UNIVERSIDAD NACIONAL "SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS

EQUIVALENCIA DE NORMAS EN ESPACIOS DE OPERADORES (r, p, q)-NUCLEARES DE RANGO FINITO Y $p-$COMPACTO

Autores : Dr. Bibiano Martin Cerna Maguiña

Lic. Victor Alberto Pocoy Yauri

HUARAZ - PERÚ

2013

Índice

Abstract

The theory of nuclear operators was created in 1936 when E.J. Murray and J. Von Neumann investigated the problem "what operators in Hilbert spaces have a well-defined trace?". They found one class of operators and classification on ideal of operators. In the earlier fifties A. Grothendieck and A.F. Ruston independently extended this concept to operators acting in Banach spaces.

For this reason we purpose to demonstrate the equivalence the norms in the space p-compact operators, this space is subset of the space (r, p, q)-nuclear operators. This result has purposed in [1] as the lemma (19.3.6).

For demonstrate the equivalent of this norms, we consider that $\|S\|$ is the norm of the operator S the same what is a element of the (r, p, q)-nuclear operators, (r, p, q)-nuclear operators is a subspace of the Banach operators space. $\mathbf{K}_p^\circ$ is the norm of the operator in the p-compact and rank finite operators space the same is subspace for the (r, p, q)-nuclear operators.

Key words: (r, p, k)-nuclear operators, finite operators, compact operators, norm of operators, ideal of operators.

Introducción

Siendo la teoría de operadores un área de la matemática que se encarga del estudio y clasificación de operadores en espacios generales de operadores describiendo las propiedades inherentes a cada espacio y su relación entre un espacio y otro, buscamos contribuir en dicha área mostrando la relación de equivalencia entre $\|S\|$ y $\mathbf{K}^{\circ}{}_{p}$ que son normas en ciertos espacios de operadores.

El presente trabajo es necesario pues en las teorías matemáticas no encontramos con la necesidad de extender estas teorías a espacios más generales como lo son la teoría de los ideales de operadores, asimismo mostrara y motivara a nuestros estudiantes de la UNASAM otras áreas de investigación.

La organización del presente informe de investigación es como sigue:

En la primera sección exponemos la hipótesis del presente trabajo de investigación.

En la segunda sección describimos el marco teórico en el cual definimos cada uno de los objetos matemáticos que servirán para definir las normas en cada uno de los espacios que a su vez serán equivalentes.

En la tercera sección describimos los materiales y métodos que usados para desarrollar la presente investigación considerando el método científico aplicado en investigación básica como es la matemática.

En la cuarta sección mostramos los resultados y la discusión de nuestra investigación la misma que será plasmado en la demostración de la equivalencia de normas en los espacios estudiados.

En las últimas secciones damos a conocer las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo de investigación.

Los Autores

1. Hipótesis

La norma $K_p^0(S)$ y $\|S\|$ para $S \in \Im(E, L_p(\Omega,\mu))$ son equivalentes en el espacio de operadores p-compactos nucleares y de rango finito.

2. Marco Teórico

2.1. Espacio Normado

Definición 2.1. (Norma)
Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo[1] $\mathbb{K}$. Una norma en X es una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dicho espacio vectorial X con la norma $\|\cdot\|$ es llamado espacio normado.

Definición 2.2. (Equivalencia de normas)
Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes en un espacio vectorial X y denotaremos $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$, si existe $m > 0, M > 0$ tal que

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2, \forall x \in X$$

Definición 2.3. (Espacio medible)
Sea (Ω, μ) un espacio medible y μ una medida. El espacio de funciones de potencia p-ésima integrable es un espacio Banach[2] que se define como:

$$L_p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K}/f \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty \right\} \tag{1}$$

La norma está definida por:

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \, d\mu} \tag{2}$$

[1]En adelante llamaremos espacio vectorial a todo espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$
[2]El espacio de Banach es un espacio normado que es completo con la métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

2.2. Algunos Espacios de Operadores

Definición 2.4. (Espacio de operadores lineales)
Sean X, Y espacios vectoriales. Una aplicación $S : X \to Y$ es llamado aplicación lineal o transformación lineal o operador lineal de X en Y si cumple:

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha S(x_1) + \beta S(x_2); \forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \tag{3}$$

El conjunto $L(X, Y)$ de todos los operadores lineales de X a Y es llamado espacio lineal[3].

