



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
“SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO”**

---

**ESCUELA DE POSTGRADO**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS  
FINITOS DE LA TEMPERATURA EN  
LA ETAPA INICIAL DE LA SOLIDIFICACION DEL ACERO**

Tesis para optar el grado de doctor  
en Ciencia e Ingeniería de la Computación

**JUBE CIRO PORTALATINO ZEVALLOS**

Asesor: **Dr. MARCOS ZAMBRANO FERNANDEZ**

Huaraz – Ancash - Perú

2021

**FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN DE TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN, CONDUCENTES A OPTAR TÍTULOS PROFESIONALES Y GRADOS ACADÉMICOS EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL**

**1. Datos del autor:**

Apellidos y Nombres: \_\_\_\_\_

Código de alumno: \_\_\_\_\_ Teléfono: \_\_\_\_\_

E-mail: \_\_\_\_\_ D.N.I. n°: \_\_\_\_\_

*(En caso haya más autores, llenar un formulario por autor)*

**2. Tipo de trabajo de Investigación:**

Tesis

Trabajo Académico

Trabajo de Investigación

**3. Trabajo de Investigación para optar el grado de:**

\_\_\_\_\_

**4. Título del trabajo de Investigación:**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**5. Escuela:** \_\_\_\_\_

**6. Programas:** \_\_\_\_\_

**7. Asesor:**

Apellidos y nombres \_\_\_\_\_ D.N.I n°: \_\_\_\_\_

E-mail: \_\_\_\_\_ ID ORCID: \_\_\_\_\_

**8. Referencia bibliográfica:** \_\_\_\_\_

**9. Tipo de acceso al Documento:**

Acceso público\* al contenido completo. Acceso

restringido\*\* al contenido completo

Si el autor eligió el tipo de acceso abierto o público, otorga a la Universidad Santiago Antúnez de Mayolo una licencia no exclusiva, para que se pueda hacer arreglos de forma en la obra y difundirlo en el Repositorio Institucional, respetando siempre los Derechos de Autor y Propiedad Intelectual de acuerdo y en el Marco de la Ley 822.

En caso de que el autor elija la segunda opción, es necesario y obligatorio que indique el sustento correspondiente:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## 10. Originalidad del archivo digital

Por el presente dejo constancia que el archivo digital que entrego a la Universidad, como parte del proceso conducente a obtener el título profesional o grado académico, es la versión final del trabajo de investigación sustentado y aprobado por el Jurado.



Firma del autor

## 11. Otorgamiento de una licencia *CREATIVE COMMONS*

Para las investigaciones que son de acceso abierto se les otorgó una licencia *Creative Commons*, con la finalidad de que cualquier usuario pueda acceder a la obra, bajo los términos que dicha licencia implica.



*El autor, por medio de este documento, autoriza a la Universidad, publicar su trabajo de investigación en formato digital en el Repositorio Institucional, al cual se podrá acceder, preservar y difundir de forma libre y gratuita, de manera íntegra a todo el documento.*

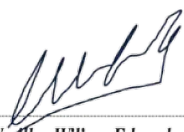
Según el inciso 12.2, del artículo 12º del Reglamento del Registro Nacional de Trabajos de Investigación para optar grados académicos y títulos profesionales - RENATI "Las universidades, instituciones y escuelas de educación superior tienen como obligación registrar todos los trabajos de investigación y proyectos, incluyendo los metadatos en sus repositorios institucionales precisando si son de acceso abierto o restringido, los cuales serán posteriormente recolectados por el Recolector Digital RENATI, a través del Repositorio ALICIA".

## 12. Para ser verificado por la Dirección del Repositorio Institucional

Fecha de Acto de sustentación:

Huaraz,

Firma:



Varillas Wiliam Eduardo  
Asistente en Informática y Sistemas  
- UNASAM -

**\*Acceso abierto:** uso lícito que confiere un titular de derechos de propiedad intelectual a cualquier persona, para que pueda acceder de manera inmediata y gratuita a una obra, datos procesados o estadísticas de monitoreo, sin necesidad de registro, suscripción, ni pago, estando autorizada a leerla, descargarla, reproducirla, distribuirla, imprimirla, buscarla y enlazar textos completos (Reglamento de la Ley No 30035).

**\*\* Acceso restringido:** el documento no se visualizará en el Repositorio.





**UNIVERSIDAD NACIONAL  
“SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO”**

---

**ESCUELA DE POSTGRADO**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS  
FINITOS DE LA TEMPERATURA EN  
LA ETAPA INICIAL DE LA SOLIDIFICACION DEL ACERO**

Tesis para optar el grado de doctor  
en Ciencia e Ingeniería de la Computación

**JUBE CIRO PORTALATINO ZEVALLOS**

Asesor: **Dr. MARCOS ZAMBRANO FERNANDEZ**

Huaraz – Ancash - Perú

2021

N° DE REGISTRO: TE0077

## MIEMBROS DEL JURADO

*Doctor* Luis Alberto Moreno Rubiños

Presidente

---

*Doctora* Pilar Sara Núñez Blas

Secretario

---

*Doctora* Rosa Vilchez Vásquez

Vocal

---

**ASESOR**

**Doctor Marcos Zambrano Fernández**

## **AGRADECIMIENTO**

- Agradezco en primer lugar a mis padres por haberme motivado y apoyado con mis estudios y ahora dando un paso más en esta senda.
- A mis queridísimas hijas por su apoyo moral.
- A mi asesor Dr. Marcos Zambrano Fernández por su apoyo incondicional.



## ÍNDICE

	<b>Página</b>
Resumen.....	viii
Abstract .....	ix
Resumo.....	x
I. INTRODUCCIÓN .....	1-2
Objetivos .....	1
Hipótesis .....	1
Variables .....	2
II. MARCO TEÓRICO .....	3-14
2.1. Antecedentes .....	3
2.2. Bases teóricas.....	6
2.3. Definición de Términos .....	12
III. METODOLOGÍA .....	15-22
3.1. Tipo y diseño de Investigación .....	15
3.2. Instrumentos de recolección de la información .....	17
3.3. Plan de procesamiento .....	20
IV. RESULTADOS .....	23-44
V. DISCUSION .....	45-47
VI. CONCLUSIONES .....	48-49
VII. RECOMENDACIONES .....	50-51
VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	52-55
ANEXO.....	56

## RESUMEN

El propósito fundamental de la aplicación de la dinámica de fluidos y la transferencia del calor en los problemas relacionados con el proceso de solidificación del acero en la industria de la fundición tradicional es el análisis y la predicción del proceso de enfriamiento que acontece en el interior del molde que contiene el acero en estado líquido.

Se presenta detalladamente el procesamiento y análisis de un modelo matemático cuyo objetivo es mostrar el mecanismo de enfriamiento que acontece en el interior del molde cuando existe un suministro continuo de acero líquido en un proceso de fundición tradicional.

Finalmente, se presenta los resultados referentes a la solución del modelo matemático mediante la visualización de la solución de la ecuación diferencial de energía involucrada en la construcción del modelo matemático.

**Palabras clave:** transferencia del calor, proceso de solidificación, modelo matemático.

## ABSTRACT

The main goal in the application of the fluid dynamics and the Heat transfer in problems related to the solidificación process of steel in the steelmaking industry of the ingot casting is the analysis and the prediction of the cooling process carries out inside of the mould which contains the steel in liquid phase.

It is presented in detail the process and Analysis of a mathematica model whose goal is to show the cooling mechanism that happens inside of the mould when a permanent supply of liquid steel takes place.

Finally, it is presented the relating results to the solution of the mathematical model through the visualization of the solution of the energy differential equation involved in the construction of the mathematical model.

**Key Words:** heat transfer, solidification process, mathematical model.

## RESUMO

Lo scopo fondamentale dell'applicazione della fluidodinamica e del trasferimento di calore nelle problematiche legate al processo di solidificazione dell'acciaio nell'industria della fonderia tradizionale è l'analisi e la previsione del processo di raffreddamento che avviene all'interno dello stampo contenente acciaio allo stato liquido.

Viene presentata in dettaglio l'elaborazione e l'analisi di un modello matematico, il cui obiettivo è quello di mostrare il meccanismo di raffreddamento che avviene all'interno dello stampo quando c'è una fornitura continua di acciaio liquido in un processo di colata tradizionale.

Infine, i risultati relativi alla soluzione del modello matematico vengono presentati visualizzando la soluzione dell'equazione dell'energia differenziale coinvolta nella costruzione del modello matematico.

**Parole chiave:** trasferimento di calore, processo di solidificazione, modello matematico.

## I. INTRODUCCIÓN

### Objetivos

#### Objetivo General

Simular numéricamente mediante elementos finitos la temperatura en la etapa inicial de la solidificación del acero.

#### Objetivos Específicos

- Formular un modelo matemático que describa la distribución de la temperatura del acero líquido contenido en un molde y su proceso de enfriamiento al transcurrir el tiempo.
- Resolver la ecuación de conducción del calor, usando el método de elementos finitos.
- Implementar un programa computacional en el lenguaje de programación GNU-Octave para resolver la ecuación diferencial que permite obtener la temperatura del acero líquido en el proceso de enfriamiento que conduce a la solidificación del acero.

### Hipótesis

La hipótesis en el presente trabajo de tesis está formulada en los siguientes términos:

Con la simulación numérica mediante elementos finitos se determina la temperatura en la etapa inicial de la solidificación del acero.

## **Variables**

### **Variable independiente:**

Simulación numérica mediante elementos finitos.

### **Variable dependiente:**

Temperatura en la etapa inicial de la solidificación del acero.

## II. MARCO TEÓRICO

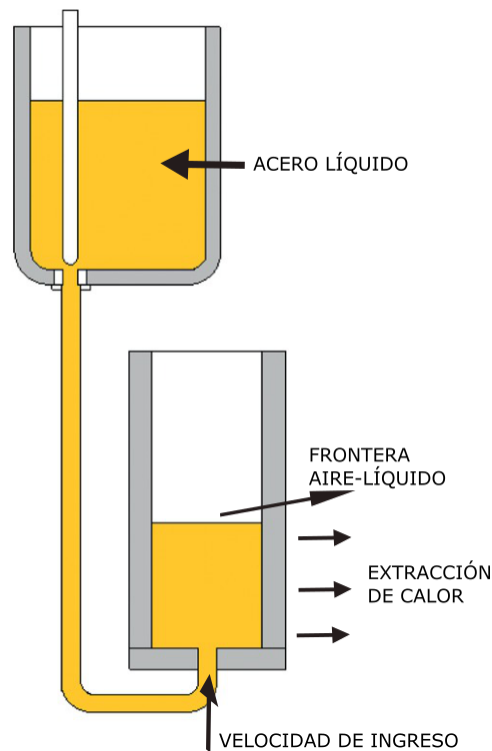
### 2.1. Antecedentes

La fundición de metales como el acero es una actividad llevada a cabo durante siglos que en la actualidad forma parte importante del sector industrial alrededor del mundo lo que trae consigo que las técnicas empleadas en la fundición son de suma importancia en la obtención de productos basados en acero.

El empleo de técnicas en la fundición del acero que permite la obtención de productos de buena calidad motiva un estudio de las condiciones en las cuales el acero pasa del estado líquido al sólido a través del fenómeno de transferencia del calor y el flujo del fluido metálico.

En la figura 2.1, es mostrado un proceso de fundición del acero que en estado líquido es transferido a un molde través de un conducto de forma que al ingresar al molde se tiene predeterminados una velocidad y una temperatura de ingreso.

Mientras el acero líquido ingresa al molde, se lleva a cabo una extracción de calor de forma que, al completar el llenado del molde con acero líquido, se inicia al proceso de solidificación del acero.



**Figura 2.1:** Esquema del proceso de enfriamiento del líquido entrante.

Debido al suministro continuo del líquido metálico, el volumen contenido en el molde va aumentando y formando una superficie ascendente que constituye la frontera acero-aire como puede verse en la figura 2.1, a la vez que las paredes del molde continúan extrayendo calor del acero líquido.

Esto lleva consigo un enfriamiento del acero que ocurre primordialmente en las paredes del molde por la transferencia de calor hacia el medio ambiente lo que a su vez convierte el acero líquido en un bloque sólido al empezar el proceso de solidificación.

Diversos autores han señalado que el enfriamiento se debe fundamentalmente a la transferencia de calor a través de la frontera acero-aire y acero-pared.



Asimismo, diversos autores han abordado el asunto de la interfaz entre fluidos, como en este caso, el metal líquido y el aire sobre el mismo, siendo fundamental resaltar el trabajo mostrado por (Bikerman, 1970), que tiene en cuenta la tensión superficial entre los dos fluidos que están en contacto.

Si bien las ecuaciones del flujo de un fluido son complejas y en muchas ocasiones es necesario recurrir a la dinámica de fluidos computacional (Kajishima, 2017), en ciertas situaciones, es posible llevar a cabo un análisis del flujo de fluido a fin de simplificar las ecuaciones que describen dicho flujo mediante el uso de técnicas matemáticas (Melink, 2017) a fin de construir un modelo que describa el proceso de interés. Según (Upadhyay, 2014), el modelamiento matemático es una disciplina que describe los fenómenos del mundo real en términos matemáticos y para posteriormente resolverlos.

