infty(y+w, x+w) = D_\infty(y,x),\ \forall y,x,w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

es decir, D_∞ es una traslación invariante.

(iii)

$$D_\infty(k.y, k.x) = |k| D_\infty(y,x),\ \forall y,x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\ \forall k \in \mathbb{R};$$

(iv)

$$D_\infty(y+x, w+e) \leq D_\infty(y,w) + D_\infty(x,e),\ \forall y,x,w,e \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

Demostración: (i) Vemos que

$$D_\infty(y,x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{|y_\alpha^- - x_\alpha^-|, |y_\alpha^+ - x_\alpha^+|\} \geq 0$$

con $D_\infty(y,x) = 0$ si y solo si $y_\alpha^- = x_\alpha^-, y_\alpha^+ = x_\alpha^+, \alpha \in [0,1]$. También es claro que $D_\infty(y,x) = D_\infty(x,y)$. Para la desigualdad triangular, tenemos

$$|y_\alpha^- - w_\alpha^-| \leq |y_\alpha^- - x_\alpha^-| + |x_\alpha^- - w_\alpha^-| \leq D_\infty(y,x) + D_\infty(x,w)$$

y

$$|y_\alpha^+ - w_\alpha^+| \leq |y_\alpha^+ - x_\alpha^+| + |x_\alpha^+ - w_\alpha^+| \leq D_\infty(y,x) + D_\infty(x,w)$$

lo que implica

$$D_\infty(y,w) \leq D_\infty(y,x) + D_\infty(x,w).$$

Como conclusión $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ es un espacio métrico.

(ii) Tenemos

$$\begin{aligned} D_\infty(y,x) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{|y_\alpha^- - x_\alpha^-|, |y_\alpha^+ - x_\alpha^+|\} \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{|y_\alpha^- + w_\alpha^- - x_\alpha^- - w_\alpha^-|, |y_\alpha^+ + w_\alpha^+ - x_\alpha^+ - w_\alpha^+|\} \\ &= D_\infty(y+w, x+w). \end{aligned}$$

(iii) Vemos que

$$\begin{aligned} D_\infty(ky, kx) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{|ky_\alpha^- - kx_\alpha^-|, |ky_\alpha^+ - kx_\alpha^+|\} \\ &= |k| D_\infty(y, x). \end{aligned}$$

(iv) Para (iv) Usamos la desigualdad triangular con la traslación invariante. En efecto,

$$\begin{aligned} D_\infty(y + x, w + e) &\leq D_\infty(y + x, w + x) + D_\infty(w + x, w + e) \\ &= D_\infty(y, w) + D_\infty(x, e). \end{aligned}$$

■

Proposición 2.2.4.1.5 (Diamond y Kloeden 2002). Sea $1 \leq p < \infty$.
(i) Entonces $(\mathbb{R}_\mathcal{F}, D_p)$ es un espacio métrico y además las siguientes propiedades son verdaderas:
(ii)

$$D_p(y + w, x + w) = D_p(y, x),\ \forall y, x, w \in \mathbb{R}_\mathcal{F};$$

(iii)

$$D_p(k.y, k.x) = |k| D_p(y, x),\ \forall y, x \in \mathbb{R}_\mathcal{F},\ \forall k \in \mathbb{R};$$

(iv)

$$D_p(y + x, w + e) \leq D_p(y, w) + D_p(x, e),\ \forall y, x, w, e \in \mathbb{R}_\mathcal{F}.$$

2.2.4.2. Completación de espacios métricos de números difusos

El siguiente Teorema muestra que la distancia de Hausdorff define una métrica completa en los números difusos.

Teorema 2.2.4.2.1 (Diamond y Kloeden 2002). $(\mathbb{R}_\mathcal{F}, D_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Demostración: Para la prueba, necesitamos mostrar que cualquier sucesión de Cauchy de números difusos en D_∞ es convergente en $\mathbb{R}_\mathcal{F}$. Sea $y_n \in \mathbb{R}_\mathcal{F}, n \geq 1$ es una sucesión de Cauchy. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ con

$$D_\infty(y_n, y_{n+p}) < \varepsilon, \ \forall n \geq N, p \geq 1,$$

es decir,

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \text{máx}\{|(y_n)_\alpha^- - (y_{n+p})_\alpha^-|, |(y_n)_\alpha^+ - (y_{n+p})_\alpha^+|\} < \varepsilon$$

Esta última condición significa que las sucesiones $(y_n)_\alpha^-$ y $(y_n)_\alpha^+$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$. por lo que convergen como sucesiones de números reales. Además, $(y_n)_\alpha$ también converge como una sucesión de intervalos reales en la distancia de Hausdorff. Sean y_α^- y y_α^+ los limites de las sucesiones $(y_n)_\alpha^-$ y $(y_n)_\alpha^+$ respectivamente.Vemos que dado $(y_n)_\alpha^- \leq (y_n)_\alpha^+$ tendremos $y_\alpha^- \leq y_\alpha^+$ y $M_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$ es un intervalo real. En el próximo paso demostraremos que los conjuntos M_α satisfacen las hipótesis del Teorema de caracterización de Negoita-Ralescu.

(i) El hecho de que M_α es un intervalo real se demostró.

(ii) Sea $\alpha \leq \beta$. Entonces, tenemos $(y_n)_\beta \subseteq (y_n)_\alpha$, es decir,

$$(y_n)_\alpha^- \leq (y_n)_\beta^- \leq (y_n)_\beta^+ \leq (y_n)_\alpha^+$$

y tomando el limite en esta desigualdad, obtenemos

$$y_\alpha^- \leq y_\beta^- \leq y_\beta^+ \leq y_\alpha^+,$$

lo cual prueba el (ii).

(iii) Sea α_n una secuencia convergente $\alpha_n \to \alpha$. Por (ii), tenemos $y_\alpha \subseteq y_{\alpha_n}, \ n \geq 1$ y entonces

$$y_\alpha \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}$$

Tendremos que demostrar la inclusión inversa. Primero comencemos con el comentario de que dado que $(y_m)_\alpha^- \to y_\alpha^-$ y $(y_m)_\alpha^+ \to y_\alpha^+$ para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un $M_1 \geq 1$ tal que para $m \geq M_1$, tenemos

$$[(y_m)^-_\alpha, (y_m)^+_\alpha] \subseteq [y^-_\alpha - \varepsilon_1, y^+_\alpha + \varepsilon_1].$$

Como $y_m, m \geq 1$ es un número difuso, tenemos

$$(y_m)_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} (y_m)_{\alpha_n}.$$

Además, de $(y_m)^-_{\alpha_n} \to y^-_{\alpha_n}$ y $(y_m)^+_{\alpha_n} \to y^+_{\alpha_n}$, tenemos que para cualquier $\varepsilon_2 > 0$ existe $M_2 \geq 1$ tal que para $m \geq M_2$ y cualquier $n \geq 1$,

$$[y^-_{\alpha_n} + \varepsilon_2, y^+_{\alpha_n} - \varepsilon_2] \subseteq (y_m)_{\alpha_n}.$$

la cuál implica

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [y^-_{\alpha_n} + \varepsilon_2, y^+_{\alpha_n} - \varepsilon_2] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (y_m)_{\alpha_n}.$$

Ahora de estas relaciones obtenemos que para cualquier $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, tenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [y^-_{\alpha_n} + \varepsilon_2, y^+_{\alpha_n} - \varepsilon_2] \subseteq [y^-_\alpha - \varepsilon_1, y^+_\alpha + \varepsilon_1]$$

lo que lleva a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} \subseteq y_\alpha.$$

La doble inclusión prueba (iii) del Teorema de Caracterización de Negoita-Ralescu.

(iv) Sea ahora $\alpha_n \to 0$ una secuencia en $[0, 1]$. Tendremos que demostrar que

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right) = y_0.$$

Como y_0 es cerrado y desde $y_{\alpha_n} \subseteq y_0$ la inclusión

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right) \subseteq y_0$$

es inmediato. Por el contrario, seguimos un razonamiento similar al punto anterior. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ arbitrario. Entonces, tenemos

$$[y^-_0 + \varepsilon_1, y^+_0 - \varepsilon_1] \subseteq (y_m)_0 = cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (y_m)_{\alpha_n}\right),$$

con $m \geq M_1$. Además

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(y_m)_{\alpha_n}\right) \subseteq cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[y^-_{\alpha_n} - \varepsilon_2, y^+_{\alpha_n} + \varepsilon_2]\right),$$

para $m \geq M_2$. Finalmente, obtenemos

$$[y_0^- + \varepsilon_1, y_0^+ - \varepsilon_1] \subseteq cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[y^-_{\alpha_n} - \varepsilon_2, y^+_{\alpha_n} + \varepsilon_2]\right),$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. La relación requerida se sigue que

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}\right) = y_0$$

Las condiciones (i)-(iv) implican que y es un número difuso, es decir, la secuencia de Cauchy $y_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ converge a $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y la prueba está completa. ■

Teorema 2.2.4.2.2 (**Diamond y Kloeden 2002**). $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ no es completo, $1 \leq p < \infty$.

Demostración: Construiremos una secuencia de Cauchy que no sea convergente dentro de $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$. En esta prueba suponemos que p es un número entero, pero el resultado puede extenderse a valores reales $1 \leq p < +\infty$, utilizando funciones especiales.

Sea

$$y_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, n] \\ e^{-t} & \text{si } t \in [0, n] \end{cases}, n \geq 1$$

una secuencia de números difusos. Sus conjuntos de α-niveles están dados por

$$(y_n)_\alpha = \begin{cases} [0, n] & \text{si } \alpha < e^{-n} \\ -ln\ \alpha & \text{si } \alpha \geq e^{-n} \end{cases}$$

Tenemos,

$$D_p(y_n, y_{n+k}) = \left(\int_0^{e^{-n-k}} k^p d\alpha + \int_{e^{-n-k}}^{e^{-n}} (-ln\ \alpha - n)^p d\alpha\right)^{1/p}.$$

Denotamos

$$I_p = \int_{e^{-n-k}}^{e^{-n}} (-ln\ \alpha - n)^p d\alpha.$$

tenemos

$$I_0 = e^{-n} - e^{-n-k}.$$

Por integración por partes, obtenemos

$$I_p = k^p e^{-n-k} + pI_{p-1}.$$

Además,

$$I_{p-1} = k^{p-1} e^{-n-k} + (p-1)I_{p-2}.$$

y entonces

$$I_p = k^p e^{-n-k} + pk^{p-1} e^{-n-k} + p(p-1)I_{p-2}.$$

Por inducción, tenemos

$$I_p = (k^p + pk^{p-1} + \ldots + p(p-1)\ldots 2.k)e^{-n-k} + p!(e^{-n} - e^{-n-k}).$$

Entonces, tenemos

$$D_p(y_n, y_{n+k}) = (k^p e^{-n-k} + (k^p + pk^{p-1} + \ldots + p(p-1)\ldots 2.k)e^{-n-k} + p!(e^{-n} - e^{-n-k}))^{1/p},$$

que es

$$D_p(y_n, y_{n+k}) \leq ((k^p + (k^p + pk^{p-1} + \ldots + p(p-1)\ldots 2.k) - p!)e^{-n-k} + p!e^{-n})^{1/p}.$$

Si $k < p$ podemos estimar esta distancia de Hausdorff por

$$D_p(y_n, y_{n+k}) \leq ((p^p + (p^p + pp^{p-1} + \ldots + p(p-1)\ldots 2.p) - p!)e^{-k} + p!)^{1/p}.e^{-n/p}$$

Ahora, si $k \geq p$ entonces, tenemos

$$D_p(y_n, y_{n+k}) = ((k^p + k^{p+1} - p!)e^{-k} + p!)^{1/p}.e^{-n/p},$$

y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} D_p(y_n, y_{n+k}) = 0.$$

Entonces, seguimos que la sucesión y_n es una sucesión de Cauchy. Ahora podemos ver que y_n no converge en $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. De hecho converge puntualmente a

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

De hecho, tenemos

$$D_p(y_n, y) = \left(\int_0^{e^{-n}} (-ln\ \alpha - n)^p d\alpha \right)^{1/p}.$$

Calculamos

$$J_p = \int_0^{e^{-n}} (-ln\ \alpha - n)^p d\alpha.$$

Tenemos $J_0 = e^{-n}$ y por integración por partes, obtenemos

$$J_p = \alpha(-ln\ \alpha - n)^p|_0^{e^{-n}} + p \int_0^{e^{-n}} \alpha(-ln\ \alpha - n)^{p-1} \frac{1}{\alpha} d\alpha,$$

es decir, $J_p = pJ_{p-1}$ lo que lleva a

$$J_p = p!e^{-n}.$$

Finalmente, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} D_p(y_n, y) = \lim_{n\to\infty} (p!e^{-n})^{1/p} = 0.$$

Como $y \notin \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, obtenemos que $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ no es completo con respecto a la métrica D_p. ■

2.2.4.3. Norma de un número difuso

Denotamos $||y||_{\mathcal{F}} = D_\infty(y, 0), \forall y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ la norma de un número difuso. El siguiente teorema nos muestra que tiene propiedades similares a las propiedades de una norma en el sentido crisp.

Proposición 2.2.4.3.1 (Bede 2013). $||.||_{\mathcal{F}}$ tiene las siguientes propiedades

i. $||y||_{\mathcal{F}} = 0$ si y solo si $y = 0$;

ii. $||\lambda.y||_{\mathcal{F}} = |\lambda|.||y||_{\mathcal{F}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;

iii. $||y + x||_{\mathcal{F}} \leq ||y||_{\mathcal{F}} + ||x||_{\mathcal{F}}, \forall y, x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;

iv. $|\ ||y||_{\mathcal{F}} - ||x||_{\mathcal{F}}\ | \leq D_\infty(y, x), \forall y, x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;

v. Para cualquier a y b que tengan el mismo signo y cualquier $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tenemos

$$D_\infty(a.y, b.y) = |b-a|.||y||_{\mathcal{F}};$$

vi. $D_\infty(y, x) = ||y \ominus_{gH} x||_{\mathcal{F}}, \forall y, x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Demostración: Vamos a demostrar (v). Sea $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, y $a > b > 0$. Entonces, tenemos

$$D_\infty(a.y, b.y) = D_\infty([b + (a-b)].y, b.y) = D_\infty(b.y + (a-b).y, b.y).$$

Como D_∞ es invariante para las traslaciones, obtenemos

$$D_\infty(a.y, b.y) = D_\infty((a-b).y, 0) = |b-a|.||y||_{\mathcal{F}}.$$

■

Observación 2.2.4.3.2. Los conceptos de limite, convergencia de una secuencia en $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y continuidad de una función $y : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se considerarán en el espacio métrico $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$. Por ejemplo, la continuidad de una función con valores numéricos difusos en un punto t_0 significa que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / D_\infty(y(t), y(t_0)) < \epsilon$ para $|t - t_0| < \delta$. De la definición de distancia de Hausdorff implica

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \text{máx}\{|y_\alpha^-(t) - y_\alpha^-(t_0)|, |y_\alpha^+(t) - y_\alpha^+(t_0)|\} < \epsilon$$

que da como resultado $|y_\alpha^\pm(t) - y_\alpha^\pm(t_0)| < \epsilon, \forall \alpha \in [0, 1]$, es decir, continuidad equitativa de la familia $\{y_\alpha^\pm |\ \alpha \in [0, 1]\}$.

2.2.4.4. Integración de funciones de valores numéricos difusos

La definición de la integral de una función de valor numérico difuso no plantea problemas graves. A continuación se presentarán las integrales de tipo Aumann, Riemann y Henstock (Bede 2010).

