MANUAL DE TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Primera Edición

$$\int \frac{\int x^n dx}{\int x^m dx}\, dx = \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} + 2020$$

$$¿n - m + 1 = 2020?$$

Mario Ninaquispe Castillo

Abencia Soto Gonzalez

Franklin Manuel Puelles Gonzales

Pilar Sara Nuñez Blas

2021

MANUAL DE TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Mario Ninaquispe Castillo

Abencia Soto Gonzalez

Franklin Manuel Puelles Gonzales

Pilar Sara Nuñez Blas

2021

Manual de Técnicas de Integración de Funciones Reales de Variable Real

Primera edición, agosto 2021

© AUTORES:

Mario Ninaquispe Castillo
Abencia Soto Gonzalez
Franklin Manuel Puelles Gonzales
Pilar Sara Nuñez Blas

Facultad de Ciencias
Av. Universitaria S/N
Independencia Huaraz Ancash
Diagramación: Mario Ninaquispe Castillo
Editorial: Facultad de Ciencias - UNASAM
Impreso en Perú

Reservados todos los derechos. Salvo excepción prevista por la ley, no se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito de los titulares del copyright.

A nuestros padres por su dedicación a formarnos como personas de bien

A nuestros hijos por su tiempo y comprensión por hacer realidad este proyecto

AGRADECIMIENTOS

A los docentes y estudiantes de matemática de la Facultad de Ciencias de la UNASAM

ÍNDICE GENERAL

PRESENTACIÓN..... i
INTRODUCCIÓN iii
CAPÍTULO N° 1 1
ASPECTOS HISTÓRICOS DEL CÁLCULO INTEGRAL 1
CAPÍTULO N° 2 9
ANTIDERIVADA – PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL..... 9
2.1. Antiderivada o Función Primitiva..... 10
2.2. Función Primitiva..... 11
2.3. Integral Indefinida 11
2.4. Función Elemental..... 14
2.5. Integrales Inmediatas..... 21
CAPÍTULO N° 3 28
MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN 28
3.1. Método 29
3.2. Técnica 29
3.3. Diferencias Método y Técnica..... 30
3.4. Técnicas de Integración..... 31
CAPÍTULO N° 4 177
INTEGRALES DE FUNCIONES ELEMENTALES QUE NO PUEDEN EXPRESARSE COMO FUNCIONES ELEMENTALES. 177
4.1. Funciones algebraicas.. 178

4.2. Funciones trigonométricas. 179
4.3. Funciones exponenciales y logarítmicas. 180
4.4. Funciones hiperbólicas. 181
4.5. Teoremas que Caracterizan a las Funciones Elementales 182
4.6. Integrales no Elementales Notables 183
CAPÍTULO N° 5 188
ALGUNAS FÓRMULAS DE RECURRENCIA PARA INTEGRALES INDEFINIDAS 188
CAPÍTULO N° 6 197
CALCULO DE INTEGRALES ASISTIDO POR SOFTWARE MATEMÁTICO 197
EJERCICIOS ADICIONALES 202
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 207
ANEXOS 210

PRESENTACIÓN

El manual titulado “Técnicas de Integración de Funciones Reales De Variable Real”, está dirigido a los docentes, y estudiantes que cursan estudios de ingeniería, donde se presentan los temas de integración indefinida desde un punto de vista histórico, teórico y combina el uso de algunos softwares en su desarrollo para una mejor comprensión; pues en la actualidad con el avance de las TICs, y la incorporación de estas en el proceso de enseñanza aprendizaje, se han vuelto necesarias en la comprensión de muchos temas de matemática, permitiendo en los estudiantes el desarrollo de capacidades matemáticas.

INTRODUCCIÓN

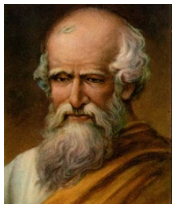
En este manual se presentan los temas en capítulos, desde algunos aspectos históricos, para luego explicar los fundamentos de la integración indefinida, las técnicas de integración, y en los capítulos finales se presentan casos poco comunes que no se dan en los diferentes libros y textos, o cualquier otra publicación de la integral indefinida, así mismo se consideran algunos softwares para su uso en los cálculos de algunos ejercicios.

En el capítulo 1 se consideran algunos aspectos históricos del cálculo integral, en el capítulo 2, se detalla en forma clara que se entiende por antiderivada y primitiva de una función; mientras que en los capítulos 3 y 4 se explican una serie de técnicas y casos particulares de algunas integrales indefinidas las cuales son utilizadas para determinar las primitivas de algunas funciones específicas; en el capítulo 5, se dan algunas integrales que pueden ser resueltas mediante fórmulas de recurrencia, en el capítulo 6 se listan mediante la dirección de las páginas web, algunos software matemáticos que permiten evaluar las integrales indefinidas, y por último se da una serie de ejercicios para que el usuario pueda verificar el aprendizaje de las técnicas de integración.

CAPÍTULO N° 1

ASPECTOS HISTÓRICOS DEL CÁLCULO INTEGRAL

A. C. Santiago Z. y M.J. Santiago Puertas (2011), en su libro Resúmenes de Matemáticas II con notas históricas, consideran que las nociones históricas presentadas son suficientes para mostrar al lector que las matemáticas son algo vivo, en constante vaivén, pues las nuevas herramientas que van apareciendo permiten estudiar problemas antiguos con un nuevo enfoque, facilitando en muchos casos sus resolución y comprensión.



El uso del cálculo integral apareció en la época de Arquímedes (287 – 212 a. C.), científico e ingeniero griego antiguo, y uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos, descubrió muchos conceptos de cálculo, trabajó en geometría, análisis y mecánica. La derivada surge veinte siglos después para resolver otros problemas que en principio no tenían nada en común con el cálculo integral.

El descubrimiento más importante del cálculo infinitesimal (creado por Barrow, Newton y Leibniz) es la íntima relación entre la derivada y la integral definida, a pesar de haber seguido caminos diferentes durante veinte siglos. Una vez conocida la conexión entre derivada e integral

(teorema de Barrow), el cálculo de integrales definidas se hace tan sencillo como el de las derivadas.

Sir Isaac Newton

(1642 - 1726)

Gottfried Wilhelm

Leibniz

(1646 - 1716)

Isaac Barrow

(1630 – 1677)

Introducir el cálculo integral, se logró con el estudio de J. Bernoulli, quien escribió el primer curso sistemático de cálculo integral en 1742, sin embargo, fue Euler quien llevó la integración hasta sus últimas consecuencias, de tal forma que los métodos de integración indefinida alcanzaron prácticamente su nivel actual. El cálculo de integrales de tipos especiales, ya a comienzos de siglo, conllevó al descubrimiento de una serie de resultados de la teoría de las funciones especiales, como las funciones gamma y beta, el logaritmo integral o las funciones elípticas.

Los creadores del Análisis Infinitesimal introdujeron el Cálculo Integral, considerando los problemas inversos de sus cálculos. En la teoría de fluxiones de Newton la mutua

inversibilidad de los problemas del cálculo de fluxiones y fluentes se evidenciaba claramente. Para Leibniz el problema era más complejo: la integral surgía inicialmente como definida. No obstante, la integración se reducía prácticamente a la búsqueda de funciones primitivas. La idea de la integración indefinida fue inicialmente la dominante.

El Cálculo Integral incluía además de la integración de funciones, los problemas y la teoría de las ecuaciones diferenciales, el cálculo variacional, la teoría de funciones especiales, etc. Tal formulación general creció inusualmente rápido. Euler necesitó en los años 1768 y 1770 tres grandes volúmenes para dar una exposición sistemática de él.

Según Euler el Cálculo Integral constituía un método de búsqueda, dada la relación entre los diferenciales o la relación entre las propias cantidades. La operación con la que esto se obtenía se denominaba integración. El concepto primario de tal Cálculo, por supuesto, era la integral indefinida. El propio Cálculo tenía el objetivo de elaborar métodos de búsqueda de las funciones primitivas para funciones de una clase lo más amplia posible.

Los logros principales en la construcción del Cálculo Integral inicialmente pertenecieron a J. Bernoulli y después a Euler, cuyo aporte fue inusitadamente grande. La integración

llevada por este último hasta sus últimas consecuencias y las cuadraturas por él encontradas, todavía constituyen el marco de todos los cursos y tratados modernos sobre Cálculo Integral, cuyos textos actuales son sólo modificaciones de los tratados de Euler en lo relativo al lenguaje. Estos juicios se confirman con la revisión concreta del famoso Cálculo Integral de Euler y su comparación con los textos actuales.

La palabra cálculo proviene del latín calculus, que significa contar con piedras. Precisamente desde que el hombre ve la necesidad de contar, comienza la historia del cálculo. Tales piedrecitas ensartadas en tiras constituían el ábaco romano que, junto con el suwanpan japonés, constituyen las primeras máquinas de calcular en el sentido de contar.

El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en la que se estudia el proceso de integración o anti-derivación, es muy común en la ingeniería y en la matemática en general y se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Publicado 11th June 2012 por cesarvalente

En las siguientes direcciones de YouTube podrá ver y escuchar videos relacionados a la Historia del Cálculo Integral.

1. Historia del Cálculo Integral
   https://www.youtube.com/watch?v=v1wqUTOwk_Y
2. Historia del Cálculo Integral
   https://www.youtube.com/watch?v=WuhBxx60uPk
3. Historia cálculo diferencial e integral
   https://www.youtube.com/watch?v=1DT0YKKy7FE
4. La integral: qué es, de dónde surge y para qué sirve
   https://www.youtube.com/watch?v=m3vzgzA77Ms

TAREA

A continuación, encontrará una serie de preguntas relacionadas con la historia del cálculo integral, cada una de ellas tiene solo una respuesta. Según las preguntas deberá responder adecuadamente.

1. El cálculo apareció en el siglo _____

2. Científico e ingeniero griego antiguo, que descubrió muchos conceptos de cálculo y trabajó en geometría, análisis y mecánica.

   a) Leibniz

   b) Newton

   c) Arquímedes

   d) Barrow

3. Redacte, en dos líneas, que entiende por Calculo Integral.

   ……..……..……..
   ……..……..…...……
   ……..

4. Según los aspectos históricos del cálculo, la derivada y la integral

   a) estuvieron relacionados desde sus inicios.

   b) estuvieron relacionados después de muchos siglos.

   c) estuvieron relacionados cuando se estudió a profundidad

5. La construcción del cálculo Integral fueron dadas por

   a) Barrown

   b) Arquímedes

   c) Bernoulli

   d) Euler

Dar la respuesta, teniendo en cuenta el aspecto histórico.

6. La palabra cálculo proviene del ……., que significa contar con piedras.

CAPÍTULO N° 2

ANTIDERIVADA – PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

2.1. Antiderivada o Función Primitiva

Es bien conocido en aritmética que la operación inversa de

- La adición es la sustracción,
- La multiplicación es la división,
- Radicación es la potenciación, etc

En el cálculo diferencial hemos aprendido a determinar la derivada de una función $f(x)$, denotado por:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow df(x) = f'(x)dx$$

Consideremos el problema inverso: dada una función $f(x)$, es necesario hallar una función $F(x)$tal que su derivada sea igual a $f(x)$, es decir

$$f(x) = F'(x)$$

La función $F(x)$ que así se obtiene se llama antiderivada o primitiva de $f(x)$.