Una vez desarrollado el modelo matemático, es importante tener en cuenta que para la obtención de la solución del modelo es necesario aplicar computación científica en muchos de los casos (Griebel, 2017), de forma que pueda llevarse a cabo la validez del modelo propuesto (Herrera, 2017) y pueda obtenerse resultados del modelo propuesto.

Es conocido que muchos problemas son descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (Brenner, 2016), en particular, está la ecuación de energía que describe la temperatura existente en el acero líquido como es el caso del presente trabajo de tesis.

Un método para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales que describe un problema relacionado con la ecuación de energía es el *Método de*

*Elementos Finitos*, el cual se basa en la representación de la ecuación diferencial por medio de una forma llamada *formal débil* que consiste en la transformación de la ecuación diferencial original en una ecuación integral (Burden, 2016).

El método de elementos finitos ha demostrado ser eficaz en muchos problemas relacionados con la ciencia e ingeniería a lo largo del siglo pasado y en el presente, en particular en los problemas relacionados con la evaluación de la temperatura en una determinada región, esta es la razón por la cual ha sido considerado en el desarrollo de la presente tesis.

En una investigación desarrollada por Vynnycky y co-investigadores (Vynnycky, 2015), los autores abordaron el problema de llenar un molde con metal líquido para un proceso de solidificación como el descrito anteriormente, de forma que dos parámetros son inicialmente prescritos: La temperatura a la cual ingresa el fluido constituido por el acero líquido y su respectiva velocidad encontrando que el enfriamiento y posterior solidificación del acero se debe fundamentalmente por la transferencia de calor a través de la pared del molde (Vynnycky, 2015).

## **2.2. Bases teóricas**

### **2.2.1. Dinámica de fluidos**

Debido a que el proceso de llenado del líquido metálico y su posterior enfriamiento en el molde tiene que ver con el flujo de un fluido y la transferencia de calor existente en el mismo; las ecuaciones de la dinámica de fluidos y de energía deben ser empleadas para evaluar las velocidades y la temperatura existente en el interior del molde.

Si denotamos por  $u, v$  las componentes horizontal y vertical de la velocidad del flujo del fluido y  $x, y$  las coordenadas horizontal y vertical en cada punto de la región que contiene el mismo fluido y  $t$  denota el tiempo entonces las ecuaciones del momento en la dinámica de fluidos (Batchelor, 2000) están dadas por

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (2.2)$$

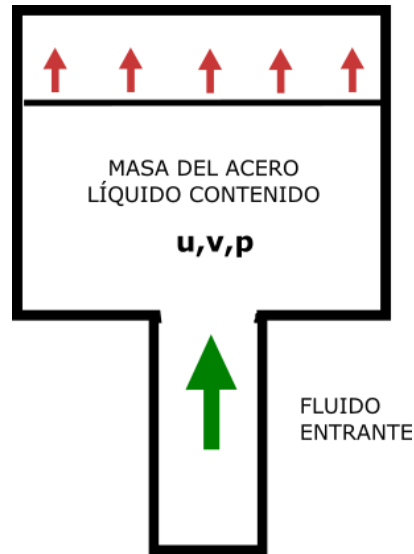
Donde  $\rho, \mu$  son la densidad y la viscosidad del fluido respectivamente,  $p$  es la presión ejercida por el fluido y  $g$  es la constante de gravedad.

En la presente tesis, asumiremos que la densidad y la viscosidad del acero líquido tienen una magnitud constante.

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) describen el flujo de un fluido en una determinada región de forma que sus velocidades están cambiando con respecto al tiempo, para que el problema este bien definido debe incluirse una ecuación que describa la masa del fluido.

Asimismo, para garantizar que el fluido que ingresa durante un intervalo de tiempo posee la misma masa que el fluido que se encuentra en el molde, se emplea la ecuación de conservación de masa (Batchelor, 2000), establece que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$



**Figura 2.2:** Esquema que ilustra que la masa del fluido que ingresa al molde conforma la masa de acero líquido existente en el molde

En la figura 2.2, se ilustra la conservación de masa enunciada en la ecuación (2.3), donde el acero líquido se va acumulando en el interior del molde al transcurrir el tiempo luego de ingresar por la parte inferior, generando así, las componentes de la velocidad  $u, v$  y la presión  $p$ . Las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) son conocidas usualmente como las ecuaciones de Navier Stokes (Batchelor, 2000).

Para describir la temperatura  $T = T(x, y, t)$  en un punto  $(x, y)$  en el interior del fluido descrito anteriormente, la ecuación de conservación de energía (Pletcher, 2016) está dada por

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

Donde  $c_p, k$  son la capacidad calórica y la conductividad térmica del fluido.

La ecuación (2.4) permite determinar la temperatura en un determinado tiempo.

Debido a que el proceso de enfriamiento del acero líquido estará evidenciado por una disminución de la temperatura tenemos que los valores numéricos de  $T$  en la ecuación (2.4) irán disminuyendo con respecto al tiempo y serán determinados por la solución de (2.4).

### 2.2.2. El método del elemento finito

El método del elemento finito que es empleado en el presente trabajo de tesis consiste en la construcción de la solución de la ecuación diferencial (2.4), dicha solución es una función expresada por la combinación lineal de funciones llamadas *funciones prueba* (Burden, 2016).

Supongamos que deseamos resolver la ecuación (2.4) en forma unidimensional, es decir, solo en la variable  $x$ , entonces (2.4) puede ser expresada mediante

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (2.5)$$

Si el valor de  $u$  es pequeño de forma que  $u \approx 0$  y hacemos  $\omega = k / \rho c_p$  entonces la ecuación (2.5) puede ser escrita como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \omega \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Si deseamos resolver la ecuación (2.6) en el intervalo  $I = [0,1]$  entonces seleccionamos un conjunto de nodos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  en  $I$  tal

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1 \quad (2.7)$$

Podemos asumir el caso que la distancia entre ellos  $h$  es constante, así  $h = x_2 - x_1 = \dots = x_N - x_{N-1}$ ; entonces es posible definir funciones  $\phi_i = \phi_i(x)$  llamadas funciones de prueba (Burden, 2016) para  $i=1, \dots, N$  mediante

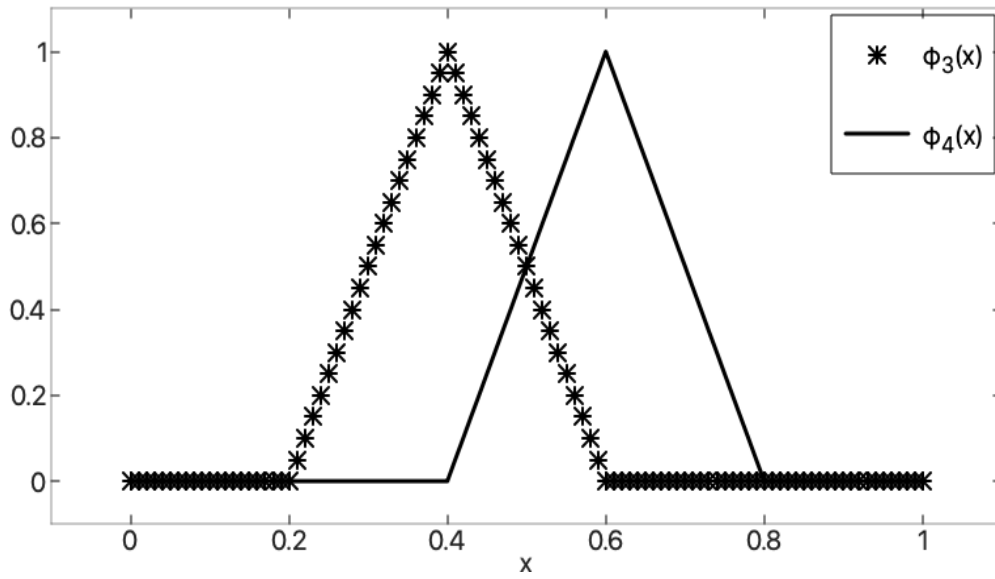
$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.8)$$

Con el fin de ilustrar la forma de las funciones de prueba en el método de elementos finitos, podemos suponer que tenemos para el intervalo  $I=[0,1]$ , los siguientes nodos:  $x_1 = 0.0, x_2 = 0.2, x_3 = 0.4, x_4 = 0.6, x_5 = 0.8, x_6 = 1.0$  entonces está claro que  $h=0.2$  y por ejemplo las funciones de prueba  $\phi_3$  y  $\phi_4$  están dadas por

$$\phi_3(x) = \begin{cases} \frac{x - x_2}{h}, & x \in [x_2, x_3] \\ \frac{x_4 - x}{h}, & x \in [x_3, x_4] \end{cases} \quad (2.9)$$

y

$$\phi_4(x) = \begin{cases} \frac{x - x_3}{h}, & x \in [x_3, x_4] \\ \frac{x_5 - x}{h}, & x \in [x_4, x_5] \end{cases} \quad (2.10)$$



**Figura 2.3:** Gráfica de las funciones  $\phi_3$  y  $\phi_4$

En la figura 2.3 son ilustradas las funciones de prueba  $\phi_3$  y  $\phi_4$  que son utilizadas en el método de elemento finito. Puede apreciarse que tanto  $\phi_3$  como  $\phi_4$  tienen el valor cero en los conjuntos  $[x_1, x_2] \cup [x_4, x_6]$  y  $[x_1, x_3] \cup [x_5, x_6]$  respectivamente.

Por otro lado, si definimos la solución de (2.6) mediante

$$T(x, t) = T_1(t)\phi_1(x) + \dots + T_N(t)\phi_N(x) \quad (2.11)$$

Entonces al multiplicar la ecuación (2.6) por una función  $\phi_j$  para  $j=1, \dots, N$  e integrar sobre el intervalo  $I$  tenemos que

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t} \phi_j \, dx = \omega \int_0^1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \phi_j \, dx \quad (2.12)$$

lo que implica que

$$\frac{dT_1}{dt} M_{1,j} + \dots + \frac{dT_N}{dt} M_{N,j} = \omega (T_1 K_{1,j} + \dots + T_N K_{N,j}) \quad (2.13)$$

donde

$$M_{i,j} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x) dx \quad (2.14)$$

$$K_{i,j} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx \quad (2.15)$$

La igualdad en la ecuación (2.13) se cumple para  $j=1,\dots,N$ , con lo cual tenemos el sistema de ecuaciones

$$M \frac{dT}{dt} + \omega K T = 0 \quad (2.16)$$

Donde las matrices  $M$ ,  $K$  tienen componentes  $M_{i,j}$ ,  $K_{i,j}$  dados por las ecuaciones (2.14) y (2.15) respectivamente y  $T$  dado por

$$T = (T_1(t), \dots, T_N(t))^T \quad (2.17)$$

Es ahora un vector columna de  $N$  componentes reales como se indica en la ecuación (2.17) que cambian su valor numérico con el tiempo. De esta forma, el método de elementos finitos consiste en la solución numérica del sistema de ecuaciones dados en (2.16) que a su vez permiten la obtención de la solución de la ecuación diferencial (2.6).

### 2.3. Definición de Términos

Los términos usualmente encontrados en la literatura relacionada con los procesos de solidificación del acero, los temas de la dinámica de fluidos y la transferencia del calor son:



Fluido incompresible. - es una sustancia que adopta la forma del recipiente que lo contiene y cuya masa se mantiene constante al aplicar sobre el, esfuerzos.

Temperatura. - es la cantidad de calor almacenada en una determinada sustancia.

Acero. - es el resultado de la combinación de hierro y carbón que puede estar en estado líquido y por medio del enfriamiento convertirse en sólido.

Proceso de fundición. - es el proceso que consiste en el vertido del acero en estado líquido en un recipiente para que al solidificarse adopte la forma del mismo.

Velocidad de Casting. - es la velocidad a la que está ingresando el acero en estado líquido al molde para su posterior enfriamiento para convertirse en acero sólido.

Temperatura de Casting. - es la temperatura a la cual está ingresando el acero en estado líquido al molde.

Temperatura de Solidificación. - es la temperatura a la cual el acero en estado líquido empieza a convertirse en acero sólido.

Punto de Solidificación. - es el punto que existe en la región que contiene el acero líquido y cuya temperatura es la más baja en todo el acero en estado líquido.

En el presente trabajo la temperatura de solidificación es constante y es denotada por  $T_m$  como habitualmente es indicado en la literatura (Vynnycky, 2015).

De acuerdo a lo señalado anteriormente, la ecuación (2.4) que determina la temperatura existente en la región que contiene el acero en estado líquido en un determinado tiempo  $t$ , tendrá el valor inicial de la temperatura de casting y posteriormente su temperatura irá descendiendo hasta tener el valor de la temperatura de solidificación debido al proceso de enfriamiento al que está expuesto el acero en el interior del molde.

### III. METODOLOGÍA

#### 3.1. Tipo y diseño de Investigación

Aplicativo.

