UNIVERSIDAD NACIONAL

"SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

ESCUELA DE POSTGRADO

CÁLCULO NUMÉRICO DE LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURA EN UN MEDIO POROSO USANDO DIFERENCIAS FINITAS

Tesis para optar el grado de maestro
en Ciencias e Ingeniería
Mención en Computación e Informática

FRANKLIN MANUEL PUELLES GONZALES

Asesor: Dr. MARCOS ZAMBRANO FERNANDEZ

Huaraz – Ancash - Perú

2021

FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN DE TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN, CONDUCENTES A OPTAR TÍTULOS PROFESIONALES Y GRADOS ACADÉMICOS EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

1. Datos del autor:

Apellidos y Nombres: tdzŜftŜă D2yÎl·fŜă CNl·y˥fλy a l·ydzŜf

Código de alumno: лрфлунофуф!L Teléfono: ффнпфутто

E-mail: ŦLJdzŜftŜăƎ Ƶdzyl·ăl·YφŜŘdzφLJŜ D.N.I. n°: мспфнппу

(En caso haya más autores, llenar un formulario por autor)

2. Tipo de trabajo de Investigación:

- [x] Tesis
- [ ] Trabajo Académico
- [ ] Trabajo de Investigación

3. Trabajo de Investigación para optar el grado de:

a l·ŜăúNJl· Ŝy˙/λŜyŎλl·ă Ŝ Ly∃ŜyΛŜNJl· Ŏ2y˙ a ŜyŎλɜy˙Ŝy˙/2YLJdzűl·ŎλɜY˙Ŝ Ly∓2NJY˙łúλŎl·

4. Título del trabajo de Investigación:

/łfŎdzf2 bdzY˙ŞNJλŎ2 ŘŜ fl· 5λăúNJλōdzŎλɜy˙ŘŜ ¢ŜY˙LJŜNJl·údzNJl· Ŝy˙dzy˙ a ŜŘλ2 t2NJ2ă2 ¦ăl·yŘ2 5λ∓ŜNJŜyŎλl·ă CλyλúI·ă

5. Escuela: ¦yλØŜNJăλŘl·Ř bl·Ŏλ2yl·f {l·yúλl·∃2 !yúgyŜÎ ŘŜ a l·è2f2φ 9ăŎdzŜfl· ŘŜ t2ăú DNJl·Ř2

6. Programas: a l·ŜăúNJl· Ŝy˙ŎλŜyŎλl·ă Ŝ λy∃ŜyΛŜNJl· Ŏ2y˙YŜyŎλɜy˙Ŝy˙Ŏ2YLJdzűl·ŎλɜY˙Ŝ λy∓2NJY˙łúλŎl·

7. Asesor:

Apellidos y nombres ½l·YōNJl·y2 CŜNJyl·yŘŜÎ a l·NJŎ2ă D.N.I n°: плпмфмрр

E-mail: YÎl·YōNJl·y2 Ƶdzyl·ōφŜŘdzφLJŜ ID ORCID: ŔŭúLJăYкк2NJŎλŘφ2NJ∃клллллллллнпонтпфллл

8. Referencia bibliográfica: ¢Ŝăλă Ŝy˙∓2NJY˙l·ú2 ! t !

9. Tipo de acceso al Documento:

- [x] Acceso público* al contenido completo. Acceso
- [ ] restringido** al contenido completo

Si el autor eligió el tipo de acceso abierto o público, otorga a la Universidad Santiago Antúnez de Mayolo una licencia no exclusiva, para que se pueda hacer arreglos de forma en la obra y difundirlo en el Repositorio Institucional, respetando siempre los Derechos de Autor y Propiedad Intelectual de acuerdo y en el Marco de la Ley 822.

En caso de que el autor elija la segunda opción, es necesario y obligatorio que indique el sustento correspondiente:

_____

_____

_____

10. Originalidad del archivo digital

Por el presente dejo constancia que el archivo digital que entrego a la Universidad, como parte del proceso conducente a obtener el título profesional o grado académico, es la versión final del trabajo de investigación sustentado y aprobado por el Jurado.

_____

Firma del autor

11. Otorgamiento de una licencia *CREATIVE COMMONS*

Para las investigaciones que son de acceso abierto se les otorgó una licencia *Creative Commons,* con la finalidad de que cualquier usuario pueda acceder a la obra, bajo los términos que dicha licencia implica.

El autor, por medio de este documento, autoriza a la Universidad, publicar su trabajo de investigación en formato digital en el Repositorio Institucional, al cual se podrá acceder, preservar y difundir de forma libre y gratuita, de manera íntegra a todo el documento.

Según el inciso 12.2, del artículo 12º del Reglamento del Registro Nacional de Trabajos de Investigación para optar grados académicos y títulos profesionales - RENATI "Las universidades, instituciones y escuelas de educación superior tienen como obligación registrar todos los trabajos de investigación y proyectos, incluyendo los metadatos en sus repositorios institucionales precisando si son de acceso abierto o restringido, los cuales serán posteriormente recolectados por el Recolector Digital RENATI, a través del Repositorio ALICIA".

……

12. Para ser verificado por la Dirección del Repositorio Institucional

Fecha de Acto de sustentación:

Huaraz, МСКЛСКНЛНМ

Firma: _____

UNIVERSIDAD NACIONAL SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO – REPOSITORIO INSTITUCIONAL – UNASAM

Varillas William Eduardo
Asistente en Informática y Sistemas
- UNASAM -

***Acceso abierto**: uso lícito que confiere un titular de derechos de propiedad intelectual a cualquier persona, para que pueda acceder de manera inmediata y gratuita a una obra, datos procesados o estadísticas de monitoreo, sin necesidad de registro, suscripción, ni pago, estando autorizada a leerla, descargarla, reproducirla, distribuirla, imprimirla, buscarla y enlazar textos completos (Reglamento de la Ley No 30035).

**** Acceso restringido:** el documento no se visualizará en el Repositorio.

UNIVERSIDAD NACIONAL

"SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

ESCUELA DE POSTGRADO

CÁLCULO NUMÉRICO DE LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURA EN UN MEDIO POROSO USANDO DIFERENCIAS FINITAS

Tesis para optar el grado de maestro
en Ciencias e Ingeniería
Mención en Computación e Informática

FRANKLIN MANUEL PUELLES GONZALES

Asesor: DR. MARCOS ZAMBRANO FERNANDEZ

Huaraz – Ancash - Perú
2021

N° de Registro: **T0777**

MIEMBROS DEL JURADO

Doctor Luis Alberto Moreno Rubiños Presidente

_____

Magister Jube Ciro Portalatino Zevallos Secretario

_____

Doctor Luis Elmer Angulo Cabanillas Vocal

_____

ASESOR

***Doctor* Marcos Zambrano Fernández**

AGRADECIMIENTO

- En el desarrollo del presente trabajo de tesis, en primer lugar, quiero agradecer a Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado, haciendo realidad este sueño anhelado.
- A la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, por darme la oportunidad de estudiar el postgrado.
- A mi asesor de tesis, Dr. Marcos Zambrano Fernández, quien, con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado que pueda culminar con éxito el desarrollo de la tesis.

DEDICATORIA

A mis padres quienes me dieron la vida,

educación, apoyo y consejos.

A mi esposa e hijos, quienes supieron entender el

sacrificio realizado por mi persona hacia ellos.

ÍNDICE

Página

AGRADECIMIENTO..... vi

DEDICATORIA vii

RESUMEN..... ix

ABSTRACT.....x

I. INTRODUCCIÓN..... 1

Objetivos..... 3

Objetivo General..... 3

Objetivos Específicos 3

Hipótesis. 3

Variables..... 4

Variable Independiente..... 4

Variable Dependiente 4

II. MARCO TEÓRICO 7

2.1. Antecedentes..... 7

2.2. Bases Teóricas. 12

2.3. Definición de términos. 30

III. METODOLOGÍA..... 32

IV. RESULTADOS 39

V. DISCUSIÓN..... 63

VI. CONCLUSIONES..... 69

VII. RECOMENDACIONES 71

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 73

ANEXO 01:..... 75

RESUMEN

En la actualidad existe un creciente interés por el estudio de las propiedades y características de los medios porosos debido a innumerables aplicaciones que existen. Estas propiedades y características pueden ser relacionadas con el flujo de un fluido existente en el medio poroso y su temperatura. Usualmente la temperatura de un fluido no es la misma en todo el medio poroso, por lo cual resulta de interés determinar cuál es la temperatura en cada punto dicho dominio y ese es precisamente el objetivo del presente trabajo de tesis.

Se detallan los aspectos principales en el marco teórico y la metodología necesaria para resolver el problema usando el método de diferencias finitas.

Para describir el fenómeno de la evolución de la temperatura en un medio poroso, resulta de vital importancia el campo de velocidades de un fluido en el interior del domino dado que, con dicho campo, la ecuación de energía que determina la distribución de temperatura del medio poroso podrá ser solucionada.

El empleo del método diferencias finitas resulta ser adecuado para el cálculo de la temperatura en el medio poroso debido a su practicidad y entendible metodología para discretizar la ecuación de energía relacionada con la temperatura.

Finalmente, el desarrollo de un programa computacional que determina la temperatura en cada punto del dominio poroso es adecuado para un análisis que describe las características del medio y como la temperatura se distribuye cuando ciertos factores como la porosidad del medio cambian.

Palabras clave: medios porosos, temperatura, diferencias finitas, programa computacional.

ABSTRACT

At present there is a growing interest in the study of the properties and characteristics of porous media due to the innumerable applications that exist. These properties and characteristics can be related to the flow of a fluid existing in the porous medium and its temperature. Usually, the temperature of a fluid is not the same throughout the porous medium, which is why it is of interest to determine what the temperature is at each point in said domain and that is precisely the objective of this thesis work.

The main aspects are detailed in the theoretical framework and the methodology necessary to solve the problem using the finite difference method.
To describe the phenomenon of the evolution of temperature in a porous medium, the velocity field of a fluid inside the domain is of vital importance since, with this field, the energy equation that determines the temperature distribution of the medium porous can be solved.

The use of the finite difference method turns out to be adequate for calculating the temperature in the porous medium due to its practicality and understandable methodology to discretize the energy equation related to temperature.

Finally, the development of a computer program that determines the temperature at each point of the porous domain is suitable for an analysis that describes the characteristics of the medium and how the temperature is distributed when certain factors such as the porosity of the medium change.

Key Words: porous media, temperature, finite differences, computer program.

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, un problema que habitualmente existe en las ciencias e ingeniería relacionada con los medios porosos es la determinación de sus propiedades y con ello como es el transporte del calor a través de toda la región que conforma dicho medio poroso. Un medio poroso está conformado por partículas sólidas y espacios vacíos de tal forma que el fluido que ingresa al medio poroso fluye a través de los espacios vacíos con dirección hacia una salida. Cuando los espacios vacíos se han completado del fluido entrante decimos que el medio poroso está saturado del fluido. Esta situación es mostrada en la figura 1.

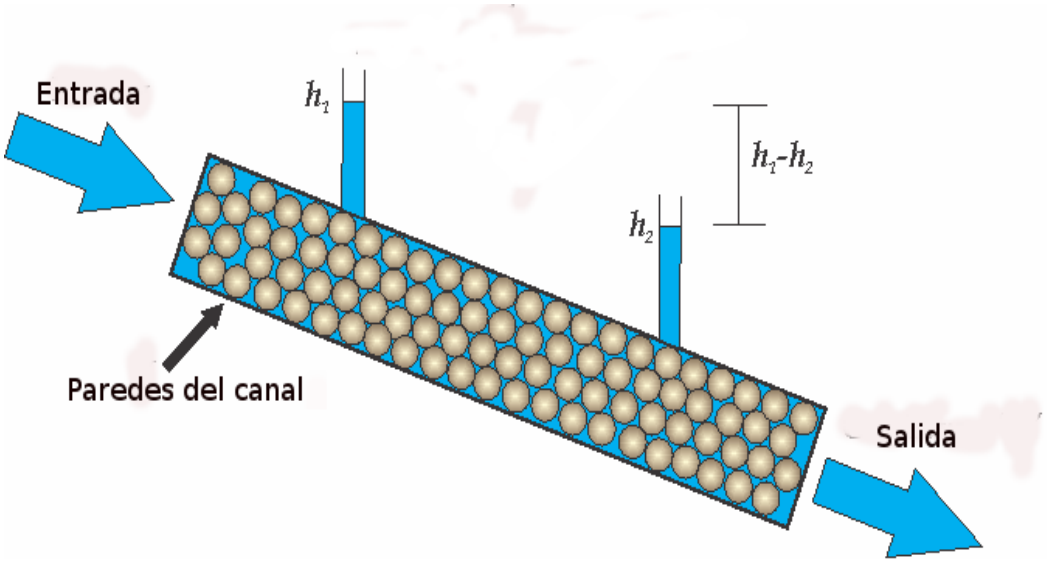

Figura 1: Entrada de un fluido en un medio poroso

En la figura 1, las presiones generadas en el interior del medio poroso son determinadas por las alturas h_1 y h_2 de tal forma que su diferencia $h_1 - h_2$ da origen al incremento de presión existente en el fluido que se encuentra en el interior del medio poroso.

La presente tesis trata sobre fluidos incompresibles existentes en medios porosos, es decir aquellos cuya densidad permanece constante cuando se aplican esfuerzos sobre ellos, estos fluidos por lo general son líquidos. Además, asumimos que el fluido que ingresa continuamente al medio poroso llena los espacios vacíos de tal forma que el medio poroso siempre está saturado del fluido incompresible.

Nuestro interés en el desarrollo del presente trabajo de tesis, está enfocado en la transferencia del calor en el medio poroso, a través del mecanismo del flujo del fluido, esto es conocido en la literatura científica como *transferencia de calor en el medio poroso por convección.*

De acuerdo a lo explicado, el planteamiento del problema es dado de la siguiente manera:

Problema General:

¿Es posible la determinación de la temperatura en una región conformada por un medio poroso que se encuentra en estado saturado de un fluido incompresible?

Problemas Específicos:

¿Es posible formular un modelo matemático que describa la temperatura y sus propiedades del medio poroso cuando existe una trasferencia de calor por convección y su dependencia respecto a la porosidad existente en dicho medio?

¿Cuán posible es desarrollar un programa computacional que permita resolver numéricamente la ecuación diferencial que representa la temperatura del medio poroso?

1.1.Objetivos.

Objetivo General

Calcular numéricamente la distribución de temperatura, usando el método de diferencias finitas, en un medio poroso que se encuentra en estado saturado por un fluido incompresible.

Objetivos Específicos

1. Formular matemáticamente un modelo que posea la ecuación diferencial que describe la temperatura de calor por convección y sus propiedades en un medio poroso y su evolución en el tiempo.
2. Implementar un programa computacional usando un software matemático que permita resolver numéricamente la ecuación diferencial que representa la temperatura del medio poroso.

1.2.Hipótesis.

En la figura 1, podemos observar un medio poroso cuya región en el espacio aparece inclinada, esto produce una diferencia de presión que da origen a un campo de velocidades, siendo el medio poroso homogéneo podemos observar desde arriba y la proyección resulta un dominio bidimensional como se muestran en figura 4 y es sobre este dominio que deseamos investigar la transferencia del calor por convección durante el desarrollo de la presente tesis.

La hipótesis para el proyecto relacionado con la presente tesis ha sido dada por la siguiente afirmación:

La hipótesis para el proyecto relacionado con la presente tesis ha sido dada por la siguiente afirmación:

Usando el método de las diferencias finitas se puede discretizar el dominio del medio poroso y calcular numéricamente la solución de la ecuación

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

mediante un sistema de ecuaciones lineales cuya solución dará como resultado el campo de temperatura del medio poroso en cada nodo, para cada instante de tiempo.

1.3.Variables

Variable Independiente

Ecuación diferencial parcial de la distribución de temperatura en un medio poroso

Variable Dependiente

Cálculo de la temperatura usando diferencias finitas.

JUSTIFICACIÓN

En la actualidad existe un creciente interés por las propiedades y características de los medios porosos debido a innumerables aplicaciones que existen como, por ejemplo: en la esterilización de productos enlatados, donde al aplicarle calor con fines de esterilización, este se transfiere por convección y se distribuye hasta lograr la esterilización del producto, en la industria de la extracción de yacimientos de petróleo, en la compactación de suelos, etc. Estas propiedades y características

pueden ser relacionadas con el flujo de un fluido existente en el medio poroso y su temperatura. Usualmente, la temperatura del fluido mencionado no es la misma en todo el medio poroso por lo cual resulta de interés determinar cuál es la temperatura en cada punto dicho dominio.

En la actualidad existen softwares privativos que resuelven el problema de la transferencia de calor en medios porosos pero gran parte de ellos usan técnicas que no son abiertas o claras en su implementación computacional, y no son accesibles a la comunidad científica, con el presente proyecto se pretende desarrollar un modelo matemático que permita determinar la temperatura en el interior de un medio poroso y desarrollar e implementar computacionalmente un programa cuyo objetivo es la determinación de la temperatura en el interior del medio poroso.

Delimitación.

La presente tesis delimita el desarrollo de su ejecución al estudio del fenómeno físico de la transferencia de calor por convección en medios porosos.

La convección está determinada por el flujo de un fluido incompresible en régimen laminar que llena los espacios vacíos del medio poroso. Situación que será detallada en las próximas secciones.

La investigación relacionada con esta tesis estuvo limitada a la transferencia de calor en un espacio bidimensional en donde se tiene prescrito el campo de velocidades del fluido que ingresa continuamente en el medio poroso.

Ética de la Investigación.

