



Universidad Nacional “Santiago Antúnez de Mayolo”

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA

INFORME DE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

**EXISTENCIA Y ANÁLISIS DE SOLUCIONES
DE ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS LINEALES DIFUSAS DE
PRIMER ORDEN**

Responsable:

Miguel Yglesias Yauregui

Corresponsable:

Dik Dani Lujerio Garcia

Huaraz - Ancash

Diciembre del 2017

Resumen

En el presente trabajo de investigación, analizamos la existencia de soluciones de los problemas de valor inicial Fuzzy (PVIF) asociados a ecuaciones diferenciales $x'(t) = -\lambda x(t) + \phi(t)$ y $x'(t) + \lambda x(t) = \phi(t)$ definidas en el espacio E^1 de subconjuntos difusos de \mathbb{R} . También, se deduce algunas propiedades interesantes del diámetro y del punto medio de la solución, la cual se compara con las soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales clásicas.

Palabras-clave

Conjuntos difusos, Sistemas dinámicos difusos, Sistemas lineales, Ecuaciones diferenciales difusas, Problemas de Valor inicial difuso.

Abstract

In the present research work , we analyse the existence of solutions of Initial Value Problems Fuzzy (PVIF) associated with differential equations $x'(t) = -\lambda x(t) + \phi(t)$ and $x'(t) + \lambda x(t) = \phi(t)$ defined in space E^1 of diffuse subsets of \mathbb{R} . Also, it follows some interesting properties of diameter and the midpoint of the solution, which is compare with the solutions of the corresponding classical differential equations.

Keywords

Fuzzy sets, Diffuse dynamic systems, Linear systems, Diffuse differential equations, Problems of diffuse initial value.

Introducción

En el contexto clásico, se $I = [0, t] \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante, $\phi \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua e $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ entonces las ecuaciones $x'(t) = -\lambda x(t) + \phi(t)$ y $x'(t) + \lambda x(t) = \phi(t)$ son equivalentes independientemente del signo de la constante λ . La solución para estas ecuaciones con la condición inicial $x(0) = x_0$, $x_0 \in I$ está dada por:

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t \phi(s) e^{\lambda(s-t)} ds, t \in I.$$

En el contexto difuso las ecuaciones correspondientes no son equivalentes, ni siquiera en el caso particular donde $\phi(t) = \chi_{\{0\}}$ para $t \in I$ y $\chi_{\{0\}}$ la función característica de $\{0\}$. Esto ocurre porque si $u, v \in E^1$ son tales que $u + v = \chi_{\{0\}}$, entonces tenemos que u, v son números reales y $v = -u$. Mientras que, $u + (-u) = \chi_{\{0\}}$ no necesariamente es verdad para $u \in E^1$. Por ejemplo, si $u = \chi_{[0,2]}$, entonces $\chi_{[0,2]} - \chi_{[0,2]} = \chi_{[-2,2]}$.

La ecuación $x'(t) + \lambda x(t) = \chi_{\{0\}}$, tratada en términos de nivel, implica que la solución es determinística y $x'(t) = -\lambda x(t)$, mas lo contrario no siempre es cierto en general, es decir, la ecuación diferencial lineal difusa $x'(t) = -\lambda x(t)$ no es equivalente a $x'(t) + \lambda x(t) = \chi_{\{0\}}$, y por lo tanto la solución no puede ser la misma.

Nuestro objetivo es obtener una expresión para la solución de los problemas de valor inicial y luego comparar tales soluciones asociados a las ecuaciones difusas

$$x'(t) = -\lambda x(t) + \phi(t) \tag{0-1}$$

$$x'(t) + \lambda x(t) = \phi(t) \tag{0-2}$$

donde, $t \in I = [0, T]$, $T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi \in C(I, E^1)$, $x(t) \in E^1$ y la diferenciabilidad es entendida en el sentido de Hukuhara. Vale mencionar que para el proceso de defuzificación usamos el punto medio y sus diámetros de sus soluciones. Puntos medios para conjuntos difusos tienen muchas aplicaciones en inteligencia artificial.

La existencia y unicidad de la solución del problema (0-1) viene del Teorema de Picard-Lipschitz, Ver [8], pues la función $f : I \times E^1 \rightarrow E^1$ dada por $f(t, x) = -\lambda x + \phi(t)$ es Lipschitziana en x y continua en (t, x) para ϕ continuo.

La existencia de solución para el problema (0-2) está sujeta a la verificación de algunas condiciones de compatibilidad que involucran a la constante λ , la función ϕ y el valor inicial x_0 . Observe que para estudiar la existencia y unicidad de soluciones para (0-2) usando el Teorema Picard-Lipschitz se tendría que escribir la ecuación en su forma equivalente

$$x'(t) = \phi(t) \bar{H} \lambda x(t). \quad (0-3)$$

De esta manera, si $f^*(t, x) := \phi(t) \bar{H} \lambda x$ en (0-3), entonces, f^* debería ser la Función Lipschitziana en el teorema de Picard-Lipschitz dado en [8] o [5]. Sin embargo, la diferencia en el caso de Hukuhara: $\phi(t) \bar{H} \lambda x(t)$, puede no existir, a menos que podamos garantizar que:

1. $diam([\phi(t)]^a) \geq \lambda diam([x(t)]^a), \forall t \in I, a \in [0, 1]$;
2. se cumpla las hipótesis del “Teorema de Representación de Negoita y Ralescu”;

a fin de lograr de que un conjunto de nivel de diferencia de Hukuhara defina un número real difuso, como se muestra en los resultados.

Hipótesis

Imponiendo las condiciones de compatibilidad a λ , x_0 y a la función ϕ , existe solución para los Problemas de Valor Inicial difusos

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda x(t) = \phi(t), t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (0-4)$$

y

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t) + \phi(t), t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (0-5)$$

Índice general

Resumen	II
Abstract	III
Introducción	IV
Hipótesis	VI
1. Bases Teóricas	1
1.1. Conjuntos Difusos	2
1.2. Sobre la Métrica E^n	7
1.3. Teorema de Representación y el Principio de Extensión de Zadeh	10
1.4. Integral y Diferencial de Multifunciones	15
1.5. Integrabilidad y Diferenciabilidad de Funciones difusas	20
1.5.1. Integrabilidad	21
1.5.2. Diferenciabilidad para Funciones Difusas	22
1.6. Ecuación Diferencial difusa	24
Materiales y Métodos	28
Resultados y Discusión	29
Conclusiones	46
Recomendaciones	48
Bibliografía	49

Índice de figuras

1.1. Función de pertenencia para números reales “ <i>próximos a 1</i> ”	3
1.2. O a -nivel de un número difuso.	3
1.3. Un conjunto difuso convexo con función de pertenencia no cóncava. . .	5
1.4. Número difuso triangular.	6
1.5. Número difuso trapezoidal	6
1.6. Extensión de Zadeh.	13
1.7. Puntos finales del conjunto a -nivel de la solución del problema (1-27). .	36
1.8. Punto medio y diámetro de los conjuntos de nivel de la solución de (1-27). .	37
1.9. Puntos finales del conjunto a -nivel de la solución para el problema (1-39). .	45
1.10. Punto medio y diámetro de los conjuntos de nivel de la solución para (1-39).	45

Capítulo 1

Bases Teóricas

Este capítulo contiene algunas definiciones y propiedades básicas de la teoría de conjuntos difusos.

La noción de conjuntos difusos, introducida por Zadeh en 1965, extiende la noción de conjunto clásico en el sentido de que la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto deja de ser una relación dicotómica, esto es, dado un subconjunto A de un conjunto universal X , un elemento $x \in X$, aparte de las dos posibilidades, a saber, $x \in A$ o $x \notin A$ puede tener otras. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pequeños, esto es, $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es pequeño}\}$, no admite una respuesta objetiva.

La idea de Zadeh fue debilitar la pertenencia de un elemento en un conjunto, creando la noción de “grado de pertenencia”. Así, dado un elemento puede pertenecer parcialmente a un conjunto dado. Por ejemplo, considerando la función $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, dada por $u(n) = \frac{1}{n}$ definiendo el grado de pertenencia a \mathbb{F} , se tiene que $5 \in \mathbb{F}$ con grado de pertenencia $0,2$ y $20 \in \mathbb{F}$ con grado de pertenencia $0,05$, o $n \in \mathbb{F}$ con grado de pertenencia $\frac{1}{n}$. Se observa que la palabra pequeño para $x \in \mathbb{N}$ es subjetivo en el sentido que se podría tener una infinidad de funciones $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ definiendo el grado de pertenencia de cada elemento de \mathbb{F} .

Ejemplos como el que fue presentado en el párrafo anterior hacen parte de las innumerables situaciones en las cuales el significado de pertenencia no está bien definido y por tanto no sabemos decir si un determinado elemento pertenece o no a un conjunto dado. Por lo tanto, podemos hablar que el grado de pertenencia dependerá del tipo de problema del cual se este haciendo referencia. Para modelar matemáticamente un conjunto con estas características, Zadeh introduce el concepto de conjunto difuso.

1.1. Conjuntos Difusos

Definición 1.1 Sea X un conjunto (clásico); un subconjunto difuso \mathbb{F} de X es caracterizado por una función

$$u_{\mathbb{F}} : X \rightarrow [0, 1],$$

prefijada, llamada función de pertenencia del subconjunto difuso \mathbb{F} . El índice de \mathbb{F} en la función de pertenencia es usado en analogía a la función característica de subconjuntos clásicos.

El valor $u_{\mathbb{F}}(x) \in [0, 1]$ indica el grado con que el elemento x de X está en el conjunto difuso \mathbb{F} ; $u_{\mathbb{F}}(x) = 0$ y $u_{\mathbb{F}}(x) = 1$ indican, respectivamente, la no pertenencia y la pertenencia completa de x al conjunto difuso \mathbb{F} .

Un subconjunto difuso \mathbb{F} es compuesto de elementos x de un conjunto clásico X , provistos de un valor de pertenencia a \mathbb{F} , dado por $u_{\mathbb{F}}(x)$. Se puede decir que un subconjunto difuso \mathbb{F} de X es dado por un conjunto (clásico) de pares ordenados:

$$\mathbb{F} = \{(x, u_{\mathbb{F}}(x)), \text{ con } x \in X\}.$$

Observación: Para efecto de simplificación de notación el conjunto difuso \mathbb{F} será referenciado apenas a través de la función $u_{\mathbb{F}}$ que lo caracteriza. De aquí en adelante u denota a $u_{\mathbb{F}}$.

Ejemplo 1.2 La función de pertenencia del conjunto difuso de números reales “**próxim**os de 1” puede ser definido como

$$u(t) = e^{-\beta(t-1)^2}$$

donde $\beta, t \in \mathbb{R}$, ver Figura 1.1.

Ejemplo 1.3 Obtener los puntos de \mathbb{R}^2 próximos a la recta $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$.

Se define el conjunto difuso cuya relación de pertenencia u es dada por $u(p) = \frac{1}{1 + d(p, l)}$, donde l es la recta $y = mx + b$ y $d(p, l)$ es la distancia del punto p a la recta. Entonces $u(p) = 1$, si $p = (x, y)$ satisface la ecuación $y = mx + b$, esto es $p \in l$ y conforme el punto p se encuentra mas lejos de la recta, la función de pertenencia $u(p)$ se aproxima a cero.

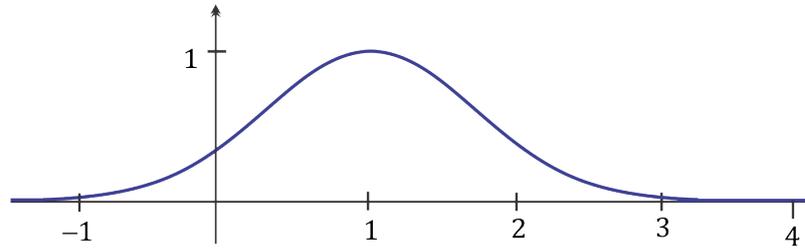


Figura 1.1: Función de pertenencia para números reales “*próximo a 1*”

El concepto de nivel de un conjunto difuso es bastante explorado por permitir la utilización de los conceptos y/o estructuras matemáticas clásicas en el contexto difuso.

Definición 1.4 Sea $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ un conjunto difuso y $a \in [0, 1]$. El conjunto a -nivel de u es el conjunto

$$[u]^a = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \geq a\}, \quad a > 0.$$

El soporte $[u]^0$ de u es la cerradura en la topología de X de la unión de todos los a -niveles, esto es,

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{a>0} [u]^a}.$$

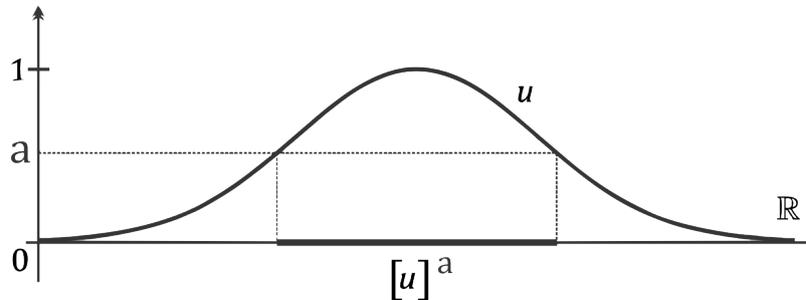


Figura 1.2: O a -nivel de un número difuso.

El conjunto formado por todos los subconjuntos difusos de X será denotado por $\mathcal{F}(X)$.