Definición 2.2.4.4.1 (Diamond y Kloeden 2002). Se dice que un mapeo $y : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es medible si el mapeo de α-nivel establecido $[y(t)]_\alpha$ es medible para todos los $\alpha \in [0, 1]$. Aquí medible significa Borel medible.

Un mapeo de valor difuso $y : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se llama acotado integralmente si existe una función integrable $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, de modo que

$$||y(t)||_{\mathcal{F}} \leq h(t), \forall t \in [a, b]$$

Una función de valor difuso medible e integrablemente acotada se llama integrable.

Definición 2.2.4.4.2. La **integral difusa de Aumann** de $y : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se define en términos de nivel mediante la ecuación

$$\left[(AD)\int_a^b y(t)dt\right]_\alpha = \int_a^b [y(t)]_\alpha dt,\ \alpha \in [0, 1].$$

La siguiente integral de tipo Riemann presenta una alternativa a la definición de tipo Aumann.

Definición 2.2.4.4.3. Una función $y : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, [a, b] \subset \mathbb{R}$ se llama Riemann integrable en $[a, b]$, si existe $I \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, con la propiedad: $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, tal que para cualquier división de $[a, b]$, $d : a = t_0 < \ldots < t_n = b$ de la norma $\nu(d) < \delta$, y para cualquier punto $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, \ldots, n-1$, tenemos

$$D_\infty\left(\sum_{i=0}^{n-1} y(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), I\right) < \varepsilon.$$

Entonces denotamos $I = (RD)\displaystyle\int_a^b y(t)$ y se llama **integral de Riemann difuso**.

Definición 2.2.4.4.4 (Bede y Gal 2010). Sea $y : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ una función con valor de número difuso y

$$\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

una partición del intervalo $[a, b]$, $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \ldots, n-1$, una secuencia de puntos de partición Δ_n y $\delta(t) > 0$ una función de valor real sobre $[a, b]$. Se dice que la división $P = (\Delta_n, \xi)$ se dice que es δ-fina si

$$[t_i, t_{i+1}] \subseteq (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)).$$

Se dice que la función u es Henstock (o (HD)) integrable que tiene la integral $I \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función de valor real δ, tal que para cualquier división δ-fina P, tenemos

$$D_\infty \left(\sum_{i=0}^{n-1} u(\xi_i).h_i, I \right) < \varepsilon,$$

donde $h_i = t_{i+1} - t_i$. Entonces I se llama la **integral difusa de Henstock** de y y se denota por $(HD) \int_a^b y(t)dt$.

Proposición 2.2.4.4.5. Una función continua de valor difuso es integral difusa de Aumann, integral difusa de Riemann e integral difusa de Henstock también, y además

$$(AD) \int_a^b y(t)dt = (HD) \int_a^b y(t)dt = (RD) \int_a^b y(t)dt.$$

Demostración: Es inmediato observar que

$$\left[(AD) \int_a^b y(t)dt \right]_\alpha = \left[\int_a^b y_\alpha^-(t)dt, \int_a^b y_\alpha^+(t)dt \right], \forall \alpha \in [0,1].$$

Si y es integral de Riemann, entonces también es integral de Henstock. De hecho, si la función δ es constante en la definición de Henstock, generará el caso de Riemann. La suma de Riemann se puede escribir a nivel

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} y(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \right]_\alpha = \left[\sum_{i=0}^{n-1} y_\alpha^-(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \sum_{i=0}^{n-1} y_\alpha^+(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \right].$$

La equicontinuidad implica la integrabilidad de las funciones y_α^- y y_α^+ uniforme con respecto a $\alpha \in [0,1]$. Entonces, obtenemos

$$\left[(RD) \int_a^b y(t)dt \right]^\alpha = \left[\int_a^b y_-^\alpha(t)dt, \int_a^b y_+^\alpha(t)dt \right],$$

y combinando los resultados anteriores obtenemos la igualdad de los tres tipos de integrales. ■

Proposición 2.2.4.4.6. La integral difusa tiene las siguientes propiedades.

i. Si $y, x : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ son integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\int_a^b (\alpha y(t) + \beta x(t))dt = \alpha \int_a^b y(t)dt + \beta \int_a^b x(t)dt.$$

ii. Si $y : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es integrable y $c \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^c y(t)dt + \int_c^b y(t)dt = \int_a^b y(t)dt.$$

iii. Si $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene un signo constante en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b c.y(t)dt = c \int_a^b y(t)dt.$$

2.2.4.5. Diferenciabilidad de Hukuhara

La derivada de Hukuhara de una función de valor difuso se introdujo en Puri-Ralescu (Puri y Ralescu 1983) y tiene su punto de partida en la derivada de Hukuhara de funciones de multivalor. El enfoque basado en el derivado de Hukuhara tiene la desventaja de que una función diferenciable de Hukuhara tiene una longitud creciente de su intervalo de soporte.

Definición 2.2.4.5.1 (**(Puri y Ralescu 1983) y (Hukuhara 1967)**). Una función $y : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se llama Hukuhara diferenciable, si para $h > 0$ suficientemente pequeño las H-diferencias $y(t + h) \ominus y(t)$ y $y(t) \ominus y(t - h)$ existen y si existe un elemento $y'(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(t + h) \ominus y(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t) \ominus y(t - h)}{h} = y'(t)$$

El número difuso $y'(t)$ se llama la **derivada de Hukuhara** de y en t.

Definición 2.2.4.5.2 (**Seikkala 1987**). La derivada de Seikkala de una función difusa de valor numérico $y : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se define por

$$y'(t)_\alpha = [(y_\alpha^-(t))', (y_\alpha^+(t))'],$$

$0 \leq \alpha \leq 1$, siempre que defina un número difuso $y'(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Observación 2.2.4.5.3. Suponga que las funciones $y_\alpha^-(t)$ y $y_\alpha^+(t)$ son continuamente diferenciables con respecto a t, uniformemente respecto a $\alpha \in [0,1]$. Entonces y es diferenciable de Hukuhara si y solo si es diferenciable de Seikkala y las dos derivadas coinciden. De hecho, si y es diferenciable de Hukuhara, podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) \ominus y(t)}{h} = \left[\lim_{h\to 0} \frac{y_\alpha^-(t+h) - y_\alpha^-(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{y_\alpha^+(t+h) - y_\alpha^+(t)}{h}\right].$$

relación que muestra que y es diferenciable de Seikkala.

Recíprocamente, si y es diferenciable de Seikkala, entonces tenemos su longitud

$$len(y(t)_\alpha) = y_\alpha^+ - y_\alpha^- \geq 0,$$

lo que implica la existencia de la diferencia de Hukuhara $y(t+h) \ominus y(t)$ y considerando el limite con $h \to 0$, obtenemos la diferenciabilidad de Hukuhara.

Ejemplo 1. (i) Si

$$y(t) = (x(t), u(t), z(t))$$

es una función de valor numérico difuso, entonces si y es Hukuhara diferenciable y x, u, z son funciones diferenciables de valor real, entonces

$$y'(t) = (x'(t), u'(t), z'(t))$$

es un número difuso triangular.

(ii) Sea $y(t) = (-e^t, 0, e^t)$. Entonces, $y'(t) = (-e^t, 0, e^t)$. y en este caso, $y'(t) = -y(t)$ y $y'(t) = y(t)$

(iii) Sea $y(t) = (1, 2, 3)e^{-t}$. Suponga que $y(t)$ es diferenciable. Entonces tendremos que $y'(t) = (-e^{-t}, -2e^{-t}, -3e^{-t})$ la cual no es un número difuso.

2.2.4.6. Diferenciabilidad generalizada

La definición de diferenciabilidad fuertemente generalizada se introdujo en Bede-Gal (Bede y Gal 2005) y (Bede y Gal 2010).

Definición 2.2.4.6.1 (Bede y Gal 2010). Sea $y : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y $t \in (a,b)$. Decimos que u es diferenciable fuertemente generalizado en t, si existe un elemento $y'(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tal que

i. para todo $h > 0$ suficientemente pequeño, $\exists\ y(t+h) \ominus y(t), y(t) \ominus y(t-h)$ y los limites (en la métrica D)

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) \ominus y(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t) \ominus y(t-h)}{h} = y'(t),$$

o

ii. para todo $h > 0$ suficientemente pequeño, $\exists\ y(t) \ominus y(t+h), y(t-h) \ominus y(t)$ y los limites

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t) \ominus y(t+h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t-h) \ominus y(t)}{(-h)} = y'(t),$$

o

iii. para todo $h > 0$ suficientemente pequeño, $\exists\ y(t+h) \ominus y(t), y(t-h) \ominus y(t)$ y los limites

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) \ominus y(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t-h) \ominus y(t)}{(-h)} = y'(t),$$

o

iv. para todo $h > 0$ suficientemente pequeño, $\exists\ y(t) \ominus y(t+h), y(t) \ominus y(t-h)$ y los limites

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t) \ominus y(t+h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t) \ominus y(t-h)}{h} = y'(t).$$

(h y $(-h)$ en los denominadores significan $\frac{1}{h}$. y $-\frac{1}{h}$., respectivamente).

Proposición 2.2.4.6.2. Si $y(t) = (x(t), u(t), z(t))$ es una función de valor triangular, entonces

a) Si y es (i)-diferenciable (Hukuhara diferenciable), entonces $y' = (x', u', z')$.

b) Si y es (ii)-diferenciable , entonces $y' = (z', u', x')$.

Demostración: La prueba de $b)$ es la siguiente. Supongamos que existe la H-diferencia $y(t) \ominus y(t+h)$. Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{y(t) \ominus y(t+h)}{-h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x(t)-x(t+h), u(t)-u(t+h), z(t)-z(t+h))}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{z(t)-z(t+h)}{-h}, \frac{u(t)-u(t+h)}{-h}, \frac{x(t)-x(t+h)}{-h} \right) \\ &= (z', u', x').\end{aligned}$$

■

Definición 2.2.4.6.3 (**(Stefanini y Bede 2012) y (Bede y Stefanini 2012)**). Sea $t \in (a,b)$. Entonces la gH**-derivada difusa** de una función $y : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ en t se define como

$$y'_{gH}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[y(t+h) \ominus_{gH} y(t)].$$

Si $y'_{gH}(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ existe, entonces decimos que y es diferenciable generalizado de Hukuhara (gH-diferenciable) en t ($\ominus_{gH}$ es la gH-diferencia).

Ejemplo 3. Sea A un intervalo compacto, $y(t) = tA$, $y(t+h) = (t+h)A$ (en general $\neq tA + hA$) siempre tenemos $\frac{1}{h}[y(t+h) \ominus_{gH} y(t)] = A$. Tomando $A = [-2, 1]$ así

$$tA = \begin{cases} [-2t, t]; t > 0 \\ [t, -2t]; t < 0 \\ \{0\}; t = 0 \end{cases}, \ (t+h)A = \begin{cases} [-2t-2h, t+h]; t > 0, t+h > 0 \\ [t+h, -2t-2h]; t < 0, t+h < 0 \\ \begin{cases} [-2h, h]; t = 0, h > 0 \\ [h, -2h]; t = 0, h < 0 \end{cases} \end{cases}$$

y

$$(t+h)A \ominus_{gH} tA = \begin{cases} [-2h, h]; t > 0, t+h > 0 \\ [h, -2h]; t < 0, t+h < 0 \\ \begin{cases} [-2h, h]; t = 0, h > 0 \\ [h, -2h]; t = 0, h < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Así que

$$\frac{1}{h}[u(t+h) \ominus_{gH} u(t)] = [-2, 1], \forall h \neq 0.$$

Teorema 2.2.4.6.4 (Bede y Stefanini 2012). Sea $y : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $[y(t)]_\alpha = [y_\alpha^-(t), y_\alpha^+(t)]$. Suponga que las funciones $y_\alpha^-(t)$ y $y_\alpha^+(t)$ son funciones de valor real, diferenciables con respecto a t, uniformemente en $\alpha \in [0, 1]$. Entonces la función $y(t)$ es gH-diferenciable en un $t \in]a, b[$ fijo, si y solo si uno de los siguientes dos casos cumple:

a. $(y_\alpha^-)'(t)$ es creciente, $(y_\alpha^+)'(t)$ es decreciente como funciones de α, y

$$(y_1^-)'(t) \leq (y_1^+)'(t),$$

o

b. $(y_\alpha^-)'(t)$ es decreciente, $(y_\alpha^+)'(t)$ es creciente como funciones de α, y

$$(y_1^+)'(t) \leq (y_\alpha^-)'(t).$$

Además, $\forall \alpha \in [0, 1]$, tenemos

$$[y'_{gH}(t)]_\alpha = [\text{mín}\{(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)\}, \text{máx}\{(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)\}].$$

Demostración: Supongamos que y es gH-diferenciable y suponga que $y_\alpha^-(t)$ y $y_\alpha^+(t)$ son diferenciables. Claramente, la gH-diferenciabilidad implica que cuanto a nivel, tenemos

$$[y'_{gH}(t)]_\alpha = [(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)].$$

o

$$[y'_{gH}(t)]_\alpha = [(y_\alpha^+)'(t), (y_\alpha^-)'(t)].$$

En el primer paso, supongamos que hay un cambio signo en la diferencia de derivadas $(y_\alpha^+)'(t) - (y_\alpha^-)'(t)$ en un $\alpha_0 \in (0, 1)$ fijo. Entonces, $[y'_{gH}(t)]_{\alpha_0}$ es un singleton y, para todo α tal que $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$, también $[y'_{gH}(t)]_\alpha$ es un singleton porque

$$[y'_{gH}(t)]_\alpha \subseteq [y'_{gH}(t)]_{\alpha_0}$$

se sigue que, para todos los valores de α,

$$(y_\alpha^+)'(t) - (y_\alpha^-)'(t) = 0$$

lo cuál es una contradicción con el hecho de que $(y_\alpha^+)'(t) - (y_\alpha^-)'(t)$ cambia de signo. Luego, concluimos que $(y_\alpha^+)'(t) - (y_\alpha^-)(t)$ no puede cambiar el signo.

Caso 1. Si $(y_1^-)'(t) < (y_1^+)'(t)$, entonces

$$(y_\alpha^+)'(t) - (y_\alpha^-)'(t) \geq 0$$

para cada $\alpha \in [0,1]$ y

$$[y'_{gH}(t)]_\alpha = [(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)];$$

Como y es gH-diferenciable, los intervalos $[(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)]$ deben formar un número difuso, es decir, para cualquier $\alpha > \beta$,

$$[(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)] \subseteq [(y_\beta^-)'(t), (y_\beta^+)'(t)]$$

lo que muestra que $(y_\alpha^-)'(t)$ tiene que ser creciente y $(y_\alpha^+)'(t)$ debe ser decreciente en función de α.

Caso 2. Si $(y_1^-)'(t) > (y_1^+)'(t)$, entonces

$$(y_\alpha^+)'(t) - (y_\alpha^-)'(t) \leq 0$$

para cada $\alpha \in [0,1]$ y, en este caso,

$$[y'_{gH}(t)]_\alpha = [(y_\alpha^+)'(t), (y_\alpha^-)'(t)]$$

entonces, obtenemos

$$[(y_\alpha^+)'(t), (y_\alpha^-)'(x)] \subseteq [(y_\beta^+)'(t), (y_\beta^-)'(t)],$$

para cualquier $\alpha > \beta$, que muestra que $(y_\alpha^-)'(t)$ es decreciente y $(y_\alpha^+)'(t)$ está creciendo en función de α.