La presente tesis no ha realizado estudios experimentales con seres humanos u organismos vivos por lo cual no se requiere la información de un consentimiento sobre alguien o algún sujeto de estudio.

II. MARCO TEÓRICO

2.1.Antecedentes.

En un medio poroso el campo de velocidades del fluido existente en su interior está determinado por las presiones que se generan a medida que el flujo del fluido toma lugar. Esta idea motivo a Henry Darcy (1803-1858) a realizar diversos experimentos para describir las características del flujo en un medio poroso. Así, H. Darcy llego a la conclusión que la velocidad del flujo era proporcional al gradiente de presión que existía. La forma matemática de la Ley de Darcy, expresa que dicha velocidad $\boldsymbol{u}$ viene dada, según (Verruijt, 1995), por

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{\mu}}\left(\boldsymbol{\nabla p} - \boldsymbol{\rho_f g}\right) \qquad (1)$$

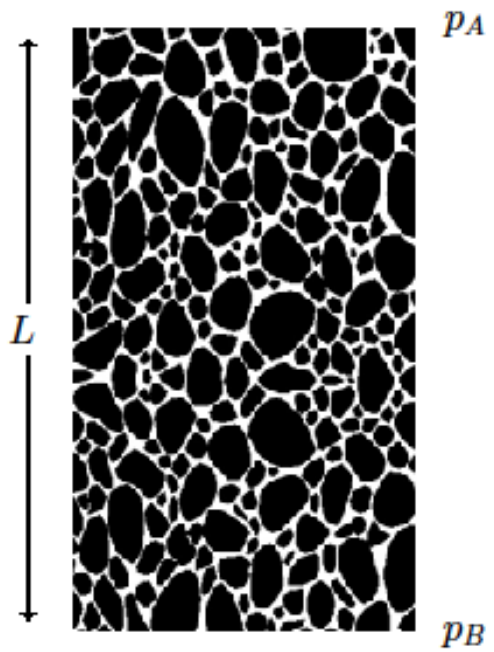

Figura 2: Presiones existentes en un medio poroso dan origen al concepto de gradiente hidráulico i.

Donde k, μ son respectivamente la permeabilidad del medio poroso y la viscosidad del fluido que fluye internamente, ρ_f es la densidad del fluido, g es el vector de gravedad y la cantidad ∇p es el gradiente de presión que puede ser aproximado por

$$\boldsymbol{\nabla p} \sim \frac{\boldsymbol{p_A} - \boldsymbol{p_B}}{\boldsymbol{L}} \tag{2}$$

De acuerdo a lo mostrado en la figura 2.

Otro concepto importante viene dado por la *porosidad* que es la razón de volúmenes expresados mediante

$$e = \frac{V_e}{V_T} \tag{3}$$

Donde V_e es el volumen total del espacio vacío y V_T es el volumen de todo el medio poroso.

Según (Badruddin, Khan, & Baig, 2020), analiza una revisión de los hallazgos relacionados con la transferencia de calor en medios porosos en los últimos tiempos. La revisión se centra en la transferencia de calor en medios porosos colocados en varias formas geométricas, como placa vertical, cavidad, formas cilíndricas, etc. Se muestran diferentes fenómenos que abarcan la transferencia de calor, como convección natural, convección mixta, equilibrio térmico, desequilibrio térmico. dada la debida consideración para el propósito de la revisión. Se encuentra que, a pesar que la investigación en medios porosos se estudia durante más de un siglo, hay muchos hallazgos nuevos que aún mejoran la comprensión básica del tema.

Sin embargo, (Nield & Bejan, 2006) indica que la estabilidad de la convección en una capa porosa horizontal, sometida a un gradiente de temperatura inclinado de

magnitud finita, y confinada entre planos perfectamente conductores, se ha investigado mediante análisis de estabilidad lineal. Se muestra que la inestabilidad aparece en forma de rodillos longitudinales estacionarios (con ejes alineados en la dirección de la componente horizontal del gradiente de temperatura) superpuestos al flujo básico. A medida que aumenta el número de Rayleigh horizontal, el número de Rayleigh vertical crítico también aumenta y hay una serie de transiciones a modos de orden superior, correspondientes a múltiples capas de rollos.

Sin embargo (Jones & Persichetti, 1986) se centra en las inestabilidades convectivas del flujo pasante en lechos empaquetados con fuentes de calor internas. Cuando un lecho empacado se calienta con fuentes de calor internas, los efectos del flujo de paso sobre las condiciones de inicio de la convección se han examinado numéricamente bajo la teoría de la estabilidad lineal. Las condiciones resultantes muestran que las inestabilidades estacionarias ocurren a valores más altos del número de Darcy-Rayleigh que los valores críticos a medida que aumenta la cantidad de flujo. Los efectos de los límites libres y rígidos sobre la condición de inicio también se obtienen para los medios porosos Brinkman con flujo continuo.

El presente trabajo de tesis está enfocado en calcular la distribución de la temperatura en un medio poroso como se muestra en la figura 3.

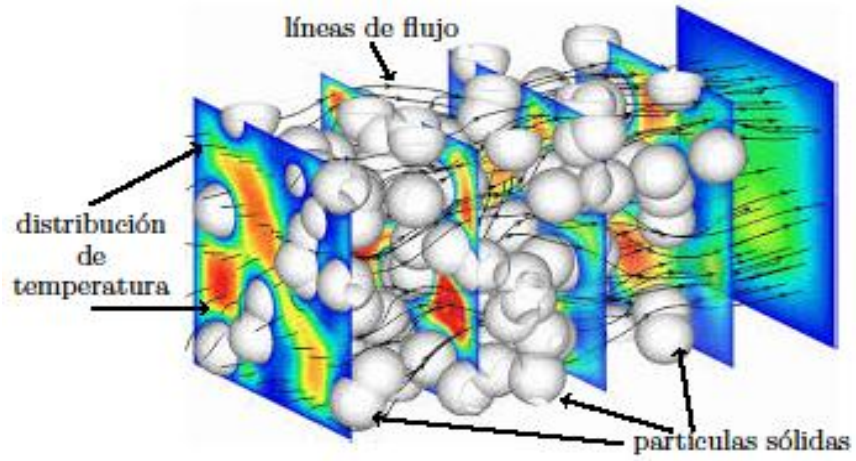

Figura 3: Transporte de calor por convección en un medio poroso.

En la figura 3, puede observarse la transferencia de calor en un medio poroso, en donde las partículas sólidas se distribuyen aleatoriamente. En la parte izquierda se tiene una capa de la distribución de temperatura que es transportada por el fluido entrante y cuya dirección de su velocidad puede apreciarse en las líneas de flujo. Finalmente, en la parte derecha podemos ver la salida del fluido y con ello la distribución de temperatura mediante un plano de corte.

Si bien el problema de transporte en un medio poroso, ha sido abordado por diversos autores en la actualidad, a través de las propiedades tanto del fluido como de las partículas sólidas como en (Chen, Huan, & Ma, 2006), nuestro objetivo es usar tales conocimientos para resolver el problema usando diferencias finitas e implementar un código computacional para determinar de modo práctico como se lleva a cabo el mencionado transporte.

Asu vez, cabe mencionar que la presente tesis considera medios porosos cuyas propiedades son homogéneas en todo su dominio y excluimos aquellos medios porosos que tengan por ejemplo una densidad variable o que sean fracturados como los abordados en (Stichel, y otros, 2012).

Asimismo, es bien sabido que la transferencia del calor puede llevarse a cabo ya sea por conducción, por convección o por radiación, nuestro propósito es llevar a cabo una simulación usando la convección y no será considerado el efecto de la radiación. Así, gran parte de los conceptos tenidos en cuenta en el desarrollo de esta presente tesis han tenido como base los aportes encontrados en (Pletcher, J, & Anderson, 2013) para la dinámica de fluidos y la transferencia del calor que implica un flujo de fluido.

Un aspecto importante del flujo de un fluido y del calor que transporta en un medio poroso lo constituye el cambio de algunas propiedades físicas como la densidad y la capacidad calorífica entre el fluido y las partículas sólidas en el medio poroso como son mencionadas en (Nield & Bejan, 2006) y que han sido consideradas en esta tesis a fin de dar más verosimilitud a los resultados que posteriormente serán mostrados, esto aparece explícitamente en el capítulo V.

En la actualidad, existe un interés por formular modelos matemáticos que permitan explicar un cierto fenómeno y luego implementarlos computacionalmente, inclusive, existen en la actualidad diversos softwares que permiten simular las características de medios porosos como por ejemplo Ansys Fluent (Ansys Inc., 2013), pero dichos software son privativos y todo el procedimiento que dichos software llevan a cabo, son una caja negra, es así, que resulta interesante el desarrollo de código computacional que sea transparente al usuario de forma que pueda existir un aporte valioso a la comunidad, al mostrar el diseño y la implementación de forma clara y abierta de los procedimientos para el cálculo de la temperatura en un medio poroso a través de dicho código computacional.

El desarrollo de esta tesis ha estado basado en la formulación de la transferencia del calor teniendo en cuenta el cambio de las densidades y las capacidades caloríficas presentes en el medio poroso: el fluido y las partículas sólidas, a partir de una formulación matemática que se ha llevado a cabo con una posterior discretización usando el método de diferencias finitas sobre tal formulación y que luego de ello se ha implementado computacionalmente usando herramientas de software matemático disponibles en la comunidad.

2.2.Bases Teóricas.

Para describir el flujo de un fluido en un medio poroso y la evolución de su temperatura en el tiempo es conveniente usar la conocida ecuación de Darcy que son distintas a las usualmente empleadas ecuaciones de Navier Stokes que describen el flujo de un fluido (Pletcher, J, & Anderson, 2013), al considerar la permeabilidad del medio.

La ecuación de Darcy en el medio poroso mostrado en la figura 4 puede enunciarse, como mencionado en (Verruijt, 1995), mediante

$$u = \frac{k}{\mu}\nabla p \tag{4}$$

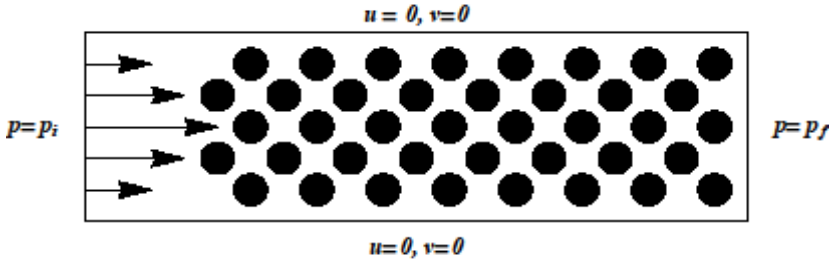

Figura 4: Condiciones de frontera del flujo de fluido en un medio poroso.

Cuando no son considerados los efectos de la gravedad. Así, tenemos que (4) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{\mu}}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{\mu}}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}}, \tag{6}$$

Donde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ son las componentes horizontal y vertical de la velocidad del flujo, x, y Son las coordenadas horizontal y vertical del dominio del medio poroso. En la figura 4, tenemos las condiciones de frontera en la entrada del fluido y la salida del mismo mediante las presiones p_i, p_f respectivamente. Además, las velocidades $u = 0, v = 0$ denotan las paredes.

Por otro lado, debido a que existe un fluido cuya densidad denotamos por ρ_f y partículas sólidas de densidad denotada por ρ_s, ambos poseen capacidades caloríficas distintas denotas por c_f y c_s respectivamente. Además, si consideramos un plano de corte como el mostrado en la figura 3 y denotamos por φ la porosidad existente en dicho plano, entonces podemos establecer un promedio ponderado de las capacidades caloríficas y densidades en el medio poroso mediante

$$(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{m}} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{f}} \tag{7}$$

Como expresado en (Nield & Bejan, 2006).

De la misma forma, la capacidad de permitir la transferencia del calor a través de un medio viene determinada por la conductividad térmica del medio y denotando por k_s y k_f las conductividades térmicas del fluido entrante y de las partículas sólidas respectivamente, tenemos la conductividad térmica ponderada expresada como

$$\boldsymbol{k_m} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{k_s} + \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{k_f} \tag{8}$$

Finalmente, la ecuación de la transferencia de calor en un medio poroso por un mecanismo de convección podemos expresarla usando (7) y (8) mediante

$$(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{m}} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{t}} + (\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{f}} \left(\boldsymbol{u} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}} \right) = \boldsymbol{k_m} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}^2} \right) \tag{9}$$

Donde: T es la temperatura en todo el dominio del medio poroso y t es el tiempo.

Para resolver la ecuación (9), existen diversos métodos numéricos como por ejemplo el método de diferencias finitas, donde aproximamos las derivadas por diferencias centrales (Burden & Douglas Faires, 2010), (Chapra, 2007), (Kincaid, 2008.) o el método de elementos finitos (Chen, Huan, & Ma, 2006).

Para el desarrollo del presente proyecto, se empleará el método de diferencias finitas que representaran las derivadas parciales en la ecuación (9) usando la metodología explicada en (Pletcher, J, & Anderson, 2013) y que describimos a continuación.

Sobre un dominio rectangular $[a, b]x[c, d]$ en el espacio bidimensional, dividimos el dominio en pequeños rectángulos cuyos lados están igualmente espaciados con respecto a sus coordenadas x, y por $\Delta x, \Delta y$ respectivamente, estos rectángulos definen un conjunto de nodos denotados por las coordenadas (x_i, y_j) para $i = 1,2, \dots, N_x$, $j = 1,2, \dots, N_y$. Esta situación esta ilustrada en la figura 5, en donde los rectángulos de lados $[x_i, x_{i+1}]$ y $[y_j, y_{j+1}]$ para $i = 1,2, \dots, N_x$, $j = 1,2, \dots, N_y$ están claramente definidos.

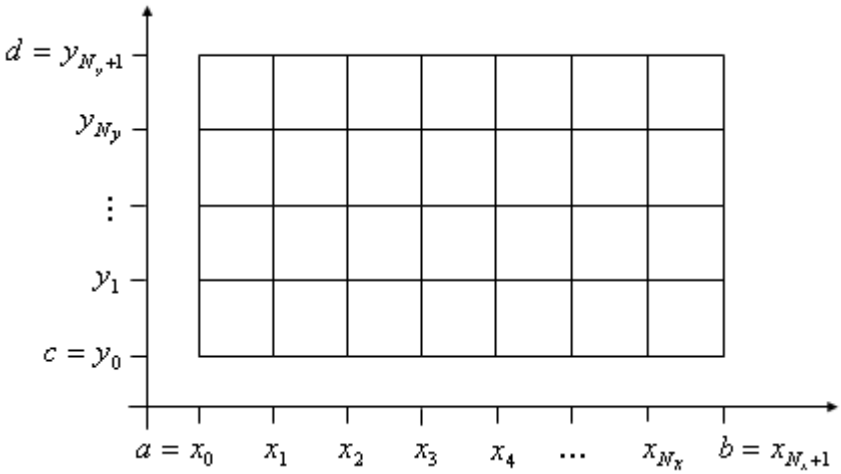

Figura 5: Discretización de la región para el método de diferencias finitas.

El método de diferencias finitas se basa en la discretización de la ecuación diferencial y representación de los valores en los nodos descritos anteriormente por $T_{i,j} = T(x_i, y_j)$ como el valor de la temperatura existente en el nodo (x_i, y_j). Y mediante el uso de expresiones de diferencias para las derivadas parciales (Burden & Douglas Faires, 2010) se emplea las aproximaciones

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{x=x_i, y=y_j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \tag{10}$$

y

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}}\right)_{x=x_i, y=y_j} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \tag{11}$$

para las derivadas parciales de primer orden con respecto a x, y respectivamente y de acuerdo a la notación $T_{i,j}^n = T(x_i, y_j, t_n)$ también se define la temperatura en el

nodo (x_i, y_j) en el tiempo t_n y la derivada parcial respecto al tiempo es aproximada por

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{n}_{x=x_i, y=y_j} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{t_{n+1} - t_n}. \tag{12}$$

El empleo de los esquemas numéricos de diferencias finitas mediante las fórmulas (10), (11) y (12) permitan posteriormente definir una ecuación lineal que tendrá por incógnitas a los valores de la temperatura en cada nodo y cuya solución aproximará a la solución de la ecuación diferencial (9) en todo el dominio del medio poroso.

Asimismo, los términos dados por la segunda derivada de la temperatura

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{13}$$

con respecto al eje X y

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{14}$$

como la segunda derivada de la temperatura con respecto al eje Y deben ser representadas en la ecuación (9) de acuerdo al dominio mostrado en la figura 5.

Para ello, nuevamente asumimos que existe una partición regular del dominio del medio poroso, lo cual implica que entre nodo y nodo tanto en la dirección X como en la dirección Y existen espaciamientos constantes dados por $\Delta\, x$ y $\Delta\, y$ en dichas direcciones respectivamente.

De esta forma tenemos que en la dirección del eje X tenemos que los nodos

$$\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_{N_x}} \tag{15}$$

Pueden ser expresados de forma compacta mediante

$$\boldsymbol{x_i = x_0 + i\Delta x} \tag{16}$$

Para $\boldsymbol{i = 0, 1, \ldots, N_x}$.

Asimismo, en la dirección del eje Y tenemos que los nodos dados por

$$\boldsymbol{y_1, y_2, \cdots, y_{N_y}} \tag{17}$$

Pueden ser expresados mediante

$$\boldsymbol{y_j = y_0 + j\Delta y} \tag{18}$$

Para $j = 0,1, \ldots, N_y$.