A continuación, presentamos las principales propiedades de niveles de un conjunto difuso. A pesar de no definir la suma de $u, v \in \mathcal{F}(X)$ en esta sección, debe estar claro que $u + v \in \mathcal{F}(X)$ y $\lambda u \in \mathcal{F}(X)$, vea Definición 1.30.

Proposición 1.5 Sean $u, v \in \mathcal{F}$, entonces

1. $u = v$ si, y solo si, $[u]^a = [v]^a, \forall a \in [0, 1]$;
2. $[u + v]^a = [u]^a + [v]^a$ y $[\lambda u]^a = \lambda[u]^a, \forall a \in [0, 1]$;
3. $[u]^0 \supset [u]^a \supset [u]^b, \forall 0 \leq a \leq b$;
4. Si u es semicontinua superior y $a_n \uparrow a \Rightarrow [u]^a = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{a_n}$; (o sea, la aplicación nivel es continua a la izquierda)
5. $[u]^a \neq \emptyset, \forall a \in [0, 1]$, es equivalente a $u(x) = 1$ para algún $x \in X$;

Demostración. Puede consultar [5, 7, 10]. □

Las operaciones de unión, intersección y complemento entre conjuntos difusos pueden ser definidas en términos de sus grados de pertenencia. Sean u, v subconjuntos difusos de X , entonces la unión $u \vee v$, la intersección $u \wedge v$ y el complemento u^c son subconjuntos difusos en $\mathcal{F}(X)$, cuyas funciones de pertenencia son definidas respectivamente por,

$$\begin{aligned} (u \vee v)(x) &= u(x) \vee v(x) := \text{máx}\{u(x), v(x)\}, \\ (u \wedge v)(x) &= u(x) \wedge v(x) := \text{mín}\{u(x), v(x)\} \\ u^c(x) &= 1 - u(x). \end{aligned}$$

Un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(X)$ es llamado *conjunto difuso normal*, si existe por lo menos un punto $x_0 \in X$ tal que $u(x_0) = 1$, y será llamado *conjunto difuso convexo* si el conjunto $[u]^a$ es convexo para todo $a \in [0, 1]$.

Proposición 1.6 *Sea X un espacio vectorial. Un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}$ es convexo si, y solamente si,*

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\},$$

para todo $x, y \in [u]^0$ y todo $\lambda \in [0, 1]$.

Demostración. La prueba se encuentra [10]. □

Ejemplo 1.7 *Si $u : X \rightarrow [0, 1]$ es una función cóncava, es decir, si satisface la relación $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1] : u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y)$, entonces u satisface*

la hipótesis de la Proposición 1.6, esto es

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y) \geq \min\{u(x), u(y)\},$$

luego este es un conjunto difuso convexo, mas la recíproca no siempre es válida como demuestra la figura 1.3. De hecho, en esta figura los α -nivel de u son todos intervalos cerrados, luego conjuntos convexos y así u es un conjunto difuso convexo, no entanto este no satisface la relación $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y)$, por lo tanto no es una función cóncava.

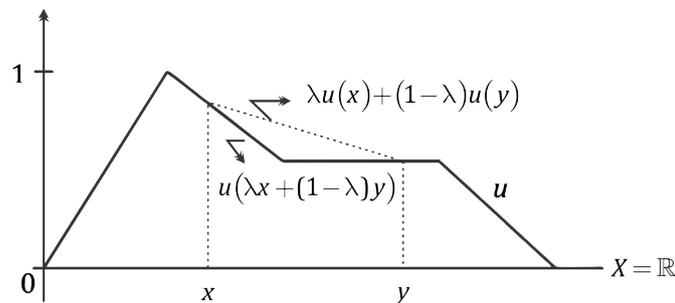


Figura 1.3: Un conjunto difuso convexo con función de pertenencia no cóncava.

Definición 1.8 Un número difuso u es un conjunto difuso de la recta real que es normal, difuso convexo y posee función de pertenencia continua de soporte acotado. La familia de números difusos se denota por E^1 .

Los números difusos no triviales más comunes son los *triangulares* y los *trapezoidales*.

Definición 1.9 (Número difuso triangular) Un conjunto difuso u es llamado número difuso triangular con pico (o centro) “ c ”, largura izquierda $m > 0$ y largura derecha $n > 0$ si su función de pertenencia es de la siguiente forma

$$u(t) = \begin{cases} 1 - (c - t)/m, & \text{si } c - m \leq t \leq c \\ 1 - (t - c)/n, & \text{si } c \leq t \leq c + n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y usamos la notación $u = (c; m, n)$. Luego, los α -niveles son dados por $[u]^\alpha = [c - (1 - \alpha)m, c + (1 - \alpha)n]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

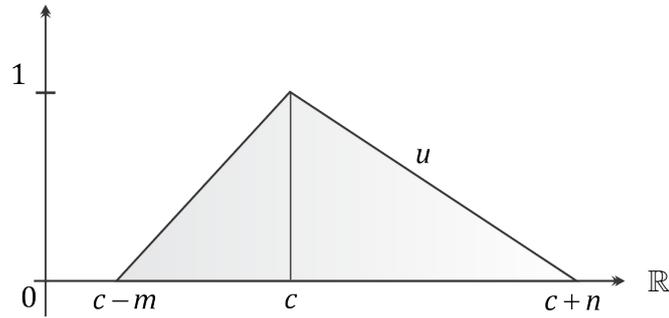


Figura 1.4: Número difuso triangular.

Un número difuso triangular con centro “ c ” puede ser visto como una cantidad difusa “aproximadamente igual a c ”.

Ejemplo 1.10 (*Número difuso trapezoidal*) Un conjunto difuso u es llamado número difuso trapezoidal, con intervalo de tolerancia $[c, d]$, largura izquierda m y largura derecha n si su función de pertenencia tiene la siguiente forma

$$u(t) = \begin{cases} 1 - (c - t)/m, & \text{si } c - m \leq t \leq c \\ 1 & , \text{ si } c \leq t \leq d \\ 1 - (t - d)/n, & \text{si } c \leq t \leq c + n \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

La notación $u = (c, d, m, n)$.

Utilizando la definición, se tiene que $[u]^a = [c - (1 - a)m, d + (1 - a)n]$, $\forall a \in [0, 1]$.

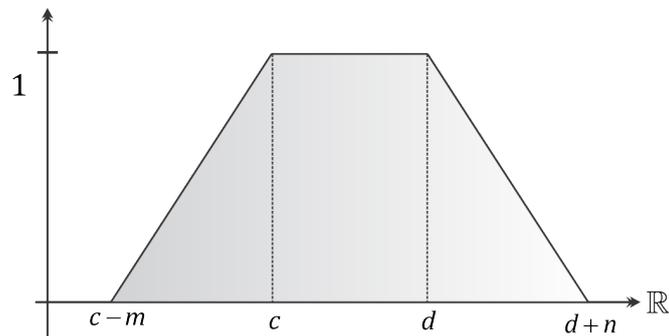


Figura 1.5: Número difuso trapezoidal .

Denote por \mathcal{K}_C^n la familia de los compactos convexos no vacíos de \mathbb{R}^n . La extensión apropiada al contexto “difuso” de \mathcal{K}_C^n es la familia E^n .

Definición 1.11 E^n es la familia de los subconjuntos “difusos” $u : \mathcal{R}^n \rightarrow [0, 1]$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. u es normal;
2. u es difuso convexo;
3. u es semicontinuo superior, es decir, para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta(y_0, \epsilon) > 0$ tal que $u(y) < u(y_0) + \epsilon$ siempre que $\|y - y_0\| < \delta$, $y \in \mathbb{R}^n$,
4. $[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}}$ es compacto.

De la Definición 1.11 sigue que el conjunto a -nivel $[u]^a \in \mathcal{K}_C(\mathbb{R}^n)$, para todo $0 \leq a \leq 1$.

1.2. Sobre la Métrica E^n

Existen muchas métricas sobre el espacio de números difusos E^n , y la mayoría de estas son una extensión de la métrica de Hausdorff.

Sea x un punto en \mathbb{R}^n y A un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . La distancia $d(x, A)$ de x a A es definida por

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n . Así, se tiene que $d(x, A) = d(x, \bar{A}) \geq 0$ y $d(x, A) = 0$ si, y solamente si $x \in \bar{A}$, donde \bar{A} es la cerradura de $A \subset \mathbb{R}^n$.

Ahora, sean A y B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n . Se define la separación de Hausdorff de B a partir de A por

$$d_H^*(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}.$$

Se tiene que $d_H^*(B, A) \geq 0$ con $d_H^*(B, A) = 0$ si, y solamente si $B \subset \bar{A}$. Así la desigualdad triangular es verdadera para todo subconjunto A, B y $C \in \mathbb{R}^n$. De la definición de $d_H^*(\cdot, \cdot)$, se tiene que en general

$$d_H^*(B, A) \neq d_H^*(A, B).$$

Definición 1.12 Se define la distancia de Hausdorff entre dos subconjuntos no vacíos A y B de \mathbb{R}^n por

$$d_H(B, A) = \max\{d_H^*(B, A), d_H^*(A, B)\}.$$

De la Definición (1.12) se tiene que:

- a) $d_H(A, B) \geq 0$ con $d_H(A, B) = 0$ si, y solamente si $\overline{A} = \overline{B}$;
- b) $d_H(A, B) = d_H(B, A)$;
- c) $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$,

para cualesquiera subconjuntos no vacíos A, B y C de \mathbb{R}^n .

Considere los siguientes espacios:

- i) \mathcal{C}^n consiste de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de \mathbb{R}^n ;
- ii) \mathcal{K}^n consiste de todos os subconjuntos compactos no vacíos de \mathbb{R}^n .

Observación 1.13 *Para subconjuntos no vacíos y cerrados de \mathbb{R}^n la distancia de Hausdorff en la Definición 1.12 es una métrica, conocida como la métrica de Hausdorff.*

De la observación 1.13 se tiene que (\mathcal{C}^n, d_H) es un espacio métrico.

Proposición 1.14 [5] *(\mathcal{C}^n, d_H) es un espacio métrico completo separable en el cual \mathcal{K}^n y \mathcal{K}_C^n son subconjuntos cerrados. Consecuentemente, (\mathcal{K}^n, d_H) y (\mathcal{K}_C^n, d_H) también son espacios métricos separables.*

Las siguientes propiedades de espacio métrico de Hausdorff serán importantes en el desenvolvimiento de los resultados y discusión.

Proposición 1.15 [9] *Sean $A, B, C, D \in \mathcal{K}^n$, entonces*

$$d_H(tA, tB) = td_H(A, B), \quad \forall t \geq 0, \quad (1-1)$$

$$d_H(A + C, B + D) \leq d_H(A, B) + d_H(C, D). \quad (1-2)$$

Proposición 1.16 [1] *Sean $A, B \in \mathcal{K}_C^n$ y $C \in \mathcal{K}^n$, entonces*

$$d_H(A + C, B + C) = d_H(A, B). \quad (1-3)$$

A continuación, se presenta una definición cuya aplicación tiene gran importancia en el cálculo de integrales con valores en conjuntos.

Definición 1.17 Si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $A \neq \emptyset$, se define la función soporte de A por

$$S_A(x) = \sup_{a \in A} \langle x, a \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las partes de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.18 [1] Sean $A, B \in \mathcal{K}_c$, entonces:

1. $S_{A+B} = S_A + S_B$.
2. $S_{\lambda A} = \lambda S_A$, $\lambda \geq 0$.
3. $A = B \Leftrightarrow S_A = S_B$.

Teorema 1.19 [1] Sean $A, B \in \mathcal{K}_C$, entonces:

$$d_H(A, B) = \text{máx}\{S_A(x) - S_B(x) : \|x\| = 1\}.$$

Definición 1.20 Sean $u, v \in E^n$, la distancia de Hausdorff difuso $d_\infty : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ entre u y v es definida por

$$d_\infty(u, v) = \sup\{d_H([u]^a, [v]^a) : a \in I\}.$$

Observación 1.21 De la Observación 1.13 y de la Definición 1.20 sigue que, d_∞ es una métrica sobre E^n .

De las propiedades de la métrica de Hausdorff, Proposición 1.15 y 1.16 se tiene que:

$$d_\infty(cu, cv) = |c| d_\infty(u, v), \quad (1-4)$$

$$d_\infty(u + w, v + w) = d_\infty(u, v), \quad (1-5)$$

$$d_\infty(u + w, v + r) \leq d_\infty(u, v) + d_\infty(w, r), \quad (1-6)$$

para todo $c > 0$, y todo $u, v, w, r \in E^n$.

Ejemplo 1.22 Considere el número difuso triangular $x = (0; 1, 1)$ y el conjunto difuso y definido por

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & , \text{ si } t \in [-1, 1] \\ 0 & , \text{ si } t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 d_\infty(x, y) &= \sup_{a \in [0,1]} d_H([x]^a, [y]^a) \\
 &= \sup_{a \in [0,1]} d_H\left([- (1-a), (1-a)], [-\sqrt{1-a}, \sqrt{1-a}]\right) \\
 &= \sup_{a \in [0,1]} |\sqrt{1-a} - (1-a)| \\
 &= 1/4.
 \end{aligned}$$

Definición 1.23 (d_∞ -convergencia). Se dice que x_n d_∞ -converge para x , $x_n \xrightarrow{d_\infty} x$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty^+} d_\infty(x_n, x) = 0.$$

Teorema 1.24 [12] (E^n, d_∞) es un espacio métrico completo.