Definición 2.5. (Operadores lineales acotados)
Sean X, Y espacios normados. Un operador lineal $S : X \to Y$ es acotado, si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\|S(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \forall x \in X \tag{4}$$

La norma de los operadores lineales acotados es:

$$\|S\| = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|S(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\} \tag{5}$$

Definición 2.6. (Espacio de operadores lineales acotados)
Sean E, F espacios de Banach y los operadores lineales $S : E \to F$. El espacio vectorial de operadores lineales y acotados. es llamados espacio de operadores lineales acotados y se denota por $\mathfrak{L}(E, F)$.

2.3. Funcional Lineal

Definición 2.7. (Funcional lineal)
Sean X un espacio vectorial y $\mathbb{K}$ un cuerpo. La aplicación $F : X \to \mathbb{K}$ es llamado funcional lineal si cumple:

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \tag{6}$$

El valor de $F(x), x \in X$ es denotado por $\langle x, F \rangle$

Teorema 2.1. *(Hahn-Banach)*
Sea X un espacio vectorial, $P : X \to \mathbb{K}$ una funcional lineal [4]*, $Z \subset X$ y $F : Z \to \mathbb{K}$ una funcional lineal tal que $F(x) \leq P(x), \forall x \in Z$, entonces F puede ser extendido a X tal que $F(x) \leq P(x), \forall x \in X$*

[3] El espacio lineal es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$

[4] El teorema es válido en el caso que $a : X \to \mathbb{K}$ es una funcional sublineal es decir $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$ y $P(\alpha x) = \alpha P(x), \forall x, y \in X, \forall \alpha \geq 0$

Definición 2.8. (Dual del espacio de Banach)
Sea E un espacio de Banach y F las funcionales lineales y acotadas[5] $F : E \to \mathbb{K}$. El espacio de funcionales lineales y acotadas es llamado espacio dual $\mathfrak{L}(E, \mathbb{K})$ o E'.

2.4. Familias

Definición 2.9. (Familia)
Sea I un conjunto de índices y la familia

$$x = (x_i), \tag{7}$$

donde $x_i \in E$ para $i \in I$
El conjunto $\mathfrak{I}(E, I)$ de todas las familias acotadas es un espacio de Banach con norma

$$\|x\| = \sup\{\|x_i\| / i \in I\} \tag{8}$$

que se denota por $\mathfrak{I}$

Definición 2.10. (Familia sumable)
Una familia $x = (x_i)$ es llamado sumable si

$$\sum_I x_i = \lim_i \sum_i x_i \tag{9}$$

donde $x_i \in E$ para $i \in I$

Definición 2.11. (Familia de escalares absolutamente p-sumables)
Sea $0 < p \leq \infty$. El espacio de Banach de todas las familias de escalares absolutamente p-sumables se denota por $l_p(I)$ y es

$$x = (\xi_i) \tag{10}$$

donde $i \in I$ La norma asociada se define:

$$\|x\|_p = \left\{\sum_I |\xi_i|^p\right\}^{1/p} \quad \vee \quad \|x\|_\infty = \sup\{|\xi_i| / i \in I\} \tag{11}$$

Definición 2.12. (Familia débilmente y absolutamente sumable)
Sea $a \in E'$
Una familia $x = (x_i)$ es llamada débilmente sumable si toda la familia de

[5]Como $\mathbb{K}$ es un espacio de Banach con norma definida por el valor absoluto, entonces todas las funcionales $F : E \to \mathbb{K}$ son lineales y acotadas.

escalares $(\langle x_i, a\rangle)$ es sumables
Una familia $x = (x_i)$ es llamada absolutamente sumable si toda la familia de escalares $(\|x_i\|)$ es sumables

Definición 2.13. (Familias absolutamente p-sumable)
Sea $0 < p \leq \infty$, $x_i \in E$ para $i \in I$. Una familia $x = (x_i)$ es llamada absolutamente p-sumable si $\|x_i\| \in \mathfrak{l}_p(I)$
La norma asociada

$$\mathbf{l}_p = \mathrm{l}_p\left(\|x_i\|\right) \tag{12}$$

La clase de todas las familias absolutamente p sumables es denotado por $\mathfrak{l}_p$

Definición 2.14. (Familia débilmente p-sumable)
Sea $0 < p \leq \infty$, $a \in E'$, $x_i \in E$ para $i \in I$. Una familia $x = (x_i)$ es llamado débilmente p-sumante si $\langle x_i, a\rangle \in \mathfrak{l}_p$. La norma asociada es:

$$\mathbf{w}_p(x_i) = \sup\left\{\mathrm{l}_p\left(\langle x_i, a\rangle\right) / \|a\| \leq 1\right\} \tag{13}$$

La clase de todas la familias débilmente p-sumables es denotada por $\mathfrak{w}_p$

2.5. Ideal de operadores

Definición 2.15. (Ideal de un operador)
Sea $\mathfrak{L}(E, F)$ un espacio de operadores lineales y acotados. Un ideal de operador $\mathfrak{U}$ es una subclase de $\mathfrak{L}$ tal que:

$$\mathfrak{U}(E, F) = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{L}(E, F) \tag{14}$$

y que satisface lo siguiente:

I1. $I_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{U}$, donde $\mathcal{K}$ denota el espacio de Banach de dimensión 1.