Caso 3. Si tenemos

$$(y_1^-)'(t) = (y_1^+)'(t)$$

y si $(y_{gH})'(t) \in \mathbb{R}$ es un número crisp. De lo contrario, podemos tener

$$(y_0^-)'(t) < (y_0^+)'(t)$$

o

$$(y_0^-)'(t) > (y_0^+)'(t)$$

cuando $\alpha < \alpha_0$ y la igualdad

$$(y_0^-)'(t) = (y_0^+)'(t)$$

para $\alpha \geq \alpha_0$. Tenemos en este caso la monotonicidad satisfecha.

Recíprocamente, consideremos el espacio de Banach $B = \overline{C}[0,1] \times \overline{C}[0,1]$, donde $\overline{C}[0,1]$ en el espacio de las funciones continuas a izquierda en $(0,1]$, a derecha continua en 0, con la norma uniforme.Para cualquier $t \in (a,b)$ fijo, el mapeo $j_t : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to B$, definido por (Bede, 2010)

$$j_t(u) = (y^-(t), y^+(t)) = \{(y_\alpha^-(t), y_\alpha^+(t))|\ \alpha \in [0,1]\},$$

es una incrustación isométrica. Suponiendo que, para todo α las dos funciones $y_\alpha^-(t)$ y $y_\alpha^+(t)$ son diferenciables con respecto a t, los limites

$$(y_\alpha^-)'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y_\alpha^-(t+h) - y_\alpha^-(t)}{h}$$
$$(y_\alpha^+)'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y_\alpha^+(t+h) - y_\alpha^+(t)}{h}$$

existen de manera uniforme para todos los $\alpha \in [0,1]$. Tomando una secuencia $h_n \to 0$, tendremos

$$(y_\alpha^-)'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_\alpha^-(t+h_n) - y_\alpha^-(t)}{h_n}$$
$$(y_\alpha^+)'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_\alpha^+(t+h_n) - y_\alpha^+(t)}{h_n},$$

es decir, $(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)$ son limites uniformes de secuencias de funciones continuas a la izquierda en $\alpha \in (0,1]$, por lo que se dejan continuas para $\alpha \in (0,1]$.

De manera similar, se puede obtener la continuidad a derecha en 0.

Suponiendo que para un $t \in [a,b]$ fijo, la función $(y_\alpha^-)(t)$ es creciente y la función $(y_\alpha^+)(t)$ es decreciente como funciones de α, y que

$$(y_1^-)'(t) \leq (y_1^+)'(t)$$

después también

$$(y_\alpha^-)'(t) \leq (y_\alpha^+)'(t), \forall \alpha \in [0,1]$$

y vemos que el par de funciones $(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)$ cumplen las condiciones del Teorema de Caracterización de Negoita-Ralescu y los intervalos

$$[(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)], \alpha \in [0,1]$$

determina un número difuso. Ahora observamos que el siguiente limite existe uniformemente

$$\begin{aligned}\left[\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) \ominus_{gH} y(t)}{h}\right]_\alpha &= \left[\lim_{h\to 0} \frac{y_\alpha^-(t+h) - y_\alpha^-(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{y_\alpha^+(t+h) - y_\alpha^+(t)}{h}\right] \\ &= [(y_\alpha^-)'(t), (y_\alpha^+)'(t)], \forall \alpha \in [0,1]\end{aligned}$$

y es un número difuso. Como conclusión, finalmente obtenemos que y es gH-diferenciable.

■

2.2.5. Ecuaciones diferenciales difusas

Existen varias interpretaciones de una ecuación diferencial difusa. El primero históricamente se basó en el derivado de Hukuhara introducido en Puri y Ralescu (Puri y Ralescu 1983).Esta interpretación tiene la desventaja de que las soluciones de una ecuación diferencial difusa siempre tienen una longitud creciente del soporte. Este hecho implica que el comportamiento futuro de un sistema dinámico difuso es cada vez más incierto en el tiempo. Es por eso que se han desarrollado diferentes ideas y métodos para resolver ecuaciones diferenciales difusas.

Por tal razón se han definido nuevos enfoques basados en derivados difusos generalizados discutidos en el capítulo anterior. En el presente informe de Tesis trabajaremos con las interpretaciones basadas en la diferenciabilidad de Hukuhara, el Principio de Extención de Zadeh y los conceptos de diferenciabilidad generalizados de Hukuhara.

2.2.5.1. Ecuaciones diferenciales difusas bajo la diferenciabilidad de Hukuhara

En esta sección consideramos el problema del valor inicial difuso $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bajo la diferenciabilidad de Hukuhara. La función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se asume que es continuo. El siguiente Lema transforma la ecuación diferencial difusa en ecuaciones integrales. Una ecuación diferencial difusa se escribe usando el derivado de Hukuhara.

Lema 2.2.5.1.1 (Bede 2010). Para $t_0 \in \mathbb{R}$, la ecuación diferencial difusa $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es continua, y es equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

en algún intervalo $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que y sea una solución de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Entonces por integración obtenemos

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

y usando el resultado del capítulo anterior, obtenemos

$$y(t) \ominus y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

es decir,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Recíprocamente dada una solución y de la ecuación integral, podemos escribir

$$y(t + h) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} f(s, y(s))ds$$

y

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(t + h) \ominus y(t)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} f(s, y(s))ds.$$

Observamos que

$$D\left[\int_t^{t+h} f(s,y(s))ds, h.f(t,y(t))\right] = D\left[\int_t^{t+h} f(s,y(s))ds, \int_t^{t+h} f(t,y(t))ds\right]$$
$$\leq \int_t^{t+h} D(f(s,y(s)), f(t,y(t)))ds$$
$$\leq \int_t^{t+h} \omega(f(t,y(t)),h)ds = h.\omega(f(t,y(t)),h),$$

Donde $\omega(f(t,y(t)),h)$ denota el modulo de continuidad de la función $f(t,y(t))$ que es una función continua en función de $t \in [t_0,t_1]$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} D\left(\frac{y(t+h)\ominus y(t)}{h}, f(t,y(t))\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h.\omega(f(t,y(t)),h) = 0$$

y esto implica que y es una solución del problema de valor inicial difuso $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$. ■

Observación 2.2.5.1.2. En Song-Wu (Song y Wu 2000) se demostró la existencia y unicidad de soluciones en esta interpretación.

Primero mostraremos que las funciones de Lipschitz, están limitadas, siguiendo a Lupulescu (Lupulescu 2009).

Lema 2.2.5.1.3 (**Lupulescu 2009**). Sea $\mathcal{R}_0 = [t_0, t_0+p] \times \overline{B}(y_0,q)$ y supongamos que $f : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es continuo y cumple la condición de Lipschitz

$$D(f(t,y), f(t,x)) \leq L.D(y,x), \forall (t,y),(t,x) \in \mathcal{R}_0.$$

Entonces f está acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$D(f(t,y),0) \leq M.$$

Demostración: Observemos que

$$D(f(t,y),0) \leq D(f(t,y), f(t,y_0)) + D(f(t,y_0),0)$$

La función real $D(f(t,y_0),0)$ es acotada cuando $t \in [t_0, t_0+p]$, es decir, existe M_1 con $D(f(t,y_0),0) \leq M_1$. Obtenemos

$$D(f(t,y),0) \leq L.D(y,y_0) + M_1 \leq Lq + M_1 = M,$$

es decir, f es acotado. ■

Teorema 2.2.5.1.4 ((**Lupulescu 2009**) **y** (**Bede y Gal 2010**)). Sea $\mathcal{R}_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(y_0, p)$, $p > 0, y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es continuo de modo que se cumpla la siguiente condición de Lipschitz:
Existe una constante $L > 0$ tal que

$$D(f(t, y), f(t, x)) \leq L.D(y, x), \forall (t, y), (t, x) \in \mathcal{R}_0.$$

Entonces el problema de valor inicial difuso (PVID)

$$y'(t) = f(t, y), y(t_0) = y_0,$$

tiene una solución única definida en un intervalo $[t_0, t_0 + k]$ para algún $k > 0$.

Demostración: Consideremos $K_0 = C([t_0, t_0 + p], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ y el operador $P : K_0 \to K_0$ definido por:

$$P(y_0)(t) = y_0$$
$$P(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Según el Lema anterior, y la condición de Lipchitz, f es acotado y también P es acotado,

$$D(P(y)(t), y_0) \leq \int_{t_0}^{t} D(f(s, y(s)), 0)ds \leq M(t - t_0)$$

donde

$$M = \sup_{(t,y)\in\mathcal{R}_0} D(f(t, y), 0)$$

es proporcionado por Lema anterior. Sea $d = \text{mín}\{p, \dfrac{q}{M}\}$ y

$$K_1 = C([t_0, t_0 + d], \overline{B}(y_0, q)).$$

Consideremos ahora $P : K_1 \to C([t_0, t_0 + d], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$. Tenemos

$$D(P(y)(t), y_0) \leq q$$

y así dado $x \in K_1$ da $P(y) \in K_1$. Observamos que K_1 es un espacio métrico completo considerado con la distancia uniforme, como un subespacio cerrado de un espacio

métrico completo.

Ahora demostramos que P es una contracción. En efecto,

$$D(P(y)(t), P(x)(t)) \leq \int_{t_0}^{t} D(f(s, y(s)), f(s, x(s))ds \leq 2L(t - t_0)D(y, x).$$

Ahora escogiendo $k = \text{mín}\{d, \dfrac{1}{2L}\}$ y restringiendo aún más $P : K_2 \to K_2$, con

$$K_2 = C([t_0, t_0 + k], \overline{B}(y_0, q))$$

Obtenemos que P es una contracción. Del teorema de punto fijo de Banach existe un punto fijo $y_* \in K_2$ con $P(y_*) = y_*$, es decir, y_* es una solución del primer Lema de esta subsección . Finalmente del primer Lema, obtenemos que y_* es una solución del PVID.

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0,$$

para $t \in [t_0, t_0 + k]$. La unicidad se deriva de la unicidad de punto fijo de P, que es una consecuencia del Teorema de punto fijo de Banach. ■

Teorema 2.2.5.1.5 (Bede 2008). Sea $\mathcal{R}_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(y_0, p), p > 0, y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y $f : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sea continuo de modo que

$$f(t, y)_\alpha = [f_\alpha^-(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+), f_\alpha^+(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+)], \alpha \in [0, 1].$$

Si

$$f_\alpha^-(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+), f_\alpha^+(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+), \alpha \in [0, 1]$$

son equicontinuos ($\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|f_\alpha^-(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) - f_\alpha^-(t_0, (y_0)_\alpha^-, (y_0)_\alpha^+)| < \varepsilon$$

cuando

$$\| (t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) - (t_0, (y_0)_\alpha^-, (y_0)_\alpha^+) \| < \delta,$$

$\forall \alpha \in [0, 1]$) y uniformemente Lipschitz en el segundo y tercer argumento, es decir, existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f_\alpha^\pm(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) - f(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)| \leq L.(|y_\alpha^- - x_\alpha^+| + |y_\alpha^+ - x_\alpha^+|),$$

para cualquier $(t, y), (t, x) \in \mathcal{R}_0$ y para cualquier $\alpha \in [0, 1]$. Entonces el problema de valor inicial difuso (PVID)

$$y'(t) = f(t, y), y(t_0) = y_0,$$

tiene una solución única definida en un intervalo $[t_0, t_0 + k]$ para algún $k > 0$ y además, la solución única es de nivel $y_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$ caracterizada por el sistema de EDOs

$$\begin{cases} (y_\alpha^-)' = f_\alpha^-(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) \\ (y_\alpha^+)' = f_\alpha^+(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1]$$

Demostración: La equicontinuidad asegura que $f(t, y)$ es continua como una función de valor numérico difuso. La condición uniforme de Lipschitz prueba la condición de Lipschitz en el Teorema anterior y, por lo tanto, la existencia de la solución única del problema de valor inicial difuso

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

Ahora, una función diferenciable de Hukuhara $y(t)$ tiene conjuntos de α-niveles diferenciables y

$$(y)'_\alpha = [(y_\alpha^-)', (y_\alpha^+)'],$$

$\alpha \in [0, 1]$. Además, la ecuación $y' = f(t, y)$ se mantiene a nivel, así que obtenemos

$$\begin{cases} (y_\alpha^-)' = f_\alpha^-(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) \\ (y_\alpha^+)' = f_\alpha^+(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1]$$

Pero esta ecuación tiene una solución única. Como conclusión, obtenemos que la solución única del sistema caracteriza la solución única del problema del valor inicial difuso. ■

2.2.6. Ecuaciones diferenciales difusas bajo diferenciabilidad generalizada

2.2.6.1. Existencia y unicidad de dos soluciones

Las ecuaciones diferenciales difusas bajo la diferenciabilidad generalizada se investigaron primero en Bede y Gal (Bede y Gal 2005). Más tarde se propusieron resultados más generales en Bede y Gal (Bede y Gal 2010), bajo la diferenciabilidad fuertemente generalizada, existe un nuevo comportamiento que emerge en la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas, la existencia y la unicidad local de dos soluciones. Estos fenómenos muy interesantes han sido investigados por muchos autores (Chalco y Román 2008), (Chalco-Román 2009), (Lupulescu 2009), etc.

Lema 2.2.6.1.1 (Bede y Gal 2010). Sea $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que las funciones $y_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$, $\alpha \in [0,1]$ sean diferenciables, con y^- estrictamente creciente y y^+ estrictamente decreciente en $[0,1]$, de modo que exista las constantes $c_1 > 0, c_2 < 0$ satisfaciendo $(y_\alpha^-)' \geq c_1$ y $(y_\alpha^+)' \leq c_2$ para todo $\alpha \in [0,1]$.
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ continua con respecto a t, teniendo los conjuntos de nivel establecidos f_α^- y f_α^+ con derivadas parciales limitadas $\dfrac{\partial f_\alpha^-}{\partial \alpha}$ y $\dfrac{\partial f_\alpha^+}{\partial \alpha}$, con respecto a $\alpha \in [0,1], t \in [0,1]$.
Si

a) $y_1^- < y_1^+$
   o si

b) $y_1^- = y_1^+$ y el núcleo $[f(s)]_1$ consiste exactamente en un elemento para cualquier $s \in T = [a,b]$, entonces existe $h > a$ tal que la H-diferencia

$$y \ominus \int_a^t f(s)ds$$

existe para cualquier $t \in [a,h]$.