El proceso que permite hallarlo se conoce como **ANTIDERIVACIÓN** o **INTEGRACIÓN** de $f(x)$, a tal operación se le denota con el símbolo integral

$$\int$$

así

$$\int F'(x)dx = \int f(x)\,dx$$

$$si\ y\ sólo\ si\ \ F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a;b]$$

2.2. Función Primitiva

DEFINICIÓN. - Sea $f(x)$ una función real de variable real definida en un intervalo cerrado $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Se llama FUNCIÓN PRIMITIVA de $f(x)$ a otra función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$ en dicho intervalo.

$F(x) es\ primitiva\ de\ f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in [a;b]$

2.3. Integral Indefinida

DEFINICIÓN. - Se llama integral indefinida de $f(x)$ al conjunto de todas las funciones primitivas de $f(x)$ y se denota por:

$$\int f(x)dx$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se cumple que:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Donde:

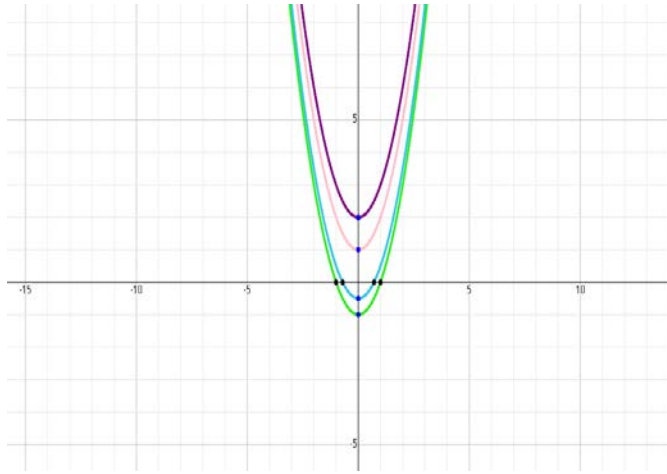
$\int$	se llama símbolo de la integral
$f(x)\,dx$	se llama elemento de integración
$f(x)$	se llama integrando

La diferencial "$d\,x$" nos indica que "x" es la variable de integración.

OBSERVACIÓN. - Gottfried Leibniz, filósofo y matemático alemán, escribe por primera vez el símbolo de la integral el 29 de octubre de 1675.

La función primitiva F(x) no es única, pues toda función primitiva de $f(x)$ tiene la forma F(x) + C, llamada integral indefinida de la función $f(x)$, donde C es una constante arbitraria llamada constante de integración.

El significado geométrico de la integral indefinida es: la Integral Indefinida representa una familia de curvas, cada una de las cuales se obtiene asignándole valores particulares a la constante de integración.



Sabemos que F(x) + C es la integral indefinida de $f(x)$ sí y sólo sí:

$$(\mathrm{F(x)} + \mathrm{C})' = \mathrm{f(x)} \iff \int f(x)\,dx = \mathrm{F(x)} + \mathrm{C}$$

Derivando a ambos miembros:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

Por tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

Además

$$\frac{d}{dx}(F(x)+C)=f(x) \Leftrightarrow d\,(F(x)+C)=f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow d\,F(x)\;=f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int d\,F(x)\;=\int f(x)dx\;=F(x)+C$$

Luego

$$\int d\,F(x)\;=F(x)+C$$

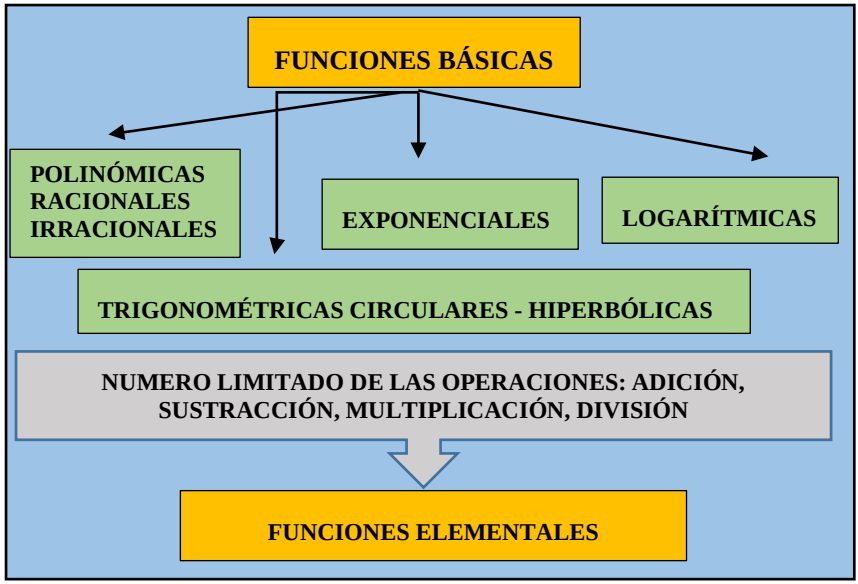
$$\int \frac{d}{dx}F(x)dx\;=F(x)+C$$

2.4. Función Elemental

DEFINICIÓN. - Llamamos funciones elementales a aquellas funciones que están formadas por un número finito de operaciones aritméticas, de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, así como sus composiciones de funciones

Las funciones elementales se pueden clasificar como: funciones polinómicas, funciones a trozos, valor absoluto de funciones y funciones racionales.

El concepto de funciones elementales fue desarrollado por JOSEPH LIOUVILLE entre 1833 y 1841



NACIMIENTO DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Debemos a Johann Heinrich Lambert (1728-1777) la genialidad de definir las *funciones hiperbólicas*.

Después de que muchos matemáticos a lo largo de 100 años no lo lograran, Lambert percibió una dualidad en el comportamiento de la circunferencia (radio =1), la hipérbola

equilátera (reducida), las funciones circulares (seno, coseno, etc) y las *funciones hiperbólicas*, que él iba a definir.

En la matemática prehelénica la trigonometría trataba de las medidas de los ángulos y lados de los triángulos. Los griegos extienden el estudio trigonométrico a las relaciones entre los ángulos centrales en un círculo y las longitudes de los arcos que subtienden. Se considera a Hiparco de Nicea (siglo II a.C.) como el padre de la trigonometría por componer la primera tabla de trigonometría tomando como medida del ángulo central del círculo los 360º como hacemos en la actualidad (probablemente debido al uso que ya se hacía en la astronomía babilónica, cuyo sistema de numeración era sexagesimal y posicional).

Pero el actual concepto de *seno* es debido a los escritores de los *Siddhantas* (Sistemas astronómicos), en la India en el siglo IV, quienes trataron el estudio de *la correspondencia entre la mitad de la cuerda de la circunferencia y la mitad del arco central subtendido.*

http://historiasdematematicas.blogspot.com/2017/04/el-nacimiento-de-las-funciones.html

TEOREMA

Si $\frac{dF(x)}{dx} = 0, \ \forall x \in I$, entonces F(x) es constante en I.

Demostración

El teorema afirma que una curva que tiene tangente horizontal en todo punto de un intervalo, es una recta horizontal.

Supongamos que F(x) no es constante, entonces debe ser estrictamente creciente o decreciente en I, consideremos x_1, x_2 en I tal que $x_2 > x_1$

luego $F(x_1) \neq F(x_2)$, usando el teorema de valor medio, existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que

$$F'(x_0) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

como

$$F'(x) = 0 \, , \forall x \in I$$

entonces

$$F'(x_0) = 0$$

luego

$$F(x_2) = F(x_1) \qquad \text{lo cual es absurdo.}$$

TEOREMA

Sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ dos primitivas de la función f(x) en (a, b). Entonces, para todo x de (a, b), ellas se diferencian en una constante.

Demostración

Sea

$$H(x) = F_1(x) - F_2(x) \Rightarrow H'(x) = F'_1(x) - F'_2(x)$$

$$\Rightarrow H'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow H'(x) = 0$$

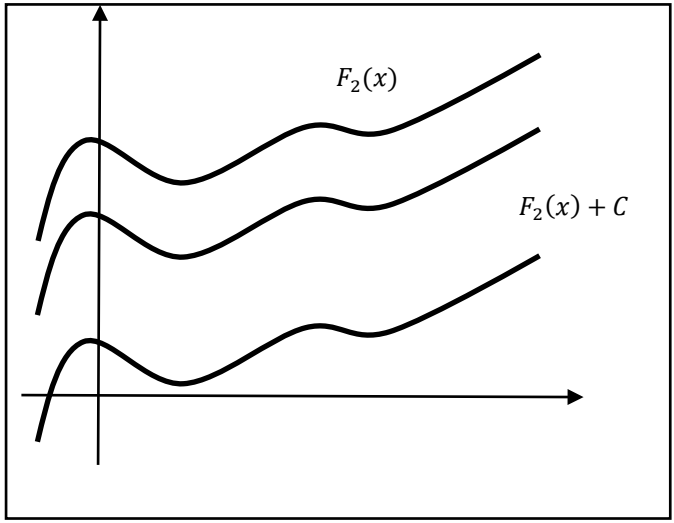
$$\Rightarrow H(x) = C$$

Por lo tanto

$$C = F_1(x) - F_2(x)$$

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Geométricamente: la gráfica de $y = F_2(x) + C$ se obtiene de la gráfica de $F_1(x)$, trasladándola a lo largo del eje OY en una cantidad C; esto no cambia la pendiente de la tangente.



La derivada de una función elemental siempre es una función elemental; sin embargo, la primitiva de una función elemental no siempre puede expresarse mediante un número finito de funciones elementales.

Para calcular la integral indefinida se construyen tablas de integrales conocidas, llamadas integrales inmediatas. Para determinar la integral indefinida, comparamos la expresión diferencial dada con la tabla, si se encuentra registrada en ella, se conoce su integral; si no está registrada, usaremos algunos métodos o técnicas para reducir a una de las formas registradas.

TEOREMA DE LINEALIDAD

a.) $\int [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} \quad \pm \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$

b.) $\int \propto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \propto \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$, $\forall \propto \in \mathbb{R}$

Ejemplos

1.) $\int \left[13x^3 + Sen(x) - \sqrt{27}e^{Sen(3x)}\right]dx$

$$= 13\int x^3 dx + \int Sen\,(x)dx - \sqrt{27}\int e^{Sen(3x)}dx$$

2.) $\int \dfrac{Sen(2\,x) - \sqrt{x}}{\mathrm{Tan}(x + \mathrm{ArcTan}(x))}dx$

$$= \int \frac{Sen(2\,x)}{\mathrm{Tan}(x + \mathrm{ArcTan}(x))} - dx \int \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{Tan}(x + \mathrm{ArcTan}(x))}dx$$

3.) $\int \dfrac{Sen(\,x^3)}{\mathrm{Ta\,n}(x)}dx \neq \dfrac{\int Sen(x^3)dx}{\int \mathrm{Tan}\ (x)\,dx}$

4.) $\int \sqrt{4x^5}.\ Ln(\mathrm{Exp}(x) + +L\mathrm{n}(\mathrm{x}))dx$

$$\neq \int \sqrt{4x^5}dx\ .\ \int Ln(\mathrm{Exp}(x) + \mathrm{l\,n}(x))\,dx$$

2.5. Integrales Inmediatas

Las integrales que se presentan a continuación son inmediatas, pues basta con aplicar las reglas de derivación a los segundos miembros para justificarlas.