1.3. Teorema de Representación y el Principio de Extensión de Zadeh

A continuación se enuncia el Teorema de Representación de Negoita-Ralescu, el cual es muy importante porque es a través de este que se puede relacionar la teoría clásica con la teoría difusa.

Teorema 1.25 (*Teorema de Representación de Negoita y Ralescu*)

Si $\{A^a / 0 \leq a \leq 1\}$ es una familia de conjuntos compactos convexos y no vacíos de \mathbb{R}^n tal que

1. $\overline{\bigcup_{0 < a \leq 1} A^a} \subset A^0$;
2. $A^{a_2} \subset A^{a_1}$ para $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1$;
3. $A^a = \bigcap_{k \geq 1} A^{a_k}$ para cualquier secuencia no decreciente convergiendo para $a \in [0, 1]$.
O, de forma equivalente, $d_H(A^{a_k}, A^a) \rightarrow 0$ cuando $a_k \uparrow a$.

Entonces existe un $u \in E^n$ tal que

$$[u]^a = A^a \text{ para todo } 0 < a \leq 1$$

y

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0 < a \leq 1} A^a} \subset A^0.$$

Demostración. Para ver la demostración se puede consultar [5]. \square

Observación: Si $u \in E^n$, entonces sus a -niveles satisfacen las condiciones 1,2 y 3 del Teorema 1.25.

Ejemplo 1.26 En \mathbb{R}^n se define la suma de Minkowski por

$$M + N := \{m + n/m \in M \text{ y } n \in N\}$$

para todo $M, N \subset \mathbb{R}^n$.

Dados $u, v \in E^n$ la familia $\{[u]^a + [v]^a\}_{a \in [0,1]}$, donde $[u]^a + [v]^a$ es la suma de Minkowski, satisface las condiciones del Teorema 1.25.

De hecho, las propiedades 1 y 2 siguen de la definición de suma de Minkowski, Proposición 1.5 y el cierre de $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n$ sobre la adición y multiplicación por un escalar de conjuntos. Vea que, si $u, v \in E^n$, entonces las familias $\{[u]^a\}_{a \in [0,1]}$ y $\{[v]^a\}_{a \in [0,1]}$ pertenecen a $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n$. Ahora sea $\{a_k\}$ una secuencia no decreciente en $[0, 1]$ con $a_k \uparrow a$ en $[0, 1]$. Entonces, por la propiedad 3 para las familias $\{[u]^a\}_{a \in [0,1]}$ y $\{[v]^a\}_{a \in [0,1]}$ tenemos que

$$d_H([u]^{a_k}, [u]^a) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad d_H([v]^{a_k}, [v]^a) \rightarrow 0 \quad (1-7)$$

para $k \rightarrow \infty$ y cuando $a_k \uparrow a$ pues $u, v \in E^n$.

De la Proposición 1.15,

$$d_H([u]^{a_k} + [v]^{a_k}, [u]^a + [v]^a) \leq d_H([u]^{a_k}, [u]^a) + d_H([v]^{a_k}, [v]^a).$$

De (1-7), tenemos que el lado derecho de la expresión encima converge para 0 cuando $k \rightarrow \infty$, así, la familia $\{[u]^a + [v]^a\}_{a \in [0,1]}$ satisface todas las hipótesis del Teorema 1.25. Por lo tanto, existe un único conjunto difuso $w \in E^n$ tal que $[w]^a = [u]^a + [v]^a$. Así, dado dos conjuntos difusos $u, v \in E^n$ se puede definir la suma $u + v$ siendo el único conjunto difuso $w := u + v \in E^n$ y se tiene que $[w]^a = [u + v]^a = [u]^a + [v]^a$.

Por otro lado, de la misma forma que la suma, se puede definir el producto por un

escalar sobre E^n a través de los niveles de un conjunto difuso. Para esto, se define

$$\lambda M := \{\lambda m / m \in M\},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $M \subset \mathbb{R}^n$, y se considera la familia $\{\lambda[u]^a\}_{a \in [0,1]}$ que también satisface las condiciones del Teorema de Representación.

Como en el ejemplo anterior, algunas clases de conjuntos difusos de \mathbb{R}^n , como E^n y $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ con la propiedad adicional de semicontinuidad superior pueden ser dotadas de una suma entre conjuntos difusos usando el Teorema de Representación de Negoita y Ralescu.

Ahora si $u, v \in \mathcal{F}(X)$, entonces las operaciones aritméticas usuales entre funciones no son adecuadas sobre el espacio $\mathcal{F}(X)$ para obtener nuevamente un elemento de $\mathcal{F}(X)$. Por ejemplo, al sumar punto a punto como es usual entre funciones puede ocurrir que $(u + v)(x) = u(x) + v(x) \notin [0, 1]$, pues $u(x), v(x) \in [0, 1]$.

Pero, como definir la suma para el espacio $\mathcal{F}(X)$? Para definir la suma en el espacio $\mathcal{F}(X)$ se utiliza el llamado Principio de Extensión de Zadeh, ver [1]. El Principio de extensión de Zadeh para una función $f : X \rightarrow Y$ tiene por objetivo indicar como debe ser la imagen de un subconjunto difuso u de X por medio de f . Se espera que esta imagen sea un subconjunto difuso de Y .

Definición 1.27 (Principio de extensión de Zadeh) Sean X e Y conjuntos no vacíos y $f : X \rightarrow Y$, entonces se define el Principio de extensión de Zadeh como la aplicación

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

donde

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} u(x) & , \text{ si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & , \text{ si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

donde $f^{-1}(y) = \{x \in X / f(x) = y\}$.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La extensión de Zadeh \tilde{f} extiende la función f , identificando \mathbb{R}^n con

$$\{\chi_{\{x\}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n\},$$

pues $\tilde{f}(\chi_{\{x\}}) = \chi_{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, donde χ_A es la función característica del conjunto A .

Observación 1.28 Si f es biyectiva, entonces

$$(\tilde{f}(u))(y) = \sup_{\{x:f(x)=y\}} u(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(y)\}} u(x) = u(f^{-1}(y))$$

y se tiene el gráfico del conjunto difuso $\tilde{f}(u)$, representado en el eje vertical, Figura 1.6.

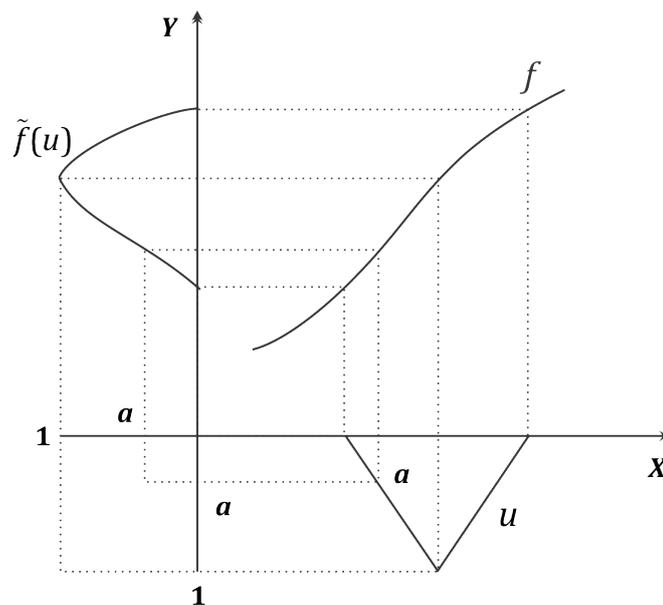


Figura 1.6: Extensión de Zadeh.

Ejemplo 1.29 Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$ y $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ un número difuso triangular simétrico con pertenencia

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-a|}{\delta} & , \text{ si } |x-a| \leq \delta, \\ 0 & , \text{ si } |x-a| > \delta. \end{cases}$$

Luego, sigue del Principio de extensión de Zadeh, que

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} u(\sqrt{y}) & , \text{ si } y \geq 0, \\ 0 & , \text{ si } y < 0, \end{cases}$$

esto es,

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|\sqrt{y}-a|}{\delta} & , \text{ si } |\sqrt{y}-a| \leq \delta \text{ e } y \geq 0, \\ 0 & , \text{ si } y < 0. \end{cases}$$

Sean los conjuntos X_1, X_2 e Y no vacíos. El Principio de extensión de Zadeh puede ser generalizado para la función $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$. Se Define el Principio de extensión de Zadeh como la aplicación

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

donde

$$\tilde{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} u_1(x_1) \wedge u_2(x_2) & , \text{ si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & , \text{ si } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Aquí $f^{-1}(y) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f(x_1, x_2) = y\}$.

Para definir la suma y multiplicación por un escalar sobre $\mathcal{F}(X)$ se usa el principio de extensión. Para tal caso es necesario que el espacio universo posea una estructura lineal.

Definición 1.30 *Sea X un espacio vectorial. Si $f : X \times X \rightarrow X$ es tal que $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, entonces esta induce una suma sobre $\mathcal{F}(X)$ tal que*

$$(u + v)(x) = \sup_{x_1 + x_2 = x} u_{x_1} \wedge v(x_2),$$

para todo $x \in X$. Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{F}(X)$ y $f : X \rightarrow X$ es dado por $f(x) = \lambda x$ entonces, utilizando el principio de extensión, se tiene el producto λu sobre $\mathcal{F}(X)$ dado por

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u\left(\frac{x}{\lambda}\right) & , \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x) & , \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$$

La justificación para la definición de las operaciones algebraicas en la forma como se estableció anteriormente, vía el Principio de Extensión, es dado en la Proposición 1.5.

Proposición 1.31 [9] *E^n es cerrado según las operaciones de adición y multiplicación por un escalar dadas en el ítem 2 de la Proposición 1.5.*

1.4. Integral y Diferencial de Multifunciones

En esta sección, se presenta un resumen de los principales resultados sobre integral y diferencial de multifunciones. Una multifunción en $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es una función $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $G(t) \neq \emptyset$, para todo $t \in T$.

Asociado al concepto de una multifunción G , está la noción de selección de G y selección medible de G .

Definición 1.32 Sea $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Se dice que $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una selección de G si $f(t) \in G(t)$, para todo $t \in T$. Aparte de esto, si f es medible, decimos que f es una selección medible de G .

Definición 1.33 Sean $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción y $S(G)$ el conjunto de todas las selecciones integrables de G , esto es,

$$S(G) = \{f : T \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es integrable y } f(t) \in G(t), \forall t \in T\}$$

Entonces la integral de Aumann de G en T es definida como

$$\int_T G = \left\{ \int_T f(t) dt : f \in S(G) \right\}.$$

Teorema 1.34 [1] Si $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\int_T G = \emptyset$ o $\int_T G$ es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n .

Definición 1.35 La multifunción $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es dicha medible si su gráfico $\{(t, x) : x \in G(t)\}$ es un conjunto medible, esto es:

$$\{(t, x) : x \in G(t)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

donde \mathcal{A} denota la σ -álgebra de los subconjuntos de \mathbb{R} Lebesgue medibles y \mathcal{B} denota los subconjuntos Borel medibles de \mathbb{R}^n .

Definición 1.36 La multifunción $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es dicha integrablemente acotada si existe una función integrable $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|x\| \leq g(t)$, para todo $x \in G(t)$.

Teorema 1.37 [1] Si $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es medible e integrablemente acotada, entonces

$$\int_T G \neq \emptyset.$$

Teorema 1.38 [1] Sea $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, con $G(t)$ cerrado para todo $t \in T$. Si G es medible e integrablemente acotada, entonces $\int_T G \neq \emptyset$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Corolario 1.39 [1] Sea $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, con $G(t)$ cerrado para todo $t \in T$. Si G es integrablemente acotada, entonces

$$\int_T G = [c, d]$$

para $c, d \in \mathbb{R}$ con $c \leq d$.

A continuación se enuncia un resultado que muestra la relación existente entre la integral de Aumann y la integral de Lebesgue para multifunciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n según la función soporte. Este resultado es importante en el cálculo de la integral de Aumann de algunas funciones.

Teorema 1.40 [1] Si $G : T \rightarrow \mathcal{K}^n$ es medible e integrablemente acotada, entonces

$$S_{\int_T G}(x) = \int_T S_{G(t)}(x) dt.$$

Ejemplo 1.41 Sean $T = [0, 1]$ y $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, con $G(t) = B[0, t]$, donde $B[0, t]$ es la bola de centro en el origen de radio t en \mathbb{R}^n , entonces

$$\int_T G = B\left[0, \frac{1}{2}\right].$$

De hecho, note que $\forall a \in G(t)$ puede ser escrito como $a = t \frac{x}{\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}$. Así, se tiene que

$$S_{G(t)}(x) = \sup_{a \in G(t)} \langle x, a \rangle = \begin{cases} \langle x, t \frac{x}{\|x\|} \rangle & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

esto es

$$S_{G(t)}(x) = t\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$\int_T S_G(x) dt = \frac{\|x\|}{2} = S_{B[0, \frac{1}{2}]}(x).$$

Por los Teoremas 1.18 y 1.40, se tiene

$$\int_T G = B\left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Ejemplo 1.42 Sean $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, integrable y $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ un conjunto convexo con $f(x) \geq 0, \forall t \in T$. Entonces la multifunción $G(t) = f(t)A$ es integrablemente acotada y,

$$\int_T G = \left[\int_T f(t) dt \right] A.$$

Por el Teorema 1.18 ítem 2, se tiene

$$S_{G(t)}(x) = f(t)S_A \implies \int_T S_{G(t)} dt = \left[\int_T f(t) dt \right] S_A = S_{\left(\int_T f(t) dt \right) A}(x).$$

Por los Teoremas 1.18 y 1.40, se concluye que

$$\int_T G = \left[\int_T f(t) dt \right] A.$$

A continuación se tiene los conceptos de H -diferencia y diferenciabilidad de multifunciones segun Hukuhara, [6].