Demostración: Observamos que la H-diferencia de dos números $u \ominus v$ existe si y solo si las funciones $(u^- - v^-, u^+ - v^+)$ definen un número difuso. De hecho,

supongamos que $u \ominus v = z$, esto es equivalente a $z + v = u$ y tomando los α-niveles que tenemos de manera equivalente

$$[z_\alpha^-, z_\alpha^+] + [v_\alpha^-, v_\alpha^+] = [u_\alpha^-, u_\alpha^+],$$

es decir,

$$z_\alpha^- = u_\alpha^- - v_\alpha^-,$$

$$z_\alpha^+ = u_\alpha^+ - v_\alpha^+$$

$\alpha \in [0, 1]$. Según el Teorema de representación L-U, suposición de que $u \ominus v$ existe es equivalente al hecho de que $(u^- - v^-, u^+ - v^+)$ define un número difuso. Además, dado los requisitos de continuidad a izquierda y a derecha del Teorema 2.2.2.3.1 son evidentes siempre que u, v son números difusos, la existencia de $u \ominus v$ son equivalentes a

$$v_1^+ - v_1^- \leq u_1^+ - u_1^-,$$

y que $u^- - v^-$ es decreciente y $u^+ - v^+$ es no creciente.
Por lo tanto, para probar la existencia de $x \ominus \int_a^t f(s)$ en el enunciado, tenemos que probar

$$\left[\int_a^t f(s)ds\right]_1^- - \left[\int_a^t f(s)ds\right]_1^- \leq x_1^+ - x_1^- = len(x_1),$$

$x_\alpha^- - \left[\int_a^t f(s)ds\right]_\alpha^-$ es no decreciente,
$x_\alpha^+ - \left[\int_a^t f(s)ds\right]_\alpha^+$ es no creciente . Pero

$$\left[\int_a^t f(s)ds\right]_\alpha = \left[\int_a^t f_\alpha^-(s)ds, \int_a^t f_\alpha^+(s)ds\right],$$

lo que implica que las condiciones anteriores son equivalentes a

$$\int_a^t len([f(s)]_1)ds \leq len([x]_1),$$

$$(y_\alpha^-)' - \int_a^t \frac{\partial f_\alpha^-(s)}{\partial \alpha} ds \geq 0, \forall \alpha \in [0, 1]$$

y

$$(y_\alpha^+)' - \int_a^t \frac{\partial f_\alpha^+(s)}{\partial \alpha} ds \leq 0, \forall \alpha \in [0,1].$$

Como f es continua, está limitada y la función $len[f(t)]_1$ también está limitada. Sea M tal que

$$len[f(t)]_1 \leq M, t \in [a,b].$$

Además, tenga en cuenta que siempre tenemos

$$\int_a^t len[f(s)]_1 ds \leq M(t-a).$$

Supongamos que estamos bajo el supuesto a) en la declaración. Entonces, dado que parar todo $t \in [a, a + len([y]_1)/M]$, obtenemos

$$M(t-a) \leq len([y]_1),$$

por la desigualdad anterior se deduce que

$$\int_a^t len([f(s)]_1) ds \leq len([y]_1).$$

Sean $M_1, M_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_\alpha^-(s)}{\partial \alpha} \right| \leq M_1$$

y

$$\left| \frac{\partial f_\alpha^+(s)}{\partial \alpha} \right| \leq M_2$$

para todo $s \in [a,b]$ y $\alpha \in [0,1]$. Como $(y_\alpha^-)' \geq c_1$ para todo $\alpha \in [0,1]$, tenemos

$$\int_a^t \frac{\partial f_\alpha^-(s)}{\partial \alpha} ds \leq (t-a)M_1 \leq c_1 \leq (y_\alpha^-)'$$

para cualquier $t \in \left[a, a + \frac{c_1}{M_1}\right]$ y para todo $\alpha \in [0,1]$, lo que implica que $y_\alpha^- - \int f_\alpha^-(s) ds$ es no decreciente con respecto a α para $t \in \left[a, a + \frac{c_1}{M_1}\right]$. Del mismo modo, dado que $(y_\alpha^+) \leq c_2$ para todo $\alpha \in [0,1]$, tenemos

$$-\int_a^t \frac{\partial f_\alpha^+(s)}{\partial \alpha} ds \leq (t-a)M_2 \leq |c_2| \leq -(y_\alpha^+)'$$

y para cualquier $t \in \left[a, a + \frac{|c_2|}{M_2}\right]$ y para todo $\alpha \in [0,1]$, es decir, $y_\alpha^+ - \int_a^t f_\alpha^+(s)ds$ es no creciente con respecto a α.

Por el razonamiento anterior se deduce que $y \ominus \int_a^t f(s)ds$ existe, para todo $t \in [a,h]$, donde

$$h = \text{mín}\left\{\frac{c_1}{M_1}, \frac{|c_2|}{M_2}, \frac{len([y]_1)}{M}\right\} > 0.$$

Si estamos bajo el supuesto b), entonces se deduce que $len([f(s)]_1) = 0$, para todo $s \in [a,b]$ y

$$\int_a^t len([f(s)]_1)ds = len([y]_1) = 0,$$

para todo $t \in [a,b]$. Las otras dos desigualdades requeridas se pueden obtener mediante un razonamiento similar al anterior, para todo $t \in [a, a+h]$, donde $h = \text{mín}\left\{\frac{c_1}{M_1}, \frac{|c_2|}{M_2}\right\} > 0$, que prueba el Lema. ■

Teorema 2.2.6.1.2 ((**Bede y Gal 2005**) **y** (**Bede y Gal 2010**)). Sea $\mathcal{R}_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(y_0, q), p, q > 0, y_0 \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ y $f : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ sea continuo de modo que se cumplan los siguientes supuestos:

i. Existe una constante $L > 0$ tal que

$$D(f(t,y), f(t,x)) \leq L.D(y,x), \forall (t,y),(t,x) \in \mathcal{R}_0.$$

ii. Sea $[f(t,y)]_\alpha = [f_\alpha^-(t,y), f_\alpha^+(t,y)]$ sea la representación del conjunto de niveles de f, luego $f_\alpha^-, f_\alpha^+ : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}$ han acotado derivadas parciales con respecto a $\alpha \in [0,1]$, los limites son independientes de $(t,y) \in \mathcal{R}_0$ y $\alpha \in [0,1]$.

iii. Las funciones y_0^- y y_0^+ son diferenciables (como funciones de α), y existe $c_1 > 0$ con $(y_0)_\alpha^- \geq c_1$, y existe $c_2 < 0$ con $(y_0)_\alpha^+ \geq c_2$, para todo $\alpha \in [0,1]$ y tenemos las posibilidades

   a) $y_1^- < y_1^+$

   o

b) Si $y_1^- = y_1^+$ entonces el núcleo $[f(t,y)]_1$ consiste en exactamente un elemento para cualquier $(t,y) \in \mathcal{R}_0$, siempre que $[y]_1$ consista exactamente en un elemento.

Entonces el problema del valor inicial difuso

$$y'(t) = f(t,y), y(t_0) = y_0,$$

tiene exactamente dos soluciones definidas en un intervalo $[t_0, t_0 + k]$ para algún $k > 0$.

Demostración: La primera solución ya se demostró en los Lemas y Teoremas anteriores.

Primero, observamos que los supuestos (ii) y (iii) del Lema anterior que asegura la existencia de la H-diferencia

$$y_0 \ominus \left(- \int_{t_0}^{t} F(t, y(t))dt \right)$$

para $t \in [t_0, t_0 + c]$ para algún $0 < c \leq p$. Ahora consideramos $\mathcal{R}_1 = [t_0, t_0 + c] \times \overline{B}(y_0, q)$, $K = C([t_0, t_0 + c], \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y el operador $Q : K_0 \to K_0$ $(C[a,b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ es el espacio de funciones continuas $y : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ definido de la siguiente manera:

$$Q(y_0)(t) = y_0$$
$$Q(y)(t) = y_0 \ominus \left(- \int_{t_0}^{t} F(t, y(t))dt \right).$$

Observamos que Q está bien definido en $[t_0, t_0 + c]$ por la elección de c. Por el segundo Lema, dado por Lupulescu, y la condición de Lipchitz (i) del presente Teorema, f está acotada y tenemos

$$D(Q(y)(t), y_0) \leq \int_{t_0}^{t} D(f(t, y(t)), 0)dt \leq M(t - t_0),$$

Donde $M = \sup_{(t,y) \in \mathcal{R}_1} D(f(t,y), 0)$ es proporcionado por el segundo de Lema de Lupulescu. Sea $d = \text{mín}\{c, \dfrac{q}{M}\}$ y

$$K_1 = C([t_0, t_0 + d], \overline{B}(y_0, q)).$$

Entonces, para la restricción $Q : K_1 \to C([t_0, t_0 + d], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$, tenemos

$$D(Q(y)(t), y_0) \leq q,$$

es decir, $y \in K_1$ da $Q(y) \in K_1$, y K_1 es un espacio métrico completo considerado con la distancia uniforme. Ahora mostraremos que Q es una contracción. En efecto,

$$D(Q(y)(t), Q(x)(t)) \leq \int_{t_0}^{t} D(f(t, y(t)), f(t, x(t)))dt \leq 2L(t - t_0)D(y, x).$$

Ahora, eligiendo $k < \text{mín}\{d, \dfrac{1}{2L}\}$, Q se convierte en una contracción. El teorema de punto fijo de Banach implica la existencia de un punto fijo de Q. Para concluir, observamos que el punto fijo de Q es muy generalizado y diferenciable como en el caso (ii) de la Definición de la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara y resuelve el problema del valor inicial difuso

$$y'(t) = f(t, y), y(t_0) = y_0,$$

para cualquier $t \in [t_0, t_0 + k]$. La unicidad local de esta solución en $[t_0, t_0 + k]$ sigue por la unicidad del punto fijo para Q. ■

Teorema 2.2.6.1.3 (Chalco y Román 2008). Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ una función y denote $f(t) = \underline{f}(t; \alpha), \overline{f}(t; \alpha))$, para cada $\alpha \in [0, 1]$. Entonces
(1) Si f es (i)-diferenciable, entonces $\underline{f}(t; \alpha)$ y $\overline{f}(t; \alpha)$ son funciones diferenciables. y

$$f'(t) = (\underline{f'}(t; \alpha), \overline{f'}(t; \alpha))$$

(2) Si f es (ii)-diferenciable, entonces $\underline{f}(t; \alpha)$ y $\overline{f}(t; \alpha)$ son funciones diferenciables y

$$f'(t) = (\overline{f'}(t; \alpha), \underline{f'}(t; \alpha))$$

Demostración: (1) Ver la demostración en el Teorema 5.2 en (Kaleva 1987).
(2) Si $h < 0$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces tenemos

$$[f(t + h) - f(t)]^{\alpha} = [f_{\alpha}(t + h) - f_{\alpha}(t), g_{\alpha}(t + h) - g_{\alpha}(t)]$$

y multiplicando por $1/h$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{[f(t+h)-f(t)]^{\alpha}}{h} &= \frac{1}{h}[f_{\alpha}(t+h)-f_{\alpha}(t), g_{\alpha}(t+h)-g_{\alpha}(t)] \\ &= \left[\frac{g_{\alpha}(t+h)-g_{\alpha}(t)}{h}, \frac{f_{\alpha}(t+h)-f_{\alpha}(t)}{h}\right]\end{aligned}$$

Similarmente, obtenemos

$$\frac{[f(t)-F(t-h)]^{\alpha}}{h} = \left[\frac{g_{\alpha}(t)-g_{\alpha}(t-h)}{h}, \frac{f_{\alpha}(t)-f_{\alpha}(t-h)}{h}\right]$$

■

Ejemplo 1. Sea $[f(t)]^{\alpha} = [a+\alpha(b-a)e^{t}, c-\alpha(c-b)e^{t}]$, donde $[a+\alpha(b-a), c-\alpha(c-b)]$ es el alfa de corte de un intervalo difuso $A = (a, b, c)$ con $a \geq 0$. Ya que $[f'(t)]^{\alpha} = [a+\alpha(b-a)e^{t}, c-\alpha(c-b)e^{t}]$, la cual es diferenciable del tipo (i). Vemos que $[f'(t)]^{\alpha} = [-(c-\alpha(c-b))e^{-t}, -(a+\alpha(b-a))e^{-t}]$ es diferenciable del segundo tipo (ii).

2.2.6.2. Principio de extensión de Zadeh bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara

Los siguientes autores (Buckley y Feuring 2000), (Chalco y Román 2009), (Chalco, Rojas y Román 2007), (Mizukoshi et al. 2007) y (Palligkinis y Papageorgiou 2009), estudiaron que con el uso del principio de extensión de Zadeh obtenemos una función difusa generada a partir de una función no difusa $f(t, y(t))$ sobre $t \in [a, b]$. Por lo tanto el problema del valor incial difuso (PVID) se puede presentar como sigue:

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), \ t \in [a, b] \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{2.2.6.2.1}$$

Donde $f : [a, b] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es obtenido por el Principio de Extensión de Zadeh de una función continua $g : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Note que f es continua porque g es continua (ver (Román, Flores y Bassanezi 2001)) y por el Teorema 2.2.3.1.8, tenemos

$$[f(t, Y)]^{\alpha} = g(t, [Y]^{\alpha}),$$

Donde $g(t, A) = \{g(t, a)/a \in A\}$.

Asociado con la EDD (2.2.6.2.1), podemos considerar la ecuación diferencial:

$$y'(t) = g(t, y(t)), \qquad y(0) = c, \tag{2.2.6.2.2}$$

Donde $y'(t)$ es la derivada (crisp) de una función $y : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Obtenemos una solución difusa para (2.2.6.2.1) derivada de (2.2.6.2.2): Supongamos que el problema (2.2.6.2.2) tiene la solución $y(t, c)$. Entonces, aplicando el Principio de Extensión de Zadeh a $y(t, c)$ en relación al parámetro c, obtenemos la extensión $Y(t) = \widehat{y}(t, Y_0)$, para cada t fijo, la cual es una solución difusa del problema (2.2.6.2.1) (esta solución extendida se llamará la solución difusa del problema (2.2.6.2.1)). La idea de esta propuesta para obtener una solución difusa no es nueva, por ejemplo, véase (Ma, Friedman y Kandel 1999) y (Buckley y Feuring 200). Este procedimiento se establece con mayor precisión en el siguiente resultado:

Teorema 2.2.6.2.1. Sea $[Y_0]^\alpha \subset \mathbb{R}$. Suponga que g es continua, y que para cada $c \in \mathbb{R}$ existe una única solución $y(., c)$ del problema (2.2.6.2.2) y que $y(t, .)$ es continua en $\mathbb{R}$ para cada $t \in [a, b]$ fijo. Entonces, existe una única solución difusa $Y(t) = \widehat{y}(t, Y_0)$ de la EDD (2.2.6.2.1).

Demostración: Como el problema (2.2.6.2.1) tiene una solución única $y(t, c)$ y es continua en $\mathbb{R}$, $y(t, .) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es continua para cada $t \in [a, b]$ fijo. Entonces, existe una única solución $Y(t) = \widehat{y}(t, Y_0)$ de la EDD (2.2.6.2.1). ■

Ejemplo 2. Consideremos el problema de valor inicial difuso

$$\begin{cases} Y' = -Y(t), \\ Y(0) = C, \end{cases}$$

donde la condición inicial C es un intervalo difuso.

Este problema tiene el siguiente problema asociado:

$$y'(t) = -y(t), \qquad x(0) = c,$$

la cuál posee la solución exacta

$$y(t,c) = ce^{-t}$$

Note que $y(t,c)$ es continua en $c \in \mathbb{R}$ para cada $t \geq 0$ fijo. Aplicamos el Principio de Extensión de Zadeh a $y(t,c)$ en relación a c, para cada $t \geq 0$ fijo. Entonces obtenemos la única solución difusa $Y(t) = \widehat{y}(t,C)$ del ejemplo 1 para cualquier condición inicial C, con C un intervalo difuso, la cual es dada por

$$Y(t) = C.e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

2.2.6.3. Extensión del Teorema de caracterización

Ampliaremos en esta sección el resultado de la Caracterización del Teorema 2.2.5.1.5 al caso de la diferenciabilidad generalizada.