La investigación llevada a cabo en el presente trabajo de tesis se ha basado en un conjunto de 5 pasos realizados en forma consecutiva

- i. Descripción del Fenómeno Físico.** Basado en la observación del proceso de fundición tradicional existente en la actualidad para la producción del acero. Esto permite describir el llenado del molde con el acero en estado líquido para su posterior enfriamiento, el tiempo necesario que debe transcurrir para que esto se lleve a cabo permite que la investigación de la tesis se enfoque y pueda analizar la distribución de temperatura en el interior del molde en dicho intervalo de tiempo.
- ii. Formulación del Problema.** Consiste en la formulación matemática del proceso de llenado del molde con el acero líquido para que posteriormente la solidificación del acero se inicie y dado que la investigación se enfoca en el enfriamiento del acero líquido, el empleo de la ecuación de energía es adecuado debido a que determina la distribución de temperatura en el interior del molde.
- iii. Implementación Computacional.** Dada la formulación matemática del problema de enfriamiento del acero líquido en el interior del molde, es necesario llevar a cabo la implementación o programación de la ecuación

matemática que permite determinar el conjunto de valores que corresponden a la temperatura en cada punto de la región que abarca el fluido metálico. Para llevar a cabo la programación mencionada, es necesario el uso de un método matemático que resuelva la ecuación de energía. En la presente tesis será empleado el método del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo.

**iv. Simulación Numérica.** Una vez implementado el programa computacional, se lleva a cabo la ejecución del mismo al ingresar los datos como la temperatura inicial del acero líquido o la velocidad de ingreso del acero al molde y dar así al inicio del proceso de enfriamiento, en la presente tesis, se considera además un flujo de calor constante que se extrae a través de las paredes y determina el enfriamiento mencionado. El resultado de la simulación numérica es un conjunto de valores en cada instante de tiempo de la distribución de temperatura de la región de acero líquido existente en el interior del molde.

**v. Interpretación de los Resultados.** Concluida la fase de la simulación numérica, se procederá a la visualización de los resultados resaltando las características más notorias en cada instante de tiempo de la distribución de temperatura, como es la temperatura a lo largo de la pared adyacente al molde o la evaluación de la temperatura existente en la frontera acero-aire mostrado en la figura 2.1. Otro resultado de importancia es la región donde el acero líquido alcanza la mínima temperatura, alrededor del punto de

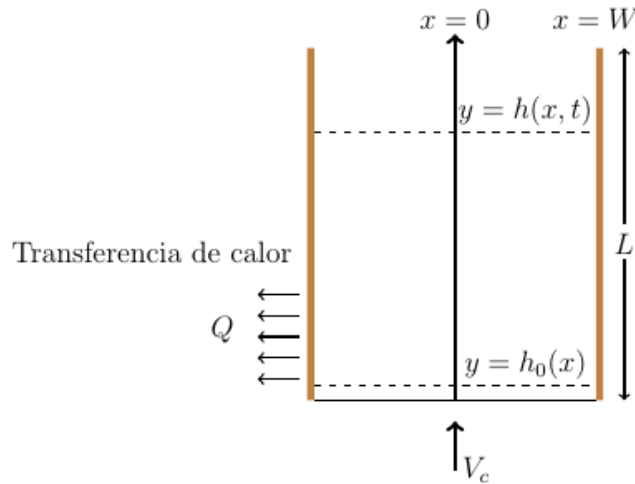
solidificación debido a que en dicha región se espera que el proceso de solidificación del acero se inicie.

### **3.2. Instrumentos de recolección de la información**

En el presente trabajo de tesis, dos instrumentos de gran importancia han sido utilizados para llevar a cabo cada una de las etapas de la investigación desde la formulación de problema hasta la obtención y visualización de los resultados.

**i. Instrumentos matemáticos.** Luego de formulado el problema en términos matemáticos mediante la ecuación diferencial de la energía, es necesario prescribir las condiciones de frontera que deben ser aplicadas a la región que contiene el acero líquido. Debido a la simetría existente en el molde solo es necesario considerar la región donde  $x \geq 0$  y considerar las condiciones para  $x=W$ , donde  $W$  es la distancia del eje de simetría hasta la pared del molde cuya altura es  $L$  como puede apreciarse en la figura 3.1. Además, debido al flujo de fluido constante hacia el molde, se denotará el perfil de la frontera entre el acero líquido y el aire mediante la función  $h=h(x, t)$ , donde  $t$  denota el tiempo. Con el uso de herramientas matemáticas se dará la representación de la temperatura en cada punto de dicha región desde  $h_0(x)$  hasta  $h(x, t)$  y el cambio con respecto al tiempo de la temperatura  $T$  en un tiempo  $t$  fijo conociendo la temperatura en un tiempo anterior  $t-1$ . Por todo ello, el método del elemento finito resulta ser una adecuada elección debido a que permite discretizar la ecuación de energía dependiente del tiempo a la vez que proporciona una manera clara de considerar las condiciones de frontera existentes en un problema como en el presente trabajo de tesis donde la

condición de extracción de calor  $Q$  por las paredes del molde traen consigo el enfriamiento del acero líquido y serán tratadas por el método del elemento finito.



**Figura 3.1:** Dimensiones del molde y perfiles de la frontera acero-aire

Durante el proceso del llenado del molde el acero líquido ingresa por debajo con una velocidad constante  $V_c$  como se muestra en la figura 3.1 y conforme transcurre el tiempo se lleva a cabo una extracción de calor constante a través de las paredes del molde por lo cual es necesario prescribir una condición de Neuman en la pared del molde; esta condición puede ser expresada mediante

$$k \frac{\partial T}{\partial t} = -Q \text{ para } x=W \quad (3.1)$$

Desde el punto de vista del modelamiento, una dificultad clave es determinar la región líquida que está cambiando con respecto al tiempo debido al ingreso continuo del acero líquido en la parte inferior del molde. Para ello, consideramos que la frontera entre el acero líquido y el aire debido a la velocidad de ingreso constante permite expresar que

$$h(x, t) = y_0 + V_c t \quad (3.2)$$

Donde  $y_0$  es la altura inicial, es decir  $y_0 = h(x, 0)$ .

**ii. Instrumentos computacionales.** Un lenguaje de programación es idóneo para la implementación de códigos que permitan la solución de la ecuación (2.4), como el ampliamente conocido lenguaje Fortran usado en ambientes de computación científica (Chapman, 2018) y aquellos aspectos que han conseguido mayores capacidades en la actualidad (Chivers, 2015). También es sabido que el lenguaje C\C++ (Deitel, 2014), (Savitch, 2015) en la actualidad ha demostrado ser bastante eficaz por lo que es usado para la implementación computacional de ecuaciones diferenciales (Whiteley, 2012). Debido a ello, tanto el lenguaje Fortran como C\C++ han servido de base para construcción de entornos de programación para la computación científica como es el caso de GNU-Octave (Eaton, 2020), que posee un bien estructurado conjunto de librerías que permite la implementación de ecuaciones diferenciales y que ha sido elegido para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

GNU-Octave es software libre y puede obtenerse de forma gratuita de la Free Software Foundation (FSF) vía internet en la siguiente dirección electrónica

<https://www.gnu.org/software/octave/>

GNU-Octave cuyo símbolo está mostrado en la figura 3.2 permite llevar a cabo la implementación de un programa informático que permite calcular la solución de la ecuación de energía (2.4) a fin de determinar la temperatura del acero

líquido. Una vez instalado el lenguaje de programación GNU-Octave, se crea un entorno que permite la implementación del programa computacional requerido.



**Figura 3.2:** símbolo de GNU-Octave

Asimismo, es importante resaltar que además de la gran capacidad de GNU-Octave de realizar cálculos numéricos, el mencionado lenguaje de programación puede realizar la visualización en dos y tres dimensiones de un conjunto de datos, como son los resultados que serán obtenidos luego de la ejecución del programa computacional que será implementado para la solución de la ecuación (2.4).

### **3.4. Plan de procesamiento**

En la presente investigación se ha llevado un conjunto de acciones que ha permitido la realización de forma clara y adecuada el uso de las herramientas matemáticas y computacionales con el objeto de obtener la solución de la ecuación de energía, debido a ello fueron considerados las siguientes etapas

(i) Inicialmente, la descripción del fenómeno físico ha permitido inspeccionar y analizar los detalles de mayor relevancia para la formulación de la ecuación diferencial de energía correspondiente al proceso de enfriamiento del acero líquido que ingresa al molde de forma continua. Asimismo, en esta parte se



ha llevado a cabo la prescripción de la condición de frontera que permite el proceso de enfriamiento existente en el interior del molde.

(ii) Seguidamente, formulada la ecuación diferencial de energía, se ha procedido a emplear el método de elementos finitos para discretizar dicha ecuación de forma que cada punto considerado en la región del acero líquido pueda ser representado por un nodo que estará asociado a la temperatura en dicho punto como se mostró en la ecuación (2.17) y a su vez será una incógnita en un conjunto de ecuaciones lineales como se presentó en la ecuación (2.16) cuando es aplicado el método del elemento finito. De esta forma cada punto  $(x, y)$  en un instante  $t$  tienen asociada un valor numérico de la temperatura del acero líquido dado por  $T(x,y,t)$  que está determinado por la ecuación de la energía.

(iii) Posteriormente, luego de definido el conjunto de ecuaciones lineales mencionado en el párrafo anterior, la implementación computacional desarrollada en el lenguaje de programación GNU-Octave permite la obtención de la solución, es decir, el valor numérico de  $T(x,y,t)$  en cada punto  $(x, y)$  en el instante  $t$ . Debido a que el proceso de enfriamiento transcurre en el tiempo y depende del estado anterior de la distribución de temperatura del acero líquido, entonces, un esquema iterativo en el tiempo es adecuado de forma que en cada paso del tiempo una nueva distribución de temperatura pueda ser obtenida; en donde la distribución inicial de temperatura está claramente definida por la condición inicial de que la temperatura ingresa al molde a una temperatura fija, llamada temperatura de casting denotada por  $T_c$ .

(iv) Finalmente, los resultados obtenidos en la ejecución del programa computacional serán almacenados en archivos que contendrán los valores numéricos de la temperatura en diferentes instantes entre el momento inicial cuando la temperatura está dada  $T=T_c$  en cada punto de la región del acero líquido hasta  $T=T_m$  que acontece cuando el proceso de solidificación se inicia. Estos archivos que almacenan datos, pueden ser posteriormente procesados para obtener una visualización gráfica de la distribución de temperatura en el interior del molde y a su vez, mediante el uso de GNU-Octave pueden visualizarse y a la vez obtenerse perfiles de temperatura que son de relevancia en el proceso de enfriamiento del acero líquido como es el perfil de temperatura en la pared del molde o el punto de temperatura mínima en toda la región del acero líquido en el interior del molde.

## IV. RESULTADOS

### 4.1. Formulación matemática para el proceso de enfriamiento del acero

Usando la transformación dada por

$$X = \frac{x}{W}, \quad Y = \frac{y}{h(x,t)}, \quad \tau = \frac{V_c}{W} t, \quad \theta = \frac{T - T_m}{T_c - T_m} \quad (4.1)$$

Tenemos que de acuerdo a (Vynnycky, 2015),  $u \approx 0$  y (2.4) se transforma en

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left( \frac{1-Y}{Y_0 + \tau} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{1}{(Y_0 + \tau)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4.2)$$

Donde  $Y_0 = y_0/h(x, t)$  y  $Pe$  denota el número de Peclet que está dado por

$$Pe = \frac{\rho c_p V_c W}{k} \quad (4.3)$$

Para resolver la ecuación (4.2), es necesario prescribir condiciones de frontera, las cuales están dadas por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (4.4)$$

para  $X=0$ ;

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = -\tilde{Q} \quad (4.5)$$

para  $X=1$  donde

$$\tilde{Q} = \frac{QW}{k(T_c - T_m)'} \quad (4.6)$$

así como

$$\theta = 1 \quad (4.7)$$

en  $Y=0$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (4.8)$$

en  $Y=1$ .

Asimismo, tenemos que la condición inicial en  $\tau=0$  está dada por

$$\theta = 1 \quad (4.9)$$

Lo cual indica que inicialmente la temperatura en el molde es la temperatura a la cual está ingresando el acero líquido en el molde, esto es  $T=T_m$ .

#### 4.2. Formulación del elemento finito para la ecuación de energía

A través de técnicas matemáticas aplicadas a la ecuación de energía (Pletcher, 1997), ha sido posible simplificar la ecuación (4.2) de forma que la zona cercana a la pared del molde y la frontera entre el acero líquido y el aire puedan expresarse mediante una ecuación del calor por conducción dada por

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4.10)$$

donde  $\alpha$  está dada por la ecuación

$$\alpha = \frac{Bo}{Pe} \quad (4.11)$$

donde  $Bo$  es un número bastante grande dado por

$$Bo = \frac{\rho g W^2}{\gamma} \quad (4.12)$$

y  $\gamma$  es la tensión superficial existente entre el acero líquido y el aire en el interior del molde.

Además tenemos que inicialmente el valor de la temperatura en forma no dimensional tiene el valor de  $\theta=1$  y luego debido al posterior enfriamiento su valor disminuye hasta  $\theta=0$ .

Es importante especificar que las coordenadas no dimensionales X, Y representan a las coordenadas dimensionales x, y; y están relacionadas mediante las expresiones

$$X = 1 - Bo^{-1/2} \left( \frac{x}{W} \right) \quad (4.13)$$

y

$$Y = Bo^{-1/2} \left( 1 - \frac{y}{h(x,t)} \right) \quad (4.14)$$

Para resolver la ecuación (4.10) es necesario prescribir condiciones para la región que contiene el acero líquido, estas condiciones de frontera vienen dadas por lo siguiente:

Tenemos que en la pared del molde la ecuación (4.5) resulta en

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \beta \quad (4.16)$$

donde  $\beta = Pe^{-\frac{1}{2}\tilde{Q}}$ , para  $X=0$ .

$$\theta \rightarrow 1, \text{ para } X \rightarrow X_{\infty} \quad (4.17)$$

que representa el centro de simetría en el interior del molde.