I2. $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{U}(E, F) : S_1 + S_2 \in \mathfrak{U}(E, F)$.

I3. Si $\forall T \in \mathfrak{L}(E_0, E), S \in \mathfrak{U}(E, F), R \in \mathfrak{L}(F, F_0)$, entonces $RST \in \mathfrak{U}(E_0, F_0)$.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "S"] & F \arrow[d, "R"] \\
E_0 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "R \circ S \circ T"'] & F_0
\end{tikzcd}
$$

Definición 2.16. (Espacio nulo)
Sea $S \in \mathfrak{L}(E, F)$. El espacio nulo es denotado por $N(S)$ y se define:
$N(S) \subset E$ tal que $S(x) = 0$

Definición 2.17. (Rango)
Sea $S \in \mathfrak{L}(E, F)$. El rango de S es denotado por $M(S)$ y se define: $M(S) = S(E)$

Definición 2.18. (Operador finito)
Sea $S \in \mathfrak{L}(E, F)$. S es llamado un operador finito si $M(S)$ es de dimensión finita.
Además S es llamado un operador finito si y solo si

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in E'$ y $y_1, \ldots, y_n \in F$.
La clase de todo los operadores de rango finito es denotado por $\mathfrak{F}(E, F)$

Proposición 2.2. *[1] $\mathfrak{F}$ es un operador ideal*

Definición 2.19. (Operador Nuclear)
Sea $S \in \mathfrak{L}(E, F)$. S es llamado operador nuclear si

$$S = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \otimes y_i \tag{15}$$

donde $a_1, a_2, \ldots \in E'$ y $y_1, y_2, \ldots \in F$ tal que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|a_i\| \, \|y_i\| < \infty$$

La norma asociada al operador nuclear está dado por:

$$\mathbf{N}(S) = \text{ínf} \sum_{i=1}^{+\infty} \|a_i\| \, \|yi\| \tag{16}$$

La clase de todos los operadores nucleares es denotado por $\mathfrak{N}$

Proposición 2.3. *[1]* $[\mathfrak{N}, \mathbf{N}]$ *es un operador ideal normado*

Definición 2.20. (Norma de un operador nuclear finito)
Sea $S \in \mathfrak{F}(E, F)$. La mayor norma de un operador finito y nuclear esta dado por:

$$\mathbf{N}^{\circ}(T) = \text{ínf} \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \, \|y_i\| \tag{17}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones finitas.

Definición 2.21. (Operadores (r, p, q) nucleares)
Sea $0 \leq r \leq \infty, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ y $1 + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Un operador $S \in \mathfrak{L}(E, F)$ es llamado (r, p, q) nuclear si

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_i \otimes y_i \tag{18}$$

Donde $\sigma_i \in \mathfrak{l}_r, a_i \in \mathfrak{w}_{q'}(E')$ y $y_i \in \mathfrak{w}_{p'}(F')$. En el caso que $r = \infty$ tenemos que $\sigma_i \in c_0$.
La norma está dada por:

$$\mathbf{N}_{(r,p,k)}(S) = \text{ínf} \, \{\mathbf{l}_r(\sigma_i)\mathbf{w}_{q'}(a_i)\mathbf{w}_{p'}(yi)\} \tag{19}$$

Donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones finitas dada en (18). La clase de operadores (r, p, q)-nucleares es denotado por $\mathfrak{N}_{(r,p,q)}$

Definición 2.22. (Operadores Compactos)
Un operador $S \in \mathfrak{L}(E, F)$ es llamado compacto si una bola unitaria cerrada U_E tiene como imagen el subconjunto $S(U_E)$, el cual es relativamente compacto en la topología de la norma.
La clase de todos los operadores compactos es denotado por $\mathfrak{K}$