Teorema 2.2.6.3.1 (**(Bede 2008) y (Bede y Gal 2010)**). Sea $\mathcal{R}_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(y_0, q)$,$p > 0, y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y $f : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$[f(t,y)]_\alpha = [f_\alpha^-(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+), f_\alpha^+(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+)], \forall \alpha \in [0,1]$$

y se cumplen los siguientes supuestos:

i. $f_\alpha^\pm(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+)$ son equicontinuos, uniformemente Lipschitz en su segundo y tercer argumento, es decir, existe una constante $L > 0$ tal que

$$\mid f_\alpha^\pm(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+) - f_\alpha^\pm(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) \mid \leq L(\mid y_\alpha^- - x_\alpha^- \mid + \mid y_\alpha^+ - x_\alpha^+ \mid),$$

$\forall (t,y), (t,x) \in \mathcal{R}_0, \alpha \in [0,1]$.

ii. $f_\alpha^-, f_\alpha^+ : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales acotadas con respecto a $\alpha \in [0,1]$ los limites son independientes de $(t,y) \in \mathcal{R}_0$ y $\alpha \in [0,1]$.

iii. Las funciones y_0^- y y_0^+ son diferenciables $c_1 > 0$ con $(y_0)_\alpha^- \geq c_1$ y $c_2 < 0$ con $(y_0)_\alpha^+ \leq c_2$, para todo $\alpha \in [0,1]$, y tenemos las siguientes posibilidades

a) $(y_0)_1^- < (y_0)_1^+$

o

b) Si $(y_0)_1^- = (y_0)_1^+$ entonces el núcleo $[(t, y, u)]_1$ consiste exactamente en un elemento para cualquier $(t, y) \in \mathcal{R}_0$, siempre que $[y]_1$ y $[u]_1$consisten exactamente en un elemento.

Entonces el problema del valor inicial difuso

$$y'(t) = f(t, y), y(t_0) = y_0 \tag{2.2.6.3.1}$$

es equivalente en algún intervalo $[t_0, t_0 + k]$ con la unión de las siguientes dos EDOs:

$$\begin{cases} (y_\alpha^-)'(t) = f_\alpha^-(t, y_\alpha^-(t), y_\alpha^+(t)) \\ (y_\alpha^+)'(t) = f_\alpha^+(t, y_\alpha^-(t), y_\alpha^+(t)) \quad , \alpha \in [0, 1] \\ y_\alpha^-(t_0) = (y_0)_\alpha^-, y_\alpha^+(t_0) = (y_0)_\alpha^+ \end{cases} \tag{2.2.6.3.2}$$

$$\begin{cases} (y_\alpha^-)'(t) = f_\alpha^+(t, y_\alpha^-(t), y_\alpha^+(t)) \\ (y_\alpha^+)'(t) = f_\alpha^-(t, y_\alpha^-(t)(t), y_\alpha^+(t)) \quad \alpha \in [0, 1] \\ (y_\alpha^-(t_0) = (y_0)_\alpha^-, y_\alpha^+(t_0) = (y_0)_\alpha^+ \end{cases} \tag{2.2.6.3.3}$$

Demostración: La condición (i) del Teorema asegura la existencia de una solución única para cada uno de los sistemas de ecuaciones (2.2.6.3.2) y (2.2.6.3.3) para cualquier $\alpha \in [0, 1]$. Denotemos estas soluciones por $(y_\alpha^-)^i, (y_\alpha^+)^i$ y $(y_\alpha^-)^{ii}, (y_\alpha^+)^{ii}$ respectivamente. La equicontinuidad de $f_\alpha^\pm$ asegura la continuidad de f como una función de valor difuso, mientras que la condición de Lipschitz en (i) es suficiente para la correspondiente propiedad de Lipschitz de f. Todas estas condiciones juntas aseguran la existencia y la unicidad de dos soluciones y^i y y^{ii} para el problema de valor inicial difuso (2.2.6.3.1). Sea $[y^i]_\alpha = [(y^i)_\alpha^-, (y^i)_\alpha^+]$ y $[y^{ii}]_\alpha = [(y^{ii})_\alpha^-, (y^{ii})_\alpha^+], \alpha \in [0, 1]$.

Entonces, dado que y^i es Hukuhara diferenciable, entonces

$$[(y^i)']_\alpha = [\big((y^i)_\alpha^-\big)', \big((y^i)_\alpha^+\big)']$$

y $(y^i)^-_\alpha, (y^i)^+_\alpha$ es una solución del sistema (2.2.6.3.2). Dado que $(y^-_\alpha)^i, (y^+_\alpha)^i$ es la solución única del sistema que obtenemos

$$\left((y^i)^-_\alpha, (y^i)^+_\alpha\right) = \left((y^-_\alpha)^i, (y^+_\alpha)^i\right), \forall \alpha \in [0,1].$$

Un razonamiento similar para la solución (ii)-diferenciable, implica

$$[(y^{ii})']_\alpha = [\left((y^{ii})^+_\alpha\right)', \left((y^{ii})^-_\alpha\right)'],$$

entonces, $(y^{ii})^+_\alpha, (y^{ii})^-_\alpha$ es una solución del segundo sistema (2.2.6.3.3) considerado en el Teorema, entonces

$$\left((y^{ii})^-_\alpha, (y^{ii})^+_\alpha\right) = \left((y^-_\alpha)^{ii}, (y^+_\alpha)^{ii}\right), \forall \in [0,1]$$

Como conclusión, las soluciones del problema de valor inicial (2.2.6.3.1) son exactamente las de los sistemas dados (2.2.6.3.2) y (2.2.6.3.3). ■

Observación 2.2.6.3.2. Formulamos una particularización de la existencia, unicidad y caracterización del teorema anterior para problemas de valor inicial difusos con datos triangulares. Denotemos por $\mathbb{R}_\mathcal{T}$ el espacio de los números difusos triangulares.

Teorema 2.2.6.3.3. Sea $\mathcal{R}_0 = [t_0, t_0 + p] \times (\overline{B}(y_0, p) \cup \mathbb{R}_\mathcal{T}), p > 0, y_0 \in \mathbb{R}_\mathcal{T}$ y $f : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}_\mathcal{T}$ tal que

$$f(t,y) = (f^-(t, y^-, y^1, y^+), f^1(t, y^-, y^1, y^+), f^+(t, y^-, y^1, y^+))$$

y se cumplen los siguientes supuestos:

i. f^-, f^1, f^+ son continuos, Lipschitz en su segundo hasta el último argumento.

ii. $y_0 = (y^-_0, y^1_0, y^+_0)$ es un número triangular no trivial tal que $y^-_0 < y^1_0 < y^+_0$. Entonces

   a. El problema de valor inicial difuso

   $$y'(t) = f(t,y), y(t_0) = y_0 \tag{2.2.6.3.4}$$

   tiene exactamente dos soluciones de valor triangular en algún intervalo $[t_0, t_0 + k]$.

b. El problema (2.2.6.3.4) es equivalente a la unión de dos EDOs siguientes:

$$\begin{cases} (x^-)' = f^-(t, y^-, y^1, y^+) \\ (y^1)' = f^1(t, y^-, y^1, y^+) \\ (y^+)' = f^+(t, y^-, y^1, y^+) \\ y^-(t_0) = y_0^-, y^1(t_0) = y_0^1, y^+(t_0) = y_0^+ \end{cases} \tag{2.2.6.3.5}$$

$$\begin{cases} (y^-)' = f^+(t, y^-, y^1, y^+) \\ (y^1)' = f^1(t, y^-, y^1, y^+) \\ (y^+)' = f^-(t, y^-, y^1, y^+) \\ y^-(t_0) = y_0^-, y^1(t_0) = y_0^1, y^+(t_0) = y_0^+ \end{cases} \tag{2.2.6.3.6}$$

Demostración: Comprobamos que dado que f tiene un valor triangular, las soluciones de (2.2.6.3.6) tienen un valor triangular. Además, las condiciones (i) y (ii) aseguran que el problema (2.2.6.3.6) tenga dos soluciones únicas localmente. Es fácil comprobar que se cumplen las condiciones del Teorema 2.2.6.1.2 y que los problemas (2.2.6.3.2) y (2.2.6.3.3), en el caso de funciones de valor triangular, son equivalentes a (2.2.6.3.5) y (2.2.6.3.6) respectivamente. ■

Ejemplo 3. Consideremos

$$\begin{cases} y' = -(1, 2, 3).y \\ y(0) = (1, 2, 3) \end{cases}$$

con números triangulares difusos. Consideramos este problema bajo la interpretación que usa el principio de extensión.

La solución del problema obtenido simbólicamente del PVI para la EDO

$$\begin{cases} y' = -a.y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con la solución

$$y(t) = y_0 e^{-at}.$$

Usando el Principio de Extensión de Zadeh obtenemos la solución difusa

$$y(t) = (1, 2, 3)e^{-(1,2,3)t},$$

se puede escribir en su conjunto de α-nivel como

$$y(t)_\alpha^- = (1 + \alpha)e^{-(3-\alpha)t}$$

$$y(t)_\alpha^+ = (3 - \alpha)e^{-(1+\alpha)t}$$

que existe para $t \in [0, 1]$.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

3.1. Materiales y lugar de ejecución

3.1.1. Lugar

Facultad de ciencias de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo.

3.1.1.1. Materiales

- Bibliografía básica y especializada.
- Artículos impresos y en línea.
- Libros impresos y en línea.

3.1.1.2. Equipos

- Laptop.
- Impresora.
- Fotocopiadora.
- Software Matemático Matlab.

3.1.1.3. Otros

- Tesista. (Acopio, análisis y búsqueda de información como artículos y libros).
- Asesor.
- Revisores de Tesis.
- Personal administrativo.
- Especialistas en el tema de tesis.

3.1.2. Métodos

3.1.2.1. Técnicas de recolección de datos

Ordenar la información obtenida de diferentes artículos y libros utilizados sobre el tema de investigación, además se revisará toda la información documental que se utilizará para definir correctamente el problema de Cauchy difuso junto a los teoremas y definiciones que se hará uso en este proyecto. Posteriormente se implementará el método de Runge-Kutta de cuarto orden para luego programarlo en el software matemático Matlab y con la ayuda de dicho software se mostrará los puntos de solución gráficamente. Después se discutirá los resultados obtenidos y finalmente se presentarán las conclusiones sobre el tema investigado.

3.1.3. Tipo de investigación

El nivel de investigación será del tipo descriptivo, puesto que se describe el método de Runge-Kutta de cuarto orden para solucionar el problema de Cauchy difuso.

Capítulo 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se describe el método de Runge-Kutta de cuarto orden para el problema de Cauchy difuso autónomo bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara.

4.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara

La contribución de esta sección está dedicada a la generalización del método Runge-Kutta (RK) de cuarto orden para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias difusas (EDODs) bajo la H-diferenciabilidad generalizada empleando los teoremas de caracterización.

Ahora consideramos el enfoque difuso de este método para resolver PVID **autónoma** (2.2.6.2.1). Para un α fijo. para integrar el sistema dado en (2.2.6.3.2) o (2.2.6.3.3) sobre el intervalo $[0, A]$ discretizamos los puntos de la cuadrícula igualmente espaciados $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = A$ donde la solución exacta en t_n se aproxima por

$y_{1_n}(t_n;r) = [\underline{y_1}_n(t_n;\alpha), \overline{y_1}_n(t_n;\alpha)]$ tal que

$$t_n = t_0 + nh, h = \frac{A}{N}, 0 \leq n \leq N$$

Denote la solución exacta del sistema (2.2.6.3.2) en el punto de rejilla t_n por $[\underline{Y_1}_n(t_n;\alpha), \overline{Y_1}_n(t_n;\alpha)]$ y de manera similar para el sistema (2.2.6.3.3) por $[\underline{Y_2}_n(t_n;\alpha), \overline{Y_2}_n(t_n;\alpha)]$. suponga que las soluciones aproximadas se indican en t_n por $y_{1_n}(t_n;\alpha) = [\underline{y_1}_n(t_n;\alpha), \overline{y_1}_n(t_n;\alpha)]$ y $y_{2_n}(t_n;\alpha) = [\underline{y_2}_n(t_n;\alpha), \overline{y_2}_n(t_n;\alpha)]$ bajo (i) y (ii)-diferenciabilidad, respectivamente. Entonces aplicamos el método Runge-kutta dado por Wu y Xia (Wu y Xia 2006) a una EDOD y queda de la siguiente manera, tal que describimos el método Runge-Kutta para el caso difuso de la siguiente manera:

$y_{1_{n+1}}(t_{n+1};\alpha) = y_{1_n}(t_n;\alpha) + hk_{1_1}^{(1)}(y(t_n;\alpha)) + \frac{1}{6}h^2k_{1_1}^{(2)}(y(t_n;\alpha)) + \frac{1}{3}h^2k_{3_1}^{(2)}(y(t_n;\alpha))$,

$y_{2_{n+1}}(t_{n+1};\alpha) = y_{2_n}(t_n;\alpha) + hk_{1_2}^{(1)}(y(t_n;\alpha)) + \frac{1}{6}h^2k_{1_2}^{(2)}(y(t_n;\alpha)) + \frac{1}{3}h^2k_{3_2}^{(2)}(y(t_n;\alpha))$,

Donde

$[k_1^{(1)}(y(t;\alpha))]_\alpha = [k_{1_1}^{(1)}(y(t;\alpha)), k_{1_2}^{(1)}(y(t;\alpha))]$,

$[k_1^{(2)}(y(t;\alpha))]_\alpha = [k_{1_1}^{(2)}(y(t;\alpha)), k_{1_2}^{(2)}(y(t;\alpha))]$,

$[k_3^{(2)}(y(t;\alpha))]_\alpha = [k_{3_1}^{(2)}(y(t;\alpha)), k_{3_2}^{(2)}(y(t;\alpha))]$,

$[k_{1_1}^{(1)}(y(t;\alpha))] = \text{mín}\{f(u)|\ u \in [y_1(t;\alpha), y_2(t;\alpha)]\}$,

$[k_{1_2}^{(2)}(y(t;\alpha))] = \text{máx}\{f(u)|\ u \in [y_1(t;\alpha), y_2(t;\alpha)]\}$,

y

$k_{1_1}^{(2)}(y(t;\alpha)) = \text{mín}\{f'(u)|\ u \in [y_1(t;\alpha), y_2(t;\alpha)]\}$,

$k_{1_2}^{(2)}(y(t;\alpha)) = \text{máx}\{f'(u)|\ u \in [y_1(t;\alpha), y_2(t;\alpha)]\}$,

$k_{3_1}^{(2)}(y(t;\alpha)) = \text{mín}\{f'(w)|\ w \in [z_{2_1}(y(t;\alpha)), z_{2_2}(y(t;\alpha))]\}$,

$k_{3_2}^{(2)}(y(t;\alpha)) = \text{máx}\{f'(w)|\ w \in [z_{2_1}(y(t;\alpha)), z_{2_2}(y(t;\alpha))]\}$,

donde

$z_{2_1}(y(t;\alpha)) = y_1(t;\alpha) + \frac{1}{2}hk_{2_1}^{(1)}(y(t;\alpha))$,

$z_{2_2}(y(t;\alpha)) = y_2(t;\alpha) + \frac{1}{2}hk_{2_2}^{(1)}(y(t;\alpha))$.