Para  $Y \rightarrow Y_{\infty}$  que representa el ingreso del acero líquido, tenemos que

$$\theta \rightarrow 1 \quad (4.18)$$

Además, para la frontera entre el acero líquido y el aire tenemos que

$$\theta = \theta_0(X, \tau) \quad (4.19)$$

donde  $\theta_0$  dada por (Zambrano, 2021) está dada por

$$\theta_0(X, \tau) = 1 + \beta \left( X \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{X}{4\sqrt{\tau}} \right) - 4 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp \left( -\frac{X^2}{16\tau} \right) \right) \quad (4.20)$$

Asimismo, en el momento inicial tenemos que

$$\theta = 1 \quad (4.21)$$

cuando  $\tau = 0$ .

De la ecuación (4.10), tenemos que

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha \nabla \cdot (\nabla \theta) \quad (4.22)$$

De forma que al multiplicar una función de prueba  $\phi$  tenemos de (4.22)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi = \alpha \nabla \cdot (\nabla \theta) \phi \quad (4.23)$$

Y al integrar sobre la región líquida dada por R se tiene

$$\int_R \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi = \int_R \alpha \nabla \cdot (\nabla \theta) \phi \quad (4.24)$$

Ahora usando la equivalencia

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \theta) = \phi \nabla \cdot (\nabla \theta) + \nabla \theta \cdot \nabla \phi \quad (4.25)$$

En la ecuación (4.24) tenemos que

$$\int_R \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi = \alpha \int_R \nabla \cdot (\nabla \theta \phi) - \alpha \int_R \nabla \phi \cdot \nabla \theta \quad (4.26)$$

Lo cual es equivalente a

$$\int_R \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi + \alpha \int_R \nabla \theta \cdot \nabla \phi = \alpha \int_R \nabla \cdot (\nabla \theta \phi) \quad (4.27)$$

Con lo cual tenemos que la formulación variacional de (4.10) está dada por

$$\int_R \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi + \alpha \int_R \nabla \theta \cdot \nabla \phi = \alpha \int_{\partial R} \phi \nabla \theta \cdot \vec{n} \quad (4.28)$$

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario normal de la región líquida hacia el exterior y  $\Gamma$  la frontera de la región del acero líquido. El último término en el lado derecho de la igualdad en la ecuación (4.28) puede ser analizado de forma que las ecuaciones que serán determinadas por (4.28) como fue ilustrado en (2.16) representen las condiciones de frontera de la región del acero líquido.

Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  los conjuntos que corresponde a la fronteras entre el acero líquido y el aire, la pared del molde, la frontera por el cual el acero líquido ingresa al molde y el centro de simetría respectivamente, entonces

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \quad (4.29)$$

De forma que si definimos

$$B_1 = \int_{\Gamma_i} \phi \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} \quad (4.30)$$

Tenemos que, resulta de interés el valor de  $B_2$  debido a que en  $\Gamma_2$  es prescrita la condición de Neumann de forma que

$$B_2 = - \int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (4.31)$$

Y de (4.16) tenemos que

$$B_2 = -\beta \int_{\Gamma_2} \phi(X, Y) dY \quad (4.32)$$

Con lo cual tenemos que (4.28) puede escribirse como

$$\int_R \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi + \alpha \int_R \nabla \theta \cdot \nabla \phi = -\alpha \beta \int_{\Gamma_2} \phi(X, Y) dY \quad (4.33)$$

Por otro lado, debido a que el valor numérico de  $\theta$  cambia a través de toda la región líquida en el interior del molde, tenemos que su valor depende no solamente



de su posición sino depende también del tiempo de forma que si consideramos una discretización del tiempo mediante los valores de  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_\tau}$  de forma que

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_\tau} \quad (4.34)$$

donde  $N_\tau$  es un entero positivo, que determina el número de pasos en el tiempo para que el valor numérico de  $\theta$  alcance el valor numérico de 0 cuando la temperatura del acero alcanza el valor de  $T_m$ .

De la ecuación (4.34) podemos definir el valor de un incremento constante en cada paso del tiempo  $\Delta\tau$ , tal que

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1 = \dots = \tau_{N_\tau} - \tau_{N_\tau-1} \quad (4.35)$$

Supongamos que  $N$  es el número de puntos considerados en la región líquida donde se evalúa el valor de la temperatura en forma no dimensional

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N) \quad (4.36)$$

Entonces en la construcción de los elementos finitos, podemos definir  $N$  funciones de prueba de forma que para  $i=1, \dots, N$  tenemos que

$$\phi_i(X, Y) = \begin{cases} 1, & (X, Y) = (X_i, Y_i) \\ 0, & (X, Y) \neq (X_i, Y_i) \end{cases} \quad (4.37)$$

Entonces  $\theta$  puede ser expresado de la forma

$$\theta(X, Y, \tau) = \theta_1(\tau)\phi_1(X, Y) + \theta_2(\tau)\phi_2(X, Y) + \dots + \theta_N(\tau)\phi_N(X, Y) \quad (4.38)$$

donde  $\theta_i$  para  $i=1,\dots,N$  son funciones que dependen únicamente del valor de  $\tau$ .

Si definimos la función B que depende de (X, Y) de forma que

$$B(X, Y) = \begin{cases} \int_{\Gamma_2} \phi(X, Y) dY, & x \in \Gamma_2 \\ 0, & x \notin \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.39)$$

tenemos que (4.33) puede escribirse como

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi + \alpha \int_{\mathbb{R}} \nabla \theta \cdot \nabla \phi = -\alpha \beta B \quad (4.40)$$

Luego de expresado el valor numérico de  $\theta$  como una combinación lineal de funciones  $\phi_i$  tenemos que los términos en el lado izquierdo de (4.40) luego de multiplicarse por  $\phi$  pueden expresarse mediante

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi(X, Y) = \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} \int_{\mathbb{R}} \phi_1(X, Y) \phi(X, Y) + \dots + \frac{\partial \theta_N}{\partial \tau} \int_{\mathbb{R}} \phi_N(X, Y) \phi(X, Y) \quad (4.41)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} \nabla \theta \cdot \nabla \phi = \theta_1(\tau) \int_{\mathbb{R}} \nabla \phi_1(X, Y) \cdot \nabla \phi + \dots + \theta_N(\tau) \int_{\mathbb{R}} \nabla \phi_N(X, Y) \cdot \nabla \phi \quad (4.42)$$

Por otro lado, si en las expresiones (4.41) y (4.42) usamos  $\phi = \phi_j = \phi_j(X, Y)$

tenemos que al definir

$$M_{i,j} = \int_{\mathbb{R}} \phi_i(X, Y) \phi_j(X, Y) dX dY \quad (4.43)$$

y

$$K_{i,j} = \int_{\mathbb{R}} \nabla \phi_i(X, Y) \cdot \nabla \phi_j(X, Y) dX dY \quad (4.44)$$

Entonces (4.41) y (4.42) pueden ser escritos como

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi_j(X, Y) = \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} M_{1,j} + \dots + \frac{\partial \theta_N}{\partial \tau} M_{N,j} \quad (4.45)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} \nabla \theta \cdot \nabla \phi_j = \theta_1(\tau) K_{1,j} + \dots + \theta_N(\tau) K_{N,j} \quad (4.46)$$

respectivamente. Por otro lado, las derivadas con respecto al tiempo de  $\theta_i$  para  $i = 1, \dots, N$  son evaluadas usando el método de Euler explícito, por lo cual

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \tau}(\tau^n) = \frac{\theta_i(\tau_{n+1}) - \theta_i(\tau_n)}{\Delta \tau} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta \tau} \quad (4.47)$$

y con ello tenemos de (4.45)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \phi_j(X, Y) = \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_1^n}{\Delta \tau} M_{1,j} + \dots + \frac{\theta_N^{n+1} - \theta_N^n}{\Delta \tau} M_{N,j} \quad (4.48)$$

y de (4.46)

$$\int_{\mathbb{R}} \nabla \theta^n \cdot \nabla \phi_j = \theta_1^n K_{1,j} + \dots + \theta_N^n K_{N,j} \quad (4.49)$$

con lo cual (4.40) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\tau} \left( M_{1,j} \theta_1^{n+1} + \dots + M_{N,j} \theta_N^{n+1} \right) + \left( \alpha K_{1,j} - \frac{1}{\Delta\tau} M_{1,j} \right) \theta_1^n + \dots \\ \dots + \left( \alpha K_{N,j} - \frac{1}{\Delta\tau} M_{N,j} \right) \theta_N^n = -\alpha\beta B \end{aligned} \quad (4.50)$$

La ecuación (4.50) se cumple para cada  $j=1,\dots,N$  entonces similar a lo efectuado en (2.17) podemos definir un vector que contiene los valores de  $\theta_i$  para  $i = 1,\dots,N$  de forma que

$$\theta^n = \left( \theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_N^n \right)^T \quad (4.51)$$

Asimismo, podemos definir las matrices  $M$  y  $K$  que contienen los valores en la fila  $i$  y columna  $j$  el valor numérico  $M_{i,j}$  y  $K_{i,j}$  con lo cual la ecuación (4.50) puede expresarse como

$$\frac{1}{\Delta\tau} M \theta^{n+1} + \left( \alpha K - \frac{1}{\Delta\tau} M \right) \theta^n = -\alpha\beta B \quad (4.52)$$

Efectivamente, la ecuación (4.52) corresponde a la discretización de la ecuación (4.10) por el método del elemento finito de la región del acero líquido. La implementación computacional de esta discretización proveerá los valores numéricos de los  $N$  puntos en cada instante de tiempo.

Es importante resaltar qué tanto la matriz  $M$  como la matriz  $K$  son llamadas las matrices de masa y la matriz de rigidez en el método de los elementos finitos. Estas matrices son simétricas debido a que se cumple la igualdad

$$M_{i,j} = \int_R \phi_i \phi_j = \int_R \phi_j \phi_i = M_{j,i} \quad (4.53)$$

y

$$K_{i,j} = \int_R \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \int_R \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = K_{j,i} \quad (4.54)$$

Por otro lado, debido a que el valor de  $\theta^{n+1}$ , depende del valor de  $\theta^n$  y esto se puede observar en (4.52), tenemos que en la implementación computacional para determinar el valor de  $\theta$  en cada punto  $(X_i, Y_i)$  en el instante  $\tau_{n+1}$  debemos proveer los valores en cada punto  $(X_i, Y_i)$  en el instante  $\tau_n$  y luego resolver un sistema de ecuaciones lineales definidos mediante el esquema de iteración dado por

$$\frac{1}{\Delta\tau} M \theta^{n+1} = \left( \frac{1}{\Delta\tau} M - \alpha K \right) \theta^n - \alpha \beta B \quad (4.55)$$

donde  $\theta^0$  corresponde al conjunto de valores en cada punto  $(X_i, Y_i)$  para cada  $i = 1, \dots, N$  en el instante inicial, es decir  $\theta^0 = (1, 1, \dots, 1)^T$ .

De esta forma, obtenemos el valor de  $\theta^1$  y los subsiguientes valores para cada punto en la región que contiene el acero líquido hasta que uno de los valores en (4.51) alcanza el valor de cero que indica el inicio del proceso de solidificación del acero.

El lenguaje de programación GNU-Octave posee capacidades para resolver un sistema de ecuaciones lineales como el mostrado en la ecuación (4.55) por lo cual será posible obtener los valores de los vectores  $\theta_1, \dots, \theta_{N_t}$ .

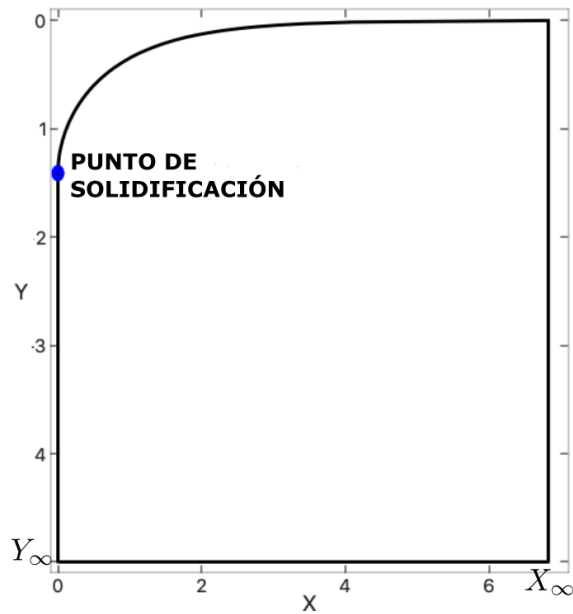
Además, es importante considerar que el punto de solidificación cuando existe la interacción entre la pared del molde, el acero líquido al inicio del menisco

se encuentra a una altura dada por  $Y = \sqrt{2}$  (Vynnycky, 2018), lo cual será determinante para la verificación de los resultados obtenidos en las próximas secciones de modo que los resultados se encuentren debidamente comprobados al estar de acuerdo los resultados mostrados por otros autores.