1	$\int dx = x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , n \neq -1$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \mathrm{Ln}(\lvert x \rvert) + C$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{Ln}\, a} + C \ , a > 0 \ , a \neq 1$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int sen\ x\ dx = -\mathrm{Cos}\, x + C$
7	$\int \mathrm{Cos}\, x\, dx = sen\ x + C$
8	$\int \mathrm{Tan}\ x\, dx = -ln\lvert \mathrm{Cos}\, x \rvert + C$
9	$\int \mathrm{coTan}\ x\, dx = ln\lvert sen\ x \rvert + C$
10	$\int \mathrm{Sec}\ x\, dx = ln\lvert \mathrm{Sec}\, x + tag\ x \rvert + C$ $= ln\left\lvert tag\ \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
11	$\int csx\ \ x\, dx = ln\lvert \mathrm{csc}\, x - cotag\ x \rvert + C$ $= ln\left\lvert tag\ \left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert + C$

12	$\int sen^2\ x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\ 2x}{4} + C$ $= \frac{1}{2}(x - Sen\ x.\mathrm{Cos}\,x) + C$
13	$\int Cos^2\ x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{Sen\ 2x}{4} + C$
14	$\int Sec^2\ x\,dx = \mathrm{Tan}\,x + C$
15	$\int Csc^2\ x\,dx = -\ \mathrm{CoTan}\,x + C$
16	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{ArcTan}\frac{x}{a} + C\,, a > 0$
17	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C\,, \lvert x\rvert > a$
18	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C\,, \lvert x\rvert < a$
19	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = arc\ sen\ \frac{x}{a} + C\,, a > 0$ $= -\ arc\ cos\frac{x}{a} + C, a > 0$
20	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \mathrm{Ln}\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
21	$\int senh(x)\,dx = \ \mathrm{Cosh}(x) + C$
22	$\int cosh(x)\,dx = \mathrm{Senh}(x) + C$
23	$\int tagh(x)\,dx = \mathrm{Ln}\ \lvert\mathrm{Cosh}(x)\rvert + C$
24	$\int CoTanh(x)\,dx = \mathrm{Ln}\ \lvert\mathrm{Senh(x)}\rvert + C$

EJEMPLOS

Determinar el equivalente de cada una de las integrales

1.) $\int(3x+2020)dx$

Resolución

$$\int(3x+2020)dx = \int 3xdx + \int 2020dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 2020x + C$$

2.) $\int\left(2020^{2020} - \frac{4\sqrt{3}}{\left(\sqrt[3]{2}-3\right)x} + 19^x - 2Tanx\right)dx$

Resolución

$$\int\left(2020^{2020} - \frac{4\sqrt{3}}{\left(\sqrt[3]{2}-3\right)x} + 19^x - 2Tanx\right)dx$$

$$= \int 2020^{2020}dx - \int \frac{4\sqrt{3}}{\left(\sqrt[3]{2}-3\right)x}dx + \int 19^x dx - 2\int Tanx\,dx$$

$$= 2020^{2020}x - \frac{4\sqrt{3}}{\left(\sqrt[3]{2}-3\right)}ln|x| + \frac{19^x}{\mathrm{Ln}(19)} + 2\,Ln(cos\,x) + C$$

3.) Consideremos $F(x) = \int (3x-7)(x+1)(x+2)dx$ tal que F(0) = - 1, determine el valor de F(-1) - 13.

Resolución

$$F(x) = \int (3x-7)(x+1)(x+2)dx$$

$$= \int (3x^3 + 2x^2 - 15x - 14)dx$$

$$F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} - 14x + C$$

Pero $F(0) = -1$ entonces $C = -1$

$$F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} - 14x - 1$$

$$F(-1) - 13 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{15}{2} + 14 - 1 - 13 = -\frac{89}{12}$$

4.) Se estima que dentro de t meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $4 + 5t^{\frac{2}{3}}$ personas por mes. Si la población actual es 10 0000 personas. ¿Cuál será la población dentro de 8 meses? (Hoffmann-Bradley, 1995).

Resolución

$$\frac{dP(t)}{dt} = 4 + 5t^{\frac{2}{3}}, \qquad P(0) = 10\,000$$

$$P(t) = \int \left(4 + 5t^{\frac{2}{3}}\right) dt = 4t + 3t^{\frac{5}{3}} + C$$

$$P(0) = 10\,000 \Longrightarrow C = 10\,000$$

$$P(t) = 4t + 3t^{\frac{5}{3}} + 10\,000$$

Dentro de 8 meses la población será

$$P(8) = 4(8) + 3(8^{\frac{5}{3}}) + 10\,000 = 10\,128$$

5.) Sabiendo que

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x)dx + C$$

determine

a) el equivalente de $F''(x) = f(x)$.

b) la función F(x) en forma explicita, si $F'''(x) = 2x^4 + 7$.

Resolución

$$a)\ F(x) = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right) dx + \ C_2$$

$$b)\ F(x) = \int \left(\int \left(\int (2x^4 + 7)\, dx + C_1\right) dx + C_2\right) dx + C_3$$

$$F(x) = \frac{2x^7}{210} + \frac{7x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

6.) Después de "t" horas de operación una mina de carbón está produciendo carbón a razón de $40 + 2t - \frac{1}{5}t^2$ toneladas de carbón por hora. Encuentre una fórmula que describa la producción total de la mina después de "t" horas de operación. (Goldstein-Lay-Schneider, 1990).

Resolución

$$\frac{\mathrm{dP(t)}}{\mathrm{dt}} = 40 + 2\mathrm{t} - \frac{1}{2}t^2$$

$$P(t) = 40\mathrm{t} + \mathrm{t}^2 - \frac{1}{6}t^3 + C$$

7.) Encuentre una función y = f(x) cuya gráfica pase por el punto (π; -1) y también satisfaga dy/dx = 1 – 6 sen (3x).

(Dennis G. Zill – Warren S. Wright, 2011)

Resolución

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 1 - 6\,\mathrm{sen}\,(3\mathrm{x}) \;\Rightarrow y = \mathrm{x} - 2\cos\,(3\mathrm{x}) + C$$

$$y(\pi) = \pi - 2\cos(3\pi) + C = -1 \;\Rightarrow C = 1 - \pi$$

$$y = \mathrm{x} - 2\cos\,(3\mathrm{x}) + 1 - \pi$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Evalúe las siguientes integrales:

   1.1. $\int \left(x + \sqrt{x^{\frac{2}{3}}} \right) x dx$

   1.2. $\int \frac{(z - 2 - z^4)^5}{z^6} dz$

2. Determine $f(x)$ si

   2.1. $f''(x) = \frac{x^4+1}{x^3}$

   2.2. $f''(x) = 2\sqrt[3]{x+1}$

   (Purcell, Varverg y Rigdon, 2001)

3. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{2g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{2[g(x)]^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} + C$$

   (Purcell, Varverg y Rigdon, 2001)

4. De la tabla de integrales inmediatas presentadas anteriormente, demuestre los resultados correspondientes a los numerales: 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18.

CAPÍTULO N° 3

MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Generalmente utilizamos en forma sinónima los términos de: método y técnica para indicar a algo o como efectuar.

3.1. Método

DEFINICIÓN. - Es el proceso que se utiliza para realizar una actividad basada en principios establecidos. Se refiere a la forma de desarrollar un trabajo para llegar al objetivo final. Un método debe ser sistemático y ordenado para lograr obtener el resultado deseado.

Los métodos pueden ser descriptivos, analíticos/deductivo e inductivo.

3.2. Técnica

DEFINICIÓN. - Es el conjunto de procedimientos utilizados para obtener el objetivo deseado, es decir que son las diferentes herramientas utilizadas de acuerdo con el método para concluir una tarea con éxito.

3.3. Diferencias Método y Técnica

Método	Técnica
El método incluye diversas herramientas o técnicas para lograr un fin específico.	Son las herramientas para realizar algo y que su vez, forman parte de un método.
Es lo que se tiene planeado, la forma diseñada para conseguir un objetivo.	Es el conjunto de saberes prácticos o procedimientos para obtener el resultado deseado.
El método establece las reglas y criterios a seguir para el logro de objetivos y metas.	Son acciones realizadas de acuerdo a las reglas y criterios establecidos por el método a seguir.
Su función es delimitar las técnicas más adecuadas para lograr un fin específico	Su función es ayudar a desarrollar el método
Definen la secuencia de pasos para ejecutar una tarea.	Son los pasos específicos a seguir para ejecutar una tarea.

Fuente: https://diferencias.eu/entre-metodo-y-tecnica/, 25 de abril, 2020

En el presente manual se utilizan en forma indistinta los significados de estas palabras para el Cálculo de las Integrales.

3.4. Técnicas de Integración

3.4.1. Integración Directa

Consiste en evaluar una integral dada utilizando los conocimientos básicos del álgebra, geometría y/o trigonometría, así como los teoremas y la tabla de integrales inmediatas presentadas líneas arriba.

Ejemplos: determinar la integral de:

1) $\int \frac{3x+7}{7x}\, dx$

Resolución

$$\int \frac{3x+7}{7x}\, dx = \int \left(\frac{3x}{7x} + \frac{7}{7x}\right) dx$$

$$= \int \frac{3x}{7x}\, dx + \int \frac{7}{7x} dx$$

$$= \int \frac{3}{7}\, dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{3}{7}x + C_1 + Ln|x| + C_2$$

$$= \frac{3}{7}x + Ln|x| + C$$

2) $\int \frac{3x+7}{7x+3}\, dx$

Resolución

$$\int \frac{3x+7}{7x+3}\, dx = \int \left(\frac{3}{7} + \frac{40}{49}\frac{7}{7x+3}\right) dx$$

$$= \int \frac{3}{7} dx + \frac{40}{49}\int \frac{7}{7x+3}\, dx$$

$$= \frac{3}{7}x + \frac{40}{49}\, Ln|7x+3| + C$$

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x^2-57}{5x}\, dx$

Resolución

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+x^2-57}{5x}\, dx = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{5x}\, dx + \int \frac{x^2}{5x}\, dx - \int \frac{57}{5x}\, dx$$

$$= \int \frac{x^{-2/3}}{5}\, dx + \int \frac{x}{5}\, dx - \int \frac{57}{5x}\, dx$$

$$= \frac{3x^{1/3}}{5} + \frac{x^2}{10} - \frac{57}{5} ln|x| + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar los resultados de

1.) $\int \mathrm{Tan}(3x)dx$

2.) $\int \mathrm{Sen}(4x-2)dx$

3.) $\int \frac{\sqrt{3}}{2+5x^2}dx$

4.) $\int 7\left(\sqrt{5}-3\right)^{2x}dx$

5.) $\int 7\left(\sqrt{5}x-3\right)^{5}dx$

6.) $\int \frac{\sqrt{3}}{2-5x^2}dx$

7.) $\int (2\mathrm{Sen}(x)-3\,\mathrm{Cos}(x))^2dx$

8.) $\int -9\sqrt{\mathrm{Sen}\,(3x)}.\mathrm{Cos}\,(3x)dx$

9.) $\int \left(6-\sqrt{\sqrt{3x}-\,3x}\right)^{3}dx$

3.4.2. Integración por Sustitución o Cambio de Variables

Consiste en realizar un cambio de variable en forma adecuada de tal manera que resulte una integral a que pueda resolver usando en forma directa, se puede usar el siguiente esquema teórico

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{f(x)dx} &= \int \boldsymbol{f\big(u(t)\big)u'(t)dt} \\ &= \int \boldsymbol{h(u)du = H(u) + C} \\ &= \boldsymbol{H\left(u^{-1}(x)\right) + C}\end{aligned}$$

Ejemplos: determinar el equivalente de

1) $\boldsymbol{I = \int \frac{Sen^3(x)\,dx}{\sqrt[5]{Cos^3(x)}}}$

Resolución:

$u = \mathrm{Cos}(x) \Rightarrow du = -Sen(x)dx$

$$I = \int \frac{(1 - Cos^2(x))Sen(x)\,dx}{\sqrt[5]{Cos^3(x)}} = -\int \frac{1-u^2}{\sqrt[5]{u^3}}\,du$$

$$= -\int u^{-\frac{3}{5}}\,du + \int u^{\frac{7}{5}}\,du$$

$$= -\frac{5}{2}u^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{12}u^{\frac{12}{5}} + C$$

$$= -\frac{5}{2}.\sqrt[5]{Cos^2(x)} + \frac{5}{12}\sqrt[5]{Cos^2(x)} + C$$

2) $\boldsymbol{I = \int \sqrt{Tan^3(x)\,.Sec^4(x)}\,dx}$

Resolución:

$$u = Tan\,(x) \implies du = \mathrm{Sec}^2(x)\,dx$$

$$I = \int \sqrt{\mathrm{Tan}^3(x)}\,\mathrm{Sec}^2(x)\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{\mathrm{u}^3}\,\mathrm{du}$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{u}^5} + C = \frac{2}{5}\sqrt{Tan^5(x)} + C$$

3) $\boldsymbol{I = \int x^{2x}(Ln(x)+1)\,dx}$

Resolución:

$$u = x^{2x} \implies du = 2x^{2x}(\mathrm{Ln}\,x + 1)^2\,dx$$

$$I = \int x^{2x}(\mathrm{Ln}\,x + 1)\,dx = \int \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}u + C$$

$$= x^{2x} + C$$

4) $\boldsymbol{I = \int (4x-7)Tan\left(2x^2-7x+7\right)\,dx}$

Resolución:

$$u = 2x^2 - 7x + 7 \Longrightarrow du = (2x - 7^2)dx$$

$$I = \int (4x-7)\mathrm{Tan}(2x^2-7x+7)\,dx = \int \mathrm{Tan}(u)\,du$$

$$= Ln|\mathrm{Sec}(u)| + C$$

$$= Ln|\mathrm{Sec}\,(2x^2-7x+7)| + C$$

5) $\boldsymbol{\int (2x-1)Senh\left(x^2-x\right)\,dx}$

Resolución

Hacer $x^2 - x = z \Longrightarrow dz = (2x-1)dx$

luego la integral se escribe

$$\int (2x-1)\mathrm{Senh}(x^2-x)\,dx = \int \mathrm{Senh}(z)dz$$

$$= \mathrm{Cosh}(z) + C = Cosh(x^2 - x) + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar los resultados de

1. $\int \mathrm{x}^{\mathrm{x}}(\mathrm{Ln}\,(x) - 7)\,\mathrm{dx}$ $\qquad sug\ z = \mathrm{x}^{\mathrm{x}}$

2. $\int \mathrm{e}^{7\mathrm{x}+\mathrm{e}^{7\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$ $\qquad sug\ z = \mathrm{e}^{7\mathrm{x}}$

3. $\int Sen\,(x).Cos(Cos(\mathrm{x}).Cos(Sen(\mathrm{Cos}(\mathrm{x}))\ dx$

Sug. Hacer dos cambios de variable.

4. $\int \frac{(3\mathrm{x}^2 - \mathrm{Cos}(\mathrm{x})).\mathrm{Sen}\sqrt{\mathrm{x}^3 - Sen(x)}}{\sqrt{\mathrm{x}^3 - Sen(x)}}.Ln\left(\mathrm{Cos}\ \left(\sqrt{\mathrm{x}^3 - Sen(x)}\right)\right)dx$

$sug.:\ hacer\ cos\ \left(\sqrt{\mathrm{x}^3 - Sen(x)}\right) = z$

5. $Si\quad F(\mathrm{x}) = \int \frac{\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}+4}}{9.5^{\mathrm{x}}+4.5^{-\mathrm{x}}}\mathrm{dx}\ \ tal\ que\quad \mathrm{y}\ \ F\left(\mathrm{Log}_5\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{4}\ \frac{1}{6.Ln(5)} + 1$, determine el valor de F(0). $Sug.: 5^{\mathrm{x}} = z$

3.4.3. Integración por Partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Generalmente se escribe por:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Llamada ***fórmula de integración por partes***, se utiliza para transformar una integral no inmediata en otra integral que sea inmediata o al menos, más sencilla que la del primer miembro de la igualdad anterior.

No existe regla alguna para determinar qué integrales es conveniente resolver por partes, como tampoco para elegir a u o dv

OBSERVACIONES:

1. Puede suceder que una integral particular requiera aplicaciones repetidas de integración por partes.
2. El método de integración por partes con frecuencia se utiliza cuando el integrando contiene logaritmos, funciones trigonométricas inversas y productos, algunos de estas integrales son:

$\int x^n.sen(ax)dx$	$\int x^n.cos(ax)dx$
$\int x^n.ln(ax)dx$	$\int x^n.arc\ sen(ax)dx$
$\int x^n.e^{ax}dx$	$\int x^n.arccos(ax)dx$

Usando el método de integración por partes determinar las primitivas de cada una de las expresiones presentadas en cada ejemplo.

Ejemplos: utilice integración por partes para evaluar cada integral

1.) $\int x.Sen(x)\,dx$

Resolución:

$u = x \implies du = dx$

$dv = \text{Sen}(x)\,dx \implies v = \int Sen(x)\,dx = -\text{Cos}(x)$

luego

$$\int x.Sen(x)\,dx = -x.\text{Cos}(x) + \int \text{Cos}(x)\ \ dx$$

$$= -x.\text{Cos}(x) + Sen\,(x) + C$$

2.) $\int \sqrt{x}.\,\mathrm{Ln}(x)\ dx$

Resolución:

$$\mathrm{u} = \mathrm{Ln}(x) \implies \mathrm{du} = \frac{1}{x}\mathrm{dx}$$

$$\mathrm{dv} = \sqrt{\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} \implies \mathrm{v} = \int \sqrt{\mathrm{x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

Luego

$$\int \sqrt{x}.\,\mathrm{Ln}(x)\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\mathrm{Ln}(x) - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3x}\ dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\mathrm{Ln}(x) - \frac{4}{9}\sqrt{x^3}\,\mathrm{Ln}(x) + C$$

3.) $\int Arc\,\mathrm{Tan}\left(\frac{1}{x}\right)\ dx$

Resolución:

Usando identidades trigonométricas inversas

$$Arc\,\mathrm{Tan}\left(\frac{1}{x}\right) = ArcCotan(x)$$

luego se tiene

$$\int Arc\,\mathrm{Tan}\left(\frac{1}{x}\right)\ dx = \int Arc\,\mathrm{coTan}(x)\ dx$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{Arc\,CoTan}(x) \implies \mathrm{du} = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx}$$

$$\mathrm{dv} = \mathrm{dx} \implies \mathrm{v} = \int dx = x$$

Luego

$$\int Arc\,\mathrm{Tan}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \int Arc\,\mathrm{Cotan}(x)\,dx$$

$$= x\,Arc\,Cotan\,(x) + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\,Arc\,Cotan\,(x) + \frac{\mathrm{Ln}(1+x^2)}{2} + C$$

4.) $\int Cos\,(\mathrm{Ln}(x))\,dx$

Resolución:

A) Cambio de variable

$$z = \mathrm{Ln}(x) \implies dz = \frac{1}{x}dx$$

$$\int Cos\,(\mathrm{Ln}(x))\,dx = \int e^z Cos(z)dz$$

B) Integración por partes

$$u = \mathrm{Cos}(z) \implies du = -Sen(z)\,dz$$

$$dv = e^z dz \implies v = \int e^z dz = e^z$$

luego

$$\int Cos\ (\text{Ln}(x))\ dx = \int e^z Cos(z) dz$$

$$= e^z\ \text{Cos}(z) + \int e^z Se\, n(z)\, dz \quad (*)$$

Usando nuevamente integración por partes a la segunda integral

$$\int e^z Sen(z) dz$$

$$u = \text{Sen}(z) \implies du = Cos(z)\, dz$$

$$dv = e^z dz \implies v = \int e^z dz = e^z$$

luego

$$\int e^z Sen(z) dz = e^z\ \text{Sen}(z) - \int e^z Co\, s(z)\, dz$$

Reemplazando en (*)

$$\int Cos\ (\text{Ln}(x))\ dx = e^z\ \text{Cos}(z) + \int e^z Sen(z) dz$$

$$= e^z \operatorname{Cos}(z) + e^z \operatorname{Sen}(z) - \int e^z Cos(z) dz$$

Recordemos que z = Ln(x), de donde se tiene

$$\int Cos(\operatorname{Ln}(x))\, dx = \operatorname{xCos}(\operatorname{Ln}(x)) + \operatorname{x}Sen(\operatorname{Ln}(x)) - \int \operatorname{Cos}(\operatorname{Ln}(x))\, dx$$

$$2\int Cos(\operatorname{Ln}(x))\, dx = \operatorname{xCos}(\operatorname{Ln}(x)) + \operatorname{x}Sen(\operatorname{Ln}(x))$$

Por lo Tanto

$$\int Cos(\operatorname{Ln}(x))\, dx = \frac{\operatorname{xCos}(\operatorname{Ln}(x)) + \operatorname{x}Sen(\operatorname{Ln}(x))}{2} + C$$

5.) $\int ArcSen(x).ArcCos(x)dx$

Resolución:

$u = ArcSen(x).ArcCo\,s(x) \Longrightarrow du$

$$= \left(\frac{Arc\,\operatorname{Cos}(x) - ArcSe\,n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$dv = dx \Longrightarrow v = \int dx = x$

luego

$$\int ArcSen(x).ArcCos(x)dx =$$

$$= x.ArcSen(x).ArcCos(x) - \int x\left(\frac{ArcCos(x) - ArcSen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$$= x.ArcSen(x).ArcCos(x) - \int x.\frac{\text{Arc Cos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int x.\frac{ArcSen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (*)$$

Evaluaremos por el método de integración por partes, las dos integrales últimas, así

$$\int x.\frac{\text{Arc Cos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}.\text{ArcCos}(x) - \int dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}.\text{ArcCos}(x) - x$$

$$u = \text{ArcCos}(x) \Longrightarrow du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Longrightarrow dx = \sqrt{1-x^2}$$

$$\int x.\frac{ArcSen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\sqrt{1-x^2}.\text{ArcSen}(x) + \int dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}.\,\text{ArcSen}(x) + x$$

$$u = \text{ArcCos}(x) \Longrightarrow du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Longrightarrow dx = \sqrt{1-x^2}$$

Reemplazando en (*)

$$= x.\,ArcSen(x).\,Arc\,\text{Cos}(x) + \sqrt{1-x^2}.\,ArcCos(x) \; + x - \sqrt{1-x^2}.\,\text{ArcSen}(x) + x \; + C$$

$$= x.\,ArcSen(x).\,\text{Arc Cos}(x) + \sqrt{1-x^2}.\,(ArcCos(x) - \text{ArcSen}(x)) + 2x \; + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Utilice integración por partes, el número de veces que sea necesario, para evaluar cada integral

1.) $\int \mathrm{xSen}(x).\mathrm{Co\,s}^2(x)\,dx$ 2.) $\int \mathrm{x}(3x+10)^{49}\,dx$

3.) $\int(\mathrm{Ln}(x))^5\,dx$ 4.) $\int Sen\,(x)\,.Sen\,(3x)\,dx$

5.) $\int x^4\mathrm{e}^{5x}\,dx$ 6.) $\int x^5\,\mathrm{ArcTan}(3x^2)\,dx$

7.) Supóngase que se quiere calcular la integral $\int e^{5x}\big(4\,\mathrm{Cos}(7x)+6Sen(7x)\big)dx$. De su experiencia sabe que el resultado será de la forma $e^{5x}\big(C_1\,\mathrm{Cos}(7x)+C_2Sen(7x)\big)+C_3$. Determine los valores de $C_1\ y\ C_2$

8.) Considere $y=f^{-1}(x)$, demuestre la siguiente igualdad $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x)-\int f(y)dy$

9.) Utilice los resultados del ejercicio (8) para evaluar:

a.) $\int \mathrm{Ln}(x)\ dx$

b.) $\int ArcSen(x)\ dx$

3.4.4. Integración por Partes en Forma Tabular

Este método es una variante de la integración por partes y se aplica a integrales que son el producto de dos funciones P(x) es polinomio y la otra ciertos tipos de funciones trascendentes Q(x).