Así que

$[k_2^{(1)}(y(t;\alpha))]_\alpha = [k_{2_1}^{(1)}(y(t;\alpha)), k_{2_2}^{(1)}(y(t;\alpha))]$,

$k_{2_1}^{(1)}(y(t;\alpha)) = \text{mín}\{f(v)|\ v \in [z_{1_1}(y(t;\alpha)), z_{1_2}(y(t;\alpha))]\},$
$k_{2_2}^{(1)}(y(t;\alpha)) = \text{máx}\{f(v)|\ v \in [z_{1_1}(y(t;\alpha)), z_{1_2}(y(t;\alpha))]\},$

4.1.1. Aplicación del método de Runge-Kutta a los teoremas de caracterización

Entonces, aplicamos el método de Runge-Kutta dado a los teoremas de caracterización y a su extensión, donde tenemos los siguientes casos:

Caso (i)-diferenciabilidad como:

$$\begin{cases} \underline{y_1}_{n+1}(t_{n+1};\alpha) = \underline{y_1}_n(t_n;\alpha) + h\underline{k_1}_1^{(1)} + \dfrac{h^2}{6}\underline{k_1}_1^{(2)} + \dfrac{h^2}{3}\underline{k_3}_1^{(2)}, \\ \\ \overline{y_1}_{n+1}(t_{n+1};\alpha) = \overline{y_1}_n(t_n;\alpha) + h\overline{k_1}_1^{(1)} + \dfrac{h^2}{6}\overline{k_1}_1^{(2)} + \dfrac{h^2}{3}\overline{k_3}_1^{(2)}, \end{cases} \tag{4.1.1.0.1}$$

y para el caso (ii)-diferenciabilidad, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \underline{y_2}_{n+1}(t_{n+1};\alpha) = \underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + h\underline{k_1}_2^{(1)} + \dfrac{h^2}{6}\underline{k_1}_2^{(2)} + \dfrac{h^2}{3}\underline{k_3}_2^{(2)}, \\ \\ \overline{y_2}_{n+1}(t_{n+1};\alpha) = \overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + h\overline{k_1}_2^{(1)} + \dfrac{h^2}{6}\overline{k_1}_2^{(2)} + \dfrac{h^2}{3}\overline{k_3}_2^{(2)}, \end{cases} \tag{4.1.1.0.2}$$

Donde $k_{1_1}^{(1)}, k_{1_1}^{(2)}, k_{3_1}^{(2)}, k_{1_2}^{(1)}, k_{1_2}^{(2)}, k_{3_2}^{(2)}$ para (i) y (ii)-diferenciabilidad, respectivamente, son los siguientes:

$$\begin{cases} \underline{k_1}_1^{(1)} = \underline{f}(y_{1_n}(t_n;\alpha)),\ \overline{k_1}_1^{(1)} = \overline{f}(y_{1_n}(t_n;\alpha)), \\ \\ \underline{k_1}_1^{(2)} = \underline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha));\ \overline{k_1}_1^{(2)} = \overline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha)), \\ \\ \underline{k_3}_1^{(2)} = \underline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha) + \dfrac{1}{2}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha) + \dfrac{1}{4}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha)))), \\ \\ \overline{k_3}_1^{(2)} = \overline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha) + \dfrac{1}{2}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha) + \dfrac{1}{4}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha)))). \end{cases} \tag{4.1.1.0.3}$$

y

$$\begin{cases} \underline{k_1}_2^{(1)} = \underline{f}(y_{2_n}(t_n;\alpha)), \overline{k_1}_2^{(1)} = \overline{f}(y_{2_n}(t_n;\alpha)), \\ \\ \underline{k_1}_2^{(2)} = \overline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha)), \overline{k_1}_2^{(2)} = \underline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha)), \\ \\ \underline{k_3}_2^{(2)} = \overline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{2}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha)))), \\ \\ \overline{k_3}_2^{(2)} = \underline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{2}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha)))). \end{cases} \tag{4.1.1.0.4}$$

4.1.1.1. Ejemplo numérico

En esta subsección, se da un ejemplo numérico para demostrar la efectividad del método propuesto. Para tal fin se aplica el método propuesto de Runge-Kutta extendido de cuarto orden bajo (i) y (ii)-diferenciabilidad. Por otra parte, la función de error absoluto, que es la diferencia entre las soluciones aproximadas difusas $[Y_n]^\alpha = [\underline{Y}_n^\alpha, \overline{Y}_n^\alpha]$ y las soluciones exactas correspondientes $y(t;\alpha) = [\underline{y}(t;\alpha), \overline{y}(t;\alpha)]$ es decir, $[N_e]\alpha = [\underline{N}_e^\alpha, \overline{N}_e^\alpha] = [|\underline{Y}_n^\alpha - \underline{y}(t;\alpha)|, |\overline{Y}_n^\alpha - \overline{y}(t;\alpha)|$, se proporciona para el ejemplo.

Observación 4.1.1.1.1. Como se afirma en el Teorema 2.2.6.1.2 en (Bede y Gal 2010), la solución de las EDD no es única. Aunque esto puede parecer una desventaja, esta deficiencia se puede utilizar como una ventaja, ya que a veces podemos tener la oportunidad de elegir la solución más cercana al sistema y que refleje mejor el comportamiento del sistema. Esta ventaja se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente EDOD (Palligkinis y Papageorgiou 2009):

$$y'(t) = \overline{c}y(t), \quad y(0) = y_0, \tag{4.1.1.1.1}$$

donde $y(t)$ y $\overline{c} = (-4, -3, -2)$ son números difusos. Sea también $I = [0, 1]$ y $y(0;\alpha) = [8 + 0.5\alpha, 9 - 0.5\alpha]$.

Hallamos el α de corte de $\overline{c}$, entonces:

$(\overline{c})_\alpha = [-(4-\alpha), -(\alpha+2)] = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$ y además $y(0;\alpha) = [8+0.5\alpha, 9-0.5\alpha] = [k_1(\alpha), k_2(\alpha)]$.

La solución bajo (i)-diferenciabilidad es $Y(t,\alpha) = [Y_1(t,\alpha), Y_2(t,\alpha)$ entonces, tenemos

$Y_1(t,\alpha) = A_{11}(\alpha)e^{wt} + A_{12(\alpha)}e^{-wt}$

$Y_2(t,\alpha) = A_{21}(\alpha)e^{wt} + A_{22}(\alpha)e^{-wt}$.

$w = \sqrt{c_1(\alpha)c_2(\alpha)},\ \lambda = \sqrt{\dfrac{c_1(\alpha)}{c_2(\alpha)}}$

$A_{11}(\alpha) = 0.5(k_1(\alpha) - \lambda k_2(\alpha))$

$A_{12}(\alpha) = 0.5(k_1(\alpha) + \lambda k_2(\alpha))$

$A_{21}(\alpha) = 0.5(\dfrac{k_1(\alpha)}{\lambda} + k_2(\alpha))$

$A_{22}(\alpha) = 0.5(\dfrac{k_1(\alpha)}{\lambda} - k_2(\alpha))$

Entonces, $w = \sqrt{(4-\alpha)(2+\alpha)}, \lambda = \sqrt{\dfrac{4-\alpha}{2+\alpha}}$, reemplazando se tiene:

$$A_{11}(\alpha) = \frac{1}{2}\left((8+0.5\alpha) - \sqrt{\frac{4-\alpha}{2+\alpha}}(9-0.5\alpha)\right)$$

$$A_{22}(\alpha) = \frac{1}{2}\left((8+0.5\alpha) + \sqrt{\frac{4-\alpha}{2+\alpha}}(9-0.5\alpha)\right)$$

$$A_{21}(\alpha) = \frac{1}{2}\left(-\frac{8+0.5\alpha}{\sqrt{\dfrac{4-\alpha}{\alpha+2}}} + (9-0.5\alpha)\right)$$

$$A_{22}(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{8+0.5\alpha}{\sqrt{\dfrac{4-\alpha}{\alpha+2}}} + (9-0.5\alpha)\right)$$

Entonces, tenemos:

$$\underline{Y_1}(t;\alpha) = \frac{1}{2}\left[(8+0.5\alpha) - (9-0.5\alpha)\sqrt{\frac{4-\alpha}{2+\alpha}}\right]e^{\sqrt{(4-\alpha)(2+\alpha t}} + \frac{1}{2}\left[(8+0.5\alpha) + (9-0.5\alpha)\sqrt{\frac{4-\alpha}{2+\alpha}}\right]e^{-\sqrt{(4-\alpha)(2+\alpha)}t}$$

$$\overline{Y_1}(t;\alpha) = \frac{1}{2}\left[(9-0.5\alpha) - (8+0.5\alpha)\sqrt{\frac{4-\alpha}{2+\alpha}}\right] e^{\sqrt{(4-\alpha)(2+\alpha t}t} +$$
$$\frac{1}{2}\left[(9-0.5\alpha) + (8+0.5\alpha)\sqrt{\frac{4-\alpha}{2+\alpha}}\right] e^{-\sqrt{(4-\alpha)(2+\alpha)}t}$$

La (ii)-solución es dado por

$y'(t) = [-(\alpha+4), -(\alpha+2)][(\underline{Y}_2^\alpha)', (\overline{Y}_2^\alpha)'] = [-(4+\alpha)(\overline{Y}_2^\alpha)', -(\alpha+2)(\underline{Y}_2^\alpha)']$, pero en el caso de (ii)-diferenciabilidad se cambia de posición los valores del intervalo para poder resolverlo, entonces $y'(t) = [-(4+\alpha)(\overline{Y}_2^\alpha)', -(\alpha+2)(\underline{Y}_2^\alpha)']$.

Puesto que la solución se puede expresar como $y(t) = y_0(t)e^{\overline{c}t}$, entonces la solución queda como:

$$\underline{Y_2}(t;\alpha) = (8+0.5\alpha)e^{-(2+\alpha)t},$$
$$\overline{Y_2}(t;\alpha) = (9-0.5\alpha)e^{-(4-\alpha)t}.$$

La solución aproximada bajo (i)-diferenciabilidad utilizando las ecuaciones (4.1.1.0.1) y (4.1.1.0.3) es como sigue

$$\begin{cases} \underline{k_1}_1^{(1)} = \underline{f}(y_{1_n}^\alpha) = -(4-\alpha)\overline{y_1}_n^\alpha, \\ \overline{k_1}_1^{(1)} = \overline{f}(y_{1_n}^\alpha) = -(2+\alpha)\underline{y_1}_n^\alpha, \\ \underline{k_1}_1^{(2)} = \underline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha)) = (4-\alpha)(2+\alpha)\underline{y_1}_n^\alpha, \\ \overline{k_1}_1^{(2)} = \overline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha)) = (4-\alpha)(2+\alpha)\overline{y_1}_n^\alpha, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \underline{k_3}_1^{(2)} = \underline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha)) + \frac{1}{2}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha)))) \\ = (4-\alpha)(2+\alpha)[\underline{y_1}_n^\alpha - \frac{1}{2}h(4-\alpha)\overline{y_1}_n^\alpha + \frac{1}{8}h(4-\alpha)(2+\alpha)\underline{y_1}_n^\alpha], \\ \overline{k_3}_1^{(2)} = \overline{f'}(y_{1_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{2}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hf(y_{1_n}(t_n;\alpha)))) \\ = (4-\alpha)(2+\alpha)[\overline{y_1}_n^\alpha - \frac{1}{2}h(2+\alpha)\underline{y_1}_n^\alpha + \frac{1}{8}h(4-\alpha)(2+\alpha)\overline{y_1}_n^\alpha]. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\underline{y_1}^{\alpha}_{n+1} = [1 + \dfrac{h^2}{2}(4-\alpha)(2+\alpha) + \dfrac{h^4}{24}(4-\alpha)^2(2+\alpha)^2]\underline{y_1}^{\alpha}_{n} - \\
\qquad [h(4-\alpha) + \dfrac{h^3}{6}(4-\alpha)^2(2+\alpha)]\overline{y_1}^{\alpha}_{n}, \\
\overline{y_1}^{\alpha}_{n+1} = [1 + \dfrac{h^2}{2}(2+\alpha)(4-\alpha) + \dfrac{h^4}{24}(2+\alpha)^2(4-\alpha)^2]\overline{y_1}^{\alpha}_{n} - \\
\qquad [h(2+\alpha) + \dfrac{h^3}{6}(2+\alpha)^2(4-\alpha)]\underline{y_1}^{\alpha}_{n}, \\
\qquad \underline{y_1}^{\alpha}_{0} = \underline{x}^{\alpha}_{0}, \\
\qquad \overline{y_1}^{\alpha}_{0} = \overline{x}^{\alpha}_{0},
\end{cases}
$$

Al emplear el método de Runge-Kutta para resolver la ecuación (4.1.1.0.2) para el caso de (ii)-diferenciabilidad, se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\underline{y_2}_{n+1}(t_{n+1};\alpha) &= \underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + h\underline{f}(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)) + \frac{1}{6}h^2\underline{f}'(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{3}h^2\underline{f}'(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \\
&\quad \frac{1}{2}h\underline{f}(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\underline{f}(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)))), \\
\overline{y_2}_{n+1}(t_{n+1};\alpha) &= \overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + h\overline{f}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)) + \frac{1}{6}h^2\overline{f'}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{3}h^2\overline{f'}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \\
&\quad \frac{1}{2}h\overline{f}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\overline{f}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)))), \\
\underline{f}(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)) &= \text{mín}\{b.u|\ u \in [\underline{y_2}(t_n;\alpha), \overline{y_2}(t_n;\alpha)], b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} \\
&= c_1(\alpha)\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) = -(2+\alpha)\underline{y_2}^{\alpha}_{n} \\
\overline{f}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)) &= \text{máx}\{b.u|\ u \in [\underline{y_2}(t_n;\alpha), \overline{y_2}(t_n;\alpha)], b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} \\
&= c_2(\alpha)\overline{y_2}^{\alpha}_{n} = -(4-\alpha)\overline{y_2}^{\alpha}_{n}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\underline{f'}(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)) &= \text{mín}\{b^2.u|\ u \in [\underline{y_2}(t_n;\alpha), \overline{y_2}(t_n;\alpha)], b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} \\
&= c_1^2(\alpha)\underline{y_2}^{\alpha}_{n} = (2+\alpha)^2\underline{y_2}^{\alpha}_{n}, \\
\overline{f'}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)) &= \text{máx}\{b^2.u|\ u \in [\underline{y_2}(t_n;\alpha), \overline{y_2}(t_n;\alpha)], b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} \\
&= c_2^2(\alpha)\overline{y_2}^{\alpha}_{n} = (4-\alpha)^2\overline{y_2}^{\alpha}_{n},
\end{aligned}
$$

Si

$$
\begin{aligned}
\underline{w}(t_n;\alpha) &= \underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{2}h\underline{f}(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\underline{f}(\underline{y_2}_{n}(t_n;\alpha))) \\
\overline{w}(t_n;\alpha) &= \overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{2}h\overline{f}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\overline{f}(\overline{y_2}_{n}(t_n;\alpha)))
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\underline{f'}(\underline{w}(t_n;\alpha)) &= \text{mín}\{b^2.s|\ s \in [\underline{z_1}_1(t_n;\alpha), \overline{z_1}_2(t_n;\alpha)], b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} \\
&= c_1^2(\alpha)\left\{\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{h}{2}c_1(\alpha)\left(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{h}{4}c_1(\alpha)\overline{y_2}_n(t_n;\alpha)\right)\right\} \\
&= (4-\alpha)^2\left[\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) - \frac{h}{2}(4-\alpha)\left(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) - \frac{h}{4}(4-\alpha)\overline{y_2}_n(t_n;\alpha)\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{f'}(\overline{w}(t_n;\alpha)) &= \text{máx}\{b^2.s|\ s \in [\underline{z_1}_1(t_n;\alpha), \overline{z_1}_2(t_n;\alpha)], b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} \\
&= c_2^2(\alpha)\left\{\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{h}{2}c_2(\alpha)\left(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{h}{4}c_2(\alpha)\underline{y_2}_n(t_n;\alpha)\right)\right\} \\
&= (2+\alpha)^2\left[\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) - \frac{h}{2}(2+\alpha)\left(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) - \frac{h}{4}(2+\alpha)\underline{y_2}_n(t_n;\alpha)\right)\right]
\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}
\underline{z_1}_1(t_n;\alpha) &= \underline{y_2}_n + \frac{1}{2}h\underline{f}\left(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\underline{f}(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha))\right)\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) \\
&\quad + \frac{h}{2}c_1(\alpha)\left(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{h}{4}c_1(\alpha)\underline{y_2}_n(t_n;\alpha)\right) \\
\overline{z_1}_2(t_n;\alpha) &= \overline{y_2}_n + \frac{1}{2}h\overline{f}\left(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\overline{f}(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha))\right)\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) \\
&\quad + \frac{h}{2}c_1(\alpha)\left(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{h}{4}c_1(\alpha)\overline{y_2}_n(t_n;\alpha)\right)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\underline{f}(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\underline{f}(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha))) &= \text{mín}\{b.k|\ k \in [\underline{z_2}_1(t_n;\alpha), \overline{z_2}_2(t_n;\alpha)], \\
&\quad b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} = c_1(\alpha)(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \\
&\quad \frac{1}{4}hc_1(\alpha)\underline{y_2}_n(t_n;\alpha)), \\
\overline{f}(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}h\overline{f}(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha))) &= \text{máx}\{b.k|\ k \in [\underline{z_2}_1(t_n;\alpha), \overline{z_2}_2(t_n;\alpha)], \\
&\quad b \in [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]\} = c_2(\alpha)(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \\
&\quad \frac{1}{4}hc_2(\alpha)\overline{y_2}_n(t_n;\alpha)),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\underline{z_2}_1(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha) &= \underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}\underline{f}(\underline{y_2}_n(t_n;\alpha)) \\
&= \underline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hc_1(\alpha)\underline{y_2}_n(t_n;\alpha),
\end{aligned}$$

$$\overline{z_2}_1(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha) = \overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}\overline{f}(\overline{y_2}_n(t_n;\alpha))$$
$$= \overline{y_2}_n(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hc_2(\alpha)\overline{y_2}_n(t_n;\alpha),$$