Proposición 2.4. *[1]* $\mathfrak{K}$ *es un operador ideal*

Teorema 2.5. $S \in \mathfrak{L}(E, F)$ *es (r,p,q)-nuclear si y solo si existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "S"] & F \arrow[d, "Y"] \\
\mathbf{l}_{q'} \arrow[u, "A"] \arrow[r, "S_0"'] & \mathbf{l}_p
\end{tikzcd}$$

tal que $S_0 \in \mathfrak{L}(\mathbf{l}_{q'}, \mathbf{l}_p)$ es un operador diagonal de la forma $S_0(\xi_i) = (\sigma_i \xi_i)$ con $(\sigma_i) \in \mathbf{l}_r$ Si $0 < r < \infty$ y $(\sigma_i) \in C_0)$ si $r = \infty$. Además $A \in \mathfrak{L}(E, \mathbf{l}_{q'})$ y $Y \in \mathfrak{L}(\mathbf{l}_p, F)$.
En este caso:

$$N_{(r,p,q)}(S) = \text{ínf}\,\{\|Y\|\mathbf{l}_r(\sigma_i)\|A\|\}$$

donde el infímo es tomado de todas las posibles factorizaciones

Definición 2.23. (Operador p-Compacto)
Sea $1 \leq p \leq \infty$. Un operador $S \in \mathfrak{L}(E, F)$ es llamado p-compacto si este pertence al ideal normado

$$[\mathfrak{K}_p, \mathbf{K}_p] = \left[\mathfrak{N}_{(\infty,p,p')}, \mathbf{N}_{(\infty,p,p')}\right] \tag{20}$$

La norma está dada por:

$$\mathbf{K}_p^0(S) = \mathbf{N}^0_{(\infty,p,p')}(S) \tag{21}$$

3. Materiales y Métodos

La investigación desarrollada en el presente proyecto es una investigación básica, centrándose en el aspecto descriptivo y demostrativo de cada uno de los entes matemáticos. El diseño de la investigación considera los siguientes pasos:

- Definir cada uno de los objetos matemáticos necesarios para la comprensión de la hipótesis
- Demostración del teorema y otros relacionados con la hipótesis
- Elaboración de un informe final

Los instrumentos de recopilación de datos serán:

- Fichas bibliográficas
- Fichas de contenido o investigación

4. Resultado y Discusión

Definición 4.1. Sea $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y$, para $S \in Y'$ entonces

$$\mathbf{w}_{p'}(y_j) = \sup_{\|S\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle S, y_j \rangle|^{p'} \right)^{1/p'}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1 \leq p \leq \infty$.

Definición 4.2. Para cualquier operador $S \in \mathfrak{F}(E, F)$ ponemos

$$N^{\circ}_{(r,p,q)}(S) = \inf \mathbf{l}_r(\sigma_i)\mathbf{w}_{q'}(a_i)\mathbf{w}_{p'}(y_i)$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones de:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i a_i \otimes y_i$$

con $\sigma_i \in \mathfrak{l}_r$, $a_i \in \mathfrak{w}_{q'}(E')$ y $y_i \in \mathfrak{w}_{p'}(F)$.

Proposición 4.1. *Si $S \in \mathfrak{L}_f(E, F)$ del cual definimos*

$$N_f, (\infty; p, q)(S) = \inf \|(\sigma_k)_{k=1}^{m}\|_r \left\|(x'_k)_{k=1}^{m}\right\|_{\mathbf{w},q'} \|(y_k)_{k=1}^{m}\|_{\mathbf{w},p'}$$

donde el infímo es tomado de todas las posibles representaciones finitas de:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k x'_k \otimes y_k$$

entonces se obtiene una s-norma con

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}, \text{ con } r = \infty$$

Observación 4.2. *Usaremos indistintamente*

$$N_{f,(\infty,p,q)} = N_{(\infty,p,q)}$$

Proposición 4.3. $N^{\circ}_{(r,p,q)}$ *es una s−norma sobre* $\mathfrak{F}$

Demostración. Usando el teorema 18.1.2 de [1] la prueba es trivial. □

Observación 4.4. *Para* $r = \infty$, $N^{\circ}_{(\infty,p,p')}$ *es una norma sobre* $\mathfrak{F}$, *además* $\forall S \in \mathfrak{F}(E, F)$, *tenemos:*

$$K_p^{\circ}(S) := N^{\circ}_{(\infty,p,p')}(S)$$

donde K_p° *es una norma sobre* $\mathfrak{R}_{(\infty,p,p')}$ *el cual es llamado ideal de operadores* $p-$*compacto.*

Teorema 4.5. *Si* $S : E \to L_p(\Omega, \mu)$ *es definido por:*

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k x'_k y_k \tag{22}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Entonces

$$N_{f,(\infty,p,q)}(S) = N_{(\infty,p,q)}(S) = \|S\|$$

Demostración. Considerando la proposición [4.1] tenemos que:

$$\|S\| \leq N_{(\infty,p,q)}(S) \leq N_{f,(\infty,p,q)}(S) \tag{23}$$

Además

$$\|S\|\|x\| \geq \left[\int_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^{m} \sigma_k x'_k(x) y_k(t) \right| du(t) \right]^{1/p} \tag{24}$$