### **4.3. Generación de malla de la región del acero líquido**

Debido a que la región del acero líquido está continuamente incrementando su volumen por el constante suministro del acero líquido, resulta de interés el estudio del punto de solidificación donde existe la menor temperatura y se encuentra localizada en la zona ubicada geoméricamente entre el acero líquido y el aire y el acero líquido y la pared del molde.

En la figura 4.1, se muestra la región que contiene el acero en estado líquido, dentro del molde la cual está limitada superiormente por una curva. Esta curva que en el presente trabajo se ha representado simbólicamente por  $\Gamma_1$  se llama *menisco* en la literatura de la fundición de metales. Asimismo, puede observarse que empieza por un punto llamado *punto de solidificación* que corresponde al punto de menor valor de la temperatura. Esto quedará más aclarado en las próximas secciones.

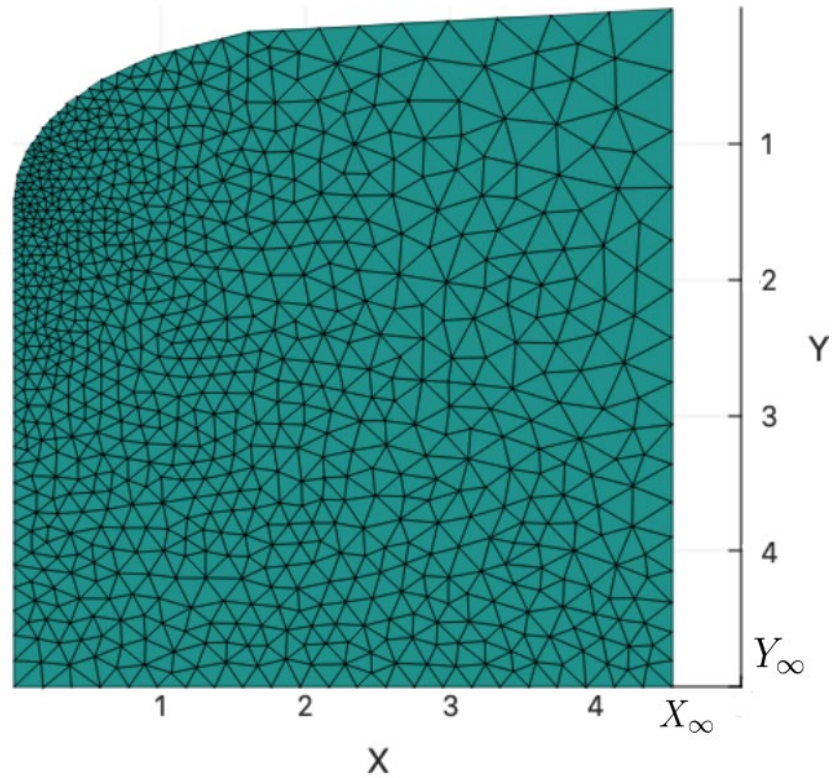


**Figura 4.1:** Región del acero líquido en el interior del molde y el punto de solidificación

Para determinar los puntos donde se aplicará el método del elemento finito en la región mostrada en la figura 4.1, se hace uso de un generador de mallas, el cual mediante una triangulación determina dichos puntos.

En la figura 4.2, tenemos la malla de la región del acero líquido para la aplicación del método del elemento finito. Como puede observarse los puntos que son considerados en dicha región determinan triángulos adyacentes unos con otros y al considerar todos los puntos se genera un sistema de ecuaciones lineales

comentado en la sección 4.2 que tienen por objetivo determinar los valores numéricos de  $\theta$  en cada uno de dichos puntos mostrados en la figura.



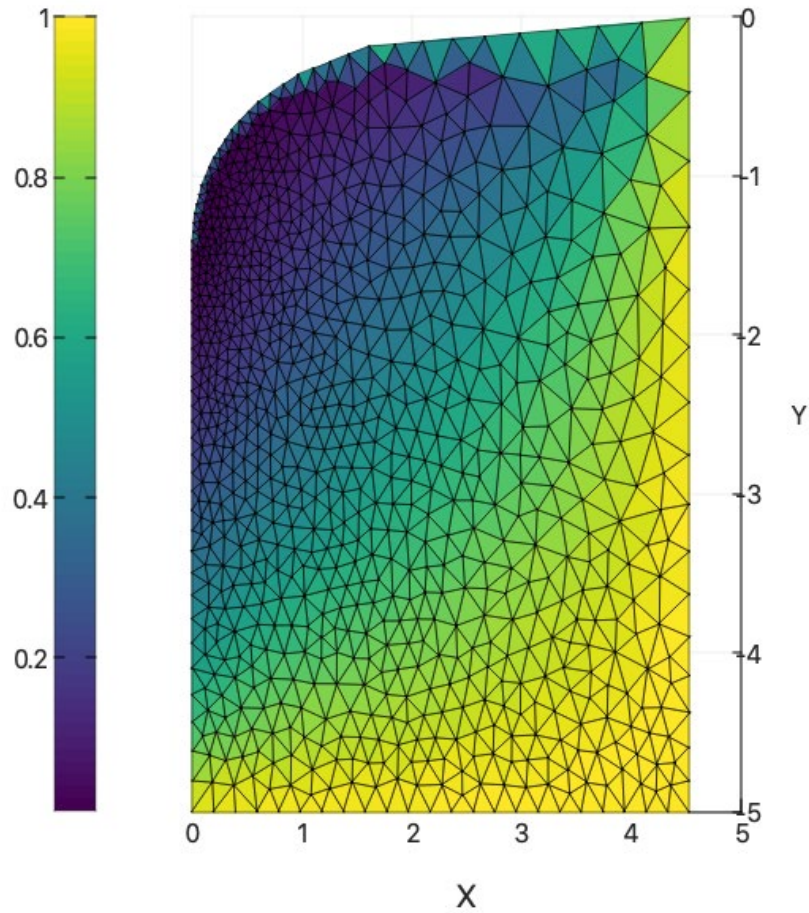
**Figura 4.2:** Triangulación de la región del acero líquido

#### **4.4. Distribución de temperatura de la región del acero líquido**

En la figura 4.3, son mostrados los valores numéricos de  $\theta$  como resultado de la solución de la ecuación (4.10) a través del esquema (4.52) al aplicar el método del elemento finito. Debido a que el rango de valores de  $\theta$  está entre 0 y 1 tenemos



que la barra indica que las máximas temperaturas se encuentran en la zona correspondiente al ingreso del acero líquido en donde  $\theta=1$ .

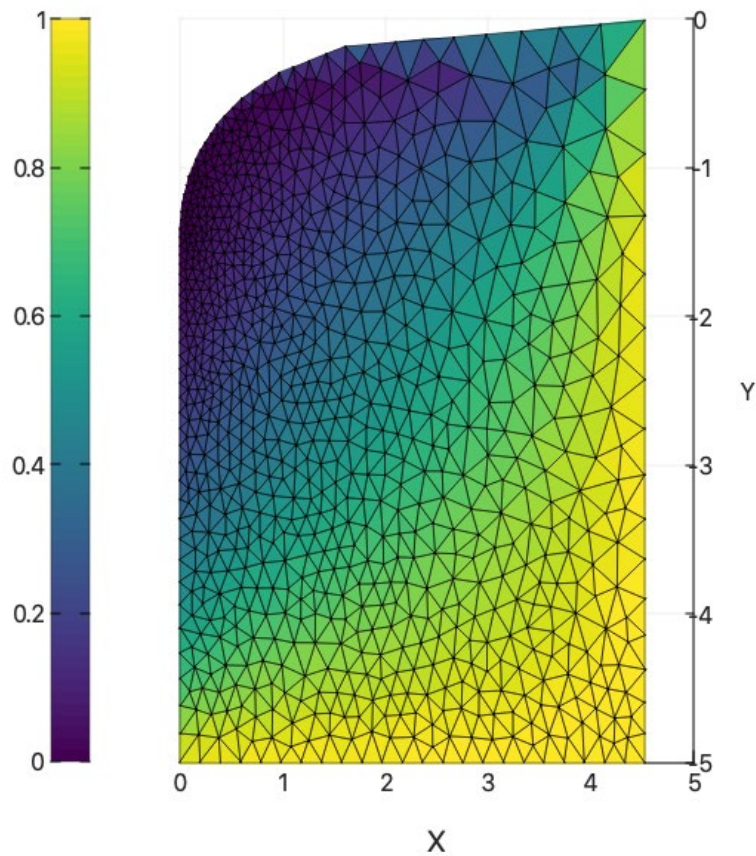


**Figura 4.3:** Perfil de temperatura del acero líquido en  $\tau = 1.0$

Además, podemos observar en la figura 4.3 que los valores de menor temperatura corresponden a la región donde se encuentra el punto de solidificación del acero líquido, algo expresado en los párrafos anteriores.

Asimismo tenemos que en el eje de simetría los valores de  $\theta=1$  son correspondientes a las condiciones expresadas en (4.17).

En la figura 4.4 puede apreciarse la distribución de temperatura del acero en estado líquido cuando  $\tau = 3.5$ , en este caso, tenemos que en el punto de solidificación se ha alcanzado el valor numérico de  $\theta = 0$ , lo cual corresponde al inicio del proceso de solidificación del acero dado que  $\theta = 0$  equivale a  $T = T_m$ .



**Figura 4.4:** Perfil de temperatura del acero líquido en  $\tau = 3.5$

Puede observarse, además, en la figura 4.4 que aunque la zona de menor temperatura en la región líquida disminuye su valor, los valores correspondientes a las fronteras correspondientes al ingreso del acero líquido y la zona cercana al eje de simetría permanecen con valores de  $\theta$  prácticamente inalterables debido a las

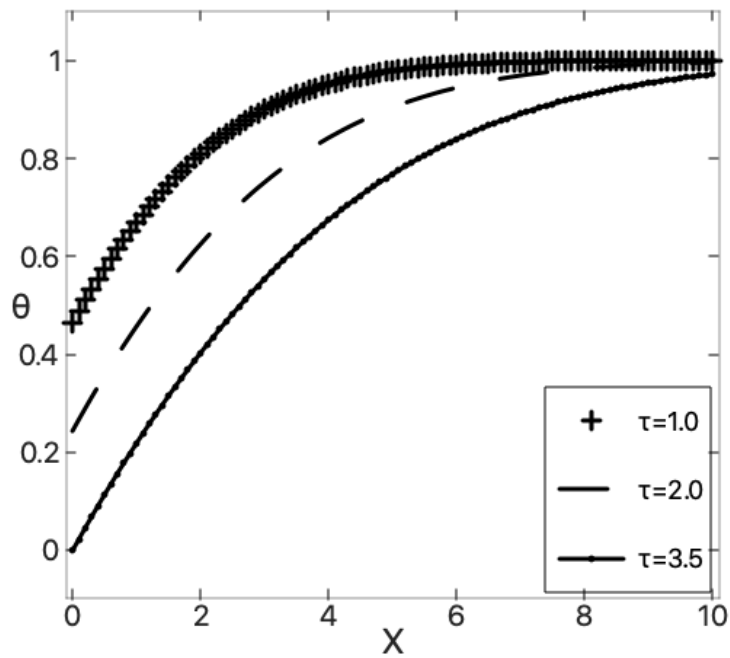
condiciones de frontera. En particular, en la parte inferior, permanece el valor de  $\theta = 1$  que corresponde a  $T = T_m$ .

#### 4.5. Perfiles de Temperatura y Flujo de Calor

Luego de calculado los valores numéricos de  $\theta$  en la región que contiene el acero líquido, resulta de interés conocer los perfiles de temperatura que existen en la frontera entre el acero líquido y el aire debido a que el punto de menor temperatura está sobre dicha frontera.

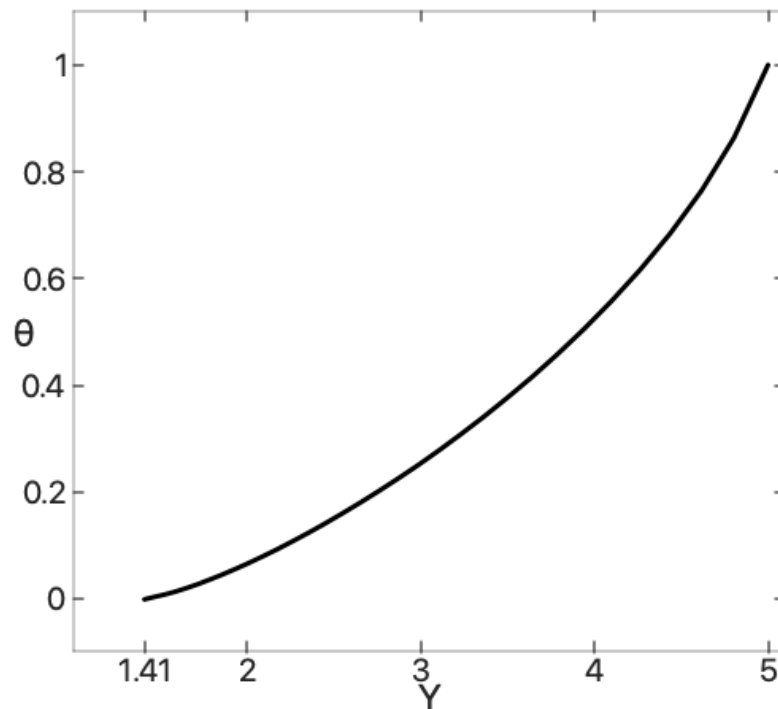
En la figura 4.5 puede observarse los perfiles de temperatura para tres valores de la variable no dimensional relacionada con el tiempo  $\tau$ , los cuales son  $\tau = 1.0$ ,  $\tau = 2.0$  y  $\tau = 3.5$  y de acuerdo a los perfiles tenemos que los valores de  $\theta$  van disminuyendo hasta alcanzar el valor  $\theta = 0$  cuando  $\tau = 3.5$  por lo cual podemos afirmar que  $\theta(0, \sqrt{2}, 3.5) = 0$  que representa el mínimo valor de  $\theta$  en toda la región que contiene el acero en estado líquido.

