UNIVERSIDAD NACIONAL "SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA

Informe del trabajo de investigación:

Bimódulos alternativos unitarios sobre el álgebra de Cayley-Dickson split

Responsable:

Dr. Victor Hugo López Solís

Huaraz, noviembre de 2018

Resumen

En este artículo demostramos la reducibilidad completa de los bimódulos alternativos unitarios sobre el álgebra de Cayley-Dickson split $C(F)$. Además, demostramos que cada bimódulo alternativo unitario irreducible sobre $C(F)$ es isomorfo al bimódulo regular $Reg(C(F))$.

Abstrac

In this article we prove the complete reducibility of the unitary alternative bimodules over the Cayley-Dickson algebra split $C(F)$. In addition, we prove that each irreducible unitary alternative bimodule over $C(F)$ is isomorphic to the regular bimodule $Reg(C(F))$.

1. Introducción

Una *álgebra alternativa* es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ con una operación binaria bilineal $(x, y) \mapsto xy$ satisfaciendo las siguientes identidades:

$$x^2 y = x(xy), \;\; yx^2 = (yx)x. \tag{1}$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$. La aplicación binaria bilineal $(x, y) \mapsto xy$ definida en $\mathcal{A}$ es llamada de *producto*.

Está claro que toda álgebra asociativa es alternativa. Un ejemplo clásico de una algebra alternativa no-asociativa es el álgebra de Cayley-Dickson $\mathbb{O}$; en particular, el álgebra de Cayley-Dickson split $C(F)$ sobre F.

En lo que sigue, $\mathcal{A}$ denotará una álgebra alternativa unitaria de dimensión y característica arbitrária.

El siguiente resultado señala una caracterización muy interesante de un sistema de matrices unitarias de Cayley-Dickson, esto es, si $\mathcal{A}$ es uma álgebra alternativa, con 1, que contiene un sistema de matrices unitarias de Cayley-Dickson tal que $e_{11} + e_{22} = 1$, entonces el clásico Teorema de Coordenatización de Zorn afirma que $\mathcal{A}$ es también una álgebra de matrices de Cayley-Dickson con entradas (coordenadas) en una cierta subálgebra asociativa y conmutativa de $\mathcal{A}$.

El Teorema de Coordenatización de Zorn será el resultado principal a ser usado junto con la noción general de bimódulo dada por Eilenberg para alcanzar nuestros objetivos. Así, nuestros resultados son:

Teorema 1. *Cada bimódulo alternativo unitario sobre $C(F)$ es completamente reducible.*

Teorema 2. *Cada bimódulo alternativo unitario irreducible sobre $C(F)$ es isomorfo al bimódulo regular $C(F)$.*

La demostración del Teorema 1 está en la pág. 7.

2. Hipótesis

Todo bimódulo alternativo unitario sobre $C(F)$ es completamente reducible y cada bimódulo alternativo unitario irreducible sobre $C(F)$ es isomorfo al bimódulo regular $C(F)$.

3. Bases Teóricas

Nathan Jacobson probó algunos análogos del Teorema de Wedderburn para las álgebras alternativas y de Jordan [4, 3, 19], donde el papel de la álgebra de matrices es desempeñado por la álgebra de octónios en el caso alternativo y la álgebra simples de dimensión 27 de Albert en el caso de Jordan. Estos resultados tienen aplicaciones importantes en la teoria de representaciones de las álgebras alternativas y de Jordan [3, 5], en particular, en las representaciones irreducibles de los octónios y de la álgebra de Albert.

En [15] hemos clasificado a los bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre el álgebra de las matrices $M_n(F)$ usando el clásico teorema de Coordenatización de Wedderburn y la noción general de bimódulo dada por Eilenberg.

En este trabajo, el método que vamos a usar para clasificar y describir a los bimódulos alternativos unitarios y a los bimódulos alternativos unitarios irreducibles de dimensión arbitrária sobre $C(F)$ está basado también en la noción general de bimódulo dada por Eilenberg y el Teorema de Coordenatización de Zorn.

3.1. Teorema de Coordenatización de Zorn

El ***álgebra de las matrices de Cayley-Dickson*** $C(F)$ es una álgebra alternativa no-associativa de dimensión 8 sobre F con base e_{ii}, $e_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1, 2; k = 1, 2, 3)$ y tabla de multiplicación

$$e_{ii}^2 = e_{ii}, \quad e_{ii}e_{jj} = 0;$$
$$e_{ii}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}e_{jj} = e_{ij}^{(k)}, \quad e_{jj}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}e_{ii} = 0;$$
$$(e_{ij}^{(k)})^2 = e_{ij}^{(k)} \circ e_{ij}^{(l)} = 0 \quad (k \neq l);$$
$$e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(k)} = e_{ii}, \quad e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(l)} = 0 \quad (k \neq l);$$
$$e_{ij}^{(k)}e_{ij}^{(k+1)} = (j-i)e_{ji}^{(k+2)} \quad (k \bmod 3),$$

donde $\circ$ es el *producto de Jordan*, o sea, si $a, b \in C(F)$ entonces $a \circ b = ab + ba$. Los elementos e_{ii}, $e_{ij}^{(k)}$ son llamados ***matrices unitarias de Cayley-Dickson***.