Como $E = \ker x'_1 \oplus L_1 = \cdots = \ker x'_m \oplus L_m$, donde $L_i, i = \overline{1,m}$ es un subespacio unidimensional. Sólo consideramos el caso cuando

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} L_i \neq \{0\}.$$

Sea

$$M = \sup_{\|x\|_E} \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x'_k, x \rangle|^p \right)^{1/p} \tag{25}$$

es claro que $M < +\infty$.
Así existe $x \in E$ tal que

$$x'_k(x) = \frac{M}{2^{k/p}}$$

Por tanto en (25) tenemos que dado un $\epsilon > 0$,

$$\|x\| < (1 + \epsilon) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{M^p}{2^k} \right)^{1/p}$$

lo cual implica que

$$\|x\| < 1 + \epsilon, \forall \epsilon > 0$$

Por lo tanto $\|x\| \leq 1$, está relación en (24) da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|S\| &\geq \left[\int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{M}{2^{k/p}} y_k(t) \right|^p du(t) \right]^{1/p} \\ &\geq M \left[\int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{1}{2^k} y_k(t) \right| du(t) \right]^{1/p} \end{aligned}$$

de los extremos

$$\|S\| \geq M \left[\int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{1}{2^k} y_k(t) \right| du(t) \right]^{1/p} \tag{26}$$

Sea

$$z = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{y_k(t)}{2^{k/p}}$$

entonces para $1 \leq p \leq \infty$ tenemos que:

$$|\langle S, z \rangle| = \left| \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \left\langle S, \frac{y_k(t)}{2^{k/p}} \right\rangle \right| \leq \|S\| \|z\| \tag{27}$$

En adición sea

$$M = \underset{k=\{1,\dots,m\}-\{k_0\}}{\text{span}} \left\{ \frac{y_k}{2^{k/p}} \right\}$$

Por lo tanto, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach

$$\exists S / \|S\| = \frac{1}{d}, \langle S, x \rangle = 0, \forall x \in M \text{ y } \left\langle S, \frac{y_{k_0}}{2^{k_0/p}} \right\rangle = 1$$

donde

$$d = \inf_{x \in M} \left\| x - \frac{y_{k_0}}{2^{k_0/p}} \right\|$$

y además podemos escoger σ_{k_0} tal que

$$|\sigma_{k_0}| = \max_{k=\{1,\dots,n\}} |\sigma_k| = \mathbf{l}_\infty(\sigma_k)$$

Tomando todas estas relaciones en (27) obtenemos

$$\|z\| \geq |\sigma_{k_0}| d \tag{28}$$

Como

$$x = \sum_{k=1, k \neq k_0}^{m} \left(-\frac{y_k}{2^{k/p}} \right) \in M$$

Entonces para un $\epsilon > 0$ obtenemos

$$(1+\epsilon)d > \left\| \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k}{2^{k/p}} \right\|$$

Por lo tanto de la relación (28) tenemos que:

$$(1+\epsilon)\|z\| > \mathbf{l}_\infty(\sigma_k) \left\| \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k}{2^{k/p}} \right\| \tag{29}$$

Nosotros sabemos que:

$$\mathbf{w}_{p'}(y_k) = \sup_{a \in B_{\mathbf{l}_p^m}} \left\| \sum_{k \leq m} a_k y_k \right\|$$

y como

$$a = \left(\frac{1}{2^{k/p}} \right)_{k=1}^{m} \in B_{\mathbf{l}_p^m}$$

para $\tilde{\epsilon} > 0$ nosotros tenemos que:

$$(1+\tilde{\epsilon}) \left\| \sum_{k \leq m} \frac{1}{2^{k/p}} y_k \right\| > \mathbf{w}_{p'(y_k)}$$

De está última relación y (29) obtenemos

$$(1+\epsilon)(1+\tilde{\epsilon})\|z\| > \mathbf{l}_\infty(\sigma_k)\, \mathbf{w}_{p'}(y_k), \forall \epsilon > 0, \tilde{\epsilon} > 0 \tag{30}$$

Por lo tanto, de las relaciones (26) y (30) obtenemos

$$\begin{cases} \|S\| \geq \mathbf{l}_\infty(\sigma_k)\, \mathbf{w}_{p'}(y_k)\, M \\ \|S\| \geq N_{f,(\infty,p,q)}(S) \end{cases} \tag{31}$$