El resultado obtenido que se muestra en la figura 4.5 confirma que precisamente, el punto de solidificación corresponde a una altura de  $Y = \sqrt{2}$  y disminuye su valor numérico de  $\theta$  de manera monótona con respecto al tiempo. Un aspecto más detallado del inicio de la solidificación será tratado en la próxima sección.



**Figura 4.5: Perfil de temperatura del acero líquido en  $\tau = 1, 2, 3.5$**

En la figura 4.6 es mostrado los valores de  $\theta$  adyacentes a la pared del molde cuando  $\tau = 3.5$ , por la cual podemos afirmar que  $\theta(0, \sqrt{2}, 3.5) = 0$  que concuerda con los expresado en el párrafo anterior. Además puede apreciarse que los valores de  $\theta$  van incrementándose conforme el valor de  $Y$  aumenta de forma que el valor de  $\theta$  en la zona donde el acero líquido ingresa al molde corresponde a  $\theta = 1$ , esto concuerda con  $T = T_c$  de acuerdo a (4.1).



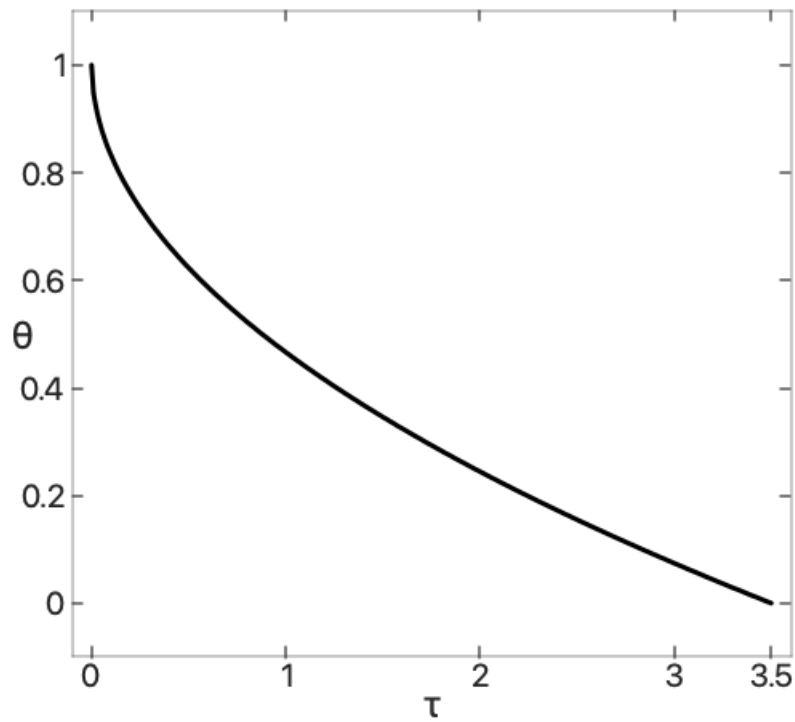
**Figura 4.6:** Perfil de temperatura del acero líquido para  $X = 0$  en  $\tau = 3.5$

Es importante indicar que precisamente la frontera indicada con  $X = 0$  corresponde a la pared del molde por donde una extracción de calor es llevada a cabo lo que permite un proceso de enfriamiento del acero líquido que ingresa continuamente al molde.

Por otro lado, con respecto a la frontera correspondiente al eje de simetría en el interior del molde tenemos que  $\theta = 1$  debido a las condiciones de frontera indicadas en las secciones anteriores. Por esta razón no son mostradas en el presente trabajo de tesis.

#### 4.6. El inicio de la solidificación

De acuerdo a los resultados se ha demostrado que el punto de solidificación posee el mínimo valor numérico de  $\theta$  y es de interés evaluar sus valores con respecto al tiempo. En la figura 4.7 es mostrado los valores desde el inicio del proceso de llenado del molde con el acero líquido hasta el tiempo en que se inicia el proceso de solidificación del acero.

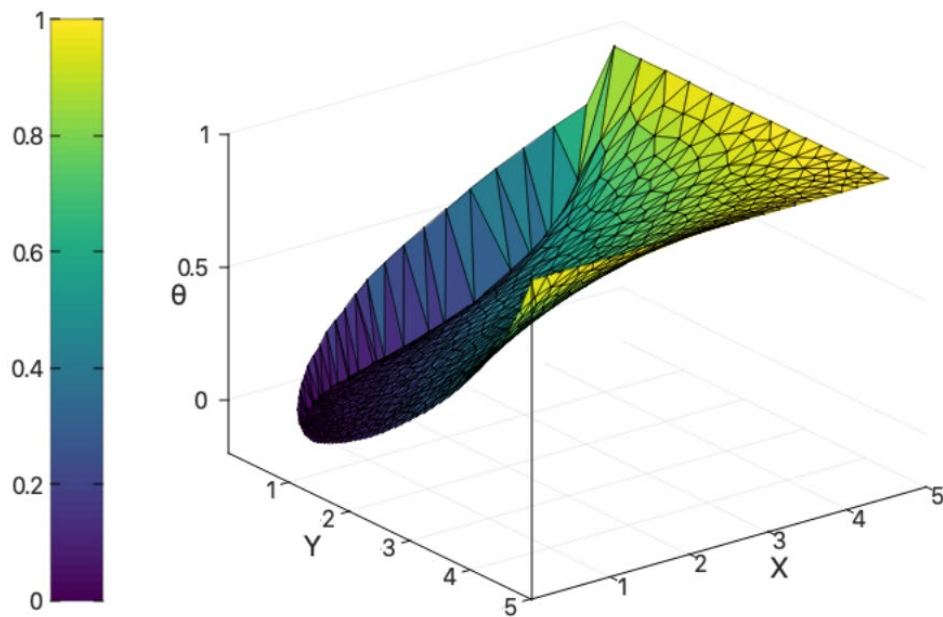


**Figura 4.7:** Temperatura del acero líquido  $\theta$  versus  $\tau$  en el punto de solidificación.

Es importante resaltar que de acuerdo a los resultados mostrados en la figura 4.7, el inicio de la solidificación tiene su inicio luego de que el molde se ha llenado

con el acero líquido que ingresa por la parte inferior considerando una temperatura constante  $T_c$  y con una velocidad constante dada por  $V_c$  en todo el proceso de llenado del molde.

En la figura 4.8, se muestra la representación tridimensional de los valores de  $\theta$  en  $\tau = 3.5$ , y muestra claramente que el valor mínimo de  $\theta$  se encuentra sobre la superficie donde se alcanza su mínima altura, asimismo se muestra que las alturas máximas de la superficie se encuentran en  $Y = 5$  que corresponden a la frontera por donde ingresa el acero líquido al molde y cuyo valor está indicado como  $\theta = 1$  en la figura.



**Figura 4.8:** Valores de  $\theta$  en el espacio tridimensional en  $\tau = 3.5$

Asimismo, puede observarse claramente en la superficie mostrada en la figura 4.8 que representa los valores numéricos de  $\theta(X, Y, 3.5)$  en el interior del

molde está conformada por triángulos que son el resultado de la generación de la malla sobre la región de acero líquido.

En el presente trabajo de tesis se han empleado 878 puntos en la región del acero líquido que ha sido cubierta por 1652 triángulos algunos de los cuales pueden ser claramente apreciados en la figura 4.8.



## V. DISCUSION

En el proceso de llenado de un molde con acero líquido, un asunto fundamental es el incremento del volumen del contenido en el molde, el cual implica la existencia de la frontera entre el fluido líquido y el medio ambiente que está en continuo movimiento (Grzymkowski, 2013) y puede ser abordada por métodos de fijación de frontera, como se trata en (Vynnycky, 2015).

De los resultados obtenidos al resolver la ecuación (4.10) sujeta a la condición de frontera en  $X = 0$  implicó que a medida que transcurre el tiempo el proceso de enfriamiento del acero líquido en el interior del molde condujo a la posterior solidificación del acero por efecto de la transferencia del calor en las paredes que es considerado en el modelo matemático de forma que si tenemos una mayor extracción de calor entonces es de esperar que el proceso de solidificación va a empezar antes del valor  $\tau = 3.5$ . Esto está en acuerdo con la experiencia en procesos de transferencia del calor donde se espera la solidificación del acero.

En muchos problemas relacionados con la dinámica de fluidos y la transferencia del calor en los que interviene una frontera que se mueve en el tiempo, usualmente los cálculos involucrados son complejos y se implementan técnicas como ALE - Arbitrary Lagrangian Eulerian. En el modelo presentado en este trabajo de tesis, aunque existe una frontera que está cambiando de posición como es la que delimita el contenido del acero líquido con el ambiente, ha sido posible abordar el proceso que conduce a su solución a través de la transformación dada en la ecuación (4.14) donde ahora

$0 \leq y/h(x, t) \leq 1$  que es equivalente en coordenadas dimensionales a  $0 \leq y \leq h(x, t)$ , de esta forma se mantiene fija la frontera y la ecuación diferencial puede resolverse en el cuadrado sin necesidad de usar otros métodos que involucren la actualización de forma continua la frontera.

Los números de Peclet  $Pe$  y Bond  $Bo$  han sido de importancia fundamental para emplear la ecuación (4.10) debido a que permitieron realizar la investigación al enfocar la evaluación de los valores numéricos de  $\theta$  alrededor del punto de solidificación desde que tenemos que para valores grandes de  $X$  la región del acero líquido correspondió al eje de simetría del molde y para valores grandes de  $Y$  la región correspondiente se trasladó a la frontera que corresponde con el ingreso del acero líquido al molde.

Por otro lado, debido a que el cociente  $Bo$  y  $Pe$  condujeron a la definición de  $\alpha$  en la ecuación (4.10), estos valores han sido de importancia debido a que si  $\alpha$  disminuye entonces la parte difusiva de la ecuación (4.10) desaparece entonces el problema estaría gobernado básicamente por los efectos convectivos, es decir, el calor se transporta a través del fluido o líquido metálico fundamentalmente.

Esta situación puede alcanzarse si existe una velocidad de ingreso del líquido metálico al molde bastante mayor que el que se considera en el presente trabajo, es decir,  $V_c$  se incrementa y esto implicaría un incremento a su vez del número de Peclet.

Por otro lado, si se tiene que el valor de  $\alpha$  se incrementa, entonces el problema estaría determinado básicamente por la conducción del calor debido a que el

número de Peclet disminuye haciendo que el cociente entre  $Bo$  y  $Pe$  se incrementa como resultado.

Esta situación implica que para llenar el molde ha de ser necesario un mayor tiempo, es decir el valor de  $\tau$  debe incrementarse de forma que tendríamos que  $\tau_{N_\tau} > 3.5$  manteniendo las otras magnitudes como las dimensiones del molde y la temperatura a la cual ingresa el acero líquido  $T_c$  inalterables.

Finalmente, en el apéndice A.1 se detalla la solución de la ecuación (4.2) sujeta a las condiciones de frontera (4.4), (4.5), (4.7) y (4.8) y condición inicial (4.9) donde el tiempo para el inicio de la solidificación acontece cuando  $\tau_{N_\tau} = 3.5$  bajo las condiciones de una velocidad de ingreso y temperatura del acero líquido constante. Estas magnitudes y otras empleadas en el presente trabajo de tesis se encuentran en el apéndice A.2.

## VI. CONCLUSIONES

Por lo desarrollado en el presente trabajo, se elaboran las siguientes conclusiones:

6.1. La simulación numérica de la ecuación (4.10) mostrada mediante la visualización de los resultados ha confirmado que las menores temperaturas se encuentran en la región adyacente a la pared del molde situada en la frontera entre el acero líquido y el aire en donde se encuentra el punto de solidificación del acero demostrado así la influencia de la condición de frontera que físicamente ha representado la extracción de calor conduciendo el proceso de enfriamiento del acero líquido.

6.2. Las ecuaciones diferenciales que han modelado el proceso del llenado en un molde han sido relacionadas con las ecuaciones de Navier-Stokes y el posterior enfriamiento del acero líquido ha sido expresado mediante la ecuación de energía sujeta a condiciones de frontera en la pared del molde que muestran explícitamente la extracción de calor de forma constante, de esto, se ha podido verificar en los resultados que este proceso de enfriamiento conduce a la posterior solidificación del acero líquido al encontrar que se ha obtenido  $T = T_m$  en el punto de solidificación.