El álgebra de las matrices de Cayley-Dickson puede ser considerado no solamente sobre cuerpos, mas también sobre anillos asociativos y conmutativos Φ. Se observa inmediatamente que el álgebra $C(\Phi)$ será también alternativa.

El nombre "álgebra de matrices" viene del hecho de que los elementos de $C(F)$ pueden ser representados por matrices de la siguiente manera: Sea $a \in C(F)$ con

$$a = \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{22}e_{22} + \sum_{k=1}^{3}(\alpha_{12}^{(k)}e_{12}^{(k)} + \alpha_{21}^{(k)}e_{21}^{(k)}).$$

Asociamos al elemento a con la matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde } a_{ij} = (\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}) \in F^3.$$

La suma y la multiplicación escalar de los elementos del álgebra $C(F)$ corresponden a las usuales suma y multiplicación escalar de matrices de la forma anterior. Además, la multiplicación de los elementos del álgebra $C(F)$ corresponde a una multiplicación especial (vea [24]).

Con lo mencionado anteriormente, estamos listos para enunciar formalmente el teorema de Coordenatización de Zorn, el cual fue formulado como un ejercicio en [24]:

Teorema 3 (Teorema de Coordenatización de Zorn)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra alternativa, con 1, tal que $\mathcal{A}$ contiene un sistema de matrices unitarias de Cayley-Dickson, con $e_{11} + e_{22} = 1$. Entonces, $\mathcal{A}$ es una álgebra de matrices de Cayley-Dickson sobre un anillo asociativo y conmutativo Φ.*

3.2. Bimódulos alternativos

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra arbitrária y V un espacio vectorial sobre el cuerpo base F. Supongamos que están definidas las composiciones bilineales $\mathcal{A} \times V \longrightarrow V$ y $V \times \mathcal{A} \longrightarrow V$, escritas como av y va, para $a \in \mathcal{A}$ y $v \in V$. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{A} \oplus V$ es una álgebra con la siguiente multiplicación

$$(a+v)(b+w) = ab + (vb + aw),$$

donde $a, b \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$. El álgebra $\mathcal{A} \oplus V$ es llamado la ***split null extension*** del álgebra $\mathcal{A}$ por el espacio V.

Por lo tanto, si $\mathcal{A}$ es una álgebra alternativa, entonces V es llamado un ***bimódulo alternativo*** si $\mathcal{A} \oplus V$ es una álgebra alternativa. Así, tenemos

$$(a, a, v) = 0, \quad (a, v, b) + (v, a, b) = 0$$

$$(v, b, b) = 0, \quad (a, v, b) + (a, b, v) = 0.$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $v \in V$.

Un bimódulo V sobre $\mathcal{A}$ es un ***bimódulo irreducible*** si V no contiene subbimódulos própios.

Para finalizar esta sección, vamos a dar algunos ejemplos de bimódulos alternativos unitarios, pero antes de ello es importante manifestar que la descripción de los bimódulos irreducibles es uno de los problemas principales en la teoria de las birepresentaciones en cualquier clase de álgebras.

Ejemplo 1. *El bimódulo alternativo unitario irreducible no-asociativo de dimensión* 2 *para* $M_2(F)$ *es el espacio* $Cay = F.m_1 + F.m_2$*, donde la acción de* $M_2(F)$ *sobre* Cay *está dada por*

$$e_{ij}.m_k = \delta_{ik} m_j$$

$$m.a = \bar{a}.m$$

para todo $i, j, k \in \{1, 2\}$*; donde* $a \in M_2(F)$*,* $m \in Cay$ *y* $a \mapsto \bar{a}$ *es la involución simplética de* $M_2(F)$*.*

Un caso concreto del ejemplo anterior es el siguiente:

Ejemplo 2. *En el álgebra de las matrices de Cayley-Dickson* $C(F)$*, el espacio*

$$V = Fe_{12}^{(2)} + Fe_{21}^{(3)}$$

es un bimódulo alternativo unitario irreducible sobre $M_2(F)$*, donde la acción de* $M_2(F)$ *sobre* V *está dada en el ejemplo* 1 *y puede ser mostrada utilizando la tabla de multiplicación de* $C(F)$*.*