Del mismo modo utilizando las ecuaciones (4.1.1.0.2) y (4.1.1.0.4) y las igualdades encontradas con el método de Runge-Kutta, la solución aproximada del problema (4.1.1.1.1) bajo (ii)-diferenciabilidad es dado por:

$$\begin{cases} \underline{k_1}_2^{(1)} = \underline{f}(y_{2_n}^{\alpha}) = -(2+\alpha)\underline{y_2}_n^{\alpha}, \\ \overline{k_1}_2^{(1)} = \overline{f}(y_{2_n}^{\alpha}) = -(4-\alpha)\overline{y_2}_n^{\alpha}, \\ \underline{k_1}_2^{(2)} = \overline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha)) = (2+\alpha)^2\underline{y_2}_n^{\alpha}, \\ \overline{k_1}_2^{(2)} = \underline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha)) = (4-\alpha)^2\overline{y_2}_n^{\alpha}, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \underline{k_3}_2^{(2)} = \overline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{2}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha)))) \\ \qquad = (2+\alpha)^2\underline{y_2}_n^{\alpha}[1 - \frac{1}{2}h(2+\alpha) + \frac{1}{8}h(2+\alpha)^2], \\ \overline{k_3}_2^{(2)} = \underline{f'}(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{2}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha) + \frac{1}{4}hf(y_{2_n}(t_n;\alpha)))) \\ \qquad = (4-\alpha)^2\overline{y_2}_n^{\alpha}[1 - \frac{1}{2}h(4-\alpha) + \frac{1}{8}h(4-\alpha)^2]. \end{cases}$$

Al explotar la fórmula, tenemos:

$$\begin{cases} \underline{y_2}_{n+1}^{\alpha} = [1 - h(2+\alpha) + \frac{h^2}{2}(2+\alpha)^2 - \frac{h^3}{6}(2+\alpha)^3 + \frac{h^4}{24}(2+\alpha)^4]\underline{y_2}_n^{\alpha}, \\ \overline{y_2}_{n+1}^{\alpha} = [1 - h(4-\alpha) + \frac{h^2}{2}(4-\alpha)^2 - \frac{h^3}{6}(4-\alpha)^3 + \frac{h^4}{24}(4-\alpha)^4]\overline{y_2}_n^{\alpha}, \\ \underline{y_2}_0^{\alpha} = \underline{x}_0^{\alpha}, \\ \overline{y_2}_0^{\alpha} = \overline{x}_0^{\alpha}. \end{cases}$$

y que el intervalo se divide en $N = 10$ subintervalos equidistantes.

Las soluciones (i) y (ii) exactas y aproximadas, proporcionadas por el método RK de cuarto orden, se muestran en las Tablas 1 y 2 para $t = 1$. Junto a esto, la función de error absoluto (N_e^{α}) se presenta para demostrar la alta precisión de la técnica propuesta bajo ambos tipos de diferenciabilidad difusa.

Tabla 1. Solución aproximada del método RK de cuarto orden (y_1^{α}), solución exacta (Y_1^{α}) y la función de error absoluto (N_e^{α}) bajo (i)-diferenciabilidad en $t = 1$ para $\alpha \in [0, 1]$. Ejemplo 1.

α	$\underline{y_1}^{\alpha}$	$\underline{Y_1}^{\alpha}$	$\underline{N_e^{\alpha}}$	$\overline{y_1}^{\alpha}$	$\overline{Y_1}^{\alpha}$	$\overline{N_e^{\alpha}}$
0	-39.37800	-39.38288	4.887053e-3	28.71091	28.71421	3.290109e-3
0.1	-35.68715	-35.69184	4.692112e-3	27.03668	27.03995	3.270464e-3
0.2	-31.85046	-31.85487	4.409574e-3	25.07075	25.07393	3.175881e-3
0.3	-27.89779	-27.90183	4.045308e-3	22.82183	22.82483	3.0033787e-3
0.4	-23.85973	-23.86334	3.607525e-3	20.30125	20.30401	2.753871e-3
0.5	-19.76738	-19.77048	3.106500e-3	17.52300	17.52543	2.428150e-3
0.6	-15.65199	-15.65455	2.554228e-3	14.50356	14.50558	2.030975e-3
0.7	-11.54477	-11.54674	1.964035e-3	11.26176	11.26333	1.568946e-3
0.8	-7.476534	-7.477884	1.350158e-3	7.818726	7.819776	1.050765e-3
0.9	-3.477425	-3.478152	7.272931e-4	4.197568	4.198055	4.870125e-4
1	0.4233002	0.4231901	1.101453e-4	0.4233002	0.4231901	1.101453e-4

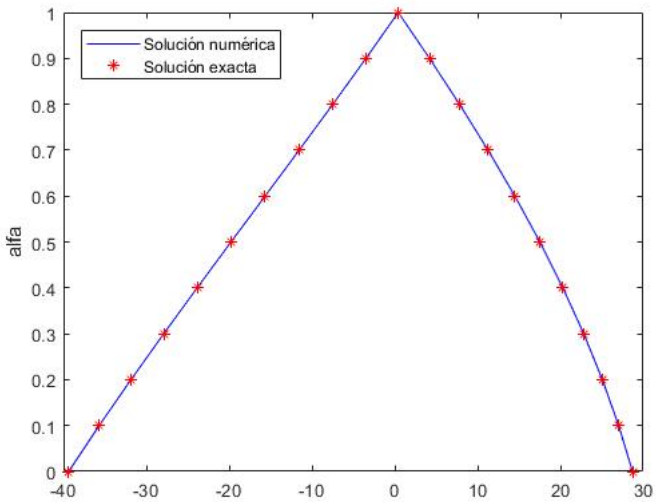

Figura 1: Soluciones aproximadas y exactas difusas en (i)-diferenciabilidad.

Tabla 2. Solución aproximada del método RK de cuarto orden (y_2^{α}), solución exacta (Y_2^{α}) y la función de error absoluto (N_e^{α}) bajo (ii)-diferenciabilidad en $t = 1$ para $\alpha \in [0, 1]$. Ejemplo 1.

α	$\underline{y_2}^{\alpha}$	$\underline{Y_2}^{\alpha}$	$\underline{N_e^{\alpha}}$	$\overline{y_2}^{\alpha}$	$\overline{Y_2}^{\alpha}$	$\overline{N_e^{\alpha}}$
0	1.082716	1.082682	3.412155e-5	0.165037	0.164840	1.967231e-4
0.1	0.9858142	0.9857742	3.998434e-5	0.1813540	0.181165	1.88891e-4
0.2	0.8975519	0.895055	4.632400e-5	0.1992806	0.199099	1.807677e-4
0.3	0.8171626	0.8171096	5.311482e-5	0.2189765	0.218803	1.723932e-4
0.4	0.7439475	0.7438872	6.032561e-5	0.2406125	0.240449	1.638032e-4
0.5	0.6772691	0.6772012	6.792032e-5	0.2643821	0.264227	1.550379e-4
0.6	0.6165465	0.6164706	7.585884e-5	0.2904936	0.290347	1.461398e-4
0.7	0.5612501	0.5611660	8.409766e-5	0.3191766	0.319039	1.371539e-4
0.8	0.5108971	0.5108045	9.259063e-5	0.3506831	0.350554	1.281272e-4
0.9	0.4650474	0.4649462	1.012896e-4	0.3852900	0.385170	1.191079e-4
1	0.4233002	0.4231900	1.101453e-4	0.4233002	0.423190	1.101453e-4

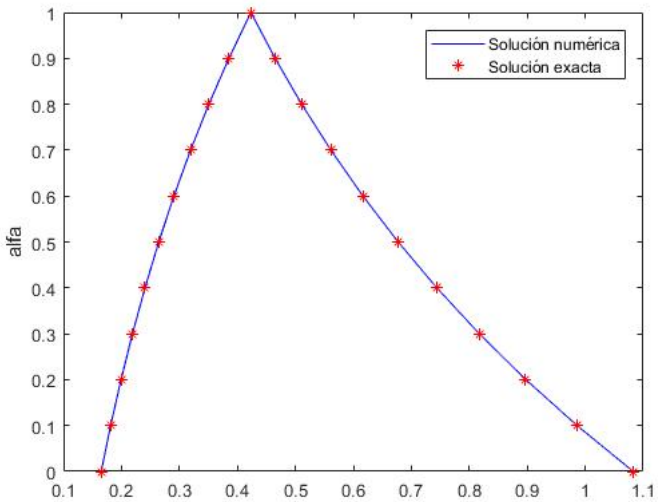

Figura 2: Soluciones aproximadas y exactas difusas en (ii)-diferenciabilidad.

Para resumir, declaramos brevemente los siguientes resultados que se han logrado:

i. La EDD autónomo dado se ha resuelto utilizando el método RK de cuarto orden bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara, con menor costo

computacional, especialmente para los casos en que f' no es más costoso de evaluar que f en comparación con el método RK clásico de cuarto orden dado en (Burden y Douglas 2011).

ii. El método se ha derivado bajo ambos tipos de derivados difusos, y el ejemplo se ha probado bajo (i) y (ii)-diferenciabilidad. Sin embargo los resultados ilustran que el caso de (i)-diferenciabilidad no tiene una eficiencia adecuada para las soluciones numéricas de EDODs.

iii. Para ver la gráfica de las soluciones, se usó el Sofware Matemático Matlab.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Se analizó la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara (gH-diferenciabilidad) y se observó las ventajas que tiene frente a la diferenciabilidad de Hukuhara, para esto de usó la diferencia generalizada de Hukuhara, con esto obtuvimos que la longitud del intervalo de solución sea decreciente. Además, se usaron los Teoremas de Caracterización y su extensión, con esto logramos caracterizar el problema de Cauchy difuso en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), entonces a este sistema aplicamos el método de Runge-Kutta (RK) y describimos su algoritmo.

Es por eso, que se presentó un ejemplo del problema de Cauchy a la cuál le aplicamos el método de Runge-kutta de cuarto orden bajo la H-diferenciabilidad generalizada y obtuvimos mejores resultados en la solución exacta y numérica, posteriormente hemos derivado una estimación de error adecuada del error local, y proporcionamos estrategias difusas de elección de diferenciabilidad para este tipo de sistema de EDOD. Además, según Bede: "La importancia de convertir una EDD en un sistema de EDO es que cualquier método numérico adecuado para las EDO pueden implementarse"(Bede 2008). En este trabajo de tesis, se resolvió una EDD bajo la H-diferenciabilidad generalizada mediante el método RK de cuarto orden y también se proporcionó las gráficas de ambas soluciones.

La importancia de este trabajo es desde un punto de vista teórico, así como de

aplicaciones numéricas, y es que el presente método Runge-Kutta está desarrollado para resolver una clase general de EDODs autónomas.

Capítulo 6

BIBLIOGRAFÍA

Abbasbandy, S. and Allahviranloo, T. 2004.Numerical solution of fuzzy differential equation by Runge-Kutta method. Nonlinear Studies, Vol. 11: 117129.

Abbod, M. F.; von Keyserlingk, D. G.; Linkens, D. A. and Mahfouf, M. 2001. Survey of utilization of fuzzy technology in medicine and healthcare. Fuzzy Sets and Systems 120, No. 2, 331-349.

Agarwal, R.P.; Lakshmikantham, V. and Nieto, J. J. 2010. Om the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty. Nonlinear Anal. 72, 2859-2862.

Ahmad, M. Z.; Hasan, M. K. and De Baets, B. 2018. Analytical and numerical solutions of fuzzy differential. Information Sciences 236, 156-167.

Ahmadian, A.; Chang, C. S. and Salahshour, S. 2016. Fuzzy approximate solutions to fractional differential equations under uncertainty: Operational matrices approach. IEEE Transaction on fuzzy Systems, DOI:10.1109/TFUZZ.2554156.

Ahmadian, A.; Salahshour, S.; Seng Chan, C. y Baleanu, D. 2016. Numerial solutions of fuzzy differential equations by an efficient Runge-Kutta method with generalized differentiability. Fuzzy Sets and Systems.

Alikhani, R.; Bahrami, F. and Jabbari, A. 2012. Existence of global solutions nonlinear fuzzy Volterra integro-differential equations. Nonlinear Analysis 75, 1810-1821.

Allahviranloo, T. and Gholami. 2012. Note on "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations". Journal of Fuzzy Set Valued Analysis.

Ban, A. I. and Bede, B. 2003. Cross product of L-R fuzzy numbers and applications. Annals of the University of Oradea, Fasc. Math. 9, 95-108.

Barros, L. C., Bassanezi, R. C. and Tonelli, P. A. 2000. Fuzzy modelling in population dynamics. Ecological modeling 128, No. 1, 27-33.

Barros, L. C.; Bassanezi, R. C. and Tonelli, P. A. On the continuity of the Zadeh's extension.

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. 2010. Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. Campinas, UNICAMP/IMECC.

Bassanezi, S. and Marín, R. 2002. Fuzzy logic in medicine. Heidelberg, Boston, Physica-Verlag.

Bede, B. 2013. Mathematics of fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

Bede, B. 2008. Note on "numerical solutions of fuzzy differential equations by predictor-corrector method". Information Sciences 178, No. 7, 1917-1922.

Bede, B. and Fodor, J. 2006. Product Operations between Fuzzy Numbers and their Applications in Geology. Acta Polytechnica Hungarica 2, 123-139.

Bede, B. and Gal, S. G. 2004. Almost periodic fuzzy-number-valued functions. Fuzzy Sets and Systems 147, 385-403.

Bede, B. and Gal, S. G. 2005. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 151, 581-599.

Bede, B. and Gal, S. G. 2010. Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability. Commun. Math. Anal. 9, No. 2, 22-44.

Bede, B. and Stefanini L. 2008. Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. Economics, Mathematics and Statistics.

Bede, B. and Stefanini L. 2012. Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. Economics, Mathematics and Statistics.