6.3. El lenguaje de programación GNU-Octave a través de la implementación computacional ha permitido obtener la solución numérica de la ecuación (4.10) de forma iterativa desde  $\tau = 0$  hasta  $\tau = 3.5$ . Posteriormente permitió la visualización de la distribución de la temperatura de la región que contiene el acero líquido como se ha mostrado en los resultados para diferentes valores de la variable del tiempo

desde el inicio cuando  $\theta = 1$  hasta el llenado del molde cuando el inicio de la solidificación del acero acontece al obtener el valor de  $\theta = 0$ . Asimismo, GNU-Octave ha permitido la visualización en dos y tres dimensiones de los resultados al mostrar en cada caso el valor de la temperatura del punto de solidificación mediante una escala de color para dos dimensiones como el punto de menor altura cuando se representa mediante una superficie en el espacio de tres dimensiones los valores de  $\theta$ .

La solución numérica de la ecuación (4.10) mostrada mediante la visualización de los resultados ha confirmado que las menores temperaturas se encuentran en la región adyacente a la pared del molde situada en la frontera entre el acero líquido y el aire en donde se encuentra el punto de solidificación del acero demostrado así la influencia de la condición de frontera que físicamente ha representado la extracción de calor conduciendo el proceso de enfriamiento del acero líquido.

6.4. El método del elemento finito ha permitido la construcción del esquema numérico (4.52) que representa la ecuación diferencial (4.10) en términos de un sistema de ecuaciones lineales donde cada incógnita representa la temperatura en un punto particular de la región que abarca el acero en estado líquido en un determinado tiempo. Esto ha permitido la implementación de un programa computacional para obtener la solución del sistema de ecuaciones (4.52) a fin de obtener su solución para determinar la temperatura del acero líquido en el interior del molde durante el intervalo de tiempo desde que empieza a fluir el acero líquido al interior del molde hasta su llenado.

## VII. RECOMENDACIONES

Las siguientes recomendaciones son adecuadas para un posterior desarrollo de investigación relacionado con el tema presentado en este trabajo de tesis.

7.1. En el presente trabajo se ha formulado un modelo matemático para describir la evolución de la temperatura del acero sólido en el interior del molde. En el presente modelo de la evolución de la temperatura ha estado determinado por una condición prescrita en la pared mediante una condición de Neumann. Un posterior trabajo de investigación puede ser enfocado en determinar el proceso de enfriamiento al aplicar una condición de tercer tipo o condición de Robin que sea prescrita en la pared del molde. Con ello estudiar el efecto de la ley de Enfriamiento de Newton para el acero en estado líquido.

7.2. Otro aspecto que ha sido considerado en el desarrollo del presente trabajo de tesis es la velocidad a la cual ingresa el acero líquido al molde considerado de forma prescrita situación que acontece de la misma forma con la temperatura a la cual ingresa el acero líquido; por lo cual es recomendable que en un posterior trabajo de investigación pueda modificarse estas magnitudes, haciendo que el problema resulte interesante debido a que debe determinarse la influencia de las velocidades y temperaturas sobre el proceso de enfriamiento que acontece en la región que contiene el acero líquido desde el inicio hasta el comienzo del proceso de solidificación.

7.3. El lenguaje de programación GNU-Octave ha permitido obtener la solución numérica de la ecuación (4.10) a través de la implementación computacional de la ecuación (4.52). Es recomendable usar este lenguaje de programación en un

posterior trabajo de investigación debido a su consistencia y confiabilidad en los resultados, aparte de que es un software de programación matemática libre y gratuitamente descargable desde el internet, y que además trabaja tanto en WINDOWS 10 como en GNU-LINUX. No es pesado, y se instala rápida y fácilmente en cualquiera de los sistemas operativos mencionados. Una ventaja que también es adecuado mencionar es su velocidad en la ejecución de rutinas iterativas como la ecuación (4.52) lo que alienta su uso para la implementación de programas computacionales como ha sido el caso presentado en este trabajo de tesis.

## VIII. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Abreu, R., & Stich, D. a. (2015). The Complex Step-Finite-Difference Method. *Geophys, J. Int.*, 202, 72-93.
- Benilov, E., & Vynnycky, M. (8 de Febrero de 2013). Contact lines with 180-contact angle. págs. 481-506.
- Bikerman, J. (1970). *Physical Surfaces*. New York.: Academic Press.
- Bland, D. (1984). Flux and the continuous casting of steel. *IMAJ. Appl. Maths.*, 89-112.
- Brenner, S. (2016). *Topics in Numerical Partial Differential Equations and Scientific Computing*. USA: Springer.
- Burden, L. Richard; Faires, Douglas; Burden, M. Annette. (2016). *Numerical Analysis*. Boston-USA: Cengage Learning.
- Cengel, A. Yunus & Cimbala, M. John. (2017). *Fluid Mechanics*. New York-USA: McGraw Hill.
- Chapman, S. (2018). *Fortran for Scientists and Engineers*. USA: McGraw-Hill.
- Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P. (2014). *Numerical Methods for Engineers*. USA: Mc. Graw Hill.
- Chivers, I. a. (2015). *Introduction to Programming with Fortran*. Suiza: Springer.
- Crank, J. (1984). *Free and Moving Boundary Problems*. Oxfordshire: Oxford Science Publications, UK.
- Deitel, P. a. (2014). *C++ How to Program*. USA: Pearson.
- Eaton, J., Bateman, D., Hauberg, S., & Wehbring, R. (2020). *GNU Octave - Free your numbers*. Florida - Boston: The Free Software Foundation.
- Eck, C., & Garcke, H. a. (2017). *Mathematical Modeling*. Germany: Springer.



- Fang, C. (2019). *An Introduction to Fluid Mechanics*. Taiwan: Springer.
- Gockenbach, M. (2002). *Partial Differential Equations: Analytical and Numerical Methods*. Michigan - USA.: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Griebel, M., & Schüller, A. a. (2017). *Scientific Computing and Algorithms in Industrial Simulations*. Germany: Springer International Publishing.
- Grzymkowski, R., & Pleszcznski, M. a. (2013). Problem of the Moving Boundary in Continuos Casting Solved by the Analytic-Numerical Method. *Foundry-Engineering*, 13(1), 33-38.
- Gupta, S. (2018). *The Classical Stefan Problem*. Amsterdam: Elsevier.
- Gutschmidt, S., & Hewett, J. a. (2018). *Symposium on Recent Advances in Moving Boundary Problems in Mechanics*. Switzerland: Springer Nature.
- Haidemenopoulos, G. (2018). *Physical Metallurgy*. Boca Raton: CRC Press.
- Herrera, H., & Nuñez-Lopez, M. a.-C. (2017). Validation of numerical solution of diffusive part in a reaction-diffusion model. *Computer and Mathematics with Applications*, 74(1), 143-156.
- Jacobi, H. S. (2013). Ripplemarks on cast steel surfaces. *Institute of Iron and Steel of Japan*, 1180-1196.
- Kajishima, T. a. (2017). *Computational Fluid Dynamics*. Japan: Springer.
- Khan, M., & Sheikh, A. a.-S. (2016). *Evolution of Metal Casting Technologie*. Saudi Arabia: Springer.
- Kincaid, D. (2008.). *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Belmont, CA - USA: Thomson Brook/Cole. Inc.

- Langtangen, H. a. (2017). *Finite Difference Computing with PDEs*. Noruega: Springer.
- Lipnicki, Z. (2017). *Dynamics of Liquid Solidification*. Poland: Springer.
- Liu, G., & Quek, S. (2003). *The Finite Element Method*. Oxford-UK.: Elsevier Science.
- Melink, R., & Makrov, R. a. (2017). *Recent Progress and Modern Challenges in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science*. Canada: Springer Science.
- Outokumpu Inc. (1 de Enero de 2018). *Products Bar: Outokumpu*. Obtenido de Outokumpu Corporation Web Site:  
<https://www.outokumpu.com/en/products/forms>
- Pletcher, R., J, T., & Anderson, D. (2013). *Computational Fluids Mechanics and Heat Transfer*. USA: CRC Press Taylor & Francis Group.
- Savich, W. (2015). *Problem Solving with C++*. USA: Pearson.
- Schlichting, H. a. (2017). *Boudary-Layer*. Berlin: Springer.
- Tomono, H, K., & W., H. (1981). The liquid steel meniscus in molds and its relevance to the surface quality of castings. *Metallurgical and Materials Transactions (B)*, 409-411.
- Tu, Jiyuan & Yeoh, Guan-Heng & Liu, Chaoqun. (2018). *Computational Fluid Dynamics*. United States: Elsevier.
- Upadhyay, R. a. (2014). *Introduction to Mathematical Modeling and Chaotic Dynamic*. USA: CRC Press.
- Vynnycky, M. (2018). Applied mathematical modelling of continuous casting processes: a review. *Metals*, 8, 928.

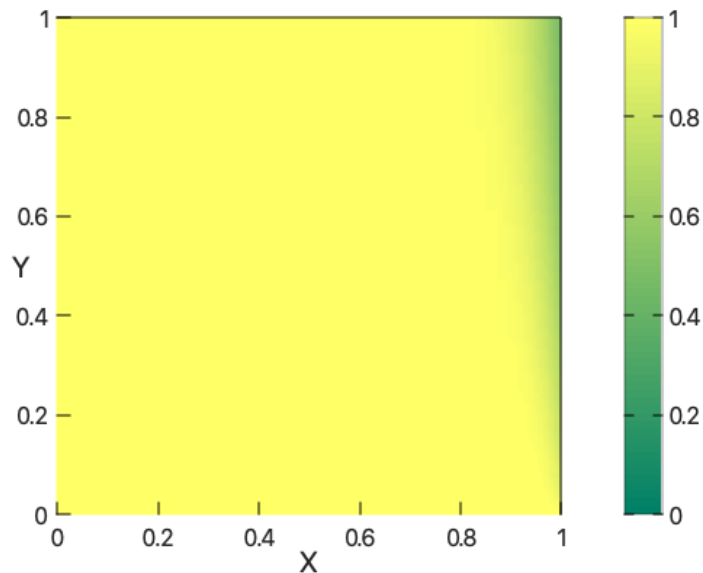
- Vynnycky, M. a. (2018). Towards a "moving-point" formulation for the modelling of oscillation-mark formation in the continuous casting of steel. *Applied Mathematical Modelling*, (63), 243-265.
- Vynnycky, M., Saleem, S., Devine, M., Florio, B., & Mitchell, S. L. (2017). On the formation of marks in the continuous casting of steel. *Royal Society Open Science*, 4: 170062.
- Vynnycky, M., Zambrano, M., & Cuminato, J. (1 de Julio de 2015). On the avoidance of ripple marks on cast metal surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, págs. 43-54.
- White, M. F. (2017). *Fluid Mechanics*. New York-USA: McGraw Hill.
- Whiteley, J. a.-F. (2012). *Guide to Scientific Computing in C++*. USA: Springer.
- Zambrano, M. (2021). On the cooling of liquid steel around a solidification point in ingot casting processes. *Para publicación*.

## ANEXO

### A.1 Solución Numérica de la ecuación (4.2)

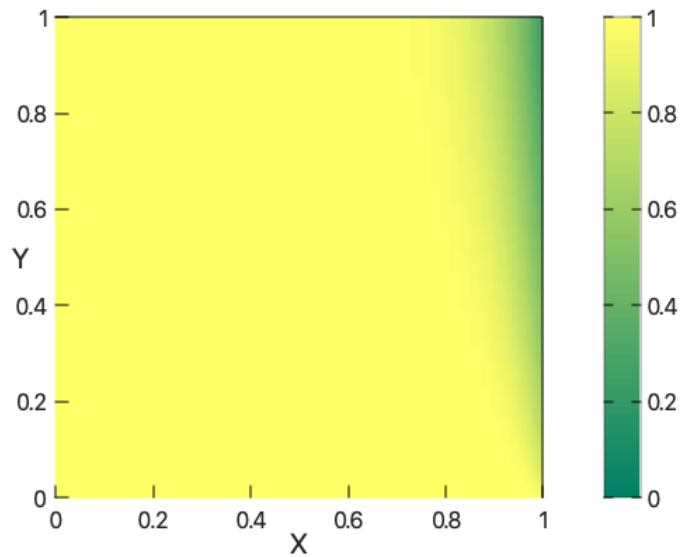
La ecuación (4.2) está formulada para la determinación de la temperatura sobre un cuadrado cuyos lados tiene longitud unitaria. Con el uso de GNU-Octave se ha implementado un programa computacional para resolver mediante el método de diferencias finitas la ecuación diferencial parcial (4.2) con algunos criterios encontrados en (Langtangen, 2017) y (Abreu, 2015). De acuerdo a las condiciones de frontera (4.4), (4.5), (4.7), (4.8) y la condición inicial (4.9). Para ello se ha considerado una región que resultó en el cuadrado  $[0,1] \times [0,1]$ , luego de la aplicación de la transformación de las ecuaciones en (4.1).

En la figura A.1 es mostrado la distribución de temperatura cuando  $\tau = 1.0$  y puede apreciarse que la temperatura va descendiendo en la frontera adyacente al molde, es decir en  $X = 1$  que corresponde en coordenadas dimensionales a  $x = W$ .



**Figura A.1:** Campo de temperatura  $\theta$  en  $\tau = 1.0$  como resultado de la solución numérica de la ecuación (4.2).