De (23) y (31) obtenemos el resultado requerido.
Si $p = +\infty$, entonces

$$\|S\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|S(x)\|_{L_\infty(\Omega,\mu)} \tag{32}$$

donde

$$\|S(x)\|_{L_\infty(\Omega,\mu)} = \inf_{A>0} \{\ A/\ \ |S\,(x(t))| \leq A,\ \text{ excepto para un conjunto de medida cero}\}$$

De (32) tenemos que:

$$\|S\|\|x\|_E \geq \|S(x)\|_{L_\infty(\Omega,\mu)} \tag{33}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe un $A > 0$ y $N \subset \Omega$ con $\mu(N) = 0$ tal que

$$|S\,(x(t))|\,(1+\epsilon) \leq (1+\epsilon)A < \|S(x)\|_{L_\infty(\Omega,\mu)} \tag{34}$$

De (33) y (34) tenemos que:

$$\|S\|\|x\|_E > (1+\epsilon)\,|S\,(x(t))|\,, \forall t \in (\Omega - N)$$

$$\|S\|\,\|x\|_E > (1+\epsilon)\left|\sum_{k=1}^{m} \sigma_k x_k'(x) y_k(t)\right|, \forall t \in (\Omega - N) \tag{35}$$

Como existe $x \in E$ con

$$\|x\|_E = 1 \text{ y } x_k'(x) = \frac{\widetilde{M}}{2^{k/p}}$$

donde

$$\widetilde{M} = \sup_{\|x\|_E=1}\ \sup_{k=\overline{1,m}} |\langle x_k', x\rangle|$$

Es claro que $\widetilde{M} < +\infty$ y luego en (35) tenemos que:

$$\|S\| > (1+\epsilon)M\left|\sum_{k=1}^{m} \sigma_k y_k(t)\right|, \forall t \in (\Omega - N) \tag{36}$$

Sea

$$z(t) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k y_k(t), \forall t \in (\Omega - N)$$

tenemos que:

$$|\langle S, z\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{m} \sigma_k\,\langle S, y_k\rangle\right| \leq \|S\|\|z\| \tag{37}$$

En adición, consideremos

$$M = \operatorname*{span}_{k=\{1,\ldots,m\}-\{k_0\}} \{y_k\}$$

Por lo tanto, como una consecuencia del teorema de Hahn-Banach

$$\exists S/\|S\| = \frac{1}{d}, \langle S, x\rangle = 0, \forall x \in M \text{ y } \langle S, y_{k_0}\rangle = 1$$

Donde

$$d = \inf_{x\in M} \|x - y_{k_0}\|$$

y además podemos escoger un σ_{k_0} tal que

$$|\sigma_{k_0}| = \max_{k=\{1,\ldots,m\}} \sigma_k = \mathbf{l}_\infty (\sigma_k)$$

Tomando todas las relaciones en (37) tenemos que:

$$\|z\| \geq |\sigma_{k_0}| \, d \tag{38}$$

Como

$$x = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq k_0}}^{m} (-y_k) \text{ y } x \in M$$

entonces para $\epsilon > 0$ obtenemos

$$(1+\epsilon)d > \left\| \sum_{k=1}^{m} y_k \right\|$$

Por tanto de la relación (38) tenemos que:

$$(1+\epsilon)\|z\| > \mathbf{l}_\infty (\sigma_k) \left\| \sum_{k=1}^{m} y_k \right\| \tag{39}$$

Nosotros sabemos que:

$$\mathbf{w}_{p'}(y_k) = \sup_{a\in B^m_{\mathbf{l}_\infty}} \left\| \sum_{k\leq m} a_k y_k \right\|$$

como

$$a = \{1\}_{k=1}^{h} \text{ y } a \in B^m_{\mathbf{l}_\infty}$$

Para $\tilde{\epsilon} > 0$ nosotros tenemos que:

$$(1+\tilde{\epsilon}) \left\| \sum_{k\leq m} y_k \right\| > \mathbf{w}_{p'}(y_k) \tag{40}$$

De las relaciones (39) y (40) tenemos que:

$$(1+\epsilon)(1+\tilde{\epsilon})\|z\| > \mathbf{l}_{\infty}(\sigma_k)\,\mathbf{w}_{p'}(y_k)\,, \forall\epsilon > 0, \tilde{\epsilon} > 0 \tag{41}$$

Por tanto de está última relación y la ecuación (36) tenemos

$$\begin{cases} \|S\| \geq M\mathbf{l}_{\infty}(\sigma_k)\,\mathbf{w}_{p'}(y_k) \\ \|S\| \geq N_{f,(\infty,\infty,1)}(S) \end{cases} \tag{42}$$

De (42) y (23) obtenemos lo requerido

$$N_{f,(\infty,p,q)}(S) = N_{(\infty,p,q)}(S) = \|S\|$$

□

Teorema 4.6. *Sea* (Ω,μ) *un espacio de medida y* $1 \leq p < \infty$.
Si $f_1,\ldots,f_n \in L_p(\Omega,\mu)$ *y* $\epsilon > 0$, *entonces existe* $S \in \mathfrak{F}(L_p(\Omega,\mu), L_p(\Omega,\mu))$ *tal que*
$K_p^{\circ}(S) \leq 1$ *y* $\|f_i - Sf_i\|_p \leq \epsilon$ *para* $i = \overline{1,n}$.

