UNIVERSIDAD NACIONAL "SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA

Informe del trabajo de investigación:

Bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre la álgebra de las matrices $n \times n$

Responsable:

Ms.C. Miguel Á. Yglesias Jáuregui

Co-responsables:

Dr. Victor Hugo López Solís
Dr. Bibiano Martín Cerna Maguiña
Ms.C. Victor A. Pocoy Yauri

Huaraz, setiembre de 2018

Resumen

En este artículo clasificamos a los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre la álgebra de las matrices $M_n(F)$. Así, demostramos que cada bimódulo asociativo unitario irreducible es isomorfo al bimódulo regular $Reg(M_n(F))$.

Abstrac

In this article we classify the unitary irreducible associative bimodules over the matrix algebra $M_n(F)$. Thus, we prove that every irreducible unitary associative bimodule is isomorphic to the regular bimodule $Reg(M_n(F))$.

1. Introducción

Una *álgebra asociativa* es un espacio vectorial $\mathcal{A}$, con una operación binaria bilineal $(x, y) \mapsto xy$ satisfaciendo la siguiente identidad:

$$(xy)z = x(yz)$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$. La aplicación binaria bilineal $(x, y) \mapsto xy$ definida en $\mathcal{A}$ es llamada de *producto*.

Un ejemplo importante de una álgebra asociativa es el espacio vectorial de las matrices $M_n(F)$ de orden n con el producto usual de matrices.

En la teoria de las álgebras associativas, alternativas y de Jordan, los llamados *teoremas de coordenatización* desempeñan un papel importante. Un teorema clásico de este tipo es el Teorema de Coordenatización de Wedderburn para las álgebras asociativas, el cual afirma que si una álgebra asociativa $\mathcal{A}$ contiene $M_n(F)$ (álgebra de matrices de orden $n \times n$), con el mismo elemento identidad, entonces $\mathcal{A}$ es isomorfa como álgebra a $M_n(\mathcal{B})$ para una cierta subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$.

La clásica noción de bimódulo para una clase de álgebras definidas por identidades multilineales fue introducida por Eilenberg [2].

Por lo tanto, por medio del Teorema de Wedderburn y la noción de bimódulo dada por Eilenberg, hemos clasificado a los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre $M_n(F)$. Así, el resultado principal de nuestro trabajo es el siguiente:

Teorema 1. *Cada bimódulo asociativos unitario irreducible sobre $M_n(F)$ es isomorfo al bimódulo regular $Reg(M_n(F))$.*

La demostración del Teorema 1 está en la pág. 7.

2. Hipótesis

El único bimódulo asociativo unitario irreducible sobre $M_n(F)$, a menos de isomorfismo, es el bimódulo regular $Reg(M_n(F))$.

3. Bases Teóricas

Nathan Jacobson probó algunos análogos del Teorema de Wedderburn para las álgebras alternativas y de Jordan [4, 3, 18], donde el papel de la álgebra de matrices es desempeñado por la álgebra de octónios en el caso alternativo y la álgebra simples de dimensión 27 de Albert en el caso de Jordan. Estos resultados tienen aplicaciones importantes en la teoria de representaciones de las álgebras alternativas y de Jordan [3, 5], en particular, en las representaciones irreducibles de los octónios y de la álgebra de Albert.

Es bien conocido la descripción de los bimódulos asociativos unitarios de dimensión finita sobre $M_n(F)$ [1], como también el de dimensión infinita [17]. El método que vamos a usar para clasificar a los bimódulos asociativos unitarios irreducibles de dimensión arbitrária sobre $M_n(F)$ será completamente diferente a los trabajos anteriores y estará basado en la noción general de bimódulo dada por Eilenberg y el Teorema de coordenatización de Wedderburn.

3.1. Teorema de Coordenatización de Wedderburn

Definimos los e_{ij} como las matrices con 1 en la $(i,j)-$entrada y 0 en las otras. Vamos llamar al conjunto de esos elementos, un ***sistema de matrices unitarias*** que satisfacen

$$e_{ij}e_{rs} = \delta_{jr}e_{is}, \quad \sum e_{ii} = 1,$$

donde δ es el delta de Kronecker.