Ejemplo 3. *Para una álgebra alternativa* $\mathcal{A}$ *denote por* $Reg(\mathcal{A})$ *el* **bimódulo regular** $V := \mathcal{A}$ *con la acción de* $\mathcal{A}$ *dada por el producto en* $\mathcal{A}$*. Está claro que el bimódulo* $Reg(C(F))$ *sobre el álgebra de las matrices de Cayley-Dickson* $C(F)$ *es un bimódulo alternativo irreducible.*

4. Materiales y Metódos

En el ámbito de la matemática, la metodología se rige a procesos de análisis y demostración matemática.

La presente investigación es del tipo aplicada, pues hemos descrito y clasificado a los bimódulos alternativos unitarios y a los bimódulos alternativos unitarios irreducibles sobre $C(F)$, a través de la aplicación del Teorema de Coordenatización de Zorn y la noción general de bimódulo dada por Eilenberg.

5. Resultados

En lo que sigue, $\mathcal{A}$ denotará una arbitrária álgebra alternativa unitaria de dimensión y característica arbitrária.

Ahora estamos listo para demostrar los resultados principales del artículo; los Teoremas 1 y 2. Por comodidad, enunciamos cada uno de los Teoremas y enseguida damos su demostración. Comenzamos con el Teorema 1:

Cada bimódulo alternativo unitario sobre $C(F)$ ***es completamente reducible.***

Demonstración: Sea V un bimódulo alternativo unitario sobre $C(F)$. Entonces, la split null extension $E = C(F) \oplus V$ de $C(F)$ por el bimódulo V, es una álgebra alternativa que contiene $C(F)$ con el mismo elemento identidad. Por lo tanto, por el Teorema de Coordenatización Zorn - Teorema 3 - existe una cierta álgebra asociativa y conmutativa Φ tal que $E = C(\Phi)$.

A partir de $E = C(\Phi)$, considere el conjunto D de los elementos de Φ que aparecen en las entradas de las matrices de Cayley-Dickson de V. Luego

$$V = C(D),$$

donde $D \triangleleft \Phi$ y $D^2 = 0$, pues $V \triangleleft E$ y $V^2 = 0$ en E. Así, $\Phi = F \cdot 1 \oplus D$ es la split null extension de $F \cdot 1$ por D. Luego, D es un $F-$bimódulo asociativo conmutativo unitario. Por consiguiente, D es completamente reducible, esto es, D es una suma de copias del cuerpo F; $D = F \oplus F \oplus \cdots \oplus F$. Por lo tanto, de $V = C(D)$, deducimos que V es también completamente reducible.

Esto demuestra el teorema.

Q.E.D.

A seguir, enunciamos el Teorema 2 y damos su demostración.

Cada bimódulo alternativo unitario sobre $C(F)$ ***es completamente reducible.***

Demonstración: Sea V un bimódulo alternativo unitario irreducible sobre $C(F)$. Entonces, la split null extension $E = C(F) \oplus V$ de $C(F)$ por el bimódulo V, es una álgebra alternativa que contiene $C(F)$ con el mismo elemento identidad. Por lo tanto, nuevamente por el Teorema de Coordenatización Zorn - Teorema 3 - existe una cierta álgebra asociativa y conmutativa Φ tal que $E = C(\Phi)$.

A partir de $E = C(\Phi)$, considere el conjunto $\mathcal{D}$ de los elementos de Φ que aparecen en las entradas de las matrices de Cayley-Dickson de V. Luego

$$V = C(\mathcal{D}),$$

donde $\mathcal{D} \triangleleft \Phi$ y $\mathcal{D}^2 = 0$, pues $V \triangleleft E$ y $V^2 = 0$ en E. Así, $\Phi = F \cdot 1 \oplus \mathcal{D}$ es la split null extension de $F \cdot 1$ por $\mathcal{D}$. Mas, $\mathcal{D}$ es un $F-$bimódulo asociativo conmutativo irreducible, pues V lo es. Por lo tanto, $\mathcal{D} = F \cdot 1$, el cual implica, $V = Reg(C(F))$.

Esto demuestra el teorema.

Q.E.D.

6. Discusión

El Teorema de Coordenatización de Zorn ha sido el resultado fundamental para alcanzar nuestros objetivos, junto con la ayuda de la noción general de bimódulo establecido por Eilenberg.

El Teorema 1 describe la reducibilidad completa de los bimódulos alternativos unitarios sobre $C(F)$, en otros términos, nos dice que cada bimódulo alternativo unitario sobre $C(F)$ es suma directa de sus subbimódulos irreducibles.