Si $A, B \in \mathcal{K}_C^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces las operaciones de adición y multiplicación por un escalar son definidas como

$$A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\} \quad \lambda A = \{\lambda a/a \in A\}.$$

Observación: En general,

$$A + (-1)A \neq \{0\}.$$

Por ejemplo, para $A = [0, 2]$, se tiene

$$A + (-1)A = [-2, 2] \neq \{0\}.$$

Así, la sustracción entre números difusos no constituye una operación natural de sustracción de números difusos. En vista de esta observación se define la **diferencia de Hukuhara** $A \overline{H} B$ entre conjuntos $A, B \in \mathcal{K}_C^n$.

Definición 1.43 Dados $A, B \in \mathcal{K}_C^n$, si existe $C \in \mathcal{K}_C^n$ tal que $A = B + C$, entonces C es la diferencia de Hukuhara, denotada por $A \overline{H} B$.

Ejemplo 1.44 Sea $A = [-1, 1]$, $B = [-1, 0]$ y $C = [0, 1]$, entonces $A \overline{H} B = C$ pues $A = B + C$. Tambien tiene sentido hablar de $A \overline{H} C = B$. Claramente $A \overline{H} A = \{0\}$.

Se observa que la diferencia de Hukuhara no siempre existe. La siguiente proposición dice que una condición necesaria para que las diferencias de Hukuhara existan es que alguna traslación de B sea un subconjunto de A , $B + \{c\} \subseteq A$.

Proposición 1.45 Sean $A, B \in \mathcal{K}_C^n$. Para que exista la diferencia es necesario y suficiente tener la siguiente condición:

Si $a \in \partial A$, entonces hay por lo menos un punto “ c ” tal que $a \in (B + c) \subset A$.

Para la demostración vea la Proposición 4.2 en [6].

Ejemplo 1.46 $\{0\} \bar{H} [0, 1]$ no existe. De hecho, por la Proposición 1.45, la condición necesaria para que la diferencia $\{0\} \bar{H} [0, 1]$ exista es que alguna traslación de $[0, 1]$ sea un subconjunto de $\{0\}$, esto es $[0, 1] + \{c\} \subset \{0\}$. No entanto, la suma $[0, 1] + \{c\} := \{m + c / m \in [0, 1]\}$ no es un conjunto unitario, luego $[0, 1] + \{c\}$ no es un subconjunto de $\{0\}$. Por lo tanto $\{0\} \bar{H} [0, 1]$ no existe.

Observación 1.47 De la Proposición 1.45, la diferencia de Hukuhara de los conjuntos $X = [x_1, x_2]$ e $Y = [y_1, y_2]$ existe se, y solamente si, $\text{diam}X \geq \text{diam}Y$ y es igual a $[x_1 - y_1, x_2 - y_2]$.

A continuación se define la diferenciabilidad de una multifunción según Hukuhara [6].

Definición 1.48 Se dice que la multifunción $F : T \rightarrow \mathcal{K}_C^n$ es H -diferenciable en un punto $t_0 \in T$, si existe $DF(t_0) \in \mathcal{K}_C^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{F(t_0 + k) \bar{H} F(t_0)}{k}, DF(t_0) \right) = 0$$

y

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{F(t_0) \bar{H} F(t_0 - k)}{k}, DF(t_0) \right) = 0.$$

En los puntos extremos de T , se considera apenas uno de los límites arriba. $DF(t_0)$ es llamado H -diferencial de F en el punto t_0 .

Teorema 1.49 [1] Si $G : T \rightarrow \mathcal{K}_C(\mathbb{R}^n)$ es H -diferenciable en T , entonces

$$\frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} = S_{DG(t)}(x).$$

Ejemplo 1.50 Sean $T = [0, 1]$ y $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con $G(t) = B[0, t]$, donde $B[0, t]$ es la bola de centro en el origen de radio t en \mathbb{R}^n . Entonces, G es diferenciable y

$$\frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} = S_{DG(t)}(x) = \begin{cases} \|x\|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

De hecho, note que $G(t) = tB[0, 1]$, $\forall t \in [0, 1]$. Defina $DG(t_0) = B[0, 1]$, $\forall t_0 \in [0, 1]$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{G(t_0 + k) - G(t_0)}{k}, DG(t_0) \right) &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{(t_0 + k)B[0, 1] - t_0B[0, 1]}{k}, B[0, 1] \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H (B[0, 1], B[0, 1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{G(t_0) - G(t_0 - k)}{k}, DG(t_0) \right) &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{t_0B[0, 1] - (t_0 - k)B[0, 1]}{k}, B[0, 1] \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H (B[0, 1], B[0, 1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G(t)$ es diferenciable.

Ahora, sigue de la Definición 1.17 que

$$S_{DG(t_0)}(x) = \begin{cases} \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } S_{DG(t_0)}(0) = 0, \\ \|x\|, & \text{si } x \neq 0 \text{ y } S_{DG(t_0)}(0) = 0. \end{cases} \quad (1-8)$$

Por otro lado, del Ejemplo 1.41 se tiene que

$$S_{G(t)}(x) = t\|x\| \text{ si } x \neq 0 \text{ y } S_{G(t)}(0) = 0.$$

Luego,

$$\frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} = \frac{d(t\|x\|)}{dt} = \|x\| \text{ si } x \neq 0 \text{ y } \frac{d(S_{G(t)}(0))}{dt} = 0. \quad (1-9)$$

De las ecuaciones (1-8) y (1-9) se tiene la afirmación del Teorema 1.49.

1.5. Integrabilidad y Diferenciabilidad de Funciones difusas

Sean X, Y subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n y $T = [c, d] \subset \mathbb{R}$.

Definición 1.51 Sea $F : T \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, entonces F es llamada aplicación difusa.

A continuación, se tiene resultados de medida e integrabilidad de una función difusa.

Definición 1.52 La aplicación $F : T \rightarrow E^n$ es llamada continua en un punto $t_0 \in I$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $d_\infty(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$, siempre que $|t - t_0| < \lambda$, $t \in I$. La aplicación $F : T \rightarrow E^n$ es llamada continua en T si fuera continua para todo $t_0 \in T$.

Definición 1.53 La aplicación $F : T \rightarrow E^n$ se dice Lipschitz continua, si existe una constante $K > 0$ (constante de Lipschitz), tal que para cualquier $t_1, t_2 \in T$, se tenga la siguiente desigualdad :

$$d_\infty(F(t_2), F(t_1)) \leq K|t_1 - t_2|.$$

Definición 1.54 Decimos que la aplicación $F : T \rightarrow E^n$ es fuertemente medible si para todo $a \in [0, 1]$ la multifunción $F_a : T \rightarrow \mathcal{K}^n$ definida por

$$F_a(t) = [F(t)]^a$$

es (Lebesgue) medible, con el conjunto \mathcal{K}^n dotado de la topología generada por la métrica de Hausdorff.

Lema 1.55 [8] Si $F : T \rightarrow E^n$ es continua con respecto a la métrica d_∞ , entonces F es fuertemente medible.

Si $F : T \rightarrow E^1$, entonces $F_a(t)$ es un intervalo compacto, esto es, $F_a(t) = [\lambda^a(t), \mu^a(t)]$. Así se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.56 [8] Sea $F : T \rightarrow E^1$ fuertemente medible y denotando $[F(t)]^a = [\lambda^a(t), \mu^a(t)]$ para $a \in [0, 1]$, entonces λ^a y μ^a son medibles.

Definición 1.57 La aplicación $F : T \rightarrow E^n$ es llamada integrablemente acotada sobre T , si existe una función Lebesgue integrable $k : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\| \leq k(t)$ para todo $x \in F_0(t)$, $t \in T$.

1.5.1. Integrabilidad

Definición 1.58 Sea $F : T \rightarrow E^n$. La integral de F sobre T , denotada por $\int_T F(t)dt$ o $\int_c^d F(t)dt$, es definida a través de sus a -niveles por la ecuación

$$\begin{aligned} \left[\int_T F(t)dt \right]^a &= \int_T F_a(t)dt \\ &= \left\{ \int_T g(t)/g : T \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es una selección medible de } F_a(t) \right\} \end{aligned}$$

para cualquier $a \in [0, 1]$. Una aplicación fuertemente medible e integrablemente acotada $F : T \rightarrow E^n$, es llamada integrable sobre T , si $\int_T f(t)dt \in E^n$.

El siguiente teorema debido a Puri y Ralescu, muestra que ciertas condiciones garantizan que las aplicaciones sean integrables.

Teorema 1.59 [9] Si la aplicación $F : T \rightarrow E^n$ es fuertemente medible e integrablemente acotada entonces F es integrable sobre T .

Observación 1.60 Si $F : T \rightarrow E^1$ es integrable entonces por el Lema 1.56 se tiene que $\int_T F$ es obtenida por la integración de los a -niveles, esto es

$$\left[\int_T F \right]^a = \left[\int_T \lambda^a, \int_T \mu^a \right],$$

donde $[F(t)]^a = [\lambda^a(t), \mu^a(t)]$, $a \in [0, 1]$.

Corolario 1.61 [8] Si la aplicación $F : T \rightarrow E^n$ es continua, entonces ella es integrable.

Teorema 1.62 [8] Sean $F, G : T \rightarrow E^n$ integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\int_T (F + G) = \int_T F + \int_T G$.
2. $\int_T \lambda F = \lambda \int_T F$.
3. $d_\infty(F, G)$ es integrable.
4. $d_\infty \left(\int_T F, \int_T G \right) \leq \int_T d_\infty(F, G)$.

Ejemplo 1.63 Sean $F : T \rightarrow E^n$ con $F(t) = f(t)u$ donde $u \in E^n$ y $f : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función integrable. Entonces

$$\int_c^t F = \left(\int_c^t f \right) u.$$

Sigue de $[F(t)]^a = [f(t)u]^a = f(t)[u]^a$, que F es fuertemente medible y aparte de esto, F es fuertemente acotada por $g(t) = cf(t)$ donde $c = \|[u]^0\| = \max[u]^0$. Así del Teorema 1.59 se tiene que F es integrable y del Ejemplo 1.42 se tiene que

$$\begin{aligned} \left[\int_c^t F(\tau) d\tau \right]^a &= \int_c^t F_a(\tau) d\tau \\ &= \int_c^t [f(\tau)u]^a d\tau \\ &= \int_c^t f(\tau) [u]^a d\tau \\ &= \left(\int_c^t f(\tau) d\tau \right) [u]^a. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_c^t F = \left(\int_c^t f \right) u.$$

1.5.2. Diferenciabilidad para Funciones Difusas

La H-derivada (diferenciabilidad en el sentido de Hukuhara) para funciones difusas fue inicialmente desarrollado por Puri y Ralescu [11], quienes generalizaron y extendieron el concepto de diferenciabilidad de Hukuhara para multifunciones. Esta diferenciabilidad es basada en la H-diferencia de conjuntos difusos, como sigue.

Definición 1.64 Sean $u, v \in E^n$. Si existe $w \in E^n$ tal que $u = v + w$, entonces w es llamado la H-diferencia de u y v y es denotado por $u \overline{H} v$.

Observación 1.65 La diferencia de Hukuhara $u \overline{H} v$ en E^n existe en términos de nivel si, y solamente si, existe la diferencia de Hukuhara $[u]^a \overline{H} [v]^a$ en \mathcal{K}_C^n y la familia $[u]^a \overline{H} [v]^a$ con $a \in [0, 1]$ define un $w \in E^n$, esto es, verifica las hipótesis del Teorema da representación de Negoita y Ralescu.

Definición 1.66 La aplicación $F : T \rightarrow E^n$ es Hukuhara diferenciable en $t_0 \in T \subseteq \mathbb{R}$ si para $0 < h \leq \epsilon_0$ las diferencias de Hukuhara

$$F(t_0 + h) \overline{H} F(t_0), \quad F(t_0) \overline{H} F(t_0 - h)$$

existen en E^n con $t \pm h \in T$ y existe $F'(t_0) \in E^n$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} d_\infty \left(\frac{F(t_0 + h) \overline{H} F(t_0)}{h}, F'(t_0) \right) = 0 \quad (1-10)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} d_\infty \left(\frac{F(t_0) \overline{H} F(t_0 - h)}{h}, F'(t_0) \right) = 0. \quad (1-11)$$

Aquí, $F'(t_0)$ es llamado la derivada de Hukuhara de F en t_0 .

En los puntos extremos de T , se consideran solamente las derivadas laterales en uno de los extremos.

Observación 1.67 De la Definición 1.66, se tiene que, si $F : T \rightarrow E^n$ es diferenciable entonces la multifunción F_a es Hukuhara diferenciable para todo $a \in [0, 1]$ y

$$DF_a(t) = [F'(t)]^a. \quad (1-12)$$

Aquí, $DF_a(t)$ denota la derivada de Hukuhara de F_a .

La recíproca no siempre es verdadera, puesto que la existencia de la H -diferencia dos conjuntos $[x]^a \overline{H} [y]^a$, $a \in [0, 1]$, no implica la existencia de la H -diferencia de los conjuntos difusos $x \overline{H} y$.