De acuerdo a los expresado en las ecuaciones (16) y (18) tenemos que las expresiones (13) y (14) pueden ser representadas por cocientes que aproximan dichas segundas derivadas. Para el caso de la expresión (13) tenemos el cociente apropiado dado por

$$\boldsymbol{\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2}} \tag{19}$$

Mientras que para la expresión (14), la aproximación viene dado por

$$\boldsymbol{\frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2}} \tag{20}$$

De esta forma la ecuación (9) está representada por diferencias teniendo en cuenta el dominio del medio poroso.

De acuerdo a la ecuación (9) aún existe un término relacionado con la temperatura y el tiempo que vamos a representar mediante un cociente, dicho termino

$$\frac{\partial T}{\partial t} \tag{21}$$

Relaciona el tiempo presente, o estado presente de la temperatura en el dominio poroso y como varia en el siguiente tiempo que consideraremos. Para ello, en el presente trabajo consideramos un intervalo de tiempo constante mediante el cual será posible apreciar la variación de la temperatura respecto al tiempo.

De esta forma, consideremos un intervalo de tiempo en el que deseamos resolver la ecuación (9), por ejemplo, $[t_0, t_N]$ es el intervalo de tiempo, de forma que $t_0 = 0$ es el tiempo inicial y $t_N > 0$ es el tiempo final. Para resolver la ecuación (9) en dicho intervalo debemos considerar un conjunto de valores $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ de tal forma que

$$\boldsymbol{t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N} \tag{22}$$

En el presente trabajo de tesis, se ha utilizado un intervalo de tiempo constante entre dos valores consecutivos t_i, t_{i+1} para $i = 0,1, \dots, N-1$, dicho valor será denotado por $\Delta\, t$ de forma que se cumple

$$\boldsymbol{t_i = t_0 + i\Delta t} \tag{23}$$

Para $i = 0,1, \dots, N$.

Puede suceder que en el procedimiento empleado para obtener la solución de (9) luego de un tiempo la ecuación (21) sea nulo o casi nulo, cuando ello sucede, se dice que el procedimiento ha alcanzado un *estado estacionario* en cuyo caso la ecuación (9) llega a convertirse en la ecuación

$$(\boldsymbol{\rho c})_f \left(\boldsymbol{u} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}} \right) = \boldsymbol{k_m} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}^2} \right) \qquad (24)$$

La ecuación (24) aunque es una simplificación de la ecuación (9) aun todavía, es complicada y no admite una solución analítica, sin embargo, debido a que en el presente trabajo tenemos un campo de velocidades prescrito, es posible, resolver, aunque en el tipo de problema que estamos investigando el tiempo para que la ecuación (9) se convierta en la ecuación (24) es demasiado grande por lo cual, el presente trabajo estará limitado a tiempos iniciales de forma que podamos apreciar el cambio de temperatura en el medio poroso.

No obstante, debido a que la ecuación (9) posee términos de primera derivada en el lado izquierdo de la igualdad y términos de la segunda derivada en el lado derecho, es posible, estudiar un caso dimensional para tener una idea de su naturaleza.

De esta forma, tenemos una ecuación análoga a un problema unidimensional dada por la expresión

$$\boldsymbol{a} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^2} \qquad (25)$$

Donde $a > 0$ denota la velocidad a la cual la temperatura se transporta en un medio unidimensional limitado desde $x = 0$ hasta $x = L$. Para resolver la ecuación (25) es

necesario prescribir dos condiciones, denominadas *condiciones de frontera*, tanto para $x = 0$, que estará dada por

$$\boldsymbol{T(0) = T_0} \tag{26}$$

Como para $x = L$ dada por

$$\boldsymbol{T(L) = 0} \tag{27}$$

Es decir, en el extremo izquierdo del dominio unidimensional, existe una temperatura fija constante $T_0 > 0$, mientras que en el extremo derecho la temperatura es nula.

La ecuación (25) junto con las condiciones (26) y (27) posee solución única dada por

$$\boldsymbol{T(x) = \left(\frac{e^{aL} - e^{ax}}{e^{aL} - 1}\right) T_0} \tag{28}$$

Para poder visualizar gráficamente la solución (28) es necesario asignar el valor de $a > 0$ y el valor de T_0 previamente explicado, así como la longitud del dominio.

En la figura 6 podemos observar la distribución de la temperatura en un dominio de longitud $L = 1$ y el valor de $a = 1$, esta distribución es aproximadamente lineal. En la figura 6, la temperatura constante en el extremo izquierdo es $T_0 = 20$.

Cabe mencionar que la ecuación (28) es una solución analítica de la ecuación (25), esto es posible para el caso unidimensional, mas no es posible cuando se trata de un caso bidimensional, razón por la cual las aproximaciones numéricas son de enorme

utilidad para resolver los problemas en dos o más dimensiones, como lo constituye el problema abordado en la presente tesis.

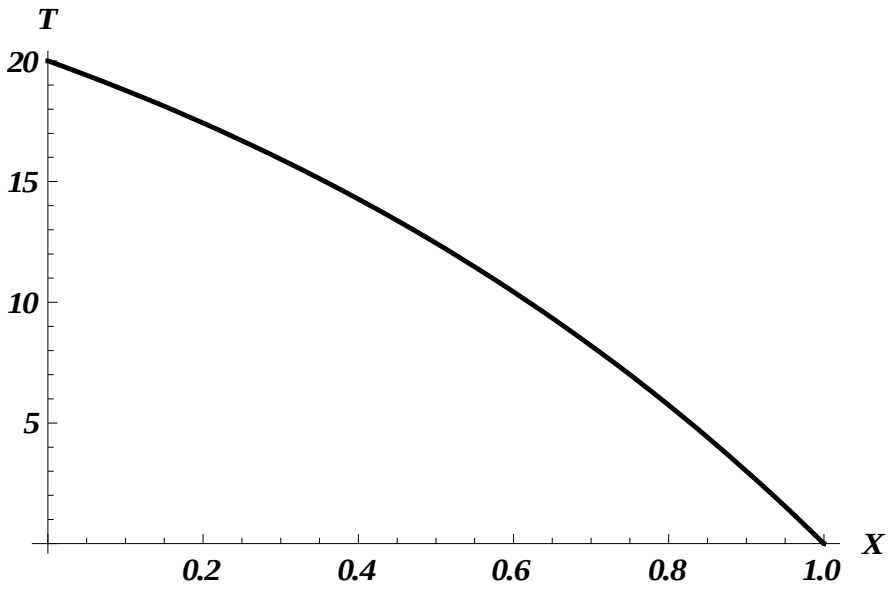

Figura 6: La temperatura de acuerdo a la ecuación (28) usando $L = 1, a = 1$.

En la figura 7, podemos observar el efecto del valor numérico de $a > 0$ en la solución dada en la ecuación (28), en dicha figura, en donde la temperatura prescrita como constante en el extremo izquierdo es $T_0 = 50$, tenemos los valores $a = 3$ (línea punteada) y el valor de $a = 7$ (línea solida), y además podemos observar que a medida que el valor de a se incrementa, se tiene como consecuencia que la distribución de temperatura se encuentra presente en la mayor parte del dominio de forma incrementada. El efecto del incremento del valor de a sobre la distribución de temperatura es un factor relevante como puede apreciarse en la figura 7.

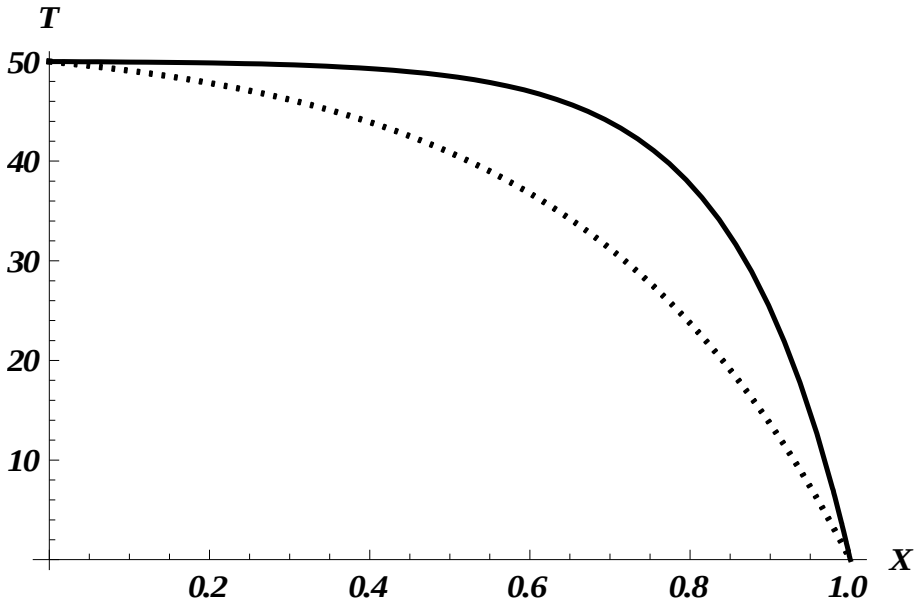

Figura 7: La temperatura de acuerdo a la ecuación (28) usando

$$L = 1, a = 3, a = 7$$

Si bien, la ecuación (25) admite una solución analítica, este no es el caso cuando consideramos el término de la derivada de la temperatura con respecto al tiempo como esta expresado en la ecuación (21). Agregando este término a la ecuación (25) tenemos un modelo más aproximado a la ecuación (9). El resultado luego de haber agregado este término es la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial T}{\partial x} = b\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{29}$$

Donde $a > 0, b > 0$ son los parámetros para resolver la ecuación. Para garantizar la solución única de (29), aparte de prescribir las condiciones de frontera dada por las ecuaciones (26) y (27), es necesario prescribir una condición de la temperatura en el tiempo inicial $t = 0$, esta condición recibe el nombre de *condición inicial.*

Para ilustrar el proceso de la solución asumiremos que en el momento inicial la temperatura es cero en todo el dominio unidimensional de longitud L, esto condición inicial puede ser expresada por

$$\boldsymbol{T(x,0) = 0} \tag{30}$$

Para $x \in [0, L]$. De esta forma usando la condición inicial podemos calcular la distribución de temperatura que ahora depende de dos variables: el espacio y el tiempo, por lo que

$$\boldsymbol{T = T(x,t)} \tag{31}$$

En consecuencia, para cada $x \in [0, L]$ vamos a calcular la distribución de la temperatura

$$\boldsymbol{T(x,t_1), T(x,t_2), \dots, T(x,t_N)} \tag{32}$$

Correspondiente a los tiempos $t_1, t_2, \dots, t_N$ respectivamente.

Para discretizar la ecuación (29), asignamos la aproximación al valor de la temperatura T en la coordenada $x_i \in [0, L]$ en el tiempo $t_n \in [0, t_N]$ mediante

$$\boldsymbol{T_i^n \approx T(x_i, t_n)} \tag{33}$$

De esta forma tenemos que la expresión (21) puede ser aproximada mediante una diferencia finita que está dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \tag{34}$$

Y la primera derivada parcial que aparece en la ecuación (29) puede ser aproximada mediante

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} \tag{35}$$

Mientras que la segunda derivada espacial en la ecuación (29) va a ser expresada mediante la expresión

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{36}$$

Ahora, usando las expresiones (34), (35) y (36) y reemplazándolas en la ecuación (29) tenemos

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + a\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = b\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{37}$$

Llamada *ecuación de diferencia* o *esquema de diferencia finita* de la ecuación (29). Si asignamos

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{a\Delta t}}{\boldsymbol{2\Delta x}} \tag{38}$$

y

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{b\Delta t}}{\boldsymbol{\Delta x^2}} \tag{39}$$

Tenemos entonces que la ecuación (37) se convierte en

$$\boldsymbol{T_i^{n+1} - T_i^n + \alpha(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) = \beta(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)} \tag{40}$$

O de forma, más compacta en

$$\boldsymbol{T_i^{n+1} = (-\alpha + \beta)T_{i+1}^n + (1 - 2\beta)T_i^n + (\alpha + \beta)T_{i-1}^n} \tag{41}$$

La ecuación (41), será utilizada para calcular la solución de la ecuación (29) usando la condición inicial dada por la ecuación (30) que implica que

$$\boldsymbol{T(x_i, 0) \approx T_i^0 = 0} \tag{42}$$

En la figura 8, tenemos la distribución de la temperatura cuando son usados los valores de $a = 1$ y $b = 1$ en la ecuación (29). Esta distribución de temperatura ha sido calculada desde $t = 0$ hasta $t = 2$ y en la figura 8 se muestran los valores de la temperatura cuando $t = 0.1$ y $t = 2$ pero debe tenerse en cuenta que para obtenerse la temperatura en $t = 2$ ha sido necesario varias iteraciones cada una de

las cuales ha dependido de la anterior hasta llegar a la condición inicial dada por la ecuación (42).

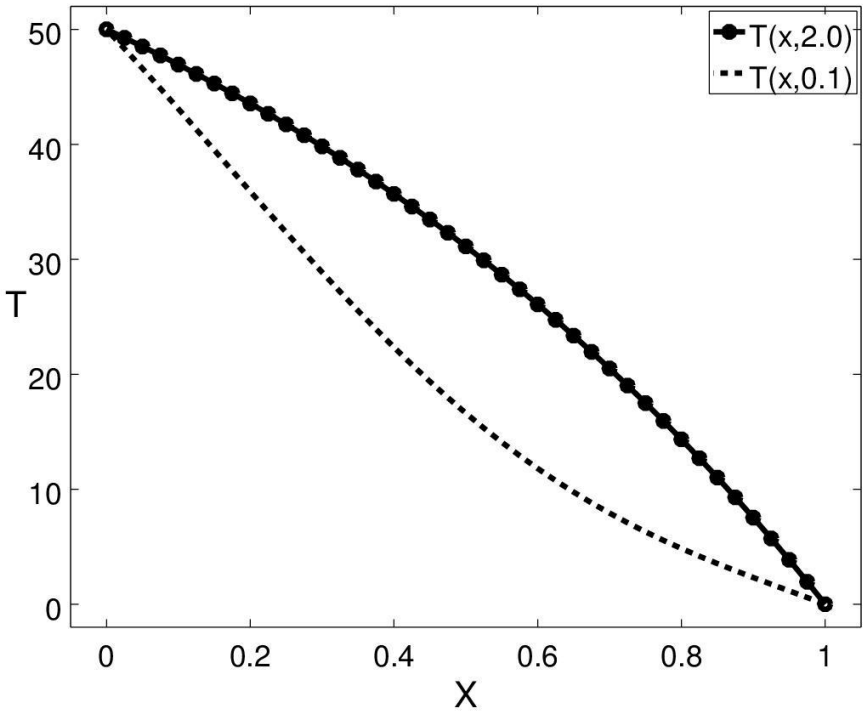

Figura 8: Valores de la temperatura según la ecuación (29)

Para poder apreciar el efecto del término de la primera derivada espacial sobre la ecuación (29), es decir el termino $\frac{\partial T}{\partial x}$, modificamos el valor de a en la misma ecuación (29) para observar los resultados. En la figura 9, se muestran los resultados del cálculo de la temperatura usando las diferencias finitas aplicadas a la ecuación (29). Aquí, tenemos los valores de $a = 3$ y $b = 1$, asimismo podemos observar que la pendiente del campo de temperatura es más pronunciada, mostrado el efecto del término de la primera derivada. En la figura 9, se muestran el campo de temperatura para los valores de $t = 0.1$ y $t = 2$.

Asu vez podemos notar que el perfil de la distribución de la temperatura en el tiempo final tiene un perfil parabólico mientras que en $t = 0.1$ su perfil es mas lineal debido a la influencia de la condición inicial que se aplica al inicio del cálculo numérico.

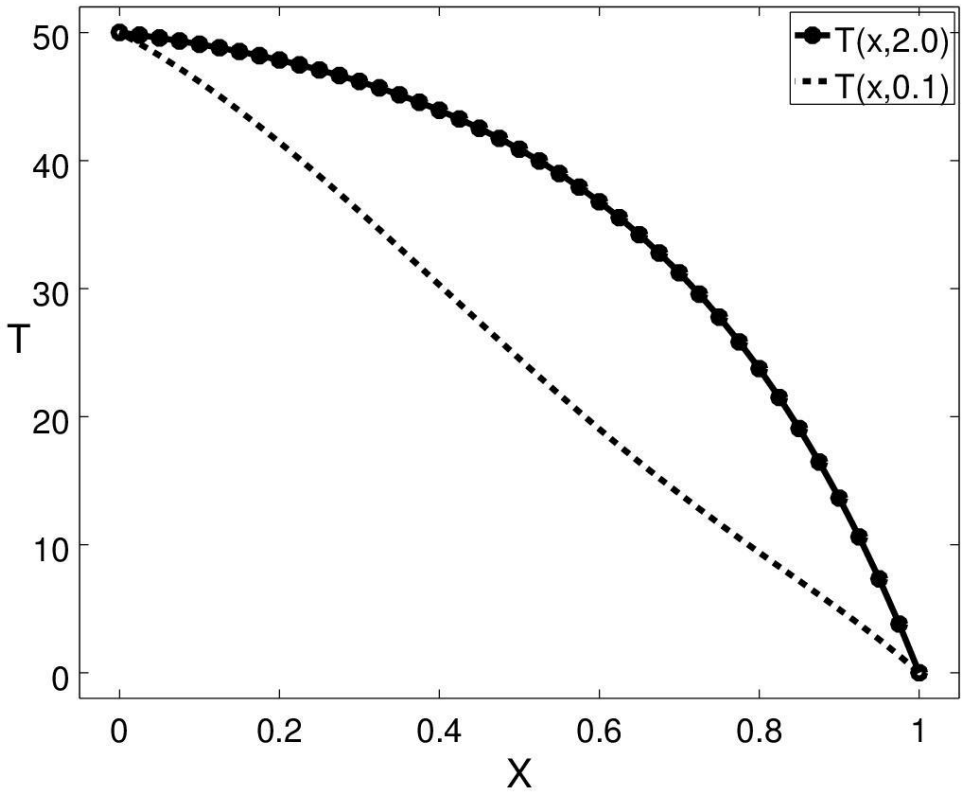

Figura 9: El campo de temperatura para $t = 0.1$ y $t = 2.0$ usando $a = 3$

Si incrementamos el valor de a, debemos esperar que el campo de temperatura sea más pronunciado, esto se muestra en la figura 10, en donde se han tomado los valores de $a = 7$, mientras se ha mantenido constante el valor de $b = 1$. En este caso, podemos observar además que, hasta aproximadamente, $x = 0.6$ el valor de la temperatura mantiene el valor constante $T_0 = 50$ que justamente, es la condición

de frontera prescrita al extremo izquierdo de la región unidimensional, en donde calculamos la solución de la ecuación (29).