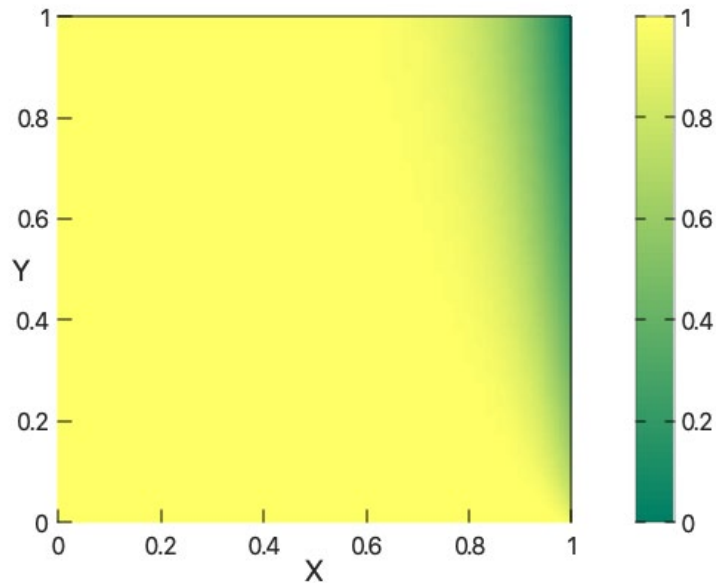
En la figura A.2, puede apreciarse la distribución de la temperatura cuando  $\tau = 2.0$ , en este caso, de acuerdo a los resultados, la temperatura ha disminuido con respecto a lo mostrado en la figura A.1. Este descenso en los valores de  $\theta$  es debido a la continua extracción del calor.



**Figura A.2:** Campo de temperatura  $\theta$  en  $\tau = 2.0$  como resultado de la solución numérica de la ecuación (4.12).

De acuerdo al condición de frontera prescrita en  $X = 1$ , este proceso de enfriamiento que ha iniciado en  $\tau = 0$ , tiene el efecto en toda la región  $[0,1] \times [0,1]$ , pero el descenso de los valores de  $\theta$ , se ve reflejado de forma mas intensa precisamente en  $X = 1$  y en la parte superior de la mismo cuadrado.

De acuerdo a esta observación y a los resultados obtenidos tenemos que la menor temperatura está alrededor de  $(X, Y) = (1,1)$ .



**Figura A.3:** Campo de temperatura  $\theta$  en  $\tau = 3.5$  como resultado de la solución numérica de la ecuación (4.2).

Asimismo, es importante resaltar que en la parte inferior de la región del acero líquido la temperatura es constante, cuyo valor es  $\theta = 1$ , esto está de acuerdo a la condición de frontera del ingreso del acero líquido a la temperatura constante  $T = T_c$ , como se indica en la condición de frontera (4.7).

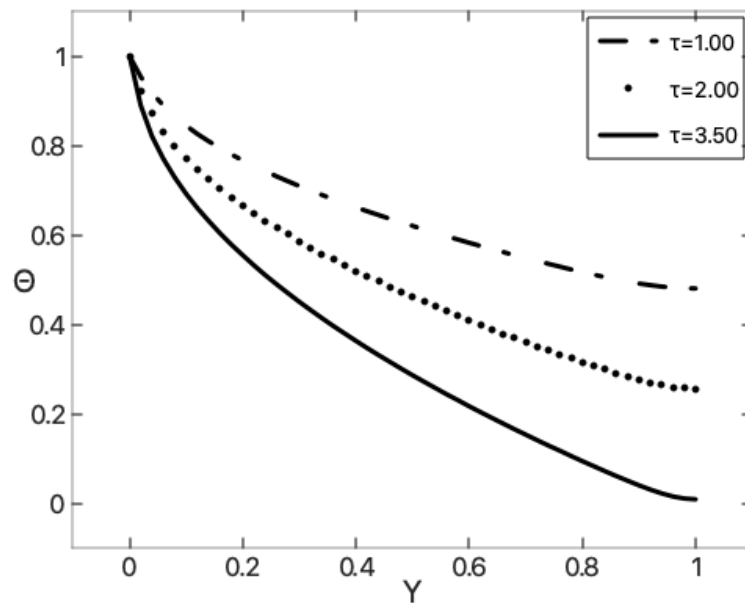
En la figura A.3, se muestra el campo de temperaturas cuando  $\tau = 3.5$  que de acuerdo a los resultados obtenidos se tiene que en  $(X, Y) = (1, 1)$  el valor numérico de  $\theta$  es cero que de acuerdo a las variables dimensionales esto equivale a  $T = T_m$  lo cual indica el inicio de la solidificación.

Es importante señalar que en  $\tau = 3.5$ , el molde ya se encuentra completamente lleno del acero en estado líquido y el proceso de solidificación se inicia por las paredes del molde. Razón por la cual, ya no existe más suministro del líquido metálico al molde.

Asimismo, podemos observar en la figura A.3 que las temperaturas más elevadas se encuentran en  $Y = 0$ , dado que ahí se mantiene la temperatura constante así como en  $X = 0$  que corresponde al eje de simetría.

Si en la implementación computacional que permite obtener la solución de la ecuación diferencial (4.2) se continua avanzando en los valores de  $\tau$  a partir de 3.5 entonces podemos afirmar los valores negativos de  $\theta$  implican la aparición de regiones donde ya no existe mas acero líquido sino acero en estado sólido.

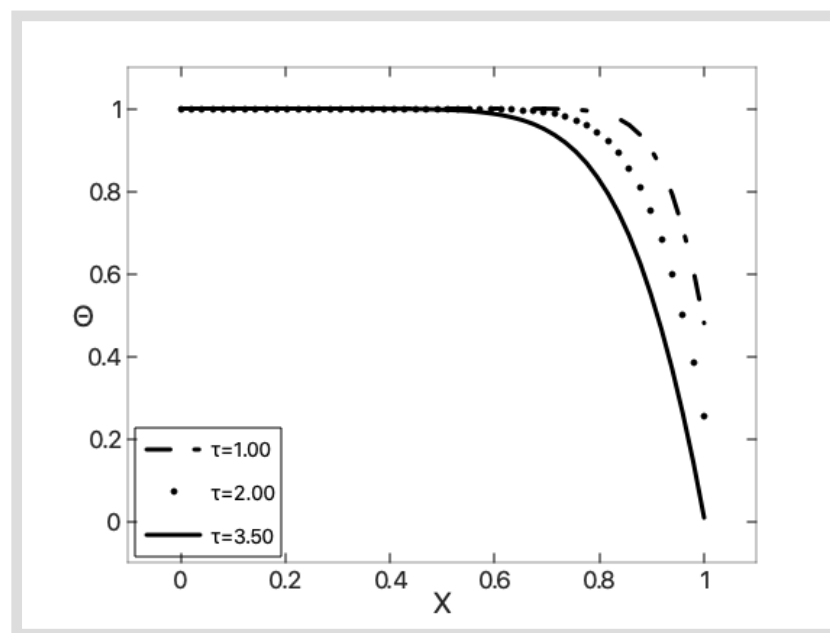
En la figura A.4, son mostrados los valores de la temperatura  $\theta$  adyacente a la pared del molde para diferentes valores de  $\tau$ , como son  $\tau = 1$ ,  $\tau = 2$  y  $\tau = 3.5$ . Estos valores de indican una disminución de la temperatura al pasar el tiempo y muestran que efectivamente en  $\tau = 3.5$  el valor de  $\theta$  alcanza el valor de 0.



**Figura A.4:** Valores de la temperature en la pared del molde para  $\tau = 1.0$ ,  $\tau = 2.0$  y  $\tau = 3.5$

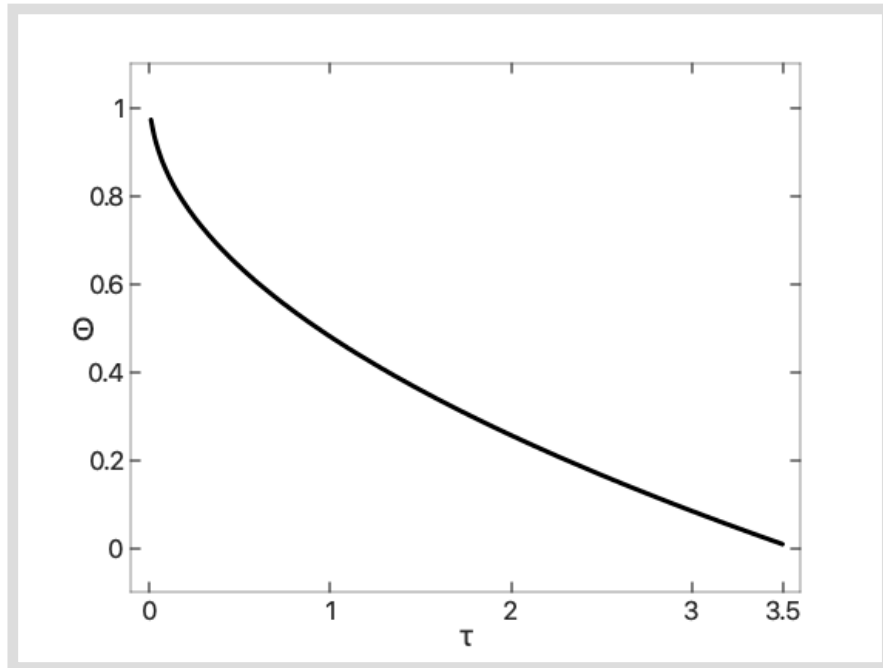
En este caso, el punto de solidificación se encuentra en  $(X, Y)$  y los perfiles de temperatura en la pared del molde comprueban esta situación dado que ahí se encuentra en todo momento la menor temperatura hasta el inicio del proceso de solidificación cuando  $\tau = 3.5$ .

En la figura A.5, son mostrados los valores de  $\theta$  en  $Y = 1$  para diferentes valores de  $\tau$ , como son  $\tau = 1$ ,  $\tau = 2$  y  $\tau = 3.5$ . Estos corresponden a la frontera entre el acero líquido y el aire por encima de la frontera. Esta frontera que esta continuamente en movimiento debido al ingreso de forma constante del acero líquido es considerado como una interfaz cuyo perfil es constante y plano cuando no son considerados efectos relacionados con la tensión superficial, siendo importante este resultado porque permite saber donde se encuentra el punto de solidificación del acero donde el proceso de solidificación empieza en  $X = 1$  en  $\tau = 3.5$



**Figura A.5:** Valores de la temperatura en la interfaz acero-aire para  $\tau = 1.0$ ,  $\tau = 2.0$  y  $\tau = 3.5$





**Figura A.6:** Valores numéricos de  $\theta$  vs  $\tau$  desde  $\tau = 0$  hasta  $\tau = 3.5$ .

En el presente trabajo de tesis se ha observado el lugar geométrico relacionado con el punto de solidificación en la región que contienen el acero líquido. Este lugar está directamente relacionado con la ubicación de la región cuyo valor de  $\theta$  es el mínimo en toda la región que contiene el acero líquido y está ubicado en  $(X, Y) = (1, 1)$ , razón por la cual la obtención de los valores de  $\theta$  en este punto resulta interesante.

En la figura A.6, son mostrados los valores de  $\theta$  en el punto de solidificación y como puede apreciarse, estos valores que inicialmente empiezan por  $\theta = 1$  en el momento inicial o  $\tau = 0$  disminuyen conforme el valor de  $\tau$  se incrementa hasta tener  $\theta = 0$  cuando  $\tau$  alcanza el valor de 3.5 por lo cual podemos afirmar que  $\theta \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow 3.5$ .

Finalmente, de acuerdo a los resultados, tenemos que el método de diferencias finitas para resolver la ecuación 4.2 mediante el lenguaje de programación GNU-Octave ha permitido la visualización de tales resultados con eficacia.

## A.2. VALORES NUMÉRICOS DE LAS PROPIEDADES FÍSICAS

Símbolo	Valor numérico	Unidad
$\rho$	8000	$\text{Kg m}^{-3}$
$c_p$	500	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	20	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\mu$	0.0067	$\text{N s m}^{-2}$
$W$	0.1	m
$V_c$	0.01	$\text{m s}^{-1}$
$T_c$	182.3	K
$T_m$	1773	K

### A.3. MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
<p><b>Problema General:</b></p> <p>¿Se puede simular numéricamente mediante elementos finitos la temperatura en la etapa inicial de la solidificación del acero?</p>	<p><b>Objetivo General</b></p> <p>Simular numéricamente mediante elementos finitos la temperatura en la etapa inicial de la solidificación del acero.</p>	<p>Con la simulación numérica mediante elementos finitos se determina la temperatura en la etapa inicial de la solidificación del acero.</p>	<p><b>Tipo de Investigación.</b></p> <p>Aplicativo</p> <p><b>Diseño de Investigación</b></p>	<p>Es una investigación en matemática en la cual se ha usado un programa computacional, por lo tanto en este tipo de investigaciones no interviene la población.</p>
	<p><b>Objetivos Específicos</b></p> <p>1. Formular un modelo matemático que describa la distribución de temperatura del acero líquido contenido en un molde y su proceso de enfriamiento al transcurrir el tiempo.</p> <p>2. Resolver la ecuación de conducción del calor, usando el método de elementos finitos.</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis del fenómeno físico</li> <li>• Formulación matemática del Problema</li> <li>• Implementación Computacional</li> <li>• Simulación Numérica</li> <li>• Evaluación de Resultados</li> </ul>	

	<p>3. Implementar un programa computacional en el lenguaje de programación GNU-Octave para resolver la ecuación diferencial que permite obtener la temperatura del acero líquido en el proceso de enfriamiento que conduce a la solidificación del acero.</p>			
--	---	--	--	--