Teorema 1.68 [8] Sea $F : T \rightarrow E^1$ diferenciable, con $F_a(t) = [F(t)]^a = [f_a(t), g_a(t)]$, $a \in [0, 1]$. Entonces f_a y g_a son diferenciables y

$$[F'(t)]^a(t) = [f'_a(t), g'_a(t)].$$

Teorema 1.69 [8] Sea $F : T \rightarrow E^n$ diferenciable en T . Si $t_1, t_2 \in T$ con $t_1 \leq t_2$ entonces existe un $C \in E^n$ tal que $F(t_2) = F(t_1) + C$. También se puede ver que si F es diferenciable, entonces existe $F(t_2) \overline{H} F(t_1)$ si $t_2 \geq t_1$.

Demostración. Para cada $s \in [t_1, t_2]$ existe un $\delta(s) > 0$ tal que las H -diferencias $F(s+h) \overline{H} F(s)$ y $F(s) - F(s-h)$ existen para todo $0 \leq h < \delta(s)$. Entonces, podemos encontrar una secuencia finita $t_1 = s_1 < s_2 < \dots < s_n = t_2$ tal que la familia $\{I_{s_i} = (s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)) \mid i = 1, \dots, n\}$ cubre $[t_1, t_2]$ e $I_{s_i} \cap I_{s_{i+1}} \neq \emptyset$.

Escoja un $v_i \in I_{s_i} \cap I_{s_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n-1$, talque $s_i < v_i < s_{i+1}$. Entonces

$$F(s_{i+1}) = F(v_i) + B_1 = F(s_i) + B_2 + B_1 = F(s_i) + C_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

para algún $B_1, B_2, C_i \in E^n$.

Por lo tanto $F(t_2) = F(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} C_i = F(t_1) + C$, $C \in E^n$. □

Corolario 1.70 [8] Si $F : T \rightarrow E^n$ es diferenciable en T , entonces para cada $a \in [0, 1]$ la función real $t \rightarrow \text{diam}[F(t)]^a$ es no decreciente en T .

Demostración. Sean $t_1, t_2 \in T$ con $t_1 \leq t_2$. Entonces, por el Teorema 1.69, existe $C \in E^n$ tal que $F(t_2) = F(t_1) + C$, luego $[F(t_2)]^a = [F(t_1)]^a + [C]^a$. Por tanto, $\text{diam}[F(t_1)]^a \leq \text{diam}[F(t_2)]^a$. □

De las propiedades de d_∞ , ecuaciones (1-4)-(1-6), se tienen los resultados.

Teorema 1.71 [8] Sean $F, G : T \rightarrow E^1$ diferenciables sobre T y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

1. $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$.
2. $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$.

Ejemplo 1.72 [1] Sea $F : T \rightarrow E^n$ con $F(t) = f(t)u$, donde $u \in E^n$ y $f : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ creciente y de clase C^1 . Entonces, F es derivable y $F'(t) = f'(t)u$.

La Definición 1.66 de derivada es muy restrictiva. Por ejemplo, en [3] los autores demostraron que si $F(t) = c \cdot g(t)$, donde c es un número difuso y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función con $g'(t) < 0$, entonces F no es diferenciable. Para evitar esta dificultad, los autores en [3] introducen una definición más general de derivada para funciones difusas ampliando la clase de aplicaciones difusas diferenciables, considerando un tipo de H-derivada lateral. No en tanto, en este trabajo se considera la diferenciableidad según la Definición 1.66.

1.6. Ecuación Diferencial difusa

Las ecuaciones diferenciales son usadas para modelar los mecanismos evolutivos de procesos dinámicos de las ciencias e ingenierías. La Ecuación Diferencial más simples

es la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$x'(t) = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1-13)$$

Una solución de (1-13) es una función diferenciable $x = x(t)$ satisfaciendo (1-13) para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Para un Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1-14)$$

se tiene que la función $x = x(t, x_0)$ es solución. La existencia y unicidad de una solución del Problema de Valor Inicial (1-14) es importante no solo matemáticamente, mas también para obtener la respuesta al problema propuesto. Cuando f es continua, resolver el problema de valor inicial (1-14) es equivalente a resolver la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds$$

para una función de clase C^1 .

Ecuaciones diferenciales determinísticas muchas veces representan una idealización de situaciones reales en que la imprecisión podrá, de hecho desempeñar un papel significativo. Ecuaciones diferenciales estocásticas han sido utilizados para incorporar los efectos de fluctuaciones aleatorias. No en tanto, datos vagos debido a la incerteza requiere introducir Ecuaciones Diferenciales Difusas.

La verdad, si las incertezas fueran modelados por medio de subconjuntos difusos, la ecuación diferencial puede ser tratada de varias formas tales como: *Ecuaciones Diferenciales Difusas*, esto es a partir de la derivada de Hukuhara; *Inclusiones diferenciales Difusas*; *Extensión de la solución determinista* y otros, ver el Capítulo 8 de [2].

En el contexto difuso, se interpreta el lado derecho de (1-14) como una aplicación $f : I \times E^n \rightarrow E^n$, $I = [0, T]$, $T > 0$ y $x_0 \in E^n$.

Sea el espacio $C^1(I, E^n) = \{x : I \rightarrow E^n : x, x' \text{ son continuos}\}$, donde la derivada x' de x es en el sentido de Hukuhara como en la Definición 1.66.

Definición 1.73 Una solución de (1-14) es una función $x \in C(I, E^n)$ satisfaciendo (1-14).

Ejemplo 1.74 Considere el problema malthusiano difuso

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t), \\ x(0) \in x_0. \end{cases} \quad (1-15)$$

donde $\lambda > 0$ e $x_0 \in E^1$.

Si $x'(t)$ es la H -derivada y considere el conjunto nivel de $x(t)$ dado por $[x(t)]^a = [x(t)_{al}, x(t)_{ar}]$, con $x_{al}(t) = x(t)_{al}$ y $x_{ar}(t) = x(t)_{ar}$ para todo $a \in [0, 1]$, entonces el problema (1-15) es escrito en términos de nivel como

$$\begin{cases} x'_{al}(t) = -\lambda x_{ar}(t) & , x_{al}(0) = (x_0)_{al} \\ x'_{ar}(t) = -\lambda x_{al}(t) & , x_{ar}(0) = (x_0)_{ar} \end{cases} \quad (1-16)$$

Luego para todo $a \in [0, 1]$, una solución de este sistema es

$$\begin{aligned} x'_{al}(t) &= -\frac{1}{2} \text{diam}([x_0]^a) e^{\lambda t} + \frac{1}{2} ((x_0)_{al} + (x_0)_{ar}) e^{-\lambda t} \\ x'_{ar}(t) &= \frac{1}{2} \text{diam}([x_0]^a) e^{\lambda t} + \frac{1}{2} ((x_0)_{al} + (x_0)_{ar}) e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

para todo $a \in [0, 1]$ y $t \geq 0$. Note también que $x_{al}(t) \leq x_{ar}(t)$, para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, la función difusa $x(t)$ que resuelve el problema (1-15) tiene conjuntos nivel

$$[x(t)]^a = \left[-\frac{1}{2} \text{diam}([x_0]^a) e^{\lambda t} + mp([x_0]^a), \frac{1}{2} \text{diam}([x_0]^a) e^{\lambda t} + mp([x_0]^a) \right],$$

donde $mp([x_0]^a)$ denota el punto medio de $[x_0]^a$, esto es, $mp([x_0]^a) = \frac{1}{2}((x_0)_{al} + (x_0)_{ar})$.

Esta solución de (1-15), considerando la H -derivada, tiene la propiedad que el $\text{diam}([x(t)]^a)$ es ilimitado cuando $t \rightarrow +\infty$, mostrando que esta interpretación no generaliza de manera adecuada el caso clásico.

En [4](ver también [3]) este problema es resuelto introduciendo el concepto de derivada generalizada para la aplicación difusa $f : I \times E^n \rightarrow E^n$, extendiendo la clase de aplicaciones difusas diferenciables. Así, la solución puede ser adecuadamente escogida.

Considere el problema de valor inicial difuso,

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I \\ u(0) = u_0 \in E^n. \end{cases} \quad (1-17)$$

donde $I = [0, T]$, $T > 0$ y $f : I \times E^n \rightarrow E^n$.

Lema 1.75 [8] *Sea $f : I \times E^n \rightarrow E^n$ continua. La aplicación $u : I \rightarrow E^n$ es solución de (1-17) si, y solamente si es continua y satisface la ecuación integral*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds, \quad t \in I.$$

Un Teorema que garantiza la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial difusa es el siguiente.

Teorema 1.76 [8] *(Teorema de Picard-Lipschitz)*

Sea $f : I \times E^n \rightarrow E^n$ continua y lipschitziana en la segunda variable, esto es, existe $k > 0$ tal que

$$d_\infty(f(t, x), f(t, y)) \leq k d_\infty(x, y)$$

para todo $t \in I$, $x, y \in E^n$. Entonces el problema de valor inicial (1-17) tiene solución única en I .

Ejemplo 1.77 *Sea $f : I \times E^1 \rightarrow E^1$ dado por $f(t, x) = -Mx + \sigma(t)$, $M \in \mathbb{R}^+$ y $\sigma : I \rightarrow E^1$ una función continua.*

De las propiedades de la métrica de Hausdorff (1-4) y (1-5) tenemos

$$d_\infty(f(t, x), f(t, y)) = d_\infty(-Mx + \sigma(t), -My + \sigma(t)) = d_\infty(-Mx, -My) = M d_\infty(x, y),$$

para todo $x, y \in E^1$ y $t \in I$. Así el problema difuso lineal $u'(t) = -Mu(t) + \sigma(t)$ tiene solución única sobre I .

Materiales y Métodos

Los resultados del trabajo de investigación se obtuvieron a través del razonamiento deductivo que es inherente a la matemática, por esto en cada teorema se hace el análisis y su demostración, el cual además va acompañado de ejemplos en los cuales se aplica los teoremas y definiciones tratadas a lo largo de la investigación.

En nuestra investigación se usa la teoría difusa, teoría de multifunciones y cálculo diferencial e integral difuso de las cuales hemos tomado las definiciones y teoremas mas relevantes que nos han permitido conseguir resultados acorde a los objetivos trazados en nuestra investigación.

Finalmente, las conclusiones también se obtienen aplicando los métodos matemáticos del análisis y demostración enunciados arriba.

Resultados y Discusión

Antes de iniciar con los resultados mas importantes que son los Teoremas 1.81 y Teorema 1.83 vale mencionar los aspectos mas importantes para el mejor entendimientos de las demostraciones.

Definición 1.78 *Un conjunto difuso u es llamado número difuso, cuando el universo donde esta definido es el conjunto de los números reales, esto es,*

$$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

y además satisface las siguientes condiciones:

- *u debe ser un conjunto difuso normal;*
- *El conjunto a -nivel de u , esto es, el conjunto $[u]^a = \{x \in \mathbb{R}/u(x) \geq a\}$ debe ser cerrado para cada $a \in (0; 1]$;*
- *El soporte de u , $[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}/u(x) > 0\}}$ debe ser acotado.*

El conjunto difuso debe ser normal, puesto que nuestra concepción de un conjunto de “números reales cerca de n ” es satisfecha totalmente por n mismo, por lo tanto, el grado de pertenencia de n en cualquier conjunto debe ser 1. El soporte acotado de un número difuso y todos sus a -niveles para $a \neq 0$ deben ser intervalos cerrados para que nos permita definir operaciones aritméticas sobre números difusos en términos de las operaciones aritméticas estándar sobre intervalos cerrados.

Dado que los a -niveles de cualquier número difuso deben ser intervalos cerrados para todo $a \in (a, 1]$, cada número difuso es un conjunto difuso convexo.

El conjunto E^1 denotará el conjunto de todos los números difusos, es decir E^1 será la recta real difusa o el análogo a \mathbb{R} en el caso determinista.

Definimos la métrica en E^1 , que es una métrica proveniente de la métrica de Hausdorff para intervalos compactos de \mathbb{R} .

Definición 1.79 Sean $u, v \in E^1$, la distancia de Hausdorff difuso $d_\infty : E^1 \times E^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ entre u y v es definida por

$$d_\infty(u, v) = \sup_{0 \leq a \leq 1} \{d_H([u]^a, [v]^a)\}.$$

donde d_H es la métrica de Hausdorff para intervalos compactos de \mathbb{R} , cuya definición es

$$d_H(I, J) = \text{máx} \left(\sup_{x \in I} d(x, J), \sup_{y \in J} d(y, I) \right),$$

donde $d(x, J) = \inf_{j \in J} d(x, j)$ y $d(r, s) = |r - s|$.

El espacio (E^1, d_∞) es un espacio métrico completo.

Definición 1.80 Para cada $x \in E^1$ se define las funciones $x_L : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, por $x_L(a) = x_{al}$ y $x_R(a) = x_{ar}$, donde $[x]^a = [x_{al}, x_{ar}]$ para cada $a \in [0, 1]$. El par de funciones (x_L, x_R) es llamado parametrización del número difuso x .

Tenemos que x_L es una aplicación acotada, monótona creciente y semicontinua inferior, y x_R es una aplicación acotada, monótona decreciente y semicontinua superior.

El espacio $\mathcal{E}(I, E^1)$ con $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$, denota el espacio de funciones con valor difuso definidos en un intervalo real. $C(I, E^1)$ denota el espacio de funciones difusas continuas en I y la convergencia en $C(I, E^1)$ es relativa a la distancia

$$H(f, g) = \sup_{t \in I} d_\infty(f(t), g(t)), \quad f, g \in C(I, E^1),$$

que es uniforme sobre I .