Demostración. Escogemos funciones simples $f_1^{\circ},\ldots,f_n^{\circ} \in L_p(\Omega,\mu)$ con

$$\|f_i - f_i^{\circ}\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Entonces podemos hallar subconjuntos disjuntos $\mu-$medibles $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$ tal que

$$f_i^{\circ} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} h_k,$$

donde $h_1,\ldots,h_m$ son las funciones caracteristicas correspondientes.
Sin perdida de generalidad podemos suponer que $0 < \mu(\Omega_k) < \infty$.
Sean las funciones $u_1,\ldots,u_m \in L_p(\Omega,\mu)$ y $v_1,\ldots,v_n \in L_{p'}(\Omega,\mu)$ dadas por:

$$u_k = \mu(\Omega_k)^{-1/p} h_k \text{ y } v_k = \mu(\Omega_k)^{-1/p'} h_k$$

entonces

$$S := \sum_{k=1}^{m} v_k \otimes u_k$$

es el operador requerido.
Se sigue de ahí que:

$$\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^p \leq 1$$

que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k \right\|_p^p = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^p \mu(\Omega_k)^{-1} \|h_k\|_p^p \leq 1$$

por tanto $\mathbf{w}_{p'}(u_k) \leq 1$.
Análogamente tenemos que $\mathbf{w}_p(v_k) \leq 1$ entonces $K_p^{\circ}(S) \leq 1$.
Por otro lado $Sh_k = h_k$ implica $Sf_i^{\circ} = f_i^{\circ}$ por lo cual

$$\|f_i - Sf_i\|_p \leq \|f_i - f_i^{\circ}\|_p + \|Sf_i^{\circ} - Sf_i\|_p < \epsilon$$

$\square$

Teorema 4.7. *Sea K un espacio de Hausdorff. Dados $f_1, \ldots, f_n \in C(K)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $S \in \mathfrak{F}(C(K), C(K))$, tal que $K_{\infty}^{0}(S) \leq 1$ y $\|f_i - Sf_i\| \leq \epsilon$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Cubrimos K por subconjuntos abiertos $G_1, \ldots, G_n$ tal que

$$|f_i(s) - f_i(t)| < \epsilon; \text{ para } s, t \in G_k$$

Entonces existen $h_1, \ldots, h_m \in C(K)$ satisfaciendo las siguientes propiedades(partición de la unidad).

$$h_i(t) \geq 0, \forall t \in K$$
$$h_i(t) = 0, \forall t \notin G_k$$
$$\sum_{i=1}^{n} h_i(t) = 1, \forall t \in K$$

Además fijamos $t_1 \in G_1, \ldots, t_n \in G_n$ y denotando la correspondiente medida de Dirac por $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Entonces

$$S = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \otimes h_k$$

es el requerido operador y claramente $\mathbf{w}_{\infty}(\delta_k) = 1$.
Además siguese de $|\lambda_k| \leq 1$ que:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k \right\| \leq 1$$

Por lo tanto $\mathbf{w}_1(h_k) \leq 1$.
Así nosotros tenemos que:

$$K_{\infty}^{\circ}(S) \leq \mathbf{l}_{\infty}(1)\mathbf{w}_1(h_k)\mathbf{w}_{\infty}(\delta_k) \leq 1$$

$\square$

Teorema 4.8. *Si* $S \in \mathfrak{F}(E, L_p(\Omega,\mu))$, *entonces* $K_p^\circ(S) = \|S\|$

Demostración. Para $1 \leq p < \infty$ tomamos una representación finita del operador $S \in \mathfrak{F}(E, L_p(\Omega,\mu))$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i a_i \otimes y_i$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \leq \|S\|$$