El Teorema 2 describe a todos los bimódulos alternativos unitarios irreducibles sobre $C(F)$, en otros términos, nos da a conocer que no existen otros bimódulos alternativos unitarios irreducibles que sean diferentes de $Reg(C(F))$.

7. Conclusiones

Se concluye que cada bimódulo alternativo unitario sobre $C(F)$ es completamente reducible y que cada bimódulo alternativo unitario irreducible sobre $C(F)$ es isomorfo al bimódulo regular $Reg(C(F))$.

8. Recomendaciones

Probar que la categoria de los bimódulos alternativos unitarios sobre $C(\Phi)$ es equivalente a la categoria de los módulos asociativos conmutativos unitarios sobre Φ. Este resultado será demostrado en un próximo trabajo de investigación.

Referencias

[1] Drozd, Y. A., Kirichenko, V. V, Finite dimensional algebras. Springer Science and Business Media, 1992.

[2] Eilenberg, S., Extensions of general algebras, Annales de la Societe Polonaise de Mathematique, 21 (1948), 125-–34.

[3] *N. Jacobson*, Structure and Representations of Jordan Algebras, AMS, Providence, RI, 1968.

[4] *N. Jacobson*, A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra. Amer. J. Math. 76, (1954). 447-–452.

[5] *N. Jacobson*, Structure of alternative and Jordan bimodules. Osaka Math. J. 6, (1954). 1—71.

[6] E. N. Kuzmin, I. P. Shestakov, *Nonassociative structures*, VINITI, Itogi nauki i tekhniki, seria "Fundamental Branches", v.57, 179–266, Moscow, 1990; English transl. in .^{En}cyclopaedia of Math. Sciences, v.57, Algebra VI, 199–280", edited by A.I.Kostrikin and I.R.Shafarevich, Springer–Verlag.

[7] *López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P.*, Representations of exceptional simple Jordan superalgebras of characteristic 3. Comm. Algebra 33 (2005), no. 1, 331-–337.

[8] *López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P.*, Representations of exceptional simple alternative superalgebras of characteristic 3. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 7, 2745-–2758.

[9] *López-Solís, V. H.*, On a problem by Nathan Jacobson to alternative superalgebras, Preprint.

[10] *López-Solís, V. H.*, Kronecker factorization theorem for simple alternative superalgebras in characteristic 2, Preprint.

[11] *López-Solís, V. H.*, Kronecker factorization theorem for simple Non-Lie Malcev algebras, Preprint.

[12] *Laliena Clemente, Jesús, López-Solís, V. H.*, An analogy of the Nathan Jacobson' problem to Jordan algebras, Preprint.

[13] *López-Solís, V. H., Shestakov, Ivan P.*, On a problem by Nathan Jacobson, Preprint.

[14] *López-Solís, V. H., Shestakov, Ivan P.*, On a problem by Nathan Jacobson II, Preprint.

[15] *López-Solís, V. H., Yglesias Jáuregui, M. A., Cerna Maguiña, M., Pocoy Yauri, P.* Bimódulos asociativos unitarios irreducibles sobre el álgebra de las matrices $n \times n$, Resolución de Consejo de Fac. Nº 283-2018-UNASAM-FC .

[16] *Martínez, Consuelo, Shestakov, Ivan, Zelmanov, Efim*, Jordan bimodules over the superalgebras $P(n)$ and $Q(n)$. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 4, 2037—2051.

[17] N. A. Pisarenko, The structure of alternative superbimodules. Algebra and Logic 33 (1995), no. 6, 386—397.

[18] Pierce, R. S., Associative Algebras. Springer, New York, NY, 1982.

[19] *R. D. Schafer*, An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, N.Y., 1966.

[20] *I. P. Shestakov*, Alternative and Jordan superalgebras, Siberian Adv. Math. 9 (1999), no. 2, 83—99.

[21] *I. P. Shestakov*, Prime Alternative superalgebras of arbitrary characteristic, Algebra i Logika. 36 (1997), no. 6, 675—716; English transl.: Algebra and Logic 36, no.6 (1997), 389—420.

[22] *Trushina, M. N., Shestakov, I. P.*, Irreducible bimodules over alternative algebras and superalgebras. Preprint

[23] *Trushina, M. N., Shestakov, I. P.*, Representations of alternative algebras and superalgebras, J. of Mathematical Sciences 185 (2012), no. 3, 504—512.

[24] *K. Zhevlakov, I. Shestakov, A. Slin'ko, A.Ṡhirshov*, Rings that are nearly associative, Academic Press, N.Y., 1982.