Recordemos que una álgebra $\mathcal{A}$ es asociativa si $(x,y,z) = 0$ para todo $x,y,z \in \mathcal{A}$, donde $(x,y,z) = (xy)z - x(yx)$.

Ejemplo 1. *La álgebra $M_n(F)$ de todas las matrices de orden $n \times n$ con entradas en el cuerpo F, es una álgebra asociativa. En general, si $\mathcal{B}$ es una álgebra asociativa cualesquiera, podemos considerar la álgebra asociativa $M_n(\mathcal{B})$ de todas las matrices con coordenadas en la álgebra $\mathcal{B}$.*

A continuación presentamos el Teorema principal a ser usado para probar el Teorema 1; el Teorema de Coordenatización de Wedderburn que como bien dijo K. McCrimmon, es el abuelo de todos los teoremas de Coordenatización.

Teorema 2. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra asociativa con elemento identidade 1 tal que $\mathcal{A}$ contiene un sistema de n^2 elementos de matrices unitarias. Entonces, $\mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{B})$ para una cierta subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$.*

Demonstración: Fijemos $i,j,k,r,s \in \{1,2,\dots,n\}$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{B} = \{a \in \mathcal{A} : [a, e_{ij}] = 0 \ \forall \ i,j\}.$$

Por la siguiente identidad, válida en toda álgebra asociativa,

$$[xy, z] = x[y,z] + [x,z]y$$

se sigue facilmente que el conjunto $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$.

Sea $a \in \mathcal{A}$ y defina $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}$. Entonces,

$$a_{ij}e_{rs} = (\sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk})e_{rs} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki}a(e_{jk}e_{rs}) = e_{ri}ae_{js}$$

y

$$e_{rs}a_{ij} = e_{rs}(\sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}) = \sum_{k=1}^{n}(e_{rs}e_{ki})ae_{jk} = e_{ri}ae_{js}.$$

Luego $[a_{ij}, e_{rs}] = 0$, y así, $a_{ij} \in \mathcal{B}$. Además,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ii}ae_{jj} = (\sum_{i=1}^{n} e_{ii})a(\sum_{j=1}^{n} e_{jj}) = a.$$

Ahora supongase que los b_{ij} son elementos de $\mathcal{B}$, tales que, $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}e_{ij} = 0$. Luego

$$0 = \sum_{k=1}^{n} e_{kp}(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}e_{ij})e_{qk} = b_{pq}$$

para $p, q = 1, \ldots, n$. Esto muestra que los elementos de $\mathcal{A}$ pueden ser escritos de una única forma $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}$, donde $a_{ij} \in \mathcal{B}$ para todo i, j. Esto implica que la aplicación $f : \mathcal{A} \longrightarrow M_n(\mathcal{B})$, definida por

$$f(a) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

con $a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}$ es inyectiva. Es claro que f también es sobreyectiva, y por lo tanto, es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathcal{A}$ sobre $M_n(\mathcal{B})$.

Finalmente, vamos a mostrar que f es un homomorfismo de álgebras. Sean

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} \quad \text{y} \quad b = \sum_{r,s=1}^{n} b_{rs} e_{rs}$$

con $a_{ij}, b_{rs} \in \mathcal{B}$, entonces

$$ab = (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij})(\sum_{r,s=1}^{n} b_{rs} e_{rs}) = \sum_{i,j,r,s=1}^{n} a_{ij} b_{rs} e_{ij} e_{rs} = \sum_{i,j,s=1}^{n} a_{ij} b_{js} e_{is}.$$

Así,

$$f(ab) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{jn} \end{bmatrix}$$

y es claro que el produto $f(a)f(b)$ es igual a la matriz $f(ab)$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{B})$.

Esto demuestra el teorema.

Q.E.D.