Finalmente, en la figura 11, usamos aun un valor más grande para a, para observar que el campo de temperatura aparece con un valor de $T = 50$ aun mas expandido desde $x = 0$ hasta aproximadamente $x = 0.8$, de lo cual podemos ver claramente que el valor de a cambia el campo de temperatura cuando se calcula la solución de la ecuación (29).

Con ello se está demostrando numéricamente que el efecto convectivo proporcionado por la primera derivada tiene una gran influencia sobre la solución de la ecuación diferencial (29).

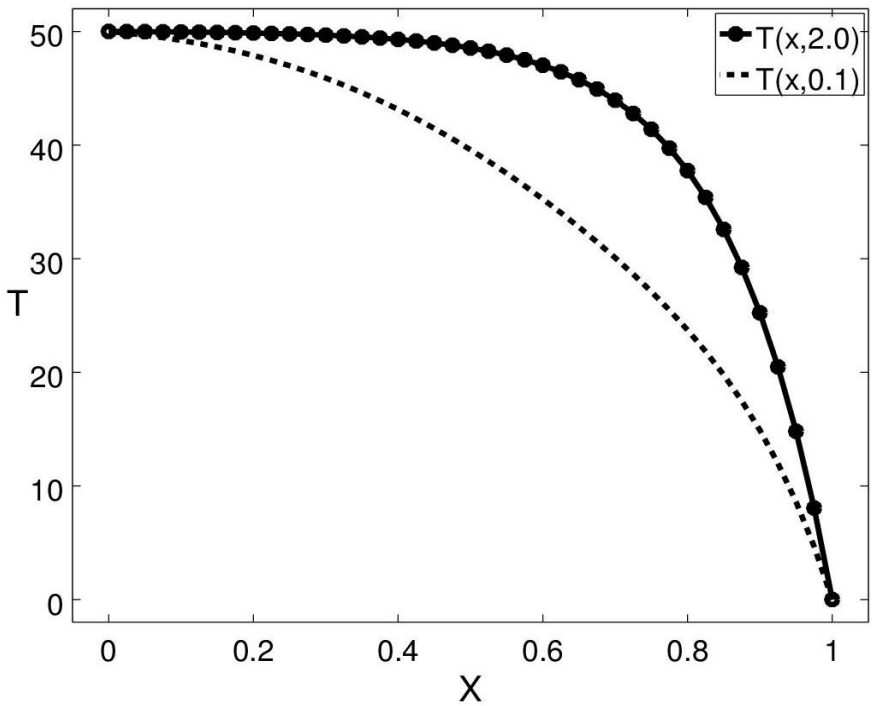

Figura 10: Temperatura usando $a = 7, b = 1$ para $t = 0.1$ y $t = 2.0$

El valor de $a = 7$ y $b = 1$ usado para obtener la solución que muestra en la figura 10, así como los valores de $a = 10$ y $b = 1$ pueden ser modificados para obtener

otras soluciones de la ecuación (29) y con ello se obtendrá otras distribuciones de temperatura.

Estos posteriores resultados, en este caso solo confirmaran el hecho que el término de la primera derivada permite una transmisión del calor en una región cada vez mayor de acuerdo al valor prescrito para a.

De forma análoga, si aconteciese el caso contrario, es decir, disminuimos el valor de a entonces la distribución de la temperatura mostrada mediante una curva seria menos pronunciada, con ello tendríamos que los valores de la temperatura serian menores manteniendo siempre el valor de $T = 50$ en el extremo izquierdo y el valor de $T = 0$ en el extremo derecho, dado que esas fueron las condiciones de contorno que se prescribieron para resolver la ecuación (29).

Si, bien este término puede ser pequeño, en este caso, mas no puede ser cero, debido a que según la ecuación (9) el termino de transmisión de calor por efectos convectivos es una parte fundamental en la ecuación de medio poroso que la presente tesis investiga.

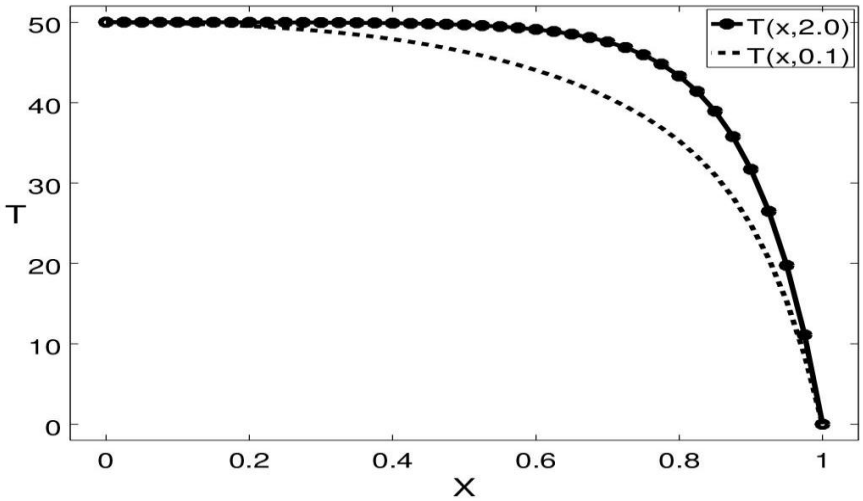

Figura 11: Temperatura usando $a = 10, b = 1$ para $t = 0.1$ y $t = 2.0$.

Estos resultados serán de importancia cuando mostremos los resultados en el capítulo IV, cuando la solución numérica de un medio poroso este enfocada en una región bidimensional.

Además, el valor de porosidad que aparece en las ecuaciones (7) y (8) van a tener un papel importante en la solución de la ecuación (9) debido a su efecto sobre los términos convectivos.

Finalmente, cabe destacar que la ecuación (9) es un problema dependiente del tiempo debido a su derivada temporal implicando esto que en cada paso de tiempo se tiene una nueva solución, es decir una nueva distribución de temperatura en todo el medio, lo que se traduce en un cambio continuo de la temperatura como resultado del mecanismo de convección existente y que justamente los términos de la primera derivada tienen influencia en dicho mecanismo a través de este término cuyo coeficiente puede variar cuando se modifica la porosidad del medio estudiado. Esto será ampliado en el desarrollo de la presente tesis.

2.3. Definición de términos.

Los términos que frecuentemente encontramos en la literatura de los medios porosos y la transferencia de calor debido al flujo de un fluido son:

Medio poroso

Es una región compuesta por partículas sólidas y espacios vacíos adyacentes a tales partículas.

Permeabilidad

Es la capacidad que tiene un medio poroso para permitir el paso de un fluido a través del mismo, usualmente es expresado mediante un tensor, en el presente trabajo

asumiremos su representación por un escalar debido a las características homogéneas del medio poroso en investigación.

Porosidad

Es la razón entre el volumen de espacio vacío en el medio poroso y el volumen total de la región que comprende el medio poroso.

Convección

Es un mecanismo de transferencia del calor que consiste en el movimiento de partículas que transportan una determinada cantidad de calor.

En el presente proyecto las partículas que están en movimiento conforman el fluido que ingresan al medio poroso.

III. METODOLOGÍA

3.1.Tipo y diseño de Investigación.

Aplicativo.

3.2.Plan de recolección de la información.

La investigación ha sido diseñada basada en un esquema secuencial que consistió en cinco etapas:

i. Análisis del fenómeno físico. – Que fue basado en la porosidad existente en un medio poroso y su influencia en el mecanismo de la convección para la transferencia del calor.

ii. Formulación matemática del Problema. – Enunciado de las ecuaciones que describen el fenómeno físico de la transferencia del calor por convección y aplicación del método de diferencias finitas para llevar tales ecuaciones a la formación de una de ecuación lineal siguiendo la metodología presentada en (Pletcher, J, & Anderson, 2013).

iii. Implementación Computacional. – Luego de formulado matemáticamente el problema, se ha hecho el uso de un software de programación matemática para escribir un código de computadora capaz de resolver las ecuaciones producto de la formulación matemática del método de diferencias finitas.

iv. Simulación Numérica. - que consistió en la ejecución de la implementación computacional llevando a la práctica lo que fue considerado en el análisis del fenómeno físico.

v. Evaluación de Resultados. - La solución obtenida a través de las simulaciones numéricas ha proporcionado la distribución de temperatura del

medio poroso cuya similitud y analogía ha sido contrastada con algunos resultados presentes en la literatura.

3.3.Instrumentos para el desarrollo de la investigación.

Dos instrumentos toman relevancia para el desarrollo de la investigación. Ellos son:

Instrumentos Matemáticos.

Dadas las ecuaciones que han definido el modelo matemático que describa la transferencia de calor de la presente tesis, lo primero fue usar una técnica que discretice dichas ecuaciones, aunque hay diversas técnicas que pueden ser de mucha utilidad, la técnica numérica elegida es el método de diferencias finitas que son bien detalladas en (Burden & Douglas Faires, 2010), en (Kincaid, 2008.) y en (Chapra, 2007), debido a su simple y clara manejabilidad para llevar a cabo tal tarea.

Instrumentos Computacionales

Para llevar a cabo la implementación computacional, de un código que calcule la temperatura en un medio poroso, ha sido necesario resolver la ecuación (9), para lo cual se ha utilizado el paquete de software matemático libre llamada GNU-Octave cuya información sobre su uso y capacidades están detalladas en (Eaton, Bateman, Hauberg, & Wehbring, 2019).

En la figura 12, podemos observar el logo de GNU-Octave, que es el símbolo de este lenguaje, que es un clone del lenguaje MATLAB producido por la empresa MathWorks.

Figura 12: Logo de GNU-Octave

Para trabajar con el lenguaje GNU-Octave, basta descárgalo de su página web

https://www.gnu.org/software/octave/

La descarga de GNU-Octave, es totalmente gratuita, debido a que es parte del proyecto de la FSF – Free Software Fundation o *Fundación de Software Libre*, de esta forma al descargarlo, el siguiente paso es instalarlo, en el caso del presente trabajo de tesis, la instalación se hace sobre el sistema operativo WINDOWS 10.

Una vez instalado el lenguaje GNU-Octave, al arrancar el programa instalado, se presenta al usuario la ventana de comandos, en donde es posible ingresar ordenes que realizan alguna actividad.

En la figura 13, tenemos el entorno de ejecución que aparece cuando se arranca el programa para el lenguaje GNU-Octave, podemos apreciar que existen dos órdenes ingresadas: la primera es eye(3) que el comando para generar una matriz identidad de orden 3. Luego de ingresar la orden pulsando la tecla ENTER, podemos visualizar el resultado, Segundo, tenemos magic(3) que es una matriz mágica. Podemos ver que las ordenes ingresadas están relacionadas con matrices, efectivamente, en el lenguaje GNU-Octave, el trabajo se realiza a nivel de matrices.

Por ejemplo, si deseamos definir una función real de variable real entonces debemos definir dos vectores una para el dominio y uno para el rango, desde que un vector puede considerarse un vector fila o vector columna, entonces el tratamiento usado por el lenguaje GNU-Octave es adecuado.

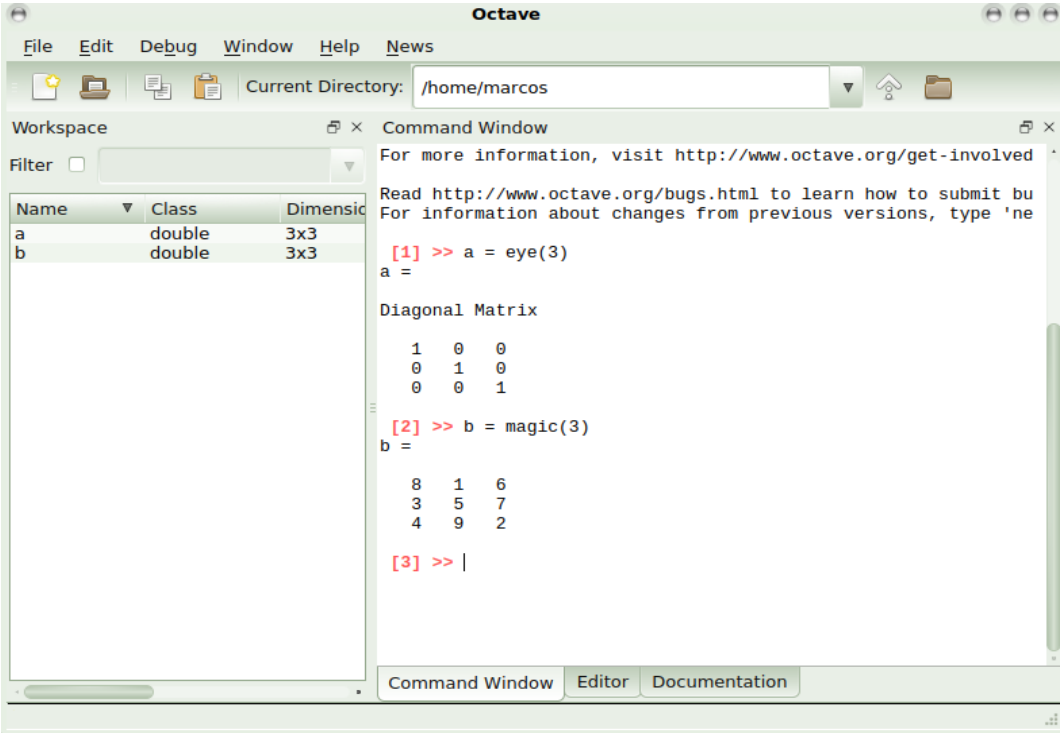

Figura 13: Entorno de GNU-Octave

En el presenta trabajo, para obtener los resultados, no solo es preciso realizar cálculos matemáticos, sino también, mostrar resultados gráficos y para ello el lenguaje GNU-Octave nos proporciona una orden que permite obtener una gráfica. En la figura 14, se muestra la gráfica de la función $y = sin\, x$, obtenida usando GNU-Octave, para ellos fueron utilizada tres órdenes en la línea de comandos mostradas en el entorno mostrado en la figura 13: estas órdenes son

```
>> x = linspace(0,1,21);
>> y = sin(pi*x);
>> plot(x,y);
```

Como puede apreciarse, la versatilidad, hace adecuado el uso del lenguaje GNU-Octave para desarrollar cálculos matemáticos y obtener la representación gráfica. Por esa razón en el presente trabajo, se ha hecho uso extensivo de dicho lenguaje.

Cuando el conjunto de ordenes crece, es conveniente escribir un archivo con extensión ".m" que son conocidos como programas o script de órdenes que posteriormente son ejecutadas secuencialmente por GNU-Octave desde el entorno mostrado en la figura 13.

Para obtener los resultados mostrados en las figuras relacionadas con solución numérica de la ecuación (29) fue utilizado el lenguaje GNU-Octave y asimismo en la parte de los resultados de igual forma dicho lenguaje ha sido empleado.

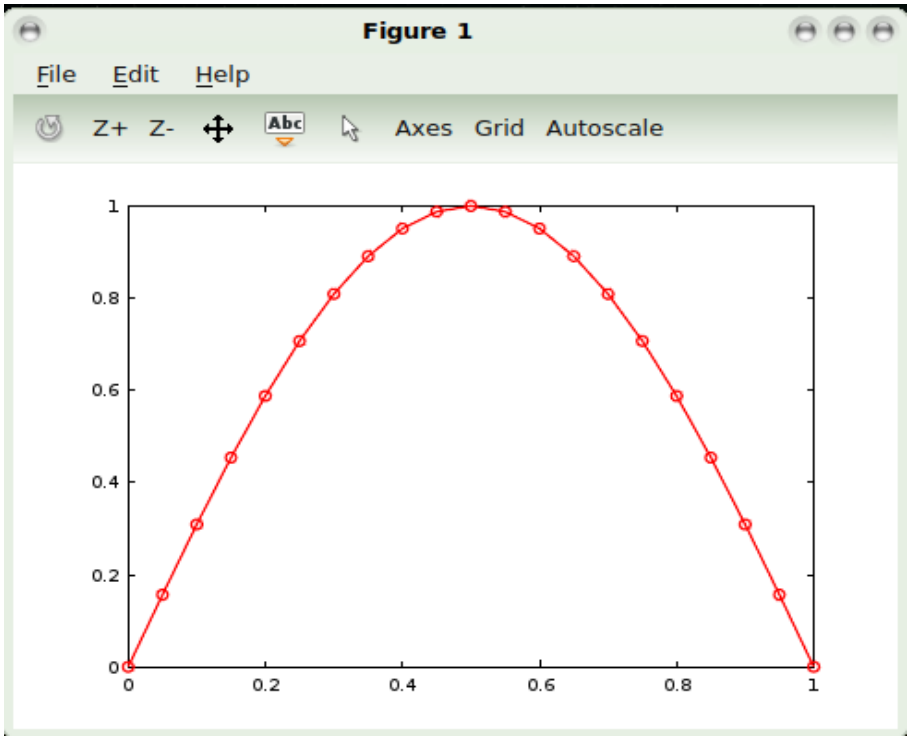

Figura 14: Gráfica de GNU-Octave

3.4. Plan de Procesamiento de la información

En cada etapa de la presente investigación se han obtenido un conjunto de resultados relacionados con la solución numérica de la ecuación (9) para ello se ha tenido en consideración el siguiente plan.