Consiste en derivar el polinomio hasta obtener la derivada igual a cero e integrar la función trascendente tantas veces como se ha derivado el polinomio. El resultado de la integral será un grupo de términos que son el producto de las respectivas derivaciones e integraciones, según unas reglas de agrupación y signos, como se detalla en las siguientes tablas.

Así, consideremos evaluar la integral, usando integración por partes mediante la técnica de integración por partes en forma tabular.

$$\int 12.x^5.e^{3x}\ dx$$

Para usar esta técnica se construye una tabla como se muestra a continuación:

P(x) y sus derivadas	**Signo**	**Q(x) y sus integraciones**	**Término**
x^5	+	e^{3x}	
$5x^4$	−	$3^{-1}.e^{3x}$	$+3^{-1}.x^5e^{3x}$
$20x^3$	+	$3^{-2}.e^{3x}$	$-5.3^{-2}.x^4e^{3x}$
$60x^2$	−	$3^{-3}.e^{3x}$	$+20.3^{-3}.x^3e^{3x}$
$120x$	+	$3^{-4}.e^{3x}$	$-60.3^{-4}.x^2e^{3x}$
120	−	$3^{-5}.e^{3x}$	$+120.3^{-5}.x.e^{3x}$
0		$3^{-6}.e^{3x}$	$-120.3^{-6}.e^{3x}$

$$\int 12x^5e^{3x}\,dx = \left(\frac{x^5}{3} - \frac{5}{9}x^4 + \frac{20}{27}x^3 - \frac{60}{81}x^2 + \frac{120}{243}x - \frac{120}{729}\right)e^{3x} + C$$

Puede ver los videos cuyas direcciones son:

https://www.youtube.com/watch?time_continue=172&v=TpkldNa011c&feature=emb_logo

https://www.youtube.com/watch?v=69c_z29PTzY

https://www.youtube.com/watch?v=ei4FAqHu0Xk

3.4.5. Integración de Funciones Especiales

Presentaremos resultados (o fórmulas) para funciones integrando que tiene una forma especial o determina.

CASO 1

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx \;, a \neq 0$$

Para encontrar una respuesta a esta integral podemos proceder con una de estas técnicas:

1.) Reconstruir el numerador de tal forma que se encuentra la derivada del denominador, generando dos integrales una que es inmediata: logaritmo natural, y la otra de arco tangente.

2.) Completar cuadrado perfecto en el denominador, para obtener una de las siguientes integrales directas, previo cambio de variable:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\text{ArcTan}(\frac{x}{a}) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\text{Ln}\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Ejemplos: evaluar las siguientes integrales

1.) $\boldsymbol{I = \int \frac{x+2}{x^2+x+3}\, dx}$

Resolución:

1er Método: Completando cuadrado perfecto el denominador

$$x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

$$\text{hacer } x + \frac{1}{2} = z \implies dx = dz$$

Luego se tiene

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+3}\, dx = \int \frac{z + \frac{3}{2}}{z^2 + \frac{11}{4}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2z+3}{z^2 + \frac{11}{4}}\, dz$$

$$= \int \frac{z}{z^2 + \frac{11}{4}}\, dz + \frac{1}{2} \int \frac{3}{z^2 + \frac{11}{4}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\, ln\left|z^2 + \frac{11}{4}\right| + \frac{3}{\sqrt{11}}\, ArcTan\left(\frac{2z}{\sqrt{11}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\, \text{Ln}\left|\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right| + \frac{3}{\sqrt{11}}\, \text{ArcTan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right) + C$$

2do Método: reconstruyendo el denominador tal que aparezca la derivada del denominador, después efectuar reducciones algebraicas.

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+x+3}\,dx = \int \frac{\frac{2x+1-1}{2}+2}{x^2+x+3}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\text{Ln}\,(x^2+x+3) + \frac{3}{\sqrt{11}}\,\text{ArcTan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\text{Ln}\,(x^2+x+3) + \frac{3}{\sqrt{11}}\,\text{ArcTan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)$$

2.) $\boldsymbol{I = \int \frac{3x}{2x^2-5x+7}\,dx}$

Resolución:

Hallando el diferencial del denominador

$$d(2x^2-5x+7) = 4x-5$$

$$\int \frac{3x}{2x^2-5x+7}\,dx = \int \frac{3\left(\frac{4x-5+5}{4}\right)}{2x^2-5x+7}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+7}\,dx + \frac{15}{4}\int \frac{1}{2x^2-5x+7}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\mathrm{Ln}|2x^2-5x+7| + \frac{15}{2\sqrt{31}}ArcTan\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right) + C$$

3.) $\int \frac{3x-8}{-3x^2+7}\,dx$

Resolución:

$$\int \frac{3x-8}{-3x^2+7}\,dx = -\int \frac{3x-8}{3x^2-7}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{6x}{3x^2-7}\,dx + \int \frac{8}{3x^2-7}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}Ln|3x^2-7| + \frac{4}{\sqrt{21}}\,Ln\left(\left|\frac{3x-\sqrt{21}}{3x+\sqrt{21}}\right|\right) + C$$

4.) $\int \frac{0,2x-1}{\sqrt{3}x^2+7x-1}\,dx$

Resolución:

$$\int \frac{0,2x-1}{\sqrt{3}x^2+7x-1}\,dx = \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)\int \frac{x-5}{\left(x+\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{49\sqrt{3}+12}{12\sqrt{3}}}\,dx$$

hacer $\quad \mathrm{x} + \dfrac{7}{2\sqrt{3}} = w \implies dx = dw$

Por simplicidad numérica hagamos

$$\frac{49\sqrt{3} + 12}{12\sqrt{3}} = k^2$$

$$= \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right) \int \frac{\mathrm{w} - \frac{7}{2\sqrt{3}} - 5}{\mathrm{w}^2 - k^2} \, \mathrm{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right) \int \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}^2 - k^2} \, \mathrm{dx} - \left(\frac{7 + 10\sqrt{3}}{30}\right) \int \frac{1}{\mathrm{w}^2 - k^2} \, \mathrm{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{105\sqrt{3}}\right) ln(\mathrm{w}^2 - k^2) - \left(\frac{7 + 10\sqrt{3}}{60\mathrm{k}}\right) ln \left|\frac{w - k}{w + k}\right| + C$$

Por lo tanto:

$$F(x) = \left(\frac{1}{105\sqrt{3}}\right) ln(\mathrm{w}^2 - k^2) - \left(\frac{7 + 10\sqrt{3}}{60\mathrm{k}}\right) ln \left|\frac{w - k}{w + k}\right| + C$$

5.) $\int \frac{50x^3+20x}{20x^4+20x^2+40}\, dx$

Resolución:

$$\int \frac{50\mathrm{x}^3+20\mathrm{x}}{20\mathrm{x}^4+20\mathrm{x}^2+40}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{5\mathrm{x}^3+2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^2+2}\,\mathrm{dx}$$

$$\text{hacer}\quad \mathrm{x}^2 = w \;\Rightarrow 2xdx = dw$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(5\mathrm{x}^2+2)}{\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^2+2}\,.\mathrm{xdx} = \frac{1}{4}\int \frac{(5\mathrm{w}+2)}{w^2+\mathrm{w}+2}\mathrm{dw}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{5}{2}ln(w^2+\mathrm{w}+2) - \frac{arc\,tan\left(\frac{2w+1}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{5}{2}ln(\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^2+2) - \frac{arc\,tan\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}}\right\} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{5x+2}{-2x^2+3x+4}\,dx$

2.) $\int \frac{-x+8}{-x^2-x+8}\,dx$

3.) $\int \frac{-x+8}{-x^2-x+8}\,dx$

4.) $\int \frac{x+0{,}8}{8x^2-0{,}8x+0{,}8}\,dx$

5.) $\int \frac{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}{2x^2-\sqrt{5}x+\sqrt{6}}\,dx$

6.) $\int \frac{x+3}{2x^2+x+3}\,dx * \int \frac{-2x+4}{5x^2-x+2}\,dx$

7.) $\int \frac{x}{x^2-6x+9}\,dx$

8.) $\int \left(\frac{x+3}{2x^2+x+3} * \frac{-2x+4}{5x^2-x+2}\right)dx$

CASO 2

$$\int \frac{A}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

$$b\text{^}2-4ac<0\,,n\geq 2, \qquad a>0\,,n\in\mathbb{Z}^+$$

Completando cuadrado perfecto el polinomio cuadrático y realizar un cambio de variable adecuado se llega a una integral de la forma:

$$\int \frac{B}{(t^2+d^2)^n}\,dt$$

Integral que se reduce usando

$$\int \frac{1}{(t^2+d^2)^n}\,dt$$

$$= \frac{t}{2d^2(n-1)(t^2+d^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2d^2(n-1)}\int \frac{1}{(t^2+d^2)^{n-1}}\,dt$$

Ejemplos

1.) Demostrar la última igualdad.