Corolário 3. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra asociativa tal que $\mathcal{A}$ contiene una subálgebra $M_n(F)$, con el mismo elemento identidad. Entonces, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \otimes_F M_n(F)$ para una cierta subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que conmuta con todas las matrices unitarias e_{ij} de $M_n(F)$.*

3.2. Bimódulos asociativos

Las nociones de bimódulo cumplen un papel importante en la teoria de las álgebras. Sea $\mathcal{A}$ una arbitrária álgebra y V un espacio vectorial sobre el cuerpo base F. Supongamos que están definidas las composiciones bilineales $\mathcal{A} \times V \longrightarrow V$ y $V \times \mathcal{A} \longrightarrow V$, escritas como av y va, para $a \in \mathcal{A}$ y $v \in V$. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{A} \oplus V$ es una álgebra con la siguiente multiplicación

$$(a + v)(b + w) = ab + (vb + aw),$$

donde $a, b \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$. La álgebra $\mathcal{A} \oplus V$ es llamada la ***split null extension*** de la álgebra $\mathcal{A}$ por el espacio V.

Por lo tanto, si $\mathcal{A}$ es una álgebra asociativa, entonces V es llamado un ***bimódulo asociativo*** si $\mathcal{A} \oplus V$ es una álgebra asociativa. Así, tenemos

$$(va)b = v(ab), \ \ (av)b = a(vb), \ \ (ab)v = a(bv),$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $v \in V$.

Un bimódulo V sobre $\mathcal{A}$ es un ***bimódulo irreducible*** si V no contiene subbimódulos própios.

Es importante manifestar que la descripción de los bimódulos irreducibles es uno de los problemas principales en la teoria de las birepresentaciones en cualquier clase de álgebras.

Ejemplo 2. *Para una álgebra $\mathcal{A}$ denote por $Reg(\mathcal{A})$ el* ***bimódulo regular*** *$V := \mathcal{A}$ con la acción de $\mathcal{A}$ dada por el producto en $\mathcal{A}$. Es claro que el bimódulo $Reg(M_n(F))$ sobre la álgebra de las matrices $M_n(F)$ es un bimódulo asociativo irreducible.*

4. Materiales y Metódos

En el ámbito de la matemática, la metodología se rige a procesos de análisis y demostración matemática.

La presente investigación es del tipo aplicada, pues hemos estudiado las características y la clasificación de los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre $M_n(F)$ a través de la aplicación del Teorema Coordenatización de Wedderburn y la noción general de bimódulo dada por Eilenberg.

5. Resultado

En lo que sigue, $\mathcal{A}$ denotará una arbitrária álgebra asociativa unitaria de dimensión arbitrária y sobre un cuerpo F de característica arbitrária.

Ahora estamos listo para demostrar el resultado principal del artículo; el Teorema 1. Por comodidad, enunciamos el Teorema y enseguida damos la demostración:

Cada bimódulo asociativo unitario irreducible sobre $M_n(F)$ ***es isomorfo al bimódulo regular*** $Reg(M_n(F))$**.**

Demonstración: Sea V un bimódulo asociativo unitario irreducible sobre $M_n(F)$. Entonces, la split null extension $E = M_n(F) \oplus V$ de $M_n(F)$ por el bimódulo V, es una álgebra asociativa que contiene $M_n(F)$ con el mismo elemento identidad. Por lo tanto, por el Teorema de Coordenatización Wedderburn - Teorema 2 - existe una cierta subálgebra $\mathcal{B}$ de E tal que $E = M_n(\mathcal{B})$.

A partir de $E = M_n(\mathcal{B})$, considere el conjunto D de los elementos de $\mathcal{B}$ que aparecen en las entradas de las matrices de V. Luego

$$V = M_n(D),$$

donde $D \lhd \mathcal{B}$ y $D^2 = 0$, pues $V \lhd E$ y $V^2 = 0$ en E. Así, $\mathcal{B} = F \cdot 1 \oplus D$ es la split null extension de $F \cdot 1$ por D. Mas, D es un $F-$bimódulo asociativo irreducible, pues V lo es. Por lo tanto, $D = F \cdot 1$, el cual implica, $V = Reg(M_n(F))$.

Esto demuestra el teorema.

Q.E.D.

6. Discusión

El Teorema de Coordenatización de Wedderburn ha sido el resultado fundamental para alcanzar nuestro objetivo, junto con la ayuda de la noción general de bimódulo establecido por Eilenberg.