Inicialmente, el análisis del fenómeno físico ha sido considerado para formular la ecuación diferencial que representa la transferencia del calor por convección en el interior del medio poroso, esta ha formado parte de una primera etapa que resulta importante, por lo cual, en la sección 2.2 se ha simulado la solución numérica empezando con los aspectos básicos relacionados con la ecuación (29) debido a su cercana relación con la ecuación (9).

En la segunda etapa, luego de formulada la ecuación (9), esta misma ecuación ha sido procesada por el método de diferencias finitas para producir una de ecuación que permitió obtener la distribución de temperatura de un modo secuencial, es decir, debido a que la temperatura evoluciona mientras el tiempo transcurre entonces es necesario definir una relación temporal desde un momento inicial a un momento posterior.

Para ello, una discretización de la ecuación (9) en donde se especifique de manera explícita la evolución temporal ha sido elaborada de esta forma los datos procesados en un tiempo inicial, será de vital importancia para obtener nuevos datos en un tiempo posterior y así, obtener la distribución de temperatura posterior que es el objetivo del presente trabajo de investigación.

La implementación computacional que es la tercera y penúltima etapa y se ha basado en la solución de las ecuación (9), esta solución se ha obtenido a través del uso del método de diferencias finitas que han sido implementados en una

computadora empleando el software matemático GNU-Octave que líneas arriba se ha mencionado con algún detalle, así pues, un conjunto de comandos han sido ejecutados en el entorno mostrado en la figura 13, el resultado de esta implementación ha sido un conjunto de simulaciones del fenómeno que han constituido la solución numérica de la ecuación (9).

Finalmente, en una cuarta y última etapa, los resultados que ha proporcionado el programa computacional como resultado de las simulaciones llevadas a cabo han sido interpretados y evaluadas para saber cómo es la distribución de temperatura en el medio poroso que es finalmente el objetivo del presente trabajo de tesis.

De lo mencionado anteriormente, podemos ver que cada una de las etapas ha sido imprescindible para la ejecución de la siguiente etapa, de esta forma el plan de procesamiento ha sido secuencial. En el capítulo IV, se expondrá los resultados que constituyen la parte medular del presente trabajo, en donde se hará mención de cuál es el campo de temperatura y se mostrara gráficamente.

Finalmente, debido a que los resultados proporcionados por un programa computacional son un conjunto de datos, que en este caso son las temperaturas en un dominio bidimensional en el que existe un medio poroso, estos datos han sido procesados a través de unos archivos de texto de los cuales se ha extraído la información necesaria para mostrarla en el presente trabajo de tesis.

IV. RESULTADOS

Las Diferencias Finitas para la Ecuación de la Temperatura

Se procede a dar respuesta al Objetivo General:

Calcular numéricamente la distribución de temperatura, usando el método de diferencias finitas, en un medio poroso que se encuentra en estado saturado por un fluido incompresible.

Considerando la hipótesis:

Usando el método de las diferencias finitas se puede discretizar el dominio del medio poroso y calcular numéricamente la solución de la ecuación

$$(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{m}} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{t}} + (\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{f}} \left(\boldsymbol{u} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}} \right) = \boldsymbol{k_m} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}^2} \right),$$

mediante un sistema de ecuaciones lineales cuya solución dará como resultado el campo de temperatura del medio poroso en cada nodo, para cada instante de tiempo. En el presente trabajo de tesis, se ha resuelto, sobre un medio poroso, la ecuación diferencial parcial dependiente del tiempo

$$(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{m}} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{t}} + (\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{f}} \left(\boldsymbol{u} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}} \right) = \boldsymbol{k_m} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}^2} \right) \qquad (43)$$

En donde: T representa la temperatura, u, v son las velocidades existentes y ya predefinidas. Estas velocidades corresponden a las componentes horizontal y

vertical de un vector velocidad en un espacio bidimensional cuyas coordenadas con x, y.

El termino $(\rho c)_m$ es un promedio ponderado de la densidad y la capacidad del calor, los cuales dependen de la porosidad del medio mediante la formula

$$(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{m}} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{s}} + (\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{f}} \qquad (44)$$

Donde φ representa la porosidad del medio, los subíndices s, f se refieren a regiones solidas y del fluido respectivamente.

De forma similar para el termino k_m tenemos la definición

$$\boldsymbol{k_m} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{k_s} + (\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{k_f} \qquad (45)$$

Que relaciona las conductividades del medio poroso que tienen implicancia en el cambio de la temperatura que es investigado en el presente trabajo de tesis.

En la ecuación (43), tenemos el termino de las primeras derivadas

$$\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial x}} + \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial y}} \qquad (46)$$

Que como vimos en el capítulo II, tiene trascendencia en la solución de la distribución de temperatura, así pues, este término ha sido discretizado de acuerdo una diferencia centrada, la cual es expresada por

$$\boldsymbol{u_{i,j}\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2\Delta x}+v_{i,j}\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j-1}}{2\Delta y}}$$	(47)

En la ecuación (47), los términos $\Delta x, \Delta y$ se refieren a los espacimientos del dominio bidimensional con respectos a los ejes X, Y respectivamente. Esto implica que los puntos distribuidos en una región bidimensional tanto para x

$$\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_N} \tag{48}$$

Como para y

$$\boldsymbol{y_1, y_2, \dots, y_M} \tag{49}$$

Cumplen con las formulas

$$\boldsymbol{x_i = x_0 + i\Delta x} \tag{50}$$

Para $i = 0,1, \dots, N$ y

$$\boldsymbol{y_j = y_0 + j\Delta y} \tag{51}$$

Para $j = 0,1, \dots, M$. Es decir, los nodos están igualmente espaciados en ambos ejes coordenados.

Por otro lado, en cada punto (x_i, y_j) del dominio bidimensional tiene una temperatura que estará representada por el valor numérico de $T(x_i, y_j)$ que debido a la aproximación numérica empleada en el presente trabajo será representada mediante

$$\boldsymbol{T_{i,j} \approx T(x_i, y_j)} \tag{52}$$

Con esto, queda claramente definida la ecuación (47).

Con respecto al termino de las segundas derivadas que tenemos en la ecuación (43) dado por

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \tag{53}$$

Es discretizado mediante la suma de los cocientes dados por

$$\boldsymbol{\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}} \tag{54}$$

Donde podemos observar que los espaciamientos iguales en los ejes coordenados son considerados en la ecuación (54) aunque están elevados al cuadrado debido a la aproximación de la segunda derivada.

En la ecuación (43) tenemos también el término de la derivada con respecto al tiempo que como previamente se explicó en la ecuación (34) para el caso

unidimensional, en este caso ha sido representada por una diferencia finita dada por la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t}\left(x_i, y_j, t_n\right) \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{55}$$

Donde ahora tenemos que la evolución de la temperatura se calcula para cada nodo $\left(x_i, y_j\right)$ de la región bidimensional del medio poroso. Además, la ecuación (55) nos indica que el intervalo de tiempo para las aproximaciones es constante e igual a $\Delta\, t$. De esto tenemos que para cada nodo $\left(x_i, y_j\right)$, la evolución de la temperatura viene dada por

$$T\left(x_i, y_j, t_0\right), T\left(x_i, y_j, t_1\right), \dots, T\left(x_i, y_j, t_n\right) \tag{56}$$

De esta forma la ecuación (46) llega a ser en el tiempo n

$$\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right)^{n} \tag{57}$$

Y su discretización correspondiente dada por la ecuación (47) se transforma en

$$u_{i,j}\frac{T_{i+1,j}^{n} - T_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j}\frac{T_{i,j+1}^{n} - T_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \tag{58}$$

De la misma forma la ecuación (53) en el tiempo n viene dada por la expresión para sus segundas derivadas por

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)^n \tag{59}$$

Y cuya discretización viene dada por

$$\frac{T_{i+1,j}^n-2T_{i,j}^n+T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}^n-2T_{i,j}^n+T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{60}$$

Donde el super índice n denota el tiempo de la misma forma como esta expresada en la ecuación (58).

De las expresiones anteriores la ecuación (43) se discretiza mediante el método de diferencias finitas para obtener

$$(\rho c)_m\,\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^n}{\Delta t}+(\rho c)_f\left(u_{i,j}\,\frac{T_{i+1,j}^n-T_{i-1,j}^n}{2\Delta x}+v_{i,j}\,\frac{T_{i,j+1}^n-T_{i,j-1}^n}{2\Delta y}\right)=$$

$$k_m\left(\frac{T_{i+1,j}^n-2T_{i,j}^n+T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}^n-2T_{i,j}^n+T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}\right) \tag{61}$$

Donde los super índices hacen referencia a la expresión (58) para la primera derivada mientras que para la segunda derivada usamos la expresión (60).

Por lo tanto, la ecuación (61) es la expresión que en la presente tesis será usada para calcular el campo de temperatura del medio poroso en la región bidimensional y da respuesta al objetivo general.

Se procede a dar respuesta al objetivo específico 01,

Formular matemáticamente un modelo que posea la ecuación diferencial que describe la temperatura de calor por convección y sus propiedades en un medio poroso y su evolución en el tiempo.

El resultado es el siguiente modelo matemático:

$$(\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{m}} \frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t} + (\boldsymbol{\rho c})_{\boldsymbol{f}} \left(u_{i,j} \frac{T_{i+1,j}^{n}-T_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{T_{i,j+1}^{n}-T_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \right) = k_{m} \left(\frac{T_{i+1,j}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{T_{i,j+1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^{2}} \right)$$

Campo de Velocidades en el Medio Poroso.

Como se ha detallado en el proyecto relacionado con la presente tesis, antes de su ejecución, en el desarrollo del procedimiento para obtener la solución de la ecuación (61), se prescribirá un campo de velocidades para el todo el medio poroso. Este campo de velocidades este ilustrado en la figura 15.

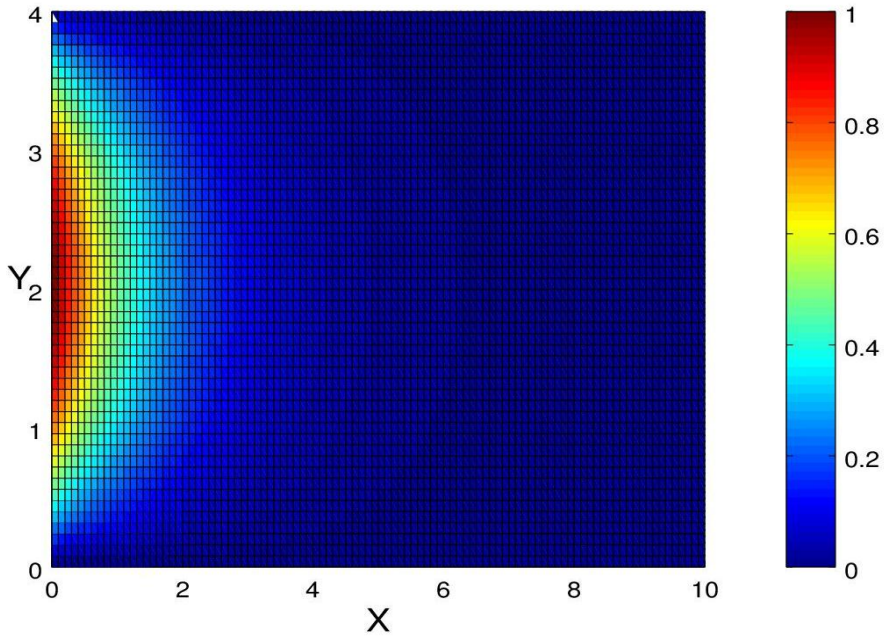

Figura 15: Campo de Velocidades Prescrito

Como podemos observar en la figura 15, las mayores velocidades se encuentran en la entrada (extremo izquierdo) del medio poroso, de esta forma a medida que el fluido ingresa al medio poroso, su velocidad disminuye debido a los obstáculos presentes en el mismo medio poroso, concentrándose la mayor velocidad en la entrada y la menor velocidad en la salida.

Otro aspecto mostrado en la figura 15, es con una velocidad nula o cero en las paredes del medio poroso, esto es debido a que las paredes están en una posición estática lo cual transmite al fluido la velocidad de cero.

Este campo de velocidades está definido en cada punto de la región bidimensional, siendo esto necesario para ver el campo de temperaturas que es el resultado de la solución de la ecuación (61).

Otro resultado relativo a la velocidad en la presente tesis, es la presión existente en el medio poroso debido a la velocidad que existe en dicho medio. Debido a que en

la entrada de la región se encuentra la mayor velocidad, esta va disminuyendo conforme el valor de x se incrementa.

Debido a ello, se han realizado varios cortes verticales para poder apreciar la distribución de la presión en varios valores de x, estas presiones están ilustradas en la figura 16. En esta figura podemos observar que a medida que el valor de x se incrementa, la presión disminuye como se ha mencionado.

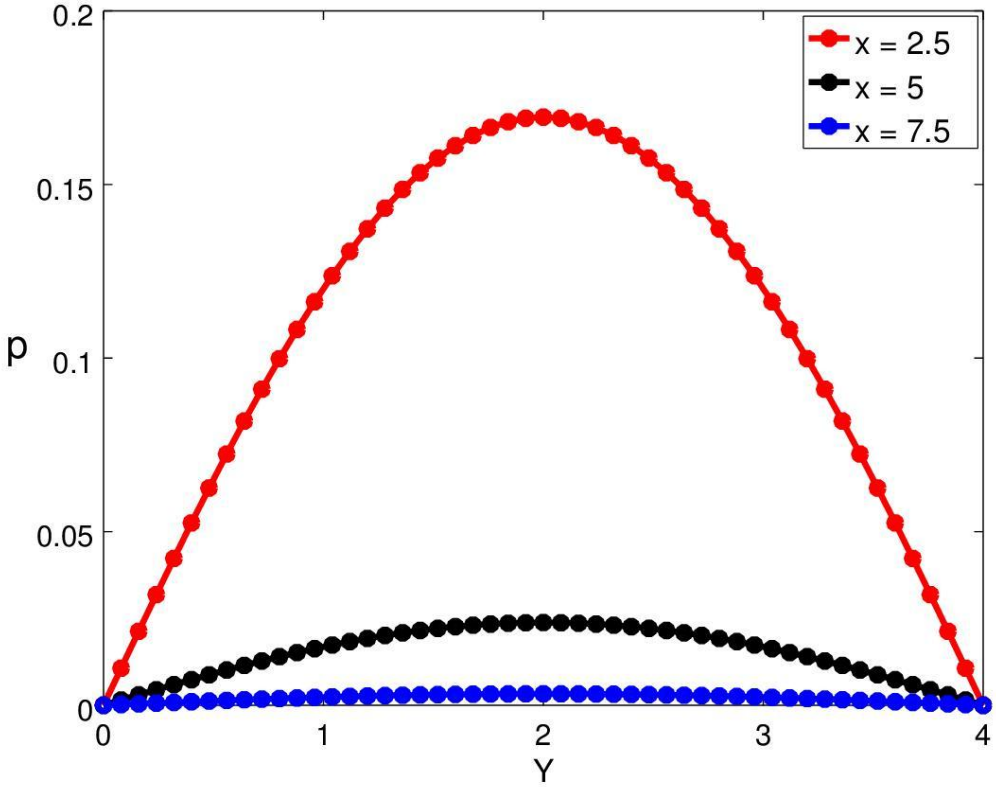

Figura 16: Distribución de la presión en varios cortes verticales del dominio.

Asimismo, otro resultado en la presente tesis, es la distribución de la presión realizando varios cortes horizontales de la región bidimensional. La figura 17, muestra la distribución de la presión a lo largo del eje X usando varios cortes como aparece en la legenda de la figura 17.

En la figura 17, podemos observar que la presión se incrementa a medida que el valor de y se incrementa concentrándose el mayor valor justamente en la mitad de la altura total, donde precisamente se encuentra la mayor velocidad.

Y también podemos observar que a medida que nos acercamos a la pared la velocidad disminuye y la presión de la misma forma.