Teorema 1.81 El PVI difuso

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda x(t) = \phi(t), & t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1-18)$$

donde $\lambda > 0$, $I = [0, T]$ o $I = [0, \infty)$ con $T > 0$, $\phi \in C(I, E^1)$ y $x_0 \in E^1$, tiene solución

única en I , dada por

$$x(t) = x_0 \chi_{\{e^{-\lambda t}\}} + \int_0^t \phi(s) \chi_{\{e^{\lambda(s-t)}\}} ds, \quad t \in I, \quad (1-19)$$

si para cada $t \in I$, existe $\beta > 0$ tal que las diferencias de Hukuhara

$$x(t+h) \overline{-} x(t) \text{ y } x(t) \overline{-} x(t-h)$$

existen, para todo $0 < h < \beta$.

Demostración. Observe que, la cuestión de existencia y unicidad de una solución para el problema (1-40) es resuelta por el teorema de Picard-Lipschitz siempre que tenga sentido la expresión $f^*(t, x) := \phi(t) \overline{-} \lambda x$. Es fácil ver que el estudio del problema (1-40) es equivalente a estudiar el problema (0-3).

Sea $x(t) \in E^1$ una solución con nivel $[x(t)]^a = [x(t)_{al}, x(t)_{ar}]$ donde $x_{al}(t) = x(t)_{al}$ y $x_{ar}(t) = x(t)_{ar}$. El problema (1-40) es escrito en términos de nivel como

$$\begin{aligned} x'_{al}(t) + \lambda x_{al}(t) &= \phi_{al}(t), \quad t \in I, \\ x'_{ar}(t) + \lambda x_{ar}(t) &= \phi_{ar}(t), \quad t \in I, \\ x_{al}(0) &= (x_0)_{al}, \quad x_{ar}(0) = (x_0)_{ar}. \end{aligned}$$

Usando factor integrante, se tiene

$$x_{al}(t) = (x_0)_{al} e^{-\lambda t} + \int_0^t \phi_{al}(s) e^{\lambda(s-t)} ds \quad (1-20)$$

$$x_{ar}(t) = (x_0)_{ar} e^{-\lambda t} + \int_0^t \phi_{ar}(s) e^{\lambda(s-t)} ds. \quad (1-21)$$

Luego,

$$x(t) = x_0 \chi_{\{e^{-\lambda t}\}} + \int_0^t \phi(s) \chi_{\{e^{\lambda(s-t)}\}} ds, \quad t \in I.$$

Se puede afirmar que si para $t \in I$,

$$\text{diam}([\phi(t)]^a) \geq \lambda e^{-\lambda t} \left(\text{diam}([x_0]^a) + \int_0^t \text{diam}([\phi(s)]^a) e^{\lambda s} ds \right), \quad \forall a, \quad (1-22)$$

y existe $\beta > 0$ tal que para $0 < h < \beta$,

$$(1) \quad (x_0)_{al} e^{-\lambda t} (e^{-\lambda h} - 1) + \int_0^t \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-t)} ds (e^{-\lambda h} - 1) + \int_t^{t+h} \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-(t+h))} ds \text{ no es}$$

decreciente en a ,

(2) $(x_0)_{ar}e^{-\lambda t}(e^{-\lambda h} - 1) + \int_0^t \phi(s)_{ar}e^{\lambda(s-t)}ds(e^{-\lambda h} - 1) + \int_t^{t+h} \phi(s)_{ar}e^{\lambda(s-(t+h))}ds$ no es creciente en a ,

(3) $(x_0)_{al}e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda h}) + \int_0^{t-h} \phi(s)_{al}e^{\lambda(s-t)}ds(1 - e^{\lambda h}) + \int_{t-h}^t \sigma(s)_{al}e^{\lambda(s-t)}ds$ no es decreciente en a ,

(4) $(x_0)_{ar}e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda h}) + \int_0^{t-h} \phi(s)_{ar}e^{\lambda(s-t)}ds(1 - e^{\lambda h}) + \int_{t-h}^t \phi(s)_{ar}e^{\lambda(s-t)}ds$ no es creciente en a .

Entonces las diferencias de Hukuhara

$$x(t+h) \overline{H} x(t), x(t) \overline{H} x(t-h)$$

de x dadas por (1-41), existen para $0 < h < \beta$.

En efecto, de la Proposición 4.2 en [6] se deduce que las diferencias de Hukuhara que aparecen en el Teorema 1.81 existen si $[x(t+h)]^a \overline{H} [x(t)]^a$ existe para cada t , a fijo y $0 < h < \beta$, es decir, $diam([x(t)]^a)$ tiene que ser una función no decreciente en t .

Mas la función

$$diam([x(t)]^a) = diam([x_0]^a)e^{-\lambda t} + \int_0^t diam([\phi(s)]^a)e^{\lambda(s-t)}ds,$$

es una función real diferenciable. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} diam([x(t)]^a) &= diam([x_0]^a) - \lambda e^{-\lambda t} \\ &\quad \times \left(diam([x_0]^a) + \int_0^t diam([\phi(s)]^a)e^{\lambda(s-t)}ds \right), \end{aligned}$$

y por (1-22) se tiene que $diam([x(t)]^a) \geq 0$. De esta manera, $[x(t+h)]^a \overline{H} [x(t)]^a$ y $[x(t)]^a \overline{H} [x(t-h)]^a$ existe para cada $t \in I$ y a fijo. Ahora solo queda probar que los intervalos

$$[x(t+h)_{al} - x(t)_{al}, x(t+h)_{ar} - x(t)_{ar}], [x(t)_{al} - x(t-h)_{al}, x(t)_{ar} - x(t-h)_{ar}]$$

definen los conjuntos de nivel a (a -nivel) de un número difuso, para cada t y $0 < h < \beta$.

En efecto,

- Usando (1-22), se obtiene que

$$\begin{aligned} x(t+h)_{al} - x(t)_{al} &\leq x(t+h)_{ar} - x(t)_{ar}, \quad \forall a \\ x(t)_{al} - x(t-h)_{al} &\leq x(t)_{ar} - x(t-h)_{ar}, \quad \forall a \end{aligned}$$

- De (1), (2), (3) y (4) se obtiene que $x(t+h)_{al} - x(t)_{al}$, $x(t)_{al} - x(t-h)_{al}$, son funciones no decrecientes en relación a las variables a , y $x(t+h)_{ar} - x(t)_{ar}$, $x(t)_{ar} - x(t-h)_{ar}$ son no crecientes en relación a la variable a .
- Denotando $\bar{x}_L(a, t) = x(t+h)_{al} - x(t)_{al}$ y $\bar{x}_R(a, t) = x(t+h)_{ar} - x(t)_{ar}$, se tiene que

$$[\bar{x}_L(a_2, t), \bar{x}_R(a_2, t)] \subseteq [\bar{x}_L(a_1, t), \bar{x}_R(a_1, t)] \text{ para } 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1.$$

Por otro lado, si $a > 0$ y $\{a_k\} \subseteq [0, 1]$ es una sucesión monótona no decreciente que converge para a , entonces $[\bar{x}_L(a_k, t), \bar{x}_R(a_k, t)]$ es una sucesión (decreciente) de intervalos encajados. Luego por la continuidad de \bar{x}_L y \bar{x}_R ,

$$\begin{aligned} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [\bar{x}_L(a_k, t), \bar{x}_R(a_k, t)] &= [\sup_{k \in \mathbb{N}} \bar{x}_L(a_k, t), \inf_{k \in \mathbb{N}} \bar{x}_R(a_k, t)] \\ &= [\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_L(a_k, t), \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_R(a_k, t)] = [\bar{x}_L(a, t), \bar{x}_R(a, t)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, del Teorema de Negoita y Ralescu 1.25 se deduce que para cada $t \in I$ y $0 < h < \beta$, los intervalos $[x(t+h)_{al} - x(t)_{al}, x(t+h)_{ar} - x(t)_{ar}]$ definen un conjunto de nivel de algún número difuso.

Análogamente acontece para el caso $[x(t)_{al} - x(t-h)_{al}, x(t)_{ar} - x(t-h)_{ar}]$.

Ahora estudiamos la diferenciabilidad de x en el sentido de Hukuhara. Sea $t \in I$, y $h > 0$, entonces de(1-20), para cada $a \in [0, 1]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(t+h) \bar{H} x(t)}{h} \right)_{al} &= (x_0)_{al} e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{-\lambda h} - 1}{h} \right) \\ &+ \int_0^t \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-t)} ds \left(\frac{e^{-\lambda h} - 1}{h} \right) + \frac{e^{-\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-t)} ds, \quad (1-23) \end{aligned}$$

y de (1-21)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(t+h) \bar{H} x(t)}{h} \right)_{ar} &= (x_0)_{ar} e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{-\lambda h} - 1}{h} \right) \\ &+ \int_0^t \phi(s)_{ar} e^{\lambda(s-t)} ds \left(\frac{e^{-\lambda h} - 1}{h} \right) + \frac{e^{-\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} \phi(s)_{ar} e^{\lambda(s-t)} ds. \end{aligned} \quad (1-24)$$

Asimismo,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{x(t+h) \bar{H} x(t)}{h} \right)_{al} = \phi(t)_{al} - \lambda(x_0)_{al} e^{-\lambda t} - \lambda \int_0^t \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-t)} ds, \quad (1-25)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{x(t+h) \bar{H} x(t)}{h} \right)_{ar} = \phi(t)_{ar} - \lambda(x_0)_{ar} e^{-\lambda t} - \lambda \int_0^t \phi(s)_{ar} e^{\lambda(s-t)} ds, \quad (1-26)$$

desde que: $(x_0)_{al}$ e $(x_0)_{ar}$ son uniformemente acotadas en $a \in [0, 1]$; $\phi(s)_{al}$ y $\phi(s)_{ar}$ son acotadas en el intervalo $[0, t]$ y uniformemente en a (ϕ es continuamente acotada en el compacto $[0, t]$).

Los límites en (1-25) y (1-26) son analizados a través de la continuidad de ϕ en el compacto $[0, t]$, es decir, existe $K \in \mathbb{R}$, $K \geq 0$ tal que $|\phi(t)_{al}| \leq K$, $\forall t \in I$ y $a \in [0, 1]$. Asimismo, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-t)} ds - \phi(t)_{al} \right| &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} K e^{\lambda(s-t)} ds + K \\ &= \frac{K}{h\lambda} \left[e^{\lambda(s-t)} \right]_t^{t+h} + K \\ &= \frac{K}{\lambda} \frac{e^{\lambda h} - 1 + \lambda h}{h}. \end{aligned}$$

Tomando límite en ambos lados de la expresión anterior vemos que el lado derecho tiende a cero, cuando $h \rightarrow 0^+$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-t)} ds = \phi(t)_{al}.$$

Procediendo en forma similar se obtiene

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \phi(s)_{ar} e^{\lambda(s-t)} ds = \phi(t)_{ar}.$$

La diferenciabilidad a izquierda de x es analizada de forma similar, obteniéndose así,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{x(t) \overline{h} x(t-h)}{h} \right)_{al} = z(t)_{al} \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{x(t) \overline{h} x(t-h)}{h} \right)_{ar} = z(t)_{ar},$$

donde

$$z(t)_{al} = \phi(t)_{al} - \lambda(x_0)_{al} e^{-\lambda t} - \lambda \int_0^t \phi(s)_{al} e^{\lambda(s-t)} ds$$

y

$$z(t)_{ar} = \phi(t)_{ar} - \lambda(x_0)_{ar} e^{-\lambda t} - \lambda \int_0^t \phi(s)_{ar} e^{\lambda(s-t)} ds$$

como en (1-25) y 1-26.

Esto prueba que

$$d_H \left(\left[\frac{x(t+h) \overline{h} x(t)}{h} \right]^a, [z(t)_{al}, z(t)_{ar}] \right) \rightarrow 0$$

y

$$d_H \left(\left[\frac{x(t) \overline{h} x(t-h)}{h} \right]^a, [z(t)_{al}, z(t)_{ar}] \right) \rightarrow 0$$

uniformemente en a cuando $h \rightarrow 0^+$, de manera tal que

$$d_\infty \left(\frac{x(t+h) \overline{h} x(t)}{h}, z(t) \right) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad d_\infty \left(\frac{x(t) \overline{h} x(t-h)}{h}, z(t) \right) \rightarrow 0$$

donde $[z(t)]^a = [z(t)_{al}, z(t)_{ar}]$ con $t \in I$ es un número difuso, pues E^1 es completo.

Entonces $x'(t) = z(t) \in E^1$, para todo $t \in I$. También se puede verificar que

$$x'(t) + \lambda x(t) = z(t) + \lambda x(t) = \phi(t), t \in I,$$

y $x(0) = x_0$, de modo que así se obtiene una solución para (1-40). \square

Ejemplo 1.82 Considere el caso particular del problema (1-40),

$$x'(t) + 3x(t) = \chi_{[0,1]}, \quad t \in I \quad x(0) = x_0 = \chi_{\{1\}}. \quad (1-27)$$

Aplicando el Teorema 1.81, se obtuvo una solución para (1-27) como $x(t) = \chi_{[e^{-3t}, \frac{2e^{-3t}+1}{3}]}$. Observe que la solución está dada en cada instante t por la función característica de un intervalo real, de allí que $x(t)_{al}$ y $x(t)_{ar}$ no dependan de como se escoge el nivel $a \in [0, 1]$. La razón es que ϕ y la condición inicial x_0 son dadas por las funciones características, ver Figura 1.7.