El Teorema 1 describe a todos los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre $M_n(F)$, en otros términos, nos da a conocer que no existen otros bimódulos asociativos unitarios irreducibles que sean diferentes de $Reg(M_n(F))$.

7. Conclusiones

Se concluye que cada bimódulo asociativo unitario irreducible sobre $M_n(F)$ es isomorfo al bimódulo regular $Reg(M_n(F))$.

8. Recomendaciones

Clasificar los bimódulos alternativos unitarios irreducibles sobre la álgebra de Cayley-Dickson split $C(F)$, para ello se debe usar el Teorema de Coordenatización de Zorn [23] y la noción general de bimódulo dada por Eilenberg, y comparar con los resultados obtenidos en los artículos [10, 11].

Referencias

[1] Drozd, Y. A., Kirichenko, V. V, Finite dimensional algebras. Springer Science and Business Media, 1992.

[2] Eilenberg, S., Extensions of general algebras, Annales de la Societe Polonaise de Mathematique, 21 (1948), 125-–34.

[3] *N. Jacobson*, Structure and Representations of Jordan Algebras, AMS, Providence, RI, 1968.

[4] *N. Jacobson*, A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra. Amer. J. Math. 76, (1954). 447-–452.

[5] *N. Jacobson*, Structure of alternative and Jordan bimodules. Osaka Math. J. 6, (1954). 1—71.

[6] E. N. Kuzmin, I. P. Shestakov, *Nonassociative structures*, VINITI, Itogi nauki i tekhniki, seria "Fundamental Branches", v.57, 179–266, Moscow, 1990; English transl. in .Encyclopaedia of Math. Sciences, v.57, Algebra VI, 199–280", edited by A.I.Kostrikin and I.R.Shafarevich, Springer–Verlag.

[7] *López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P.*, Representations of exceptional simple Jordan superalgebras of characteristic 3. Comm. Algebra 33 (2005), no. 1, 331-–337.

[8] *López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P.*, Representations of exceptional simple alternative superalgebras of characteristic 3. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 7, 2745-–2758.

[9] *López-Solís, V. H.*, On a problem by Nathan Jacobson to alternative superalgebras, Preprint.

[10] *López-Solís, V. H.*, Kronecker factorization theorem for simple alternative superalgebras in characteristic 2, Preprint.

[11] *López-Solís, V. H.*, Kronecker factorization theorem for simple Non-Lie Malcev algebras, Preprint.

[12] *Laliena Clemente, Jesús, López-Solís, V. H.*, An analogy of the Nathan Jacobson' problem to Jordan algebras, Preprint.

[13] *López-Solís, V. H., Shestakov, Ivan P.*, On a problem by Nathan Jacobson, Preprint.

[14] *López-Solís, V. H., Shestakov, Ivan P.*, On a problem by Nathan Jacobson II, Preprint.

[15] *Martínez, Consuelo, Shestakov, Ivan, Zelmanov, Efim*, Jordan bimodules over the superalgebras $P(n)$ and $Q(n)$. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 4, 2037—2051.

[16] N. A. Pisarenko, The structure of alternative superbimodules. Algebra and Logic 33 (1995), no. 6, 386—397.

[17] Pierce, R. S., Associative Algebras. Springer, New York, NY, 1982.

[18] *R. D. Schafer*, An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, N.Y., 1966.

[19] *I. P. Shestakov*, Alternative and Jordan superalgebras, Siberian Adv. Math. 9 (1999), no. 2, 83—99.

[20] *I. P. Shestakov*, Prime Alternative superalgebras of arbitrary characteristic, Algebra i Logika. 36 (1997), no. 6, 675—716; English transl.: Algebra and Logic 36, no.6 (1997), 389—420.

[21] *Trushina, M. N., Shestakov, I. P.*, Irreducible bimodules over alternative algebras and superalgebras. Preprint

[22] *Trushina, M. N., Shestakov, I. P.*, Representations of alternative algebras and superalgebras, J. of Mathematical Sciences 185 (2012), no. 3, 504—512.

[23] *K. Zhevlakov, I. Shestakov, A. Slin'ko, A.Ṡhirshov*, Rings that are nearly associative, Academic Press, N.Y., 1982.