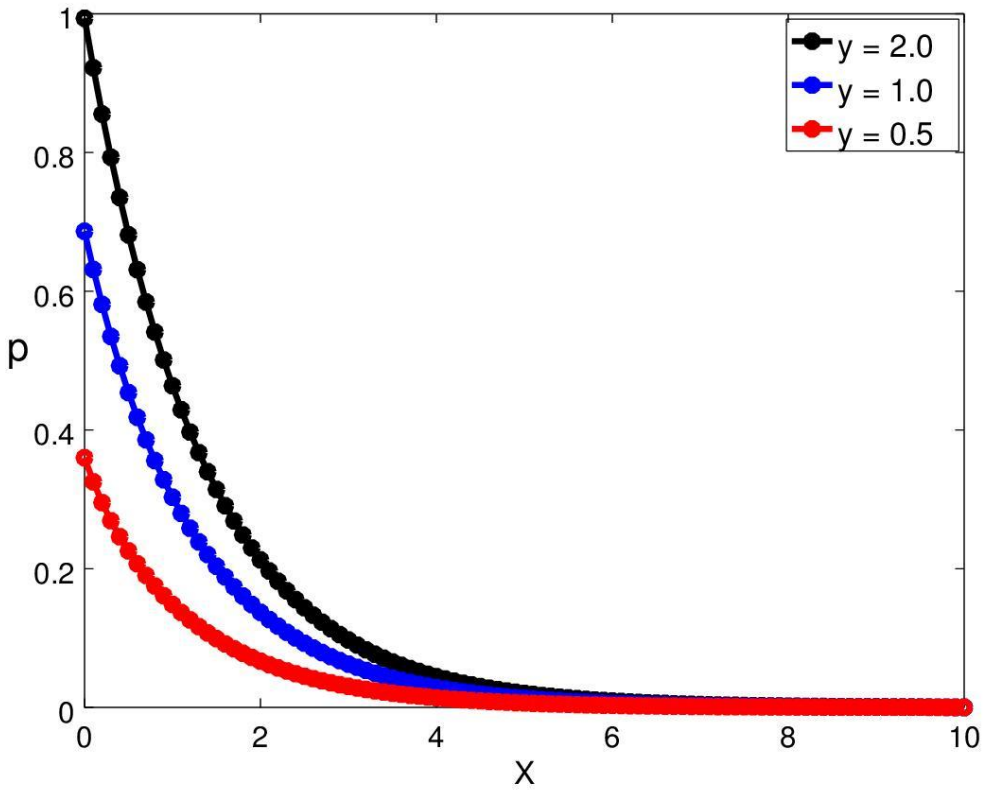

Figura 17: Distribución de la presión en varios cortes horizontales del dominio.

También podemos observar que en el extremo derecho la presión es cero, indicándonos que la velocidad de la misma forma como se muestra en la figura 15 es nula.

La Porosidad Mínima y La Porosidad Promedio

Debido a la influencia de la porosidad φ en los términos $(\rho c)_m$ y $(k)_m$ resulta interesante apreciar como la solución de la ecuación (61) es influenciada por los cambios en los valores de φ.

Para apreciar dicha influencia se han usado el valor mínimo $\varphi = 0.01$ y un valor promedio de $\varphi = 0.15$ y se calculado de forma progresiva hasta $t = 5$.

Es adecuado tener en cuenta que el cálculo de los valores de la temperatura ha sido obtenido a través de la solución numérica de la ecuación (61) mediante el método de diferencias finitas.

En la figura 18, se muestra los resultados que viene a ser la distribución de temperatura cuando $\varphi = 0.01$ para varios cortes horizontales sobre la región bidimensional en donde se encuentra el medio poroso.

En la figura 18 podemos ver que la temperatura aparece incrementada en la mitad de la región del medio poroso.

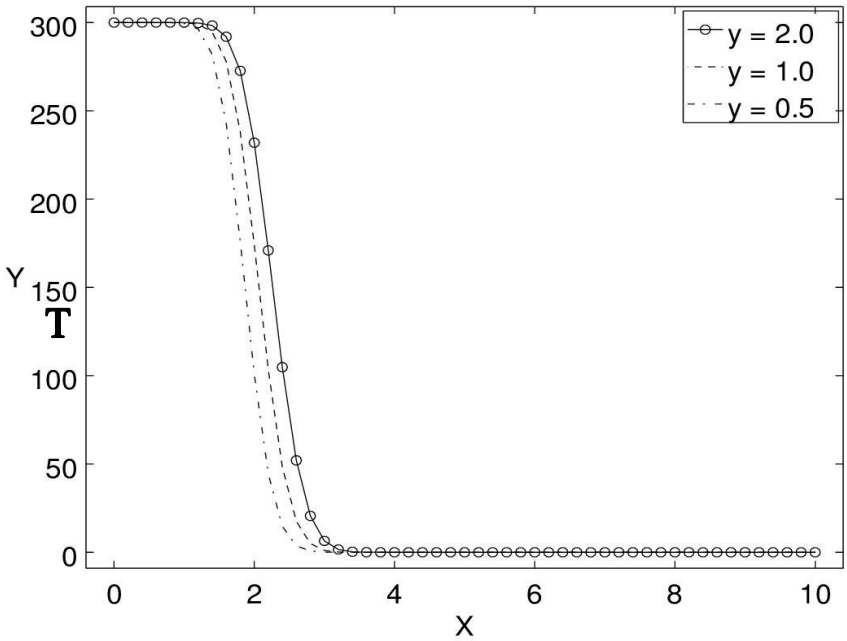

Figura 18: Distribución de la Temperatura usando un valor mínimo de la porosidad, luego de 5 segundos.

Al incrementar, el valor de la porosidad para $\varphi = 0.15$ tenemos una nueva distribución de temperatura, que es similar a la distribución mostrada en la figura 18. Este nuevo valor de la porosidad aparece ilustrado gráficamente en la figura 19. Aquí, nuevamente vemos que la mayor temperatura se encuentra en la mitad de la región del medio poroso.

Tanto en la figura 18 como en la figura 19, los tiempos finales para la simulación han sido de 5 segundos. Esto ha sido importante, para verificar que la transmisión de calor en las iteraciones iniciales ha dado resultados cuya temperatura tiene un comportamiento similar a lo que encontrado para el caso unidimensional que ha sido expuesto en el capítulo II.

Debido a que la ecuación (43) representa un fenómeno bidimensional donde los nodos están ordenados tanto en la dirección x como en la dirección y entonces la cantidad total de ellos es el producto dado por

$$N = N_x \times N_y \tag{62}$$

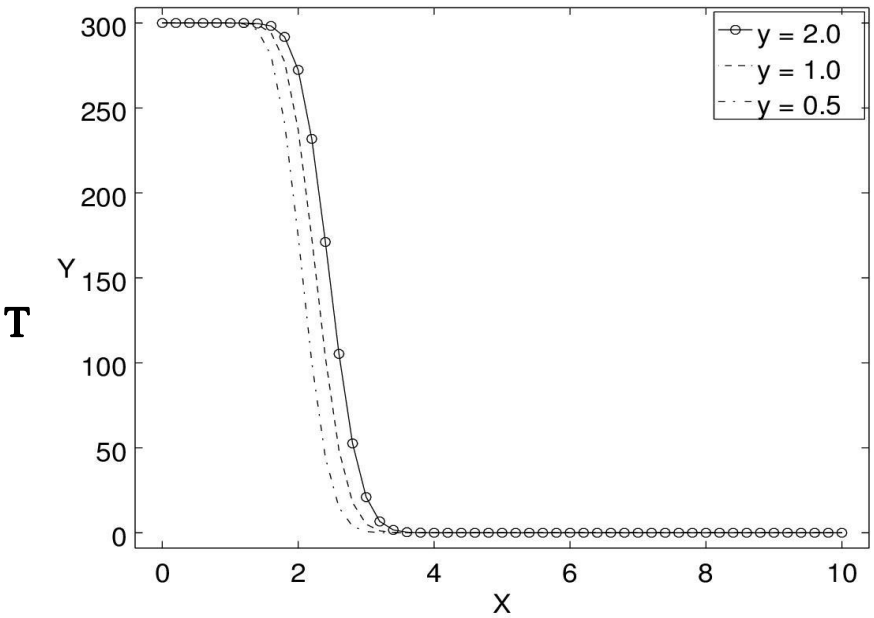

Figura 19: Luego de 5 Segundos

El Efecto de la Porosidad

Para analizar el efecto de la porosidad φ en la ecuación (43), debe tenerse en cuenta que debe cumplirse que

$$0 \leq \varphi \leq 1 \tag{63}$$

Donde como se definió anteriormente φ representa la razón del volumen vacío entre el volumen total de una determinada región existente en el medio poroso. De esta forma si $\varphi = 1$ entonces tenemos el volumen vacío es igual al volumen total de esa determinada región, este es el caso donde el fluido puede pasar libremente a través de todo el dominio.

De manera análoga, si $\varphi = 0$, esto implica que no existe volumen vacío, por lo cual no sería posible el paso del fluido con lo cual no sería realista representar el problema que resuelve la presente tesis usando la ecuación (43).

Según los cálculos experimentales, los valores realistas de φ están habitualmente en el rango dado por

$$0.1 \leq \varphi \leq 0.4 \tag{64}$$

Debido a esto, los valores que han sido usados para los siguientes resultados están entre estos valores.

Porosidad $\boldsymbol{\varphi = 0.1}$

La solución numérica de la ecuación (43) a través de la discretización dada por la ecuación (61) para el valor de $\varphi = 0.1$ ha dado como resultado una distribución de temperatura que es mostrado en la figura 20.

Como puede observarse, en la entrada del dominio se ha prescrito una condición de frontera de la temperatura $T = 300$ que son 300 grados, mientras que en la salida La temperatura se ha fijado en $T = 0$.

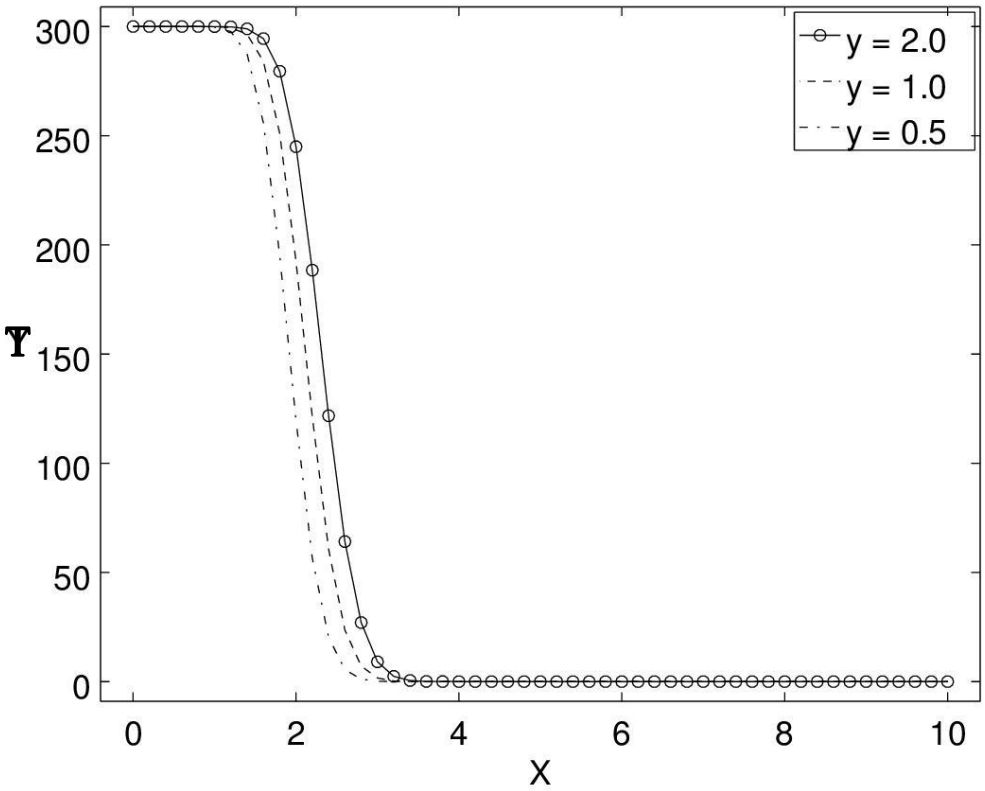

Figura 20: Distribución de la Temperatura luego de 5 segundos

Para obtener la figura 20, se ha hecho cortes horizontales a las alturas de $y = 0.5, y = 1.0$ y $y = 2.0$ donde la altura total de la región es de $H = 4.0$, así, los cortes efectuados para obtener la temperatura son hasta la mitad de la región en altura. Asimismo, la distribución de temperatura mostrada en la figura 20, nos indica como es la temperatura al alcanzar el valor de $t = 5$, es decir la ecuación (61) partiendo del valor inicial de la temperatura $T = 300$ en $t = 0$, a través de repetidas iteraciones tenemos la temperatura mostrada en la figura.

Luego de $t = 5$, se ha continuado aplicando el método de diferencia finita para posteriores tiempos, con lo cual la distribución de temperatura ha ido evolucionando. En la figura 21, tenemos dicha distribución cuando $t = 50$, como podemos apreciar la temperatura de $T = 300$ se ha transmitido en una mayor parte de la región del medio poroso.

De igual forma que en la figura 20, varios cortes horizontales nos permiten ver la distribución de la temperatura para diferentes alturas.

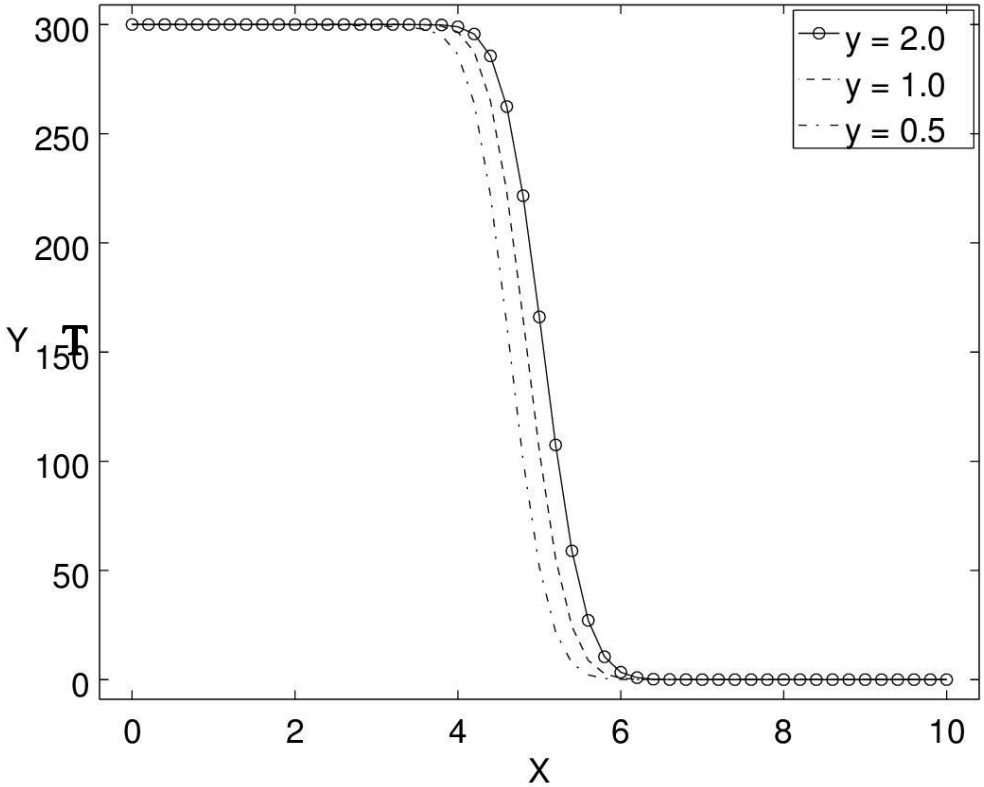

Figura 21: Distribución de la temperatura luego de 50 segundos

Posteriormente, luego de $t = 50$, se ha proseguido con la ejecución del método de diferencias finitas, siempre usando el valor de la porosidad $\varphi = 0.1$ hasta tener el

valor de $t = 100$ para poder apreciar la distribución de la temperatura. Los resultados obtenidos son mostrados en la figura 22, en donde podemos ver claramente que la temperatura se ha transmitido en una mayor parte de la región del medio poroso.

Los diferentes cortes efectuados, de forma similar las figuras 20 y 21, nos permiten ver cómo está distribuida la temperatura a lo largo del eje X.

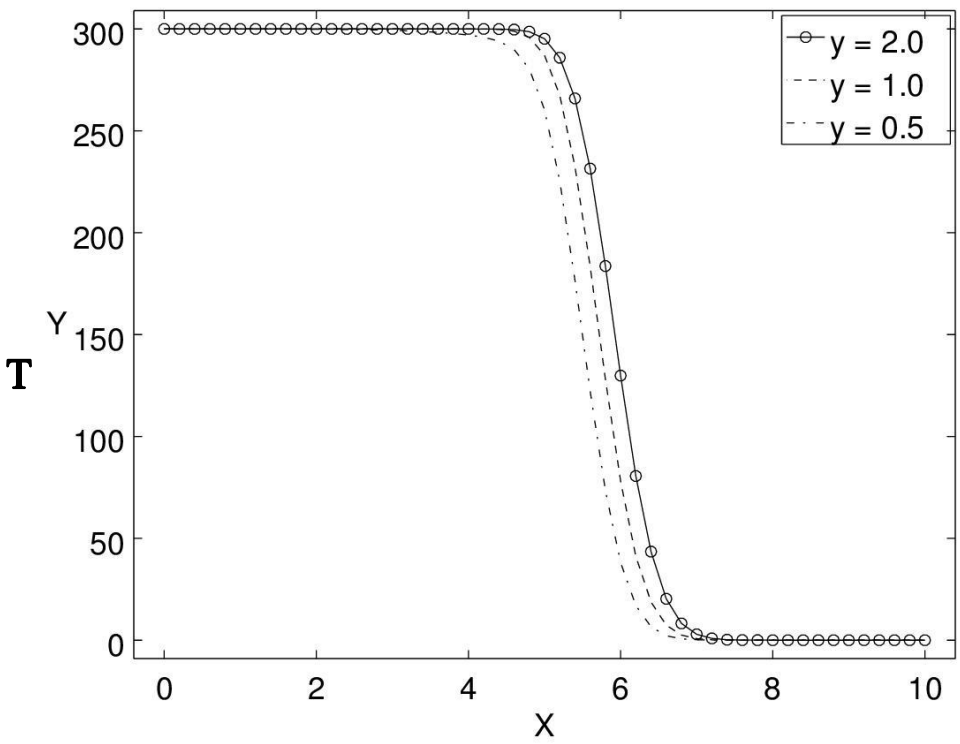

Figura 22: Distribución de la temperatura luego de 100 segundos.