Demostración

$$\int \frac{1}{(t^2+d^2)^n}\,dt = \frac{1}{d^2}\int \frac{t^2+d^2-t^2}{(t^2+d^2)^n}\,dt$$

$$= \frac{1}{d^2}\int \frac{1}{(t^2+d^2)^{n-1}}\,dt - \frac{1}{d^2}\int \frac{t^2}{(t^2+d^2)^n}\,dt$$

$$= \frac{1}{d^2}\int \frac{1}{(t^2+d^2)^{n-1}}\,dt + \frac{1}{d^2}\int \frac{t.\,d((t^2+d^2)^{1-n})}{2(n-1)}\,dt$$

Consideremos, con fines de reducción, solo la 2da integral, usando integración por partes se tiene que

$$\frac{1}{d^2}\int \frac{t.\,d((t^2+d^2)^{1-n})}{2(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2(n-1)d^2}\left[\frac{t}{(t^2+d^2)^{n-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+d^2)^{n-1}}\right]$$

$$\int \frac{1}{(\mathrm{t}^2+\mathrm{d}^2)^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{t}{2(n-1)\mathrm{d}^2(\mathrm{t}^2+\mathrm{d}^2)^{\mathrm{n}-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\mathrm{d}^2}\int \frac{\mathrm{dt}}{(\mathrm{t}^2+\mathrm{d}^2)^{\mathrm{n}-1}}$$

2.) $\int \frac{-2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$

Resolución

Completando cuadrados:

$$\int \frac{-2}{(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+2)^3}\,\mathrm{dx} = \int \frac{-2}{((\mathrm{x}+1)^2+1)^3}\,\mathrm{dx}$$

Hacer x + 1 = t, se obtiene

$$\int \frac{-2}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{dt} = -2\left[\frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{-t}{2(t^2+1)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}\,(**)$$

Ahora integraremos la última integral, aplicando nuevamente el mismo resultado

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)}$$

$$= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} Arc\,\mathrm{Tan}(t)$$

Reemplazando en (**)

$$\int \frac{-2}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{dt} = \frac{-t}{2(t^2+1)^2} + \frac{3}{2}\left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} Arc\,\mathrm{Tan}(t)\right]$$

Luego

$$\int \frac{-2\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+2)^3} = \frac{-(x+1)}{2((x+1)^2+1)^2} + \frac{3}{2}\left[\frac{(x+1)}{2((x+1)^2+1)} + \frac{1}{2} Arc\,\mathrm{Tan}(x+1)\right]$$

3.) $\int \frac{1/3}{(x^2-3x+9)^4}\,dx$

Resolución

$$\int \frac{1/3}{(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+9)^4}\,\mathrm{dx} = 256\int \frac{1}{((2\mathrm{x}-3)^2+27)^4}\,\mathrm{dx}$$

Reemplazando $z = 2x - 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dz$

$$\int \frac{1}{((2x-3)^2+27)^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(z^2+27)^4}\,dz$$

Integrando

$$\int \frac{1}{(z^2+27)^4}\,dz = \frac{z}{162(z^2+27)^3} + \frac{5}{162}\int \frac{1}{(z^2+27)^3}\,dz$$

Usando nuevamente la formula

$$\int \frac{1}{(z^2+27)^3}\,dz = \frac{z}{108(z^2+27)^2} + \frac{1}{36}\int \frac{1}{(z^2+27)^2}\,dz$$

$$\int \frac{1}{(z^2+27)^2}\,dz = \frac{z}{54(z^2+27)} + \frac{1}{54}\int \frac{1}{z^2+27}\,dz$$

$$\int \frac{1}{z^2+27}\,dz = \frac{ArcTan\left(\frac{z}{\sqrt{27}}\right)}{\sqrt{27}}$$

Reemplazando las integrales encontradas se tiene:

$$\int \frac{1/3}{(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+9)^4}\,\mathrm{dx}$$

$$=\frac{40\ ArcTan\left(\frac{2x-3}{\sqrt{27}}\right)}{3^{\frac{23}{2}}}$$

$$+\frac{(2x-3)(10x^4-60x^3+315x^2-675x+1458)}{59049(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+9)^3}+C$$

4.) $\int \frac{a-4}{(x^2+ax+a)^2}\,dx\,,\ a\in\langle 0;4\rangle$

Resolución:

$$\int \frac{\mathrm{a}-4}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{a})^2}\,\mathrm{dx}$$

$$=16(a-4)\int \frac{1}{((2\mathrm{x}+\mathrm{a})^2-\mathrm{a}^2+4a)^2}\,\mathrm{dx}$$

Haciendo

$$\mathrm{z}=2\mathrm{x}+\mathrm{a}\implies \mathrm{dx}=\frac{1}{2}dz;\quad b=\mathrm{a}^2-4a<0$$

$$\int \frac{1}{((2\mathrm{x}+\mathrm{a})^2-\mathrm{a}^2+4a)^2}\,\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(\mathrm{z}^2-\mathrm{b})^2}\,\mathrm{dz}$$

$$\int \frac{1}{(\mathrm{z}^2-\mathrm{b})^2}\,\mathrm{dz} = \frac{z}{-2b(\mathrm{z}^2-\mathrm{b})} + \frac{1}{-2b\sqrt{-b}} ArcTan\left(\frac{z}{\sqrt{-b}}\right) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{a}-4}{((2\mathrm{x}+\mathrm{a})^2-\mathrm{a}^2+4a)^2}\,\mathrm{dz} = \frac{16(a-4)(2\mathrm{x}+\mathrm{a})}{2(4\mathrm{a}-\mathrm{a}^2)(\mathrm{z}^2+4\mathrm{a}-\mathrm{a}^2)} + \frac{16(a-4)}{2(4\mathrm{a}-\mathrm{a}^2)\sqrt{4\mathrm{a}-\mathrm{a}^2}} ArcTan\left(\frac{2\mathrm{x}+\mathrm{a}}{\sqrt{4\mathrm{a}-\mathrm{a}^2}}\right) + C$$

5.) $\int \frac{-4a}{\left(x^2+\sqrt{3}x+a+a^2\right)^2}\,dx$, si se sabe $a \in \langle -\infty; -\frac{3}{2}\rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty\rangle$

Resolución:

$$\int \frac{-4\mathrm{a}}{\left(\mathrm{x}^2+\sqrt{3}\mathrm{x}+\mathrm{a}+\mathrm{a}^2\right)^2}\mathrm{dx} = -4\mathrm{a}(16)\int \frac{1}{\left(\left(2\mathrm{x}+\sqrt{3}\right)^2+4\mathrm{a}+4\mathrm{a}^2-3\right)^2}$$

Hacer: $z = 2x + \sqrt{3} \Rightarrow dx = dz$

$$= -4\mathrm{a}(8)\int \frac{1}{(\mathrm{z}^2+4\mathrm{a}+4\mathrm{a}^2-3)^2}dz$$

$$= -4a(8)\left[\frac{z}{(z^2+4a+4a^2-3)(4a+4a^2-3)} + \frac{1}{(4a+4a^2-3)}\int\frac{dz}{z^2+4a+4a^2-3}\right]$$

Hacer

$$r = \frac{z}{\sqrt{4a+4a^2-3}} \Rightarrow dr = \frac{dz}{\sqrt{4a+4a^2-3}}$$

$$\int\frac{dz}{z^2+4a+4a^2-3} = \frac{1}{\sqrt{4a+4a^2-3}}\int\frac{dr}{r^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4a+4a^2-3}}\text{ArcTan}(r)$$

Reemplazando las correspondientes variables se tiene:

$$\int\frac{-4a}{\left(x^2+\sqrt{3}x+a+a^2\right)^2}\,dx = \frac{-16a\ ArcTan\left(\frac{2x+\sqrt{3}}{\sqrt{-3+4a+4a^2}}\right)}{\sqrt{(-3+4a+4a^2)^3}} - \frac{4a\left(2x+\sqrt{3}\right)}{(-3+4a+4a^2)\left(x^2+\sqrt{3}x+a+a^2\right)} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{2}{(3x^2+x+4)^2}\,dx$

2.) $\int \frac{-5}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$

3.) $\int \frac{\text{Ln}\,2}{(x^2-3x+8)^3}\,dx$

4.) $\int \frac{2}{(x^2+x-a)^3}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

5.) $\int \frac{2-\sqrt{-a}}{(x^2+ax+4)^2}\,dx$

CASO 3

$$\int \frac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{(x^2+px+q)^n}}\,\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2x+p}}{\mathbf{(x^2+px+q)^n}} + \left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{Ap}}{\mathbf{2}}\right)\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x^2+px+q)^n}}\,\mathbf{dx}$$

$$\boldsymbol{p^2-4q<0\,,n\geq 2, n\in\mathbb{Z}^+}$$

Ejemplos

1.) Demostrar la igualdad anterior

Demostración

$$\int \frac{\mathrm{Ax+B}}{(\mathrm{x^2+px+q})^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{A}\left(\frac{2\mathrm{x+p-p}}{2}\right)+\mathrm{B}}{(\mathrm{x^2+px+q})^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{dx}$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{(\mathrm{x^2+px+q})^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{dx} + \left(B-\frac{\mathrm{Ap}}{2}\right)\int \frac{1}{(\mathrm{x^2+px+q})^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{dx}$$

2.) $\int \frac{x+1}{(\mathrm{x^2+4x+5})^2}\,dx$

Resolución:

$$\int \frac{x+1}{(\mathrm{x^2+4x+5})^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{(\mathrm{x^2+4x+5})^2}dx - \int \frac{dx}{(\mathrm{x^2+4x+5})^2}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4x+5)} - \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4x+5)} - \frac{ArcTan(x+2)}{2} - \frac{x+2}{2(x^2+4x+5)^2} + C$$

$$= -\frac{ArcTan(x+2)}{2} - \frac{x+3}{2(x^2+4x+5)^2} + C$$

$$= -\frac{ArcTan(x+2)}{2} - \frac{x+3}{2(x^2+4x+5)^2} + C$$

3.) $\int \frac{-2x+3}{(x^2+3x+5)^3}\, dx$

Resolución

$$\int \frac{-2x+3}{(x^2+3x+5)^3}\, dx$$

$$= -\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+5)^3} dx + 6\int \frac{1}{(x^2+3x+5)^3} dx$$

$$= \frac{1}{2(x^2+3x+5)^2} + 6\int \frac{1}{(x^2+3x+5)^3}\, dx$$

$$= \frac{1}{2(x^2+3x+5)^2} + 6\left(\frac{12\text{ArcTan}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)}{11^{\frac{5}{2}}} + \frac{(2x+3)(6x^2+18x+41)}{242(x^2+3x+5)^2}\right) + C$$

4.) $\int \frac{5x-7}{(x^2-5x+7)^4}\,dx$

Resolución:

$$\int \frac{5x-7}{(x^2-5x+7)^4}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+7)^4}\,dx + \frac{11}{2}\int \frac{1}{(x^2-5x+7)^4}\,dx$$

$$= -\frac{5}{2}\frac{1}{3(x^2-5x+7)^3} + \frac{11}{2}\int \frac{1}{(x^2-5x+7)^4}\,dx$$

$$= -\frac{5}{2}\frac{1}{3(x^2-5x+7)^3} + \frac{11}{2}\left[\frac{40\,ArcTan\left(\frac{2x-5}{\sqrt{3}}\right)}{3^{\frac{7}{2}}}\right] + \frac{11}{2}\left[\frac{(2x-5)(10x^4-100x^3+395x^2-725x+528)}{27(x^2-5x+7)^3}\right] + C$$

5.) $\int \frac{-2x-11}{(x^2-5x+8)^2}\, dx$

Resolución:

$$\int \frac{-2x-11}{(x^2-5x+8)^2}\, dx$$

$$= -\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+8)^2}\, dx - \int \frac{16}{(x^2-5x+8)^2}\, dx$$

$$= \frac{87-32x}{7(x^2-5x+8)} - \frac{64\, ArcTan\left(\frac{2x-5}{\sqrt{7}}\right)}{7^{\frac{3}{2}}} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{2x-3}{(3x^2+x+4)^2} dx$

2.) $\int \frac{-5x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx$

3.) $\int \frac{x\text{Ln}\,2 - \text{Ln}\,2}{(x^2-3x+8)^3} dx$

4.) $\int \frac{2a-1}{(x^2+x-a)^3} dx$, $a \in \mathbb{R}$

5.) $\int \frac{2-\sqrt{-a}}{(x^2+ax+4)^2} dx$

CASO 4

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{At+C}{\sqrt{at^2 \pm D}}\,dt$$

$$a > 0, \qquad b^2 - 4ac < 0,$$

La última integral se reduce a una de las siguientes integrales inmediatas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm M}}\,dx = Ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm M}\right| + N \ , M \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{M - x^2}}\,dx = ArcSen\left(\frac{x}{M}\right) + N \ , M > 0$$

Ejemplos

1.) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$

Resolución:

Derivando el polinomio cuadrático se tiene: 2x - 3, reconstruyendo el numerador

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$$

$$= 3\sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}dx$$

$$= 5\sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2} ln\left(\sqrt{(2x-3)^2-1}+2x-3\right)$$

$$= \frac{5.\,\mathrm{Ln}\left|2\left(x+\sqrt{(x-2)(x-1)}-3\right)\right|}{2} + 3\sqrt{(x-2)(x-1)} + C$$

2.) $\boldsymbol{I = \int \frac{x+7}{\sqrt{3x^2+4x+5}}\,dx}$

Resolución:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+5}}\,dx + \frac{19}{3}\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x+5}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+4x+5} + \frac{19}{3}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{11}{3}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2 + 4x + 5} + \frac{19}{3\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}\, dz, con\ z = \frac{3x + 2}{\sqrt{11}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2 + 4x + 5} + \frac{19}{3\sqrt{3}}. \text{Ln}\left(\sqrt{\frac{(3x + 2)^2}{11} + 1} + \frac{3x + 2}{\sqrt{11}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}}{3} + \frac{19\text{Ln}\left|\sqrt{(3x + 2)^2 + 11} + 3x + 2\right|}{3\sqrt{3}} + C$$

3.) $\int \frac{Ln\left(x^{x^{-1}}\right)}{\sqrt{1 - 4Ln\,(x) - (Ln\,(x))^2}}\, dx$

Resolución

Hacer $\text{Ln}(x) = z \implies \frac{1}{x}\, dx = dz$

$$\int \frac{Ln\left(x^{x^{-1}}\right)}{\sqrt{1 - 4Ln\,(x) - (ln(x))^2}}\, dx = \int \frac{z}{\sqrt{1 - 4z - z^2}}\, dz$$

$$= \int \frac{z + 2}{\sqrt{1 - 4z - z^2}}\, dz - 2\int \frac{1}{\sqrt{1 - 4z - z^2}}\, dz$$

$$= -\sqrt{1 - 4z - z^2} - 2\int \frac{1}{\sqrt{5 - (z + 2)^2}}\, dz$$

$$= -\sqrt{1 - 4z - z^2} - 2\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, dz$$

$$= -\sqrt{1 - 4z - z^2} - 2ArcSen(u)$$

$$= -\sqrt{1 - 4z - z^2} - 2ArcSen\left(\frac{z+2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{Ln}\left(x^{x^{-1}}\right)}{\sqrt{1 - 4\mathrm{Ln}(x) - \left(\mathrm{Ln}(x)\right)^2}}\, dx =$$

$$= -\sqrt{1 - 4\,\mathrm{Ln}(x) - (\mathrm{Ln}(x))^2} - 2\mathrm{ArcSen}\left(\frac{\mathrm{Ln}(x)+2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

4.) $\int \frac{\boldsymbol{Cos(x).Sen\,(x)+Sen(x)}}{\sqrt{\boldsymbol{Cos(x)+2-(Sen\,(x))^2}}}\, \boldsymbol{dx}$

Resolución

Hacer $\mathrm{Cos}(x) = t \implies -\mathrm{Sen}\,(x)\, dx = dt$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}(x).\,\mathrm{Sen}\,(x) + \mathrm{Sen}(x)}{\sqrt{\mathrm{Cos}(x) + 2 - (\mathrm{Sen}(x))^2}}\, dx = -\int \frac{t+1}{\sqrt{t+1+t^2}}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{\sqrt{t+1+t^2}}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t+1+t^2}}\, dt$$

$$= -\sqrt{\mathrm{t}+1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{t}+1+t^2}}\,\mathrm{dt}$$

$$= -\sqrt{\mathrm{t}+1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{dt}$$

$$= -\sqrt{\mathrm{t}+1+t^2} - \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{1+u^2}+u\right|$$

$$= -\sqrt{\mathrm{t}+1+t^2} - \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{1+\frac{(2t+1)^2}{3}}+\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= -\sqrt{\mathrm{Cos\,x}+1+(\mathrm{Cos\,x})^2} - \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{1+\frac{(2\,\mathrm{Cos\,x}+1)^2}{3}}+\frac{2\,\mathrm{Cos\,x}+1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= \frac{-2\sqrt{\mathrm{Cos\,x}+1+(\mathrm{Cos\,x})^2} - ln\left|2\left(\sqrt{1+\mathrm{Cos\,x}+1+(\mathrm{Cos\,x})^2}+\mathrm{Cos}\,x\right)+1\right|}{2} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+x+4}}\mathrm{dx}$

2.) $\int \frac{-5x+1}{\sqrt{-5x^2+7x+11}}\mathrm{dx}$

3.) $\int \frac{\mathrm{xLn}\,2-\mathrm{Ln}\,2}{\sqrt{5x^2+6x-3}}\mathrm{dx}$

4.) $\int \frac{2a-1}{\sqrt{x^2+x-a}}\mathrm{dx}\,,\mathrm{a}\in\mathbb{R}$

5.) $\int \frac{2-\sqrt{-a}}{\sqrt{x^2+ax+4}}\mathrm{dx}$

CASO 5

$$\int \frac{1}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$A \text{ ó } B \neq 0,\ a>0, b^2-4ac<0,$$

Si hacemos el cambio de variable:

$$\frac{1}{Ax+B}=t \Rightarrow dx=-\frac{1}{At^2}dt$$

se reduce al caso anterior.

Ejemplos

1.) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$

Resolución

Hacer el $\frac{1}{x+1}=t \implies dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+2}}\,dx = \int \frac{-t\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{(t^{-1}-1)^2+(t^{-1}-1)+2}}\,dt$$

$$= \int \frac{-1}{\sqrt{2t^2 - t + 1}}\, dt = \int \frac{-1}{\sqrt{2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}}}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{7}{16}}}\, dt = -\frac{ln\left(\sqrt{u^2 + \frac{7}{16}} + u\right)}{\sqrt{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} ln\left(\frac{\left|\sqrt{16u^2 + 7} + 4u\right|}{4}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} ln\left(\frac{\left|\sqrt{16\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + 7} + 4\left(t - \frac{1}{4}\right)\right|}{4}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} ln\left(\frac{\left|\sqrt{16\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\right)^2 + 7} + 4\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\right)\right|}{4}\right) + C$$

2.) $\int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{3x-2})\sqrt{\mathbf{x^2+2x+3}}}\,\mathbf{dx}$

Resolución

$$\text{Hacer } \frac{1}{3x-2} = \text{t} \implies \begin{cases} \text{x} = \dfrac{t^{-1}+2}{3}\,\text{dt} \\ \text{dx} = -\dfrac{1}{3t^2}\,\text{dt} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(3\text{x}-2)\sqrt{\text{x}^2+2\text{x}+3}}\,\text{dx} = \int \frac{-9}{\sqrt{43\text{t}^2+10\text{t}+1}}\,\text{dt}$$

$$= \frac{-9}{\sqrt{43}}\text{Ln}\left|\sqrt{(43t+5)^2+18}+43t+5\right| + C$$

$$= \frac{-9}{\sqrt{43}}\text{Ln}\left|\sqrt{\left(\frac{43}{3x-2}+5\right)^2+18}+\frac{43}{3x-2}+5\right| + C$$

3.) $\int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{ax-1})\sqrt{\mathbf{x^2+ax+3}}}\,\mathbf{dx}$, $\boldsymbol{a} \in \langle -\sqrt{\mathbf{12}}\,;\,\sqrt{\mathbf{12}}\rangle$

Resolución

Si a = 0

$$\int \frac{1}{(\mathrm{ax}-1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{ax}+3}}\,\mathrm{dx}$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+3}}\,\mathrm{dx} = -\mathrm{Ln}\left|x+\sqrt{\mathrm{x}^2+3}\right| + \mathrm{C}$$

Si $\mathrm{a} \neq 0$

$$\text{Hacer } \frac{1}{ax-1} = \mathrm{t} \implies \begin{cases} \mathrm{x} = \dfrac{t^{-1}+1}{a} \\ \mathrm{dx} = -\dfrac{1}{at^2}\,\mathrm{dt} \end{cases}$$

Reemplazando

$$\int \frac{1}{(\mathrm{ax}-1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{ax}+3}}\,\mathrm{dx}$$

$$= \int \frac{-a^2}{\sqrt{(4a^2+1)\mathrm{t}^2+(2+\mathrm{a}^2)\mathrm{t}+1}}\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{-\mathrm{a}^2 ln\left|2\sqrt{4\mathrm{a}^2+1}.\sqrt{\frac{(4\mathrm{a}^2+1)}{(ax-1)^2}+\frac{(4\mathrm{a}^2+2)}{ax-1}+1}+\frac{(8\mathrm{a}^2+2)}{ax-1}+\mathrm{a}^2+2\right|}{\sqrt{4\mathrm{a}^2+1}} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{1}{(x-7)\sqrt{x^2+x+7}}\,dx$

2.) $\int \frac{1}{(-2x+1)\sqrt{x^2+2x+7}}\,dx$

3.) $\int \frac{1}{(x+9)\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$

Dar condiciones para que las siguientes integrales se puedan resolver usando el **caso 5**

4.) $\int \frac{1}{(x-1/2)\sqrt{x^2+2x+a}}\,dx$

5.) $\int \frac{1}{(x-1/2)\sqrt{x^2+2x+a}}\,dx$

CASO 6

$$\int \frac{1}{(Ax+B)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$A \text{ ò } B \neq 0,\ a>0, \qquad b^2-4ac<0,$$

Si hacemos el cambio de variable:

$$\frac{1}{Ax+B}=t$$

se reduce al Caso 4, siempre que n = 2; si n ≥ 0 se utilizará integración por partes y/o Caso 7 siguiente.

Ejemplos

1.) $\int \frac{5}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$

Resolución

Hacer $\frac{1}{x+1}=z \implies \begin{cases} x=z^{-1}+1 \\ dx=-\frac{1}{z^2}dz \end{cases}$

Reemplazando

$$\int \frac{5}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = \int \frac{5z}{\sqrt{2}\sqrt{z^2+1/2}}\,dx$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{z^2 + 1/2}\right) + C$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + 1/2}\right) + C$$

2.) $\int \frac{-7}{(2x-3)^3.\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx$

Resolución

Hacer $\frac{1}{2x-3} = w \implies \begin{cases} x = \frac{w^{-1}+3}{2} \\ dx = -\frac{1}{2w^2}\,dw \end{cases}$

Reemplazando

$$\int \frac{-\left(\frac{7}{2}\right)w}{\sqrt{\left(\frac{3+w^{-1}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{3+w^{-1}}{2}\right) + 7}}\,dw =$$

$$= \int \frac{7w^2}{\sqrt{61w^2 + 14w + 1}}\,dx$$

$$= \frac{602\text{Ln}\left|\sqrt{61}\sqrt{61w^2 + 14w + 1} + 61w + 7\right|}{2.61^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{(427x - 147)\sqrt{3721w^2 + 854w + 61}}{2.61^{\frac{5}{2}}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{7}{(x-7)^2\sqrt{x^2+x+7}}\,dx$

2.) $\int \frac{-2}{(-2x+1)^3\sqrt{x^2+2x+7}}\,dx$

3.) $\int \frac{1}{(x+9)^2\sqrt{x^2-2x+9}}\,dx$

Dar las condiciones para que las siguientes integrales se puedan resolver usando el **Caso 5**

4.) $\int \frac{1}{(3x-2)^4\sqrt{x^2+2x+a}}\,dx$

5.) $\int \frac{x-a}{(x-a)^2\sqrt{x^2+2x+a}}\,dx$

6.) Será posible resolver la integral usando el **Caso 6**

$$\int \frac{3}{(\text{sen}\,(x)-1)^2\sqrt{\text{Cos}^2x+2\text{Sen}\,x+1}}\,dx$$