Bencsik, A.; Bede, B.; Tar, J. and Fodor, J. 2006. Fuzzy differential equations in modeling hydraulic differential servo cylinders. Third Romanian-Hungarian joint Symposium on Applied Computational Intelligence (SACI), Timisoara, Romania.

Bhaskar, T. G.; Lakshmikantham, V. and Devi, V. 2004. Revisiting fuzzy differential equations. Nonlinear Analysis 58,351-359.

Buckley, J. J. and Feuring, T. 2000. Fuzzy differential equations. Fuzzy sets and Systems 110, No. 1, 43-54.

Burden, R. y Douglas Faires, J. 2011. Análisis numérico. Brooks/ Cole, Cengage Learning.

Chalco-Cano, Y.; Rojas-Medar, M. A. y Román-Flores, H. 2007. Una nota sobre ecuaciones diferenciales difusas. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. 41, 91-99.

Chalco-Cano, Y. and Román-Flores, H. 2009. Comparation between some approaches to solve fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 160, 1517-1527.

Chalco-Cano, Y. and Román-Flores, H. 2008. On new solutions of fuzzy differential equations. Chaos, Solitons and Fractals 38, 112-119.

Chalco-Cano, Y. and Román-Flores, H. 2013. Some remarks on fuzzy differential equations via differential inclusions. Fuzzy Sets and Systems 230, 3-20.

Chang, S. S. L. and Zadeh, L. A. 1972. On fuzzy mapping and control. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 2, 30-34.

Chang, S. C.; Yao, J. S. and Lee, H. M. 1998. Economic reorder point for fuzzy backorder quantity. Eur. J. Operat. Res. 109, No. 1, 93-94.

De Baets, B. 2000. Analytical Solution Methods for Fuzzy Relational Equations. In: Dubois, D., Prade, H. (eds). Fundamentals of Fuzzy Sets. Kluver.

Delgado,F. e Frensel, K. Instituto de matemática-UFF.

Diamond, P. and Kloeden, P. 2002. Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Dubois, D. and Prade, H. 1987. Fuzzy numbers: An overview. Boca Raton.

Dubois, D. and Prade, H. 1982. Towards fuzzy differential calculus. Integration of fuzzy mappings. Fuzzy Sets and Systems 8, No. 1, 1-17, 105-116, 225-234.

Espinola Gonzales, J.; Asís López, M. y Rodriguez Sabino, V. Julio 2011. Sistema de visión artificial para la detección de somnolencia de conductores, basado en el comportamiento ocular. Aporte Santiaguino, Vol. 4, No. 2, 145-151.

Feng, Y. 2000. Fuzzy stochastic differential systems. Fuzzy Sets Systems 115, 3651-3673.

Friedman, M.; Ming, M. and Kandel, A. 1999. Numerical solution of fuzzy differential and integral equations. Fuzzy Sets and System 106, 35-48.

Ghazanfari, B. and Shakerami, A. 2011. Numerical solutions of fuzzy differential

equations by extended Runge-Kutta-like formulae of order 4. Fuzzy Sets and Systems 189, 74-91.

Gnana Bhaskar, T.; Lakshmikantham, V. and Devi, V. 2004. Revisiting fuzzy differential equations. Nonlinear Analysis 58, 351-358.

Goetschel, R. and Voxman, W. 1986. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems 18, 31-43.

Guo, M. and Li, R.2003. Impulsive functional differential inclusions and fuzzy populations models. Fuzzy Sets and Systems 138, No. 3, 601-615.

Guo, M.; Xue, X. and Li, R. 2003. The oscillation of delay differential inclusions and fuzzy biodynamics models. Math. Comput. Modelling 37, No. 7-8, 651-658.

Helgason, C. M. and Jobe, T. H. 1998. The fuzzy cube and causal efficacy: representation of concomitant mechanisms in stroke. Neuronal Networks 11, No. 3, 549-555.

Hukuhara, M. 1967. Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe. Funkcialaj Ekvacioj 10, 205-223.

Kaleva, O. 1987. Fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 24, No. 3, 301-317.

Khastan, A.; Nieto, J. J. and Rodríguez-López, R. 2011. Variation of constant formula for first order fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 177, 20-33.

Lakshmikantham, V. and Mohapatra, R. 2003. Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions, CRC Press.

Lee, H. M. and Yao, J. S. 1999. Economic order quantity in fuzzy sense for inventory without backorder model. Fuzzy Sets and Systems 105. No. 1, 13-31.

Lin, D. C. and Yao, J. S. 2000. Fuzzy economic production for production inventory. Fuzzy Sets and Systems 160, No. 3, 465-495.

Lupulescu, V. 2009. On a class of fuzzy functional differential equations. Fuzzy Sets and Systems 160, No. 11, 1547-1562.

Ma, M.; Friedman, M. and Kandel, A. 1999. Numerical solutions of fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 105, 133-138.

Mahata, G. C. and Mahata, P. 2011. Analysis of a fuzzy economic order quantity model for deteriorating items under retailer partial trade credit financing in a supply chain. Mathematical and Computer Modelling 53, No. 9-10, 1621-1636.

Massad, E.; Siquier-Ortega, N. R.; Barros, L. C. and Struchiner, C. J. 2008. Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

Mizukoshi, M. T.; Barros, L. C.; Chalco-Cano, Y.; Román-Flores, H. and Bassanezi R. C. 2007. Fuzzy differential equations and the extension principle. Information Sciences 177, 3627-3635.

Negoita, C. and Ralescu, D. 1975. Applications of Fuzzy Sets to Aystem Analysis.Wiley, New York.

Nieto, J. J. and Torres, A. 2003. Midpoints for fuzzy sets and their application in medicine. Artif. Intell. Med. 27, No. 1, 81-101.

Nguyen, H. T. 1978. A note on the extension principle for fuzzy sets. J. Math. Anal. Appl. 64, 369-380.

Oberguggenberger and Pittschmann, S. 1999. Differential equations with fuzzy parameters. Math. Mod. Systems 5, No. 3, 181-202.

Palligkinis, S. Ch.; Papageorgiou, G. and Famelis, I. Th. 2009. Runge-Kutta methods

for fuzzy differential equations. Appl. Math. Comput. 209, 97-105.

Pederson, S. and Sambandham, M. 2008. The Runge-Kutta method for hybrid fuzzy differential equations. Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2, 626-634.

Puri, M. L. and Ralescu, D. A. 1983. Differential and fuzzy functions. J. Math. Anal. Appl. 91, No. 2, 552-558.

Román-Flores, H.; Barros, L. and Bassanezi, R. 2001. C. A note on Zadeh's extensions. Fuzzy Sets and Systems 117, 327-331.

Seikkala, S. 1987. On the fuzzy initial value problem. Fuzzy Sets and Systems 24. No. 3, 319-330.

Stefanini, L. 2008. A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic. Economics, Mathematics and Statistics.

Stefanini, L. Bede, B. 2012. Generalized fuzzy differentiability with LU-parametric representation. Economics,Mathematics and Statistics.

Song, S. and Wu, C. 2000. Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 110, No. 1, 5567.

Villamizar-Roa, E.; Angulo-Castillo, V. and Chalco-Cano, Y. 2014. Existence of solutions to fuzzy differential equations with generalized Hukuhara derivative via contractive-Like mapping principles. Fuzzy Sets and Systems.

Wu, X. and Xia, J. 2006. Extended Runge-Kutta-like formulae. Applied Numerical Mathemátics 56, 1584-1605.

Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy sets. Information and Control 8, No. 3, 338-353.

Capítulo 7

ANEXOS

7.1. Conjunto numerable

Definición 7.1 (Delgado y Frensel) Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama semicontinuo superior en x_0 si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$.

Definición 7.2 (Delgado y Frensel) Un conjunto X es numerable cuando es finito o cuando existe una biyección $f : \mathbb{N} \to X$. En este caso, X se llama infinito numerable y se escribe $x_i = f(i), i \in \mathbb{N}$ si tiene una numeración de X:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

Corolario 7.3 (Delgado y Frensel) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos numerables. Entonces la unión $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ es numerable. O sea, una unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

7.2. Sucesión

Definición 7.4 (Delgado y Frensel) Una sucesión de números reales es una función definida en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y tomando valores

en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Definición 7.5 (Delgado y Frensel) Decimos que una sucesión (x_n) es de Cauchy cuando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ para cualquier $m, n > n_0$.

7.3. Continuidad

Definición 7.6 (Delgado y Frensel) Decimos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $a \in X$, cuando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$, $|x - a| < \delta$.

Definición 7.7 (Delgado y Frensel) Decimos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, cuando para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Definición 7.8 (Delgado y Frensel) Sea E un conjunto de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ definidas en el mismo dominio. Decimos que E es equicontinuo en un punto $x_0 \in X$ cuando , para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon, \forall f_n \in E.$$

7.4. Formulación del Método de Runge-Kutta

Wu y Xia (Wu y Xia 2006), propusieron un método Runge-Kutta usando derivadas altas y presentaron los métodos de tercer, cuarto y quinto orden para los métodos numéricos. En este método se usan nuevos parámetros, con el fin de mejorar el grado de exactitud de las soluciones usando evaluaciones de f y f'. Esto motivó la formulación extendida del Método de Runge-Kutta, de la

siguiente manera

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{m} b_j k_j^{(1)} + h^2 \sum_{j=1}^{m} c_j k_j^{(2)}$$

donde

$$k_j^{(1)} = f\left(y_n + h\sum_{s=1}^{j-1} a_{js} k_s^{(1)}\right), k_j^{(2)} = f'\left(y_n + h\sum_{s=1}^{j-1} b_{js} k_s^{(1)}\right), j = 1, 2, ..., m,$$

Vemos que si $c_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, en método se reduce al método clásico de Runge-Kutta.

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{m} b_j k_j.$$

7.4.1. Método Runge-Kutta de cuarto para una EDO autónoma

Método de Runge-Kutta extendido con $m = 3$ es de la siguiente forma

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1^{(1)} + b_2 k_2^{(1)} + b_3 k_3^{(1)}) + h^2(c_1 k_1^{(2)} + c_2 k_2^{(2)} + c_3 k_3^{(2)}),$$

donde

$$k_1^{(1)} = f(y_n), \quad k_2^{(1)} = f(y_n + ha_{21}k_1^1), \quad k_3^{(1)} = f(y_n + ha_{31}k_1^{(1)} + ha_{32}k_2^{(1)}),$$

$$k_1^{(2)} = f'(y_n), \quad k_2^{(2)} = f'(y_n + hb_{21}k_1^{(1)}), \quad k_3^{(2)} = f'(y_n + hb_{31}k_1^{(1)} + hb_{32}k_2^{(1)}).$$

Para determinar los coeficientes del método, usamos la formula expandida de Taylor y comparamos los términos de orden 1, 2, 3, y 4 con sus soluciones verdaderas.Entonces, obtenemos

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1, b_2 a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}) + c_1 + c_2 + c_3 = \dfrac{1}{2} \\ b_2 a_{21}^2 + b_3(a_{31} + a_{32})^2 + 2c_2 b_{21} + 2c_3(b_{31} + b_{32}) = \dfrac{1}{3}, \\ b_3 a_{32} a_{21} + c_2 b_{21} + 2c_3(b_{31} + b_{32}) = \dfrac{1}{6}, \\ b_2 a_{21}^3 + b_3(a_{31} + a_{32})^3 + 3c_2 b_{21}^2 + 3(b_{31} + b_{32})^2 = \dfrac{1}{4} \\ b_3 a_{32} a_{21}(a_{21} + 2(a_{31} + a_{32})) + 3(c_2 b_{21}^2 + c_3(b_{31} + b_{32})^2) = \dfrac{1}{4}, \\ c_3 b_{32} a_{21} = \dfrac{1}{24} \end{cases}$$

La formula específica de interés es

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{1}{6}h^2 f'_n + \frac{1}{3}h^2 f'\left(y_n + \frac{1}{2}hf\left(y_n + \frac{1}{4}hf_n\right)\right)$$

7.5. Puntos de solución del problema de Cauchy difuso

Puntos ingresados de la (i)-diferenciabilidad, para graficar en Matlab la solución dada en la Figura 1.

alfa=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];

solnu1=[-39.37800 -35.68715 -31.85046 -27.89779 -23.85973 -19.76738 -15.65199 -11.54477 -7.476534 -3.477425 0.4233002];

solex1=[-39.38288 -35.69184 -31.85487 -27.90183 -23.86334 -19.77048 -15.65455 -11.54674 -7.477884 -3.478152 0.4231901];

solnu2=[28.71091 27.03668 25.07075 22.82183 20.30125 17.52300 14.50356 11.26176 7.818726 4.197568 0.4233002];

solex2=[28.71421 27.03995 25.07393 22.82483 20.30401 17.52543 14.50558 11.26333 7.819776 4.198055 0.4231901];

plot(solnu1,alfa,'b',solex1,alfa,'r*',solnu2,alfa,'b',solex2,alfa,'r*')

legend('Solución numérica', 'Solución exacta','Location','northwest')

ylabel('alfa')

Puntos ingresados de la (ii)-diferenciabilidad, para graficar en Matlab la solución dada en la Figura 2.

alfa=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];

num1=[1.082716 0.9858142 0.8975519 0.8171626 0.7439475 0.6772691 0.6165465 0.5612501 0.5108971 0.4650474 0.4233002];

ex1=[1.082682 0.9857742 0.895055 0.8171096 0.7438872 0.6772012 0.6164706 0.5611660 0.5108045 0.4649462 0.4231900];

```
num2=[0.165037 0.1813540 0.1992806 0.2189765 0.2406125 0.2643821 0.2904936
0.3191766 0.3506831 0.3852900 0.4233002];
ex2=[0.164840 0.181165 0.199099 0.218803 0.240449 0.264227 0.290347 0.319039
0.350554 0.385170 0.423190];
plot(num1,alfa,'b',ex1,alfa,'r*',num2,alfa,'b',ex2,alfa,'r*')
legend('Solución numérica', 'Solución exacta')
ylabel('alfa')
```

1. Datos del Autor:

Apellidos y Nombres: LÓPEZ CHILCA FREDY ROLANDO

Código de alumno: 122.0503.008 Teléfono: 998 502 029

Correo electrónico: flopezc@unasam.edu.pe DNI: 70425516

2. Modalidad de trabajo de investigación:

( ) Trabajo de Investigación ( ) Trabajo académico

( ) Trabajo de suficiencia personal (X) Tesis

3. Título profesional o grado académico

( ) Bachiller (X) Titulo ( ) Segunda especialidad

( ) Licenciado ( ) Magister ( ) Doctor

4. Título del trabajo de investigación

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE CAUCHY DIFUSO MEDIANTE EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN USANDO LA DIFERENCIABILIDAD GENERALIZADA DE HUKUHARA

5. Facultad de Ciencias

6. Escuela, Carrera o programa: Escuela Profesional de Matemática.

7. Asesor:

Apellidos y Nombres: Dr. ASÍS LÓPEZ MAXIMILIANO

Teléfono: 945 375 233

Correo electrónico: masisl@unasam.edu.pe DNI: 10763091

A través de este medio autorizo a la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, publicar el trabajo de investigación en formato digital en el Repositorio Institucional Digital, Repositorio Nacional Digital de Acceso Libre (ALICIA) y el Registro Nacional de Trabajos de Investigación (RENATI).

Asimismo, por el presente dejo constancia que los documentos entregados a la UNASAM, versión impresión y digital, son las versiones finales del trabajo sustentado y aprobado por el jurado y son de autoría del suscrito en estricto respeto a la legislación en materia de propiedad intelectual

Firma: .....

D.N.I.: 70425516

FECHA: 10 / 03 / 2021