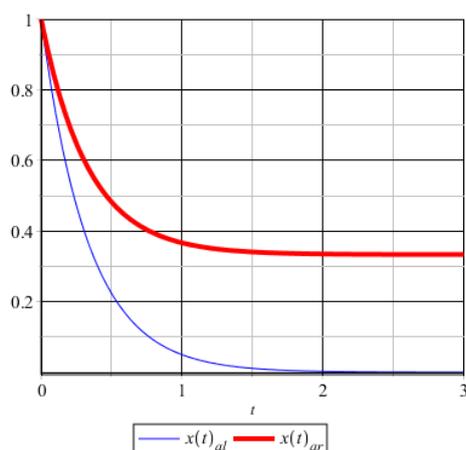


Figura 1.7: Puntos finales del conjunto a -nivel de la solución del problema (1-27).

Si $mp([z]^a) = \frac{1}{2}(z_{al} + z_{ar})$ denota el punto medio para $[z]^a = [z_{al}, z_{ar}]$, $a \in [0, 1]$, $z \in E^1$, entonces el punto medio y el diámetro de los conjuntos de nivel de la solución son respectivamente $mp([x(t)]^a) = \frac{1}{6}(5e^{-3t} + 1)$, $diam([x(t)]^a) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$, $\forall a \in [0, 1]$, $t \in I$. Estos valores son independientes del nivel $a \in [0, 1]$, debido a la elección de ϕ y x_0 , ver Figura 1.8.

Para una función difusa x diferenciable en el sentido de Hukuhara, el diámetro de los conjuntos a -nivel, es una función no decreciente en t para cada a fijo. Así, un problema interesante es la acotación del diámetro de los conjuntos de nivel de las soluciones de las ecuaciones diferenciales (que son diferenciables en el sentido de Hukuhara) a fin de controlar la imprecisión de las soluciones, manteniendo el diámetro de los conjuntos de

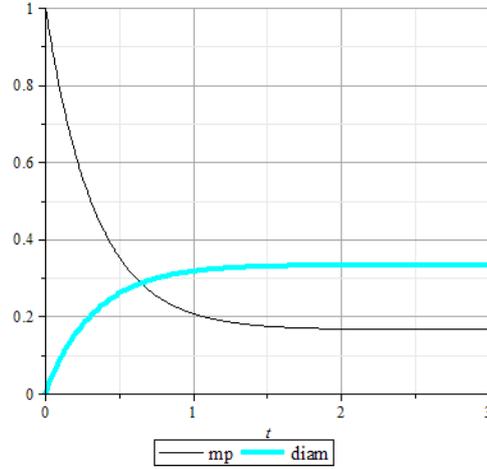


Figura 1.8: Punto medio y diámetro de los conjuntos de nivel de la solución de (1-27).

nivel acotados por un cierto grado de incertidumbre. En este ejemplo, la solución tiene un comportamiento muy interesante una vez que el diámetro del conjunto a -nivel de la solución permanece acotada cuando t aumenta. Por otro lado, una vez que la solución difusa es obtenida, se puede escoger un punto medio del conjunto 1-nivel de $x(t)$ como un número real que representa la solución difusa con un cierto grado de precisión, esto significa que en el proceso de defuzzificación, podemos seleccionar $v(t) = mp([x(t)]^1)$, para cada t , y se tiene una función real que representa una solución difusa u . En el ejemplo, el punto medio de cada conjunto de nivel tiende a un número fijo ($\frac{1}{6}$) cuando $t \rightarrow +\infty$, independientemente de $a \in [0, 1]$.

Teorema 1.83 *El PVI difuso*

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t) + \phi(t), t \in I \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1-28)$$

donde $\lambda > 0$, $I = [0, T]$ con $T > 0$, $\phi \in C(I, E^1)$, $x_0 \in E^1$, tiene solución única en I , dada por la expresión

$$x(t)_{al} = -\frac{e^{\lambda t}}{2}\Omega_1(t, a) + \frac{e^{-\lambda t}}{2}\Omega_2(t, a) \quad (1-29)$$

$$x(t)_{ar} = \frac{e^{\lambda t}}{2}\Omega_1(t, a) + \frac{e^{-\lambda t}}{2}\Omega_2(t, a) \quad (1-30)$$

donde

$$\begin{aligned}\Omega_1(t, a) &= \text{diam}([x_0]^a) + \int_0^t \text{diam}([\phi(s)]^a) e^{-\lambda s} ds, \\ \Omega_2(t, a) &= (x_0)_{al} + (x_0)_{ar} + \int_0^t (\phi(s)_{al} + \phi(s)_{ar}) e^{\lambda s} ds.\end{aligned}$$

Demostración. Considere la función $x(t)$ con conjunto de nivel $[x(t)]^a = [x(t)_{al}, x(t)_{ar}]$ como solución del problema (1-44).

El problema

$$\begin{cases} w'(t) = -\lambda w(t), & t \in I, \\ w(0) = x_0, \end{cases}$$

tratada en términos de nivel tiene como solución a la función w dada por

$$w(t)_{al} = -\frac{1}{2} \text{diam}([x_0]^a) e^{\lambda t} + \frac{1}{2} ((x_0)_{al} + (x_0)_{ar}) e^{-\lambda t}, \quad (1-31)$$

$$w(t)_{ar} = \frac{1}{2} \text{diam}([x_0]^a) e^{\lambda t} + \frac{1}{2} ((x_0)_{al} + (x_0)_{ar}) e^{-\lambda t}, \quad (1-32)$$

para $t \in I$ y $a \in [0, 1]$.

Para obtener a solución de

$$\begin{cases} v'(t) = -\lambda v(t) + \phi(t), & t \in I, \\ v(0) = \chi_{\{0\}}, \end{cases} \quad (1-33)$$

considere $(w + v)(0) = w(0) + v(0) = u_0 + \chi_0 = u_0$, y para $t \in I$

$$\begin{aligned}(w + v)'(t) = w'(t) + v'(t) &= -\lambda w(t) + (-\lambda v(t)) + \phi(t) \\ &= -\lambda(w(t) + v(t)) + \phi(t) = -\lambda(w + v)(t) + \phi(t),\end{aligned}$$

tal que $w + v$ es solución de (1-44). Se busca una solución para (1-33) de la forma

$$\begin{pmatrix} v(t)_{al} \\ v(t)_{ar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{-\lambda t} \\ -e^{\lambda t} & e^{-\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{al}(t) \\ c_{ar}(t) \end{pmatrix}, \quad (1-34)$$

para $t \in I$ y $a \in [0, 1]$, tal que $[v(0)]^a = [v(0)_{al}, v(0)_{ar}] = \{0\}$, $\forall a$. Esto es, para $a \in [0, 1]$, considere el sistema lineal homogéneo no singular.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0)_{al} \\ v(0)_{ar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{al}(0) \\ c_{ar}(0) \end{pmatrix},$$

Por lo tanto, la solución única es

$$c_{al}(0) = 0, \quad c_{ar}(0) = 0, \quad \forall a \in [0, 1].$$

Ahora, para que la expresión

$$\begin{pmatrix} v(t)_{al} \\ v(t)_{ar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{al}(t)e^{\lambda t} + c_{ar}(t)e^{-\lambda t} \\ -c_{al}(t)e^{\lambda t} + c_{ar}(t)e^{-\lambda t} \end{pmatrix}, \quad (1-35)$$

defina un elemento en E^1 , es necesario que $c_{al}(t)$ sea una función no positiva. Además de eso, para que las diferencias de Hukuhara $v(t+h) \bar{-} v(t)$, $v(t) \bar{-} v(t-h)$ existan para $h > 0$ suficientemente pequeño, es necesario que

$$diam([v(t)]^a) = -c_{al}(t)e^{\lambda t} + c_{ar}(t)e^{-\lambda t} - c_{al}(t)e^{\lambda t} - c_{ar}(t)e^{-\lambda t} = -2c_{al}(t)e^{\lambda t}$$

sea no decreciente en t . Por ejemplo, si c_{al} es una función no creciente en t , observe que, para $t \in I$, $a \in [0, 1]$,

$$[v(t)]^a = [c_{al}(t)e^{\lambda t} + c_{ar}(t)e^{-\lambda t}, -c_{al}(t)e^{\lambda t} + c_{ar}(t)e^{-\lambda t}]. \quad (1-36)$$

A continuación calculamos $c_{al}(t)$ y $c_{ar}(t)$ con el objetivo de obtener la solución de (1-33). Escribiendo de términos de conjuntos de nivel, obtenemos para todo $a \in [0, 1]$, $t \in I$,

$$\begin{aligned} v'_{al}(t) &= -\lambda v_{ar}(t) + \phi_{al}(t), \\ v'_{ar}(t) &= -\lambda v_{al}(t) + \phi_{ar}(t), \end{aligned}$$

y usando (1-36),

$$\begin{aligned}
c'_{al}(t)e^{\lambda t} + c_{al}(t)\lambda e^{\lambda t} + c'_{ar}(t)e^{-\lambda t} &- \lambda c_{ar}(t)e^{-\lambda t} \\
&= \lambda c_{al}(t)e^{\lambda t} - \lambda c_{ar}(t)e^{-\lambda t} + \phi_{al}(t), \\
-c'_{al}(t)e^{\lambda t} - c_{al}(t)\lambda e^{\lambda t} + c'_{ar}(t)e^{-\lambda t} &- \lambda c_{ar}(t)e^{-\lambda t} \\
&= -\lambda c_{al}(t)e^{\lambda t} - \lambda c_{ar}(t)e^{-\lambda t} + \phi_{ar}(t),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
c'_{al}(t)e^{\lambda t} + c'_{ar}(t)e^{-\lambda t} &= \phi_{al}(t), \\
-c'_{al}(t)e^{\lambda t} + c'_{ar}(t)e^{-\lambda t} &= \phi_{ar}(t).
\end{aligned}$$

Luego se obtiene

$$\begin{aligned}
c'_{al}(t) &= \frac{1}{2}e^{-\lambda t}(\phi_{al}(t) - \phi_{ar}(t)), \\
c'_{ar}(t) &= \frac{1}{2}e^{\lambda t}(\phi_{al}(t) - \phi_{ar}(t)),
\end{aligned}$$

que integrando se llega a los siguientes resultados,

$$c_{al}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} (\phi_{al}(s) - \phi_{ar}(s)) ds \quad \text{y} \quad c_{ar}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds.$$

Estos cálculos nos confirman que $c_{al}(t) \leq 0$, para todo t, a (función no creciente en t).

Considerando (1-36), se tiene que $t \in I$, y $a \in [0, 1]$,

$$v(t)_{al} = -\frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda t} + \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda t} \quad (1-37)$$

$$v(t)_{ar} = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda t} + \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda t}. \quad (1-38)$$

Para verificar que $v(t)$ define un número difuso, observe que ϕ es continua, $\text{diam}([\phi(s)]^a)$ y $\phi(s)_{ar}$ decrece en a y $\phi(s)_{al}$ crece en a .

Ahora, verificamos que v es diferenciable en el sentido de Hukuhara y que la derivada de v en el sentido de Hukuhara en t es $-\lambda v(t) + \phi(t)$. Cabe señalar que el conjunto de nivel de las diferencias de Hukuhara existen desde que

$$diam([v(t)]^a) = -2c_{al}(t)e^{\lambda t} = \int_0^t e^{-\lambda s} diam([\phi(s)]^a) e^{\lambda t} ds$$

sea no decreciente en t . Además de eso, las diferencias de Hukuhara $v(t+h) \overline{H} v(t), v(t) \overline{H} v(t-h)$ existen para h suficientemente pequeño. Para probar este hecho, según (1-37) y (1-38), se obtiene para $t \in I$ y $a \in [0, 1]$, lo siguiente

$$\begin{aligned} (v(t+h) \overline{H} v(t))_{al} &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} diam([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda t} (1 - e^{\lambda h}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda t} (e^{-\lambda h} - 1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_t^{t+h} e^{-\lambda s} diam([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda(t+h)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^{t+h} e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda(t+h)} \\ (v(t+h) \overline{H} v(t))_{ar} &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} diam([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda t} (e^{\lambda h} - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda t} (e^{-\lambda h} - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^{t+h} e^{-\lambda s} diam([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda(t+h)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^{t+h} e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda(t+h)}, \end{aligned}$$

los cuales definen los puntos finales de los conjuntos de nivel para un número difuso. En efecto la condición $diam([v(t+h)]^a) \geq diam([v(t)]^a)$ implica que

$$(v(t+h) \overline{H} v(t))_{al} = v(t+h)_{al} - v(t)_{al} \leq v(t+h)_{ar} - v(t)_{ar} = (v(t+h) \overline{H} v(t))_{ar}.$$