CASO 7 (MÉTODO ALEMÁN) Se aplica a las integrales de la forma

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Para determinar la función elemental se utiliza:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left[Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right] + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Siendo el grado de $Q_{n-1}(x)$ una unidad menos al de $P_n(x)$, entonces

$$I = \left[Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right] + \int \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

En resumen, se tiene:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Donde: $\boldsymbol{a > 0, b^2 - 4ac < 0}$,

$Q_{n-1}(x)$: polinomio de grado n-1 de coeficientes indeterminados

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} - \{0\}$

Los coeficientes de $Q_{n-1}(x)$, y el valor de λ se calculan derivando a ambos miembros de la igualdad considerada

Ejemplos

1.) $\mathbf{I} = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+7}}\,\mathbf{dx}$

Resolución

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}\,dx = \sqrt{x^2 + 2x + 7}.(Ax + C) + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}\,dx$$

Derivando:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}} = A\sqrt{x^2 + 2x + 7} + \frac{(2x + 2)(Ax + C)}{2\sqrt{x^2 + 2x + 7}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}$$

$$2x^2 = 2A(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7) + (2x + 2)(\mathrm{Ax} + \mathrm{C}) + 2\lambda$$

Usando igualdad de polinomios se determina el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4A = 2 \\ 6A + 2C = 0 \\ 14A + 2C + 2\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2};\ \ \mathrm{C} = -\frac{3}{2} \quad \lambda = -2$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}}\ \mathrm{dx}$$

$$= \sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}.\left(\frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{3}{2}\right)$$

$$- 2\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}}\ \mathrm{dx}$$

$$I = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}.\left(\frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{3}{2}\right) - 2ln\left|\sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}\,x + 1\right| + C$$

2.) $\mathrm{I} = \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}}\ \mathrm{dx}$

Resolución

$$= \sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}.\,(\mathrm{A}x^3 + Bx^2 + C\mathrm{x} + \mathrm{D})$$

$$+ \lambda\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 7}}\ \mathrm{dx}$$

derivando:

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}\,dx$$

$$= \frac{4Ax^4 + (3B + 7A)x^3 + (2C + 5B + 21A)x^2 + (D + 3C + 14B)X + D + 7C}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}$$

$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}$$

$$x^3 - x + 1 = 4Ax^4 + (3B + 7A)x^3 + (2C + 5B + 21A)x^2 + (D + 3C + 14B)X + D + 7C + \lambda$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \\ 2C + 5B + 21A = 0 \\ D + 3C + 14B = -1 \\ D + 7C + \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \\ C = -\frac{5}{6} \\ D = -\frac{19}{6} \\ \lambda = 10 \end{cases}$$

$$I = \sqrt{x^2 + 2x + 7}.\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) + 10\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}\,dx$$

$$I = \sqrt{x^2 + 2x + 7}.\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) + 10ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 7} + x + 1\right| + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{3x^2 + 2x - 4}{\sqrt{x^2 + 3x + 9}}\, dx$

2.) $\int \frac{3x^4 - 4}{\sqrt{x^2 + x + 11}}\, dx$

3.) $\int \frac{3x^5}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}\, dx$

4.) $\int \frac{-3x + 13}{\sqrt{x^2 + 3x + 9}}\, dx$

5.) $\int \frac{-x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 + x - 1}}\, dx$

6.) $\int \frac{x^6 + 2}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$

7.) $\int \frac{x - 1}{\sqrt{-x^2 + 2x}}\, dx$

8.) $\int \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}\, dx$

9.) $\int \frac{-x^6 + 2x}{\sqrt{-x^2 + 4x + 4}}\, dx$

10.) $\int \frac{-x^5 + 2x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx$

3.4.6. Integración Funciones Racionales

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional donde P y Q son polinomios, según la relación de los grados se presentan:

CASO 1.- Grad (P) ≥ Grad (Q), entonces f(x) es una Fracción Racional Impropia

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Donde:

$P_1(x)$ es un polinomio y

$\frac{R(x)}{Q(x)}$: funcion racional propia es decir $Gr(R) < Gr(Q)$

Por tanto:

Bastará estudiar la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y la integral dada se puede escribir como

$$\int \mathrm{f(x)dx} = \int \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}\ \mathrm{dx} = \int \mathrm{P_1(x)dx} + \int \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{Q(x)}}\ \mathrm{dx}$$

CASO 2.- Grad (P) < Grad (Q), entonces f(x) es una Fracción Racional Propia, entonces

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx$$

será ubicado en la última parte del caso 1.

Por todo lo que se ha presentado, se deduce que determinar la integral indefinida de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se reduce a evaluar la integral del cociente de polinomios cuyo numerador es de menor grado que el del denominador, luego usando los:

TEOREMA. - Si Q(x) es un polinomio de grado n ≥ 1 entonces Q(x) se descompone en un producto de factores de primer grado y factores de segundo grado, siendo estas irreductibles en los reales, de la siguiente forma:

$$Q(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x - r_i)^{n_i}.\prod_{j=1}^{s}\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{m_j}\ (*)$$

$$\text{donde } n = \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{j=1}^{s} m_j$$

TEOREMA. - Si el polinomio Q(x) posee la descomposición (*) y P(x) es un polinomio de grado menor que "n", el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone unívocamente en fracciones parciales como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_{1i}}{(x-r_i)^i} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{A_{2j}}{(x-r_2)^j} + \cdots + \sum_{p=1}^{n_k} \frac{A_{rp}}{(x-r_k)^p} + \sum_{I=1}^{m_1} \frac{B_{1I}x + C_{1I}}{(x^2+p_1x+q_1)^I} + \sum_{J=1}^{m_2} \frac{B_{1J}x + C_{1J}}{(x^2+p_2x+q_2)^J} + \cdots . + \sum_{P=1}^{m_s} \frac{B_{sP}x + C_{sP}}{(x^2+p_sx+q_s)^P}$$

Donde:

Las constantes A_{11}, A_{12},…….. deben ser halladas

A esta Técnica se le conoce como **Descomposición en Fracciones Parciales o Descomposición en Fracciones Simples (DFP)**

OBSERVACIONES:

1.- Teóricamente, toda función racional se puede integrar por el método de DFP, es necesario únicamente conocer las raíces del denominador, después se reduce a calcular integrales de los dos tipos siguientes

$$\int \frac{1}{(x-r)^H}\,dx\,;\ \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^H}\,dx$$

2.- Los polinomios de la Forma $Q(x) = x^n \pm a$ puede ser expresados en factores lineales y cuadráticos irreductibles. Un factor cuadrático es sinónimo a un factor cuadrático irreductibles entendemos a una expresión de la forma: $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$, es decir que no se puede descomponer en producto de factores lineales reales.

Cálculo de Las Constantes de las Fracciones Parciales

Las constantes de la FP son halladas dando común denominador, luego se igualan los numeradores y utilizando uno o ambos de los siguientes métodos:

a) De los coeficientes indeterminados: igualando los coeficientes de las potencias de x en los polinomios resultantes

b) Dando un suficiente número de valores de x para determinar dichas constantes

c) Si $Q(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x - r_i)^{n_i}$

Donde: r_i son raíces distintas entre si, y si P(x) es un polinomio de grado menor que "n", entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x - r_k}$$

de donde $A_k = \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)}$, $\quad \forall\, k = 1, \dots, n$

además

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} . \frac{1}{x - r_k}\right] dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R_k ln|x - r_k| \ + \ C \text{ con } \ R_k \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

1.) $\mathrm{I} = \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\ \mathrm{dx}$

Resolución

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{\mathrm{A}}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{x}-2}$$

efectuando operaciones obtenemos:

A = -2/9 , B = 1/3 , C =-1 , D = 2/9

al reemplazar se tiene

$$I = \int \frac{-2}{9(x+1)}\ \mathrm{dx} + \int \frac{1}{3(x+1)^2}\ \mathrm{dx} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} + \int \frac{2}{9(x-2)}$$

Por tanto

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,\mathrm{dx} = \frac{2}{9} ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{1-2x}{6x^2+12x+6} + C$$

2.) $\mathrm{I} = \int \frac{x^5+3}{(x-1)^2(x^2+1)^2(x^2+2)}\,\mathrm{dx}$

Resolución

$$\frac{x^5+3}{(x-1)^2(x^2+1)^2(x^2+2)} = \frac{\mathrm{A}}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+2)}$$

$$I = \int \frac{-17}{36(x-1)}dx + \int \frac{dx}{3(x-1)^2} + \int \frac{(x+9)dx}{4(x^2+1)} + \int \frac{(3x-1)dx}{2(x^2+1)^2} + \int \frac{(2x-9)dx}{9(x^2+2)}$$

Por tanto

$$I = \text{Ln}\left(\sqrt[72]{\frac{(\text{x}^2+2)^8(\text{x}^2+1)^9}{(\text{x}-1)^{34}}}\right) - \frac{19}{9\sqrt{2}}\text{ArcTan}\left(\frac{\text{x}}{\sqrt{2}}\right) + 2\text{ArcTanx} - \frac{\text{x}+3}{4\text{x}^2+4} - \frac{1}{3\text{x}-3} + \text{C}$$

3.) $\int \frac{6x^6+1}{3x^3+1}\,\text{dx}$

Resolución

$$\int \frac{6x^6+1}{3x^3+1}\,\text{dx} = \int \left(2x^3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3x^3+1)}\right)\,\text{dx}$$

$$= \int \left(2x^3 - \frac{2}{3}\right)dx + \int \frac{5}{3(3x^3+1)}\,\text{dx}$$

$$= \frac{2}{4}x^4 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\int \frac{1}{3x^3+1}\,\text{dx}$$

$$\frac{1}{3x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3+\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{A}{x+\frac{1}{3}} + \frac{Bx+C}{x^2 - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}x + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}}\right)$$

de aquí obtenemos los valores de las constantes

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{3} \\ B = -\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3} \\ C = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases}$$

Luego

$$\int \frac{1}{3x^3+1}\,\mathrm{dx} = \frac{x^4}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\,Ln\left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\right] - \frac{\sqrt[3]{3}}{9}\left\{\frac{\sqrt[3]{3}\,Ln\left(3x^2 - \sqrt[3]{9}x + \sqrt[3]{3}\right)}{2} - \frac{3\sqrt[3]{9}\,ArcTan\left(\frac{6x-\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}\sqrt{3\sqrt[3]{9}}}\right)}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right\} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{x^4 + x - 1}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}\, dx$

2.) $\int \frac{6x^8 + x^2}{3x^3 + 1}\, dx$

3.) $\int \frac{x^2 - 3}{3x^4 - 1}\, dx$

4.) $\int \frac{x^8 + x^2 + 1}{(x+1)(x^2+1)(x-2)}\, dx$

5.) $\int \frac{2x^5 + x^3 + 1}{(x+1)(x^2-1)(x^2-4)}\, dx$

6.) $\int \frac{3x^2 - 5x + 37}{x^3 - 2x^2 + 9x - 18}\, dx$

3.4.7. El Método de Hermite - Ostrogradsky

Charles Hermite (Francia 1822 – Paris 1901), matemático francés. Apasionado de las Matemáticas, tuvo dificultades para aprobar las materias ordinarias. Fue profesor de la Escuela Politécnica de París (1848), del Colegio de Francia (1848), de la Escuela Normal (1