Porosidad $\boldsymbol{\varphi = 0.2}$

El segundo valor de la porosidad usado en las simulaciones para obtener la solución de la ecuación (43) es el valor $\varphi = 0.2$. Similar como en el caso anterior, se han prescrito las condiciones de frontera de $T = 300$ en la entrada mientras en la salida la temperatura es prescrita como $T = 0$.

La región bidimensional tiene dimensiones de $L = 10$ metros de largo y una altura de $H = 4$ metros, como es mostrado en la figura 15, se tiene que se ha concentrado mayor velocidad en la mitad de la región, por lo cual resulta interesante mostrar la temperatura a la mitad de la altura de la región, debido a ello que se ha realizado un corte para $y = 2.0$ a fin de observar la temperatura en el centro de la misma región. Asimismo, de la misma figura 15, vemos que la velocidad en la entrada de la región del medio poroso va disminuyendo a medida que se acerca a la pared, por ello, también los cortes para los valores de la altura para $y = 1.0$ y $y = 0.5$ son adecuados.

En la figura 23, se muestra el campo de temperatura para cada una de las alturas mencionadas cuando $t = 5$

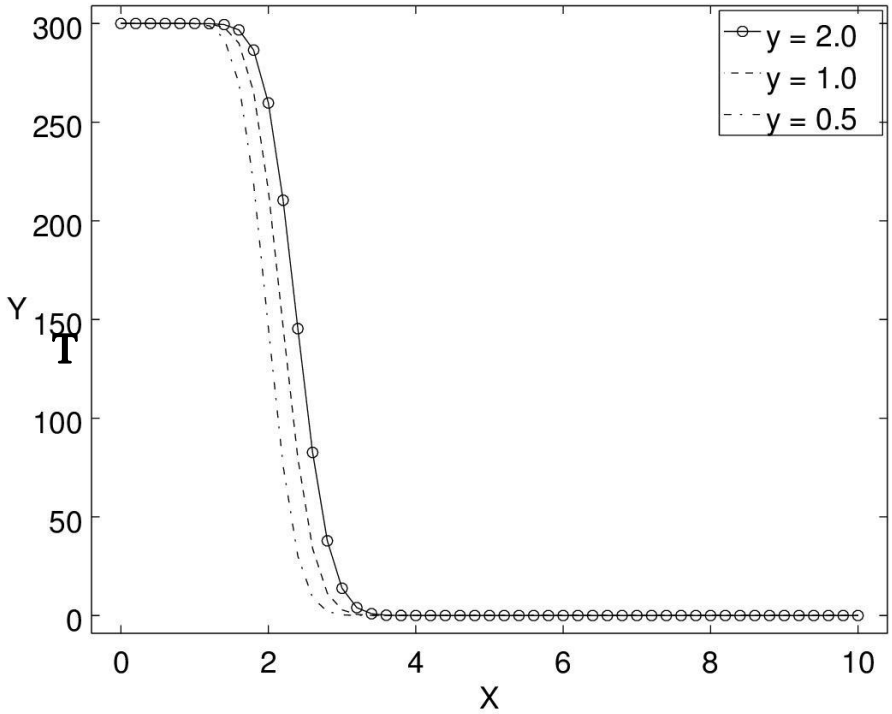

Figura 23: Distribución de la temperatura luego de 5 segundos

Luego de transcurridos $t = 5$, el procedimiento de simulación ha continuado hasta el valor de $t = 50$ para ver la evolución de la temperatura y como se transmite en la región del medio poroso, los resultados cuando $t = 50$ para el valor de la porosidad $\varphi = 0.2$ son mostrados en la figura 24, en la cual, tenemos que la mayor temperatura se concentra en la mitad de la altura de la región.

Posteriormente, luego de que el programa computacional ha alcanzado el valor de $t = 50$ las simulaciones han continuado hasta alcanzar el valor de $t = 100$, con ello, se ha tenido una nueva distribución de temperatura, esta distribución esta mostrada en la figura 25, en la cual podemos observar que la temperatura se encuentra con un mayor valor en una mayor parte de la región del medio poroso.

De esta forma podemos ver que a medida que el tiempo pasa, la temperatura se va transmitiendo en toda la región estudiada, siempre conservando las condiciones de frontera que han sido prescritas tanto en la entrada como en la salida.

Cabe notar que en las simulaciones efectuadas para obtener la solución numérica de la ecuación (43) la condición inicial ha sido de $T = 0$ debido a ello tenemos que luego de que la temperatura ha alcanzado un valor máximo continua el valor de cero en lo que resta de la región como se ve en las figuras 23, 24 y 25.

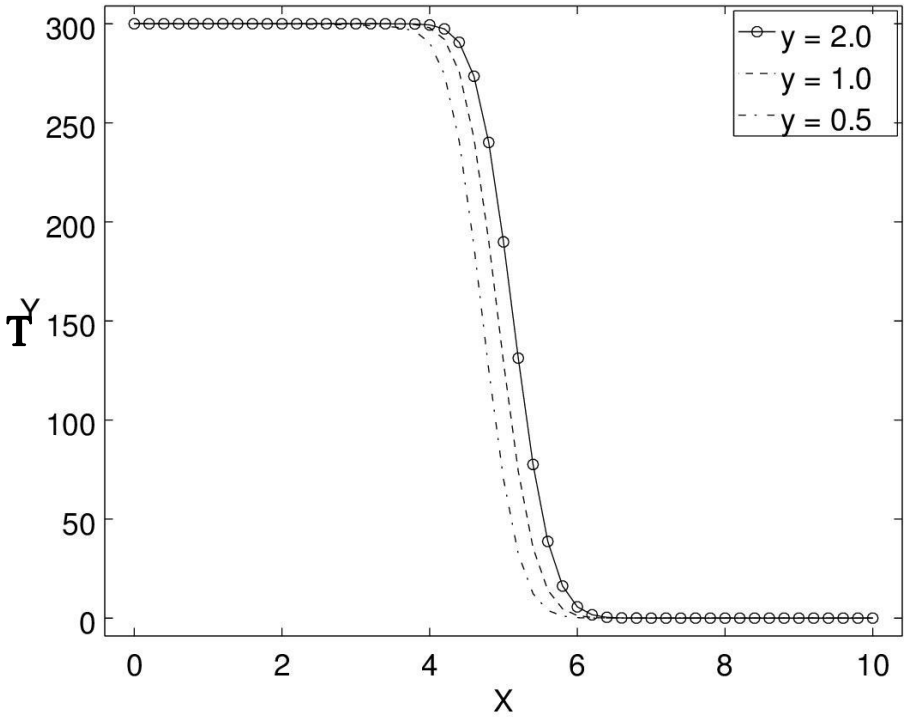

Figura 24: Luego de 50 segundos

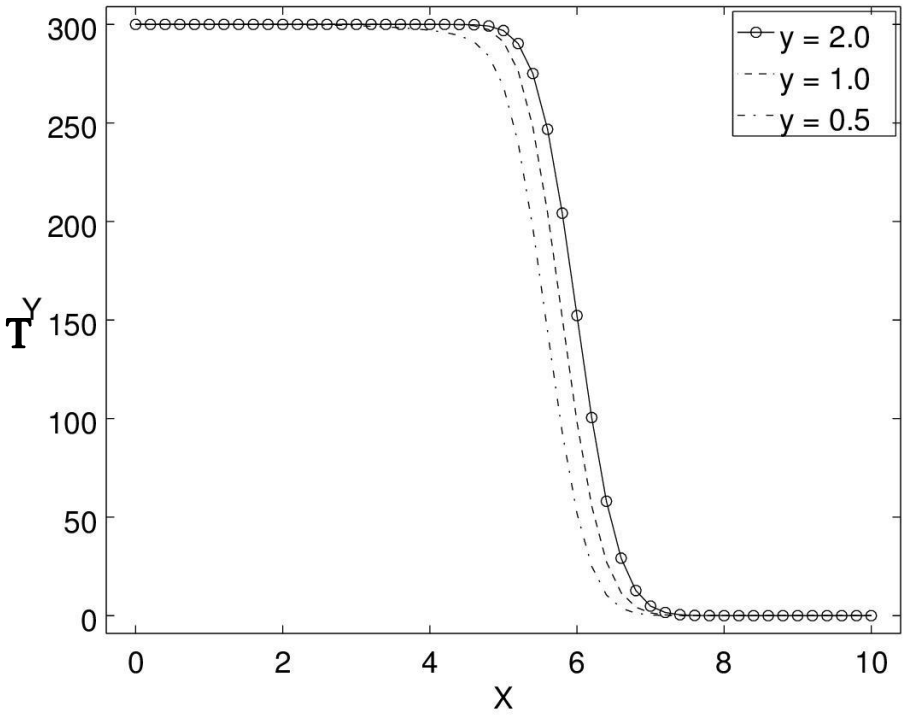

Figura 25: Luego de 100 segundos

Porosidad $\boldsymbol{\varphi = 0.4}$

El ultimo valor usado en las simulaciones para la porosidad es $\varphi = 0.4$, este suele ser un valor alto, usado muy poco en las aplicaciones por las razones explicadas anteriormente, pero resulta de interés su uso para obtener nuevas soluciones de la ecuación (43).

En la figura 26, son mostradas las temperaturas cuando $t = 5$ para diferentes valores de la altura. Podemos observar que la temperatura se ha transmitido desde la entrada hasta aproximadamente $x = 3$, luego de ello, la condición inicial de cero prescrita continua hasta la salida en $x = 10$.

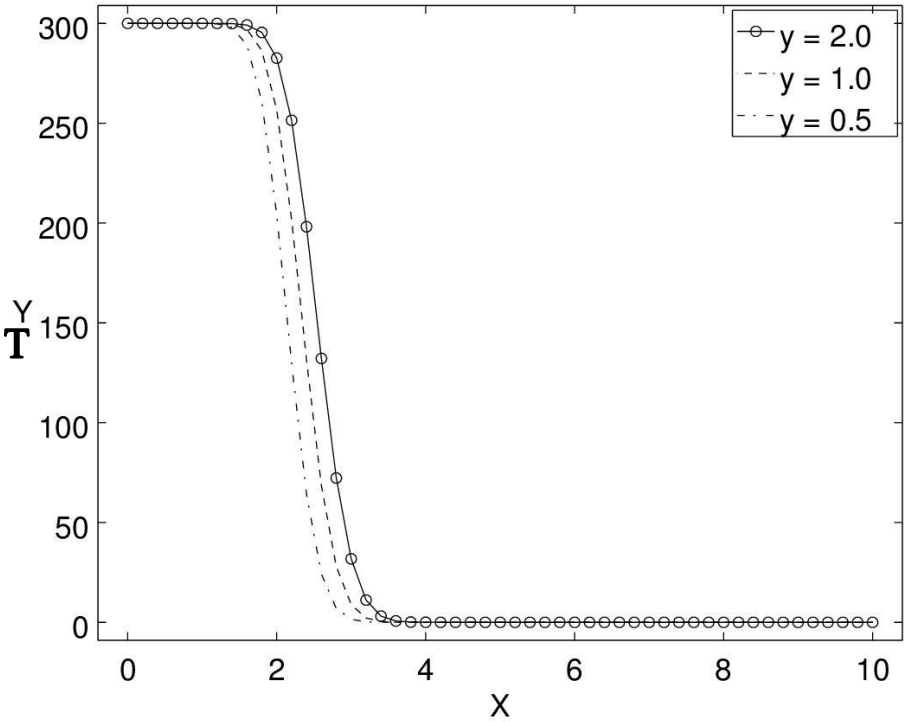

Figura 26: Luego de 5 segundos

Posteriormente, como en los casos anteriores, la simulación ha continuado, pero siempre con el valor de la porosidad $\varphi = 0.4$ hasta el valor de $t = 50$ para ver la transmisión de la temperatura, estos resultados están mostrados en la figura 27.

Finalmente, al continuar el procedimiento de la simulación se ha continuado hasta el valor de $t = 100$, los resultados están mostrados en la figura 28, podemos ver que la temperatura no se ha transmitido como se esperaba, en una mayor región debido a que ese valor de la porosidad, no tiene mucha influencia los términos convectivos sobre la solución numérica de la ecuación (43).

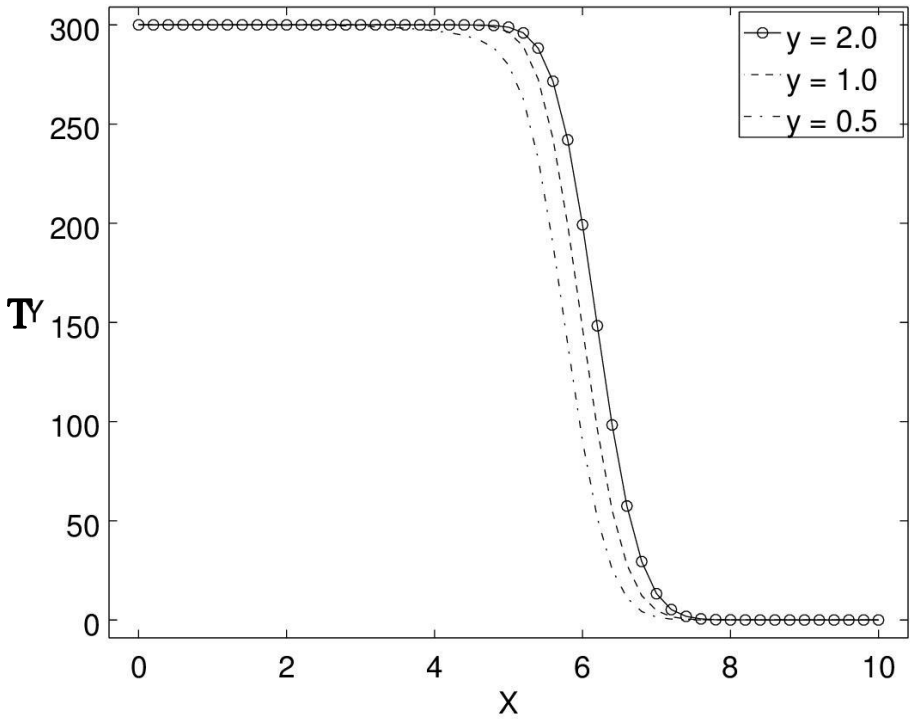

Figura 27: Luego de 50 segundos

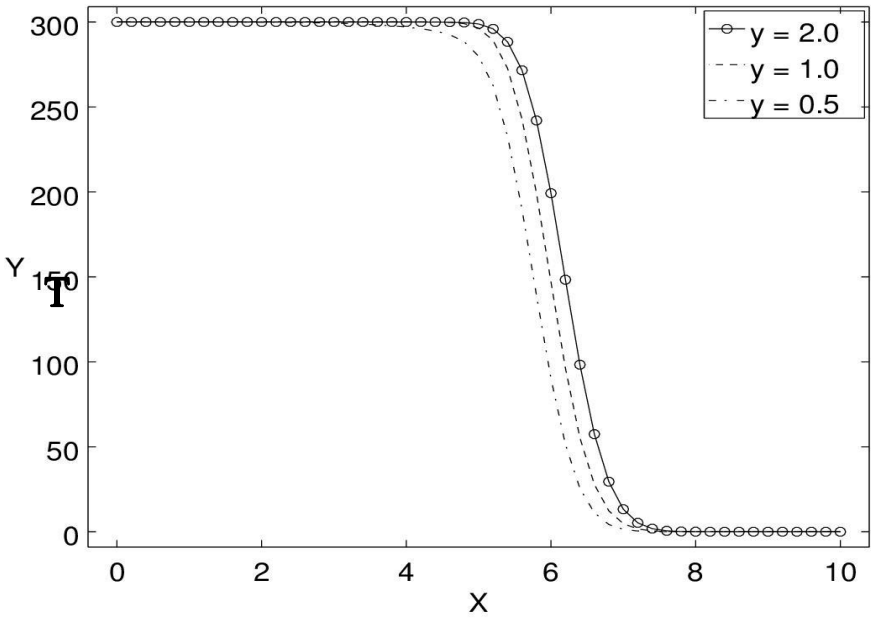

Figura 28: Luego de 100 segundos

En cada una de las simulaciones aquí mostradas con las figuras del presente capitulo se pueden ver los resultados de la ejecución de un programa computacional que ha sido implementado en GNU-Octave.

De esta forma, los tiempos de ejecución empleados para obtener la solución numérica de la ecuación (43) son de varias horas debido a que en una región bidimensional se debe tener en cuenta la ecuación (62) que por esta fórmula la cantidad de nodos en los cuales se calcula la temperatura está en el orden de N^2.

Esto implica que para cada paso de la iteración debe calcularse un numero de nodos que no es lineal sino cuadrático, de forma que, para obtener una nueva aproximación numérica, por ejemplo, para el tiempo $t = 5$ con un incremento temporal de $\Delta\, t = 0.001$ son requeridos

$$N_t = \frac{5.000}{0.001} = 5000 \qquad (65)$$

Iteraciones, y si a esto incluimos el hecho de que en cada iteración un numero cuadrático de nodos deben ser calculados, entonces la cantidad de operaciones crece exponencialmente, razón por la cual el tiempo de ejecución es de varias horas para obtener los resultados mostrados en el presente capitulo.