Además de eso, para $a_k \rightarrow a^-$,

$$(v(t+h) \overline{H} v(t))_{a_k l} \longrightarrow (v(t+h) \overline{H} v(t))_{al}, \quad (v(t+h) \overline{H} v(t))_{a_k r} \longrightarrow (v(t+h) \overline{H} v(t))_{ar}$$

desde que la continuidad de ϕ implica que $\int_0^t \phi(s) \chi_{\{e^{Rs}\}}$, $\int_t^{t+h} \phi(s) \chi_{\{e^{Rs}\}}$ son elementos de E^1 , para $R = \pm M$, $t \in I$, $h > 0$. Finalmente, falta probar que $(v(t+h) \overline{H} v(t))_{al}$ es no decreciente en a y que $(v(t+h) \overline{H} v(t))_{ar}$ es no creciente en a . Sean $a, b \in [0, 1]$, $a \leq b$, entonces

$$(v(t+h) \frac{v(t)}{h})_{al} \leq (v(t+h) \frac{v(t)}{h})_{bl}$$

desde que

$$\begin{aligned} e^{-\lambda s} e^{\lambda t} (1 - e^{\lambda h}) (\text{diam}([\phi(s)]^a) - \text{diam}([\phi(s)]^b)) \\ \leq e^{\lambda s} e^{-\lambda t} (e^{-\lambda h} - 1) (\phi(s)_{bl} + \phi(s)_{br} - \phi(s)_{al} - \phi(s)_{ar}), \end{aligned}$$

para $s \in [0, t]$, y

$$\begin{aligned} -e^{-\lambda s} e^{\lambda(t+h)} (\text{diam}([\phi(s)]^a) - \text{diam}([\phi(s)]^b)) \\ \leq e^{\lambda s} e^{-\lambda(t+h)} (\phi(s)_{bl} + \phi(s)_{br} - \phi(s)_{al} - \phi(s)_{ar}), \end{aligned}$$

para $s \in [t, t+h]$. De hecho, la primera verificación es válida para $s \leq t$,

$$\begin{aligned} e^{2\lambda(t-s)} (1 - e^{\lambda h}) (\text{diam}([\phi(s)]^a) - \text{diam}([\phi(s)]^b)) \\ \leq (1 - e^{\lambda h}) (\text{diam}([\phi(s)]^a) - \text{diam}([\phi(s)]^b)) \\ \leq (e^{-\lambda h} - 1) (\phi(s)_{bl} + \phi(s)_{br} - \phi(s)_{al} - \phi(s)_{ar}), \end{aligned}$$

debido a que

$$(2 - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}) (\phi(s)_{bl} - \phi(s)_{al}) \leq 0 \leq (e^{-\lambda h} - e^{\lambda h}) (\phi(s)_{br} - \phi(s)_{ar}).$$

La segunda afirmación es equivalente a

$$-e^{2\lambda(t+h-s)} (\text{diam}([\phi(s)]^a) - \text{diam}([\phi(s)]^b)) \leq \phi(s)_{bl} + \phi(s)_{br} - \phi(s)_{al} - \phi(s)_{ar},$$

para $s \in [t, t+h]$. Procediendo de manera similar se muestra que $(v(t+h) \frac{v(t)}{h})_{ar}$ es no decreciente en a y, el mismo razonamiento se aplica para los casos de las diferencias de Hukuhara $v(t) \frac{v(t-h)}{h}$, con $h > 0$ suficientemente pequeño.

Ahora, para $t \in I$,

$$(-\lambda v(t) + \phi(t))_{al} = -\frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda t} - \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda t} + \phi_{al}(t),$$

$$(-\lambda v(t) + \phi(t))_{ar} = \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds e^{\lambda t} - \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds e^{-\lambda t} + \phi_{ar}(t).$$

Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} d_\infty \left(\frac{v(t+h) - v(t)}{h}, -\lambda v(t) + \phi(t) \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{a \in [0,1]} \max\{|\varphi(t, h, a)|, |\psi(t, h, a)|\},$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi(t, h, a) = & \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda h} + 1 + \lambda h}{2} \frac{1}{h} \int_0^t e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds \\ & + \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda h} + 1 + \lambda h}{2} \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds \\ & + \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda h}}{2} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds \\ & + \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda h}}{2} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds - \phi_{al}(t), \end{aligned}$$

tiende uniformemente a cero en $a \in [0, 1]$ cuando $h \rightarrow 0^+$, desde que ϕ es acotada en $[0, t]$ (ϕ_{al}, ϕ_{ar} son acotadas en $[0, t]$ uniformemente en a),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-e^{\lambda h} + 1 + \lambda h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h}{h} = 0,$$

y, utilizando a continuidad de ϕ en t , se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds & \longrightarrow e^{-\lambda t} \text{diam}([\phi(t)]^a), \\ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds & \longrightarrow e^{\lambda t} (\phi_{al}(t) + \phi_{ar}(t)), \end{aligned}$$

donde la convergencia ocurre de manera uniforme en $a \in [0, 1]$.

Análogamente, para

$$\begin{aligned} \psi(t, h, a) = & \frac{e^{\lambda t} e^{\lambda h} - 1 - \lambda h}{2} \frac{1}{h} \int_0^t e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds \\ & + \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h}{2} \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds \\ & + \frac{e^{\lambda t} e^{\lambda h}}{2} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-\lambda s} \text{diam}([\phi(s)]^a) ds \\ & + \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda h}}{2} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda s} (\phi_{al}(s) + \phi_{ar}(s)) ds - \phi_{ar}(t). \end{aligned}$$

El mismo procedimiento es válido para el caso de la derivada de Hukuhara por el lado izquierdo de v en t . Esto completa la prueba, una vez que v es derivable en el sentido de Hukuhara en cada t y $v'(t) = -\lambda v(t) + \phi(t)$. Añadiendo w a v , obtenemos (1-42) y (1-43), que proporcionan la solución para (1-44). \square

Ejemplo 1.84 Considere el caso particular de (1-44)

$$x'(t) = -3x(t) + \chi_{[0,1]}, \quad t \in I, \quad x(0) = x_0 = \chi_{\{1\}}, \quad (1-39)$$

cuya solución (ver figura 1.9) según el teorema 1.83 es dada por la expresión

$$[x(t)]^a = \left[\frac{2 - e^{3t} + 5e^{-3t}}{6}, \frac{e^{3t} + 5e^{-3t}}{6} \right], \quad a \in [0, 1], \quad t \in I.$$

El punto medio y el diámetro de los conjuntos de nivel de x son $mp([x(t)]^a) = \frac{1}{6}(5e^{-3t} + 1)$, $\text{diam}([x(t)]^a) = \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$, $a \in [0, 1]$, $t \in I$ (ver Figura 1.10). El diámetro de los conjuntos de nivel tiende a $+\infty$, y esta es una situación no deseable desde el punto de vista de las aplicaciones, mas el punto medio tiende a $\frac{1}{6}$ cuando $t \rightarrow +\infty$. La expresión del punto medio de $([x(t)]^a)$ es la misma del problema (1-27). Como esperábamos, la expresión del diámetro de los conjuntos de nivel de x pueden ser obtenidos a partir de la expresión del diámetro de los conjuntos de nivel de la solución de (1-27), para lo cual basta sustituir λ por $-\lambda$.

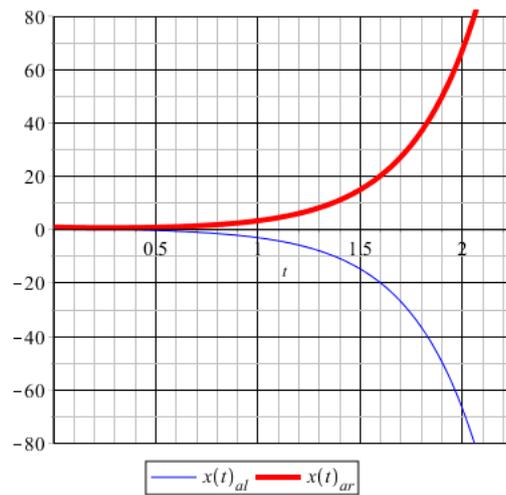


Figura 1.9: Puntos finales del conjunto α -nivel de la solución para el problema (1-39).

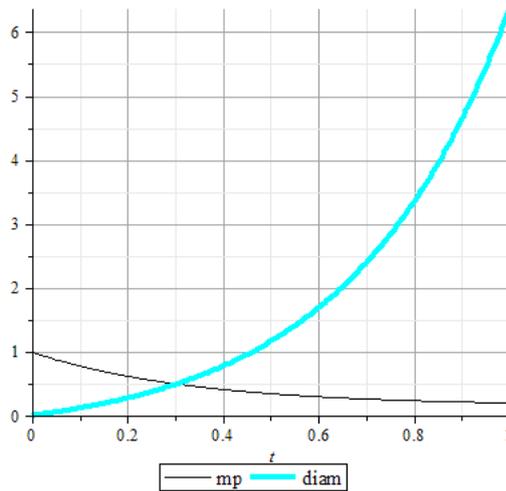


Figura 1.10: Punto medio y diámetro de los conjuntos de nivel de la solución para (1-39).

Conclusiones

1. Concluimos que existe solución para el PVI difuso

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda x(t) = \phi(t), & t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1-40)$$

caso se imponga las condiciones de compatibilidad de λ , x_0 y a la función ϕ así como se muestra en el Teorema 1.81. Por otro lado tenemos la expresión de la solución para 1-40 que es:

$$x(t) = x_0 \chi_{\{e^{-\lambda t}\}} + \int_0^t \phi(s) \chi_{\{e^{\lambda(s-t)}\}} ds, \quad t \in I. \quad (1-41)$$

La forma de esta solución tiene un gran parecido a la expresión del PVI en el caso determinista.

2. También se demostró que la función $x \in C(I, E^1)$ con conjuntos de nivel $[x(t)]^a = [x(t)_{al}, x(t)_{ar}]$ en la que

$$x(t)_{al} = -\frac{e^{\lambda t}}{2} \Omega_1(t, a) + \frac{e^{-\lambda t}}{2} \Omega_2(t, a) \quad (1-42)$$

$$x(t)_{ar} = \frac{e^{\lambda t}}{2} \Omega_1(t, a) + \frac{e^{-\lambda t}}{2} \Omega_2(t, a) \quad (1-43)$$

y

$$\Omega_1(t, a) = \text{diam}([x_0]^a) + \int_0^t \text{diam}([\phi(s)]^a) e^{-\lambda s} ds,$$

$$\Omega_2(t, a) = (x_0)_{al} + (x_0)_{ar} + \int_0^t (\phi(s)_{al} + \phi(s)_{ar}) e^{\lambda s} ds.$$

es solución para

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t) + \phi(t), t \in I \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1-44)$$

donde $\lambda > 0$, $I = [0, T]$ con $T > 0$, $\phi \in C(I, E^1)$, $x_0 \in E^1$.

3. El diámetro $diam([x(t)]^a)$, donde $x \in C(I, E^1)$ es solución de cualquiera de las dos ecuaciones 1-40 o 1-40 es una función creciente y así, se torna interesante el problema de acotación de la función diámetro de la solución de un PVI difuso, puesto que esto nos permite controlar la imprecisión de las soluciones.
4. El punto medio de $[x(t)]^a = [x(t)_{al}, x(t)_{ar}]$, $a \in [0, 1]$ definida como $mp[x(t)]^a = \frac{1}{2}(x(t)_{al} + x(t)_{ar})$ representa a la curva solución con menor grado de incerteza de toda una familia infinita de soluciones que se obtiene al resolver el PVI difuso, en otras palabras en el proceso de defusificación se considera el punto medio como la mejor alternativa.

Recomendaciones

1. Se recomienda a futuros investigadores considerar el PVI 1-40 como mejor alternativa de modelamiento matemático difuso, puesto que rápidamente se consigue una infinidad de ejemplos de PVIs de ese tipo que brindan soluciones con diámetro acotado, de esa forma se logra rápidamente controlar la imprecisión de las soluciones. Ver Ejemplo 1.82.

En el PVI 1-44 los ejemplos mas simples brindan soluciones con diámetro no acotado.

2. Se recomienda el uso de estas ecuaciones para modelar:

- a) Esperanza de Vida \times Pobreza.
- b) Dinámica de enfermedades transmitidas directamente, donde hay interacción entre individuos Susceptibles e Infectados (Modelo Epidemiológico SI o conocido modelo de Kermack - Mackendric).
- c) Dinámica Poblacional, etc.

Todas estas Dinámicas y muchas mas son modeladas por ecuaciones como las estudiadas en esta investigación pero en el contexto determinista o clásico. La recomendación va al hecho que ahora se haga el estudio pero en el contexto difuso.

3. Para futuras investigaciones se recomienda analizar las mismas ecuaciones pero espacios difusos de dimension mayor como es el espacio E^n .

Bibliografía

- [1] BARROS, L. C. *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações*. Tese, UNICAMP, IMECC, 1997.
- [2] BARROS, L. C. e BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. UNICAMP/IMECC, Campinas, SP, 2010.
- [3] BEDE, B. e GAL, S. G. Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 151, páginas 581–599, 2005.
- [4] CHALCO-CANO, Y. e ROMAN-FLORES, H. On new solutions of fuzzy differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 38, páginas 112–119, 2008.
- [5] DIAMOND, P. e KLOEDEN, P. *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. World Scientific Pub, Singapore, 1994.
- [6] HUKUHARA, P. M. Integration des applicaitons mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, vol. 10, páginas 205–223, 1967.
- [7] JOO, S. Y. e KIM, Y. K. Topological properties on the space of fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 246, páginas 576–590, 2000.
- [8] KALEVA, O. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 24(3), páginas 301–317, 1987.
- [9] LAKSHMIKANTHAN, V. e MOHAPATRA, R. *Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions*. Taylor & Francis, London and New York, 2003.
- [10] LOWER, R. *Fuzzy Sets Theory: Basic Concepts, Techniques and Bibliography*. Kluwer Academic Publishers, London, 1996.

-
- [11] PURI, M. e RALESCU, D. Differential for fuzzy functions. *J Math Anal Appl*, vol. 91, páginas 552–558, 1983.
- [12] PURI, M. L. e RALESCU, D. A. Fuzzy random variables. *Journ. Math. Analysis and Applications*, vol. 114, páginas 409–422, 1986.