Por el teorema (4.5) y el lema dado en [1], existe $L \in \mathfrak{F}(L_p(\Omega,\mu), L_p(\Omega,\mu))$ con

$$K_p^\circ(L) \leq 1 \text{ y } \|f_i - Lf_i\|_p \leq \frac{\epsilon}{n}, \text{ para } i = \overline{1,n}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} K_p^\circ(S) &\leq K_p^\circ(LS) + K_p^\circ(S - LS) \\ &\leq K_p^\circ(L)\|S\| + K_p^\circ\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i a_i \otimes (y_i - Ly_i)\right) \\ &\leq \|S\| + \epsilon \end{aligned}$$

Esto demuestra que $K_p^\circ(S) \leq \|S\|, \forall 1 \leq p < \infty$ Para demostrar que $\|S\| \leq K_p^\circ(S)$, tenemos que:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i a_i(x) y_i$$

$$\begin{aligned} |\varphi, S(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \delta_i a_i(x)\varphi(y_i)\right| \\ &\leq \mathbf{l}_\infty(\delta_i) \sum_{i=1}^{n} |a_i(x)|\,|\varphi(y_i)| \\ &\leq \mathbf{l}_\infty(\delta_i) \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i(x)|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(y_i)|^{p'}\right)^{1/p'} \end{aligned}$$

De allí

$$\begin{aligned} \|S(x)\| &\leq \mathbf{l}_\infty(\delta_i) \sup_{\|\varphi\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(y_i)|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i(x)|^p\right)^{1/p} \\ \|S(x)\| &\leq \mathbf{l}_\infty(\delta_i)\mathbf{w}_{p'}(y_i) \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i(x)|^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\|S\| &\leq \mathbf{l}_\infty(\delta_i)\mathbf{w}_{p'}(y_i)\mathbf{w}_p(a_i)\\ \|S\| &\leq K_p^\circ(S)\end{aligned}$$

Para $p = \infty$, tenemos que cualquier espacio de Banach $L_\infty(\Omega, \mu)$ puede ser representado por $C(K)$, usando el teorema (4.7) e imitando lo hecho para el caso $1 \leq p < \infty$, tenemos lo pedido.
Por tanto

$$K_p^\circ(S) = \|S\|$$

$\square$

5. Conclusiones

Las conclusiones que derivan del presente trabajo de investigación son los siguientes:

- Siendo el operador $S \in \mathfrak{F}(E, L_p(\Omega, \mu))$, las normas del operador S dadas por $K_p^\circ(S)$ y $\|S\|$ son equivalentes, pues

$$\|S\| \leq K_p^\circ(S)$$

- En el espacio de operadores p-compacto, nuclear y de rango finito existen varias normas equivalentes.

6. Recomendaciones

Las recomendaciones que se sugieren luego de realizado el trabajo de investigación son las siguientes:

- La técnica usada para la demostración del problema dado es posible usarla para demostrar muchos de los resultados mostrados en [?] de manera sencilla a diferencia de la técnica usada por el mismo autor que para nuestro parecer es muy complicado.
- Está técnica de usada en la demostración es posible de extenderla a problemas de operadores multilineales.
- A nuestro parecer existen más normas de las estudiadas en el espacio de operadores p-compacto, nuclear y de rango finito por lo cual sugerimos la investigación de que otras normas de este espacio.

Referencias

[1] A. PIETSCH:*Operator ideals*, NORTH-HOLLAND, New York - 1980

[2] John B. CONWAY:*A course in functional analysis*, Springer-Verlag, New York-1985

[3] N.I. Akhiezer & I.M. Glazman:*Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc. segunda edición, New York - 1993

[4] M.S. Birman & M.Z. Solomiak:*Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, D. Reidel Publishing Company. Holland-1987

Resumen

La teoría de operadores nucleares fue creada en 1936 cuando E. J. Murray y J. Von Neumann investigaban el problema de "¿Qué operadores en Espacios de Hilbert tienen una traza bien definida?". Ellos encontraron y clasificaron en un ideal de operadores. A inicios de la década de los cincuenta encontramos que A. Gothendieck y A. F. Ruston independientemente extendieron este concepto a operadores en espacios de Banach.

Es así que nosotros en el presente trabajo nos proponemos demostrar la equivalencia de normas de operadores en el espacio p-compacto que a su vez es un subespacio del espacio operadores (r, p, q)-nucleares. Este hecho es propuesto en [1] como el lema (19.3.6).

Para demostrar la equivalencia consideramos el hecho que $\|S\|$ es la norma de un operador en espacios (r, p, q)-nucleares que a su vez es un subespacio del espacio de Banach y $\mathbf{K}_p^\circ$ que es la norma de un operador en el espacio de operadores p compactos y de rango finito que a su vez es un subespacio de los espacios (r, p, q)-nucleares.

Palabras Clave: Operadores (r, p, q) nucleares, operadores finitos, operadores compactos, norma de operadores, ideal de operadores.