Otro aspecto a destacar en los resultados presentados en el presenta capitulo, es que, para obtener el campo de temperaturas, debemos tener en cuenta que al usar la ecuación (61) los valores aproximados de las temperaturas en cada nodo (x_i, y_j) son dependientes de los nodos que están a su alrededor, así por ejemplo el valor de la temperatura

$$T(x_i, y_j) \tag{66}$$

Depende de las temperaturas existentes en los nodos $(x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j)$ por el lado del eje X y de las existentes en los nodos $(x_i, y_{j-1}), (x_i, y_{j+1})$ por el lado del eje Y, de esta forma las temperaturas dadas por

$$T(x_{i-1}, y_j), T(x_{i+1}, y_j), T(x_i, y_{j-1}), T(x_i, y_{j+1}) \tag{67}$$

Tienen influencia en la temperatura dada por la expresión (66).

Precisamente, la formulación de la ecuación (43) es la que determina esa influencia, razón por la cual el análisis del fenómeno físico es de vital importancia para las etapas llevadas a cabo y que son detalladas en el plan de procesamiento.

Implementación de un Programa Computacional

Se procede a dar respuesta al objetivo específico 02

Implementar un programa computacional usando un software matemático que permita resolver numéricamente la ecuación diferencial que representa la temperatura del medio poroso.

Se ha implementado un programa computacional que resuelve la ecuación hallada usando diferencias finitas en el programa Octave y se encuentra en el anexo

V. DISCUSIÓN

En el capítulo IV, han sido mostrados los resultados relacionados con la solución numérica de la ecuación

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

mediante el uso del método de diferencias finitas para lo cual se ha llevado a cabo una discretización de la misma ecuación sobre una región rectangular, cuyo ancho es $L = 10$ y altura $H = 4$.

Esta ecuación, estudiada por Nield (Nield, 1998) sobre medios porosos como es el caso del presente trabajo de tesis, ha sido resuelta a través de forma secuencias, estudiando, primeramente, el caso unidimensional como se ha visto en el capítulo II, donde se analizó la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a \frac{\partial T}{\partial x} = b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{68}$$

Y fue resuelta numéricamente. Esto ha tomado relevancia en el presente trabajo de tesis debido a que permite manejar en forma unidimensional la transmisión del calor teniendo el efecto convectivo dado en la primera derivada. Así tenemos que al extender a un espacio bidimensional donde aparecen las derivadas con respecto a x, y encontradas en la ecuación

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

vemos que el término convectivo ahora está dado por

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{69}$$

donde u, v son las velocidades del fluido en el medio poroso. Este término es de importancia y es considerado en el trabajo de Nield (Nield, 1998). Estos dos factores, como son los términos convectivos en forma unidimensional o bidimensional son análogos, pero no iguales por lo que es necesario determinar la solución numérica para conocer el campo de temperatura y eso conlleva a un cálculo computacional para así determinar su evolución en el tiempo.

Esta evolución de la temperatura ha sido posible calcular a través del método de diferencias finitas, habiendo previamente discretizando la región rectangular. Este movimiento del flujo puede también observarse en el trabajo publicado por Jones (Jones, 1986) donde el calor es transportado a través de un fluido en movimiento como es el caso investigado en el presente trabajo de tesis. Este trabajo entre otros son asimismo parte de un conjunto de aplicaciones que existen en la actualidad como es explicado en el reciente trabajo presentado por Badruddin (Badruddin, 2020), por lo cual el análisis y cálculo numérico del problema de transferencia del calor por medio convectivos es de relevancia y en particular el presentado en esta tesis.

Con respecto al cálculo numérico para el caso bidimensional, los valores de la temperatura en cada nodo han sido dependientes de los cuatro valores de la temperatura que están alrededor del nodo lo que difiere del caso unidimensional en donde solo dos valores están directamente relacionados a cada nodo permitiendo obtener la temperatura de ese mismo nodo en una región unidimensional y esto proviene de la discretización de la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial T}{\partial x} = b\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

para el caso unidimensional; en tanto que, para el caso bidimensional, la dependencia de los cuatro nodos aparece explícitamente en la suma de los términos

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}$$

Por otro lado, tanto en las ecuaciones mencionadas como en los trabajos de Nield (Nield, 1998), la evolución de la temperatura de modo puntual está dada por la derivada de la temperatura con respecto al tiempo. Esto además ha permitido obtener la evolución de la temperatura en toda la región a través de una discretización sobre toda la región por donde el fluido va a transcurrir como fue señalado por Jones (Jones, 1986).

Cabe notar que la ecuación unidimensional con respecto a la bidimensional para el transporte del calor, aparte de tener los análogos para la primera y segunda derivada encontradas en la ecuación bidimensional también existe un factor de porosidad que

puede ir variando como es formulado por Nield (Nield, 1998) y que su influencia permite la transmisión del calor cómo ha sido mostrado en la presente tesis y se ha visto reflejado en la solución numérica, dado que aparece presente en las cantidades

$$(\rho c)_m, (k)_m \tag{70}$$

que cambian cuando el valor de φ se modifica. Los resultados numéricos han sido presentados en el capítulo IV, para los valores de la porosidad que han ido variando desde $\varphi = 0.1$ hasta $\varphi = 0.4$.

Asimismo, debido a que $(\rho c)_m$ aparece como factor de la derivada temporal, tiene una gran influencia en la ecuación del transporte del calor por convección en forma bidimensional.

Es importante mencionar que los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis, han sido obtenidos usando el lenguaje de programación GNU-Octave. Un programa gratuito y libremente obtenido de Internet, el cual ha permitido la implementación computacional tanto para el caso unidimensional de la ecuación de calor como para el caso bidimensional.

Para llevar a cabo la implementación computacional, se ha requerido previamente, realizar una discretización de las ecuaciones de transferencia del calor tanto en el caso unidimensional como para el caso bidimensional, situación empleada por lo general en el cálculo numérico de la solución de ecuaciones diferenciales como son mostrados en problemas de transferencia de calor por Pletcher (Pletcher, 2013).

Debido a la complejidad de la ecuación para el caso bidimensional, el tiempo empleado para obtener los resultados mostrados en el capítulo IV han sido de varias

horas como usualmente acontece en el cálculo numérico de fluídos en dos fases como es mostrado en los problemas abordados por Chen (Chen, 2006).

Debido a la naturaleza bidimensional de la región que ha sido considerado en el presente trabajo de tesis, ha sido adecuado realizar cortes a la región rectangular del medio poroso para de esta forma ver de forma más clara la distribución de temperaturas existente, para ello se ha escogido tres valores para la altura de la región bidimensional.

Estas alturas han sido $y = 0.5, y = 1.0$ y $y = 2$ que corresponden con la mitad de la región del medio poroso cuya elección de estas alturas, son debido a que el campo de velocidades prescrito con anticipación, indican que en el centro de la región del medio poroso ha sido definida una mayor velocidad, por lo cual la transmisión del calor en el centro, es predecible vaya a ocurrir con mayor rapidez.

Esto ha podido ser comprobado en los resultados mostrados en las figuras mostrados en el capítulo IV, en donde, las temperaturas máximas aparecen más expandidas justamente en la mitad de la región del medio poroso.

Finalmente, en el presente trabajo de tesis, se ha obtenido la solución numérica de la temperatura a través del tiempo mediante el método de diferencias finitas, teniendo un campo de velocidades definidos de la región que abarca el medio poroso y prescribiendo unas condiciones de frontera fijas tanto en la entrada como en la salida. Esta solución numérica no es fija, sino que como sucede en la realidad evoluciona a través del tiempo y para ello ha sido necesario realizar una correcta discretización de la ecuación para el transporte del calor en forma bidimensional donde se ha incluido la derivada temporal de la temperatura para poder obtener su

evolución en el tiempo y cuyos resultados tienen cierta analogía al caso de la ecuación de transmisión del calor unidimensional.

VI. CONCLUSIONES

De acuerdo al desarrollo y los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis, las siguientes conclusiones pueden enunciarse:

1. Ha sido calculado numéricamente la distribución de temperatura mediante el método de diferencias finitas como lo muestran las figuras 18-28, estas figuras que son mostradas en el capítulo IV son el resultado de haber aplicado dicho método el cual produjo la distribución de las temperaturas en el medio poroso. El método de diferencias finitas, es una técnica que se aplica a una ecuación diferencial a fin de obtener una discretización de la misma, como se muestra la ecuación (61), donde aparece los términos de la ecuación (43) de forma discretizada, en la que para cada valor del tiempo tenemos una ecuación que debemos resolver para obtener la distribución de temperaturas en dicho valor de tiempo, siendo así, para poder tener la distribución de temperaturas en el tiempo final, debemos resolver un conjunto de ecuaciones lineales de forma iterativa empezando desde el tiempo inicial $t_0 = 0$ y con ello para los siguientes tiempos $t_1, t_2, \ldots,$ hasta el tiempo final t_n.

2. Se ha formulado un modelo matemático que consiste en una ecuación diferencial parcial que ha descrito como es la distribución de temperatura en un medio poroso, esta ecuación diferencial parcial ha sido expresada en la ecuación (43), la cual incluye los términos $(\rho c)_m$ y $(k)_m$ que están en función de las características del medio poroso, esto ha sido mostrado en las ecuaciones (44) y (45) donde el factor de porosidad φ determina los valores de dichos términos. Cabe destacar que este modelo matemático formulado por la

ecuación diferencial (43) no es estático ni fijo, sino que de acuerdo a la porosidad va modificándose, de forma que puede considerarse como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales dependientes del valor de φ que es una propiedad inherente de un medio poroso.

3. Se ha llevado a cabo la implementación de un programa computacional en el lenguaje de programación GNU-Octave para obtener la solución numérica mediante el método de diferencias finitas para la ecuación diferencial (43) que ha sido discretizada y mostrada en la ecuación (61). La solución numérica obtenida mediante el programa computacional ha producido resultados que han sido mostrados en el capítulo IV, en ellos puede verse la distribución de temperaturas existentes en el medio poroso a través del tiempo.

VII. RECOMENDACIONES

Las siguientes recomendaciones son adecuadas para un posterior trabajo de investigación relacionado con el tema de la presente tesis.

En presente trabajo se ha prescrito las condiciones de frontera en la entrada del medio poroso como en la salida de dicho medio. Estas condiciones se mantienen fijas en todo el trascurso de la simulación que ha permitido obtener la solución numérica, es recomendable que, para un posterior trabajo, se varíen estas condiciones de frontera de acuerdo a otros problemas físicos donde están presentes medios porosos.

Otro aspecto que ha sido considerado en el desarrollo del presente trabajo de tesis es que las velocidades en el medio poroso considerado han sido prescritas, es decir, de antemano eran conocidas las velocidades existentes la región que constituye el medio poroso, por lo cual es recomendable que en un posterior trabajo de investigación pueda modificarse este campo de velocidades, pero cabe destacar que eso convierte el problema en un desafío mucho mayor debido a que las velocidades por un lado determinan los efectos convectivos en la ecuación (43) que tienen implicancia en la solución numérica y por otro lado se tiene que las velocidades deben estar en coherencia con un problema físico real.

El lenguaje de programación GNU-Octave ha permitido obtener la solución numérica de la ecuación (43) con lo cual ha sido posible mostrar el campo de temperaturas del medio poroso considerado. Es recomendable usar este lenguaje de

programación en un posterior trabajo de investigación debido a su consistencia y confiabilidad en los resultados, aparte de que es un software de programación matemática libre y gratuitamente descargable desde el internet, y que además trabaja tanto en WINDOWS 10 como en GNU-LINUX. No es pesado, y se instala rápida y fácilmente en cualquiera de los sistemas operativos mencionados. Una ventaja también que es adecuado mencionar es que es veloz en su ejecución lo que facilita la implementación de programas computacionales como ha sido el caso presentado en este trabajo de tesis.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ansys Inc. (2013). *Ansys Fluent Tutorial Guide.* Canonsburg, PA.: Ansys Inc.

Badruddin, I., Khan, T., & Baig, M. (2020). Heat transfer in porous media: a mini review. *Materials Today: Proceedings,* 1318-1321. doi:https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.447

Burden, R., & Douglas Faires, J. (2010). *Numerical Analysis.* Madrid.: Thomson Learning, Inc.

Chapra, S. (2007). *Metodos Numericos para Ingenieros.* Mexico: Mc. Graw Hill.

Chen, Z., Huan, G., & Ma, Y. (2006). *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

D., N. (1998). Convection in a porous medium with inclined temperature gradient and vertical. *International Journal of Heat and Mass Transfer,* 87-92.

Eaton, J., Bateman, D., Hauberg, S., & Wehbring, R. (2019). *GNU Octave - Free your numbers.* Florida - Boston: The Free Software Foundation.

Jones, M., & Persichetti, M. (1986). Convective instability in packed beds with throughflow. *AIChE journal*, 1555-1557.

Kincaid, D. (2008.). *Numerical Analysis: Mathematics of Scientic Computing.* Belmont, CA - USA: Thomson Brook/Cole. Inc.

Liu, G., & Quek, S. (2003). *The Finite Element Method.* Oxford-UK.: Elsevier Science.

Nield, D., & Bejan, A. (2006). *Convection in Porous Media.* New York: Springer. doi:https://doi.org/10.1016/0017-9310(91)90176-F

Pletcher, R., J, T., & Anderson, D. (2013). *Computational Fluids Mechanics and Heat Transfer.* USA: CRC Press Taylor & Francis Group.

Stichel, S., Logashenko, D., Grillo, A., Reiter, S., Lampe, M., & Wittum, G. (2012). Numerical Methods for Flow in Fractured Porous Media. En J. Delgado, *Heat and Mass Transfer in Porous Media* (págs. 83-113). Berlin: Springer.

Verruijt, A. (1995). *Computational Geomechanics.* London: Kluwer Academic Publishers.

ANEXO 01:

Programa Computacional para el cálculo de Temperatura en un Medio Poroso

```
%% TemperatureDarcy.m

%% Solve the Convection-Diffusion equation

%% with Darcy data to obtain Temperature.


load("Ux.dat","Ux");

load("Uy.dat","Uy");


%% Dimensions

Lx = 10.0;

Ly = 4.0;

nx = 50; ny = 25;

Nx = nx-1; Ny = ny-1;

dx = Lx/nx; dy = Ly/ny;

x  = 0:dx:Lx;

y  = 0:dy:Ly;


%% Parameters

rCs = 10.0;

rCf =  4.0;

KT  = 0.01;

ep  = 0.2;
```

```
%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
al  = rCf / (ep*rCf + (1-ep)*rCs);
be  = KT / (ep*rCf + (1-ep)*rCs);

%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Time parameter %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tt = 0.00;
dt = 0.01;
nt = 10000;

%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Initialization %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
px = al*dt/(dx); py = al*dt/(dy);
qx = be*dt/(dx^2); qy = be*dt/(dy^2);
T0 = zeros(Ny+2,Nx+2);
T1 = zeros(Ny+2,Nx+2);

%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Loop %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j = 1:Ny
  T0(j,1) = 300;
  T1(j,1) = 300;
end
```

```
for i = 1:Nx+2
  T0(1,i)    = 300*(Lx-x(i));
  T0(Ny+2,i) = 300*(Lx-x(i));
end

passTime = zeros(Nx+2,3);

for k = 1:nt
  fprintf("   Processing: %.2f %%\n", 100*k/nt);
  for j = 2:Ny+1
    for i = 2:Nx+1

      % Las temperaturas se actualizan
 % en cada paso del tiempo
      T1(j,i) = T0(j,i) + ...
                        -px* Ux(j,i)*(T0(j,i)-T0(j,i-1)) + ...
                        -px* Ux(j,i)*(T0(j,i+1)-T0(j,i)) + ...
                        -py* Uy(j,i)*(T0(j,i)-T0(j-1,i)) + ...
                        -py* Uy(j,i)*(T0(j+1,i)-T0(j,i)) + ...
                        +qx*(T0(j,i-1)-2*T0(j,i)+T0(j,i+1)) + ...
    End
  end
end
```

ANEXO 02: MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
Problema General: ¿Es posible la determinación de la temperatura en una región conformada por un medio poroso que se encuentra en estado saturado de un fluido incompresible? **Problemas Específicos:** 1. ¿Es posible formular un modelo matemático que describa la temperatura y sus propiedades del medio poroso cuando existe una trasferencia de calor por convección y su dependencia respecto a la porosidad existente en dicho medio? 2. ¿Cuán posible es desarrollar un programa computacional que permita resolver numéricamente la ecuación diferencial que representa la temperatura del medio poroso?	**Objetivo General** Calcular numéricamente la distribución de temperatura, usando el método de diferencias finitas, en un medio poroso que se encuentra en estado saturado por un fluido incompresible. **Objetivos Específicos** 1. Formular matemáticamente un modelo que posea la ecuación diferencial que describe la temperatura de calor por convección y sus propiedades en un medio poroso y su evolución en el tiempo. 2. Implementar un programa computacional usando un software matemático que permita resolver numéricamente la ecuación diferencial que representa la temperatura del medio poroso.	Usando el método de las diferencias finitas se puede discretizar el dominio del medio poroso y calcular numéricamente la solución de la EDP del calor mediante un sistema de ecuaciones lineales cuya solución dará como resultado el campo de temperatura del medio poroso en cada nodo, para cada instante de tiempo	**Variable independiente:** Ecuación diferencial parcial de la distribución de temperatura en un medio poroso **IX.** **Variable dependiente:** Cálculo de la temperatura usando diferencias finitas.	**Tipo de Investigación**. Aplicativo **Diseño de Investigación** • Análisis del fenómeno físico • Formulación matemática del Problema • Implementación Computacional • Simulación Numérica Evaluación de Resultados **Población:** Es una investigación en matemática en la cual se ha usado un programa computacional, por lo tanto, en este tipo de investigaciones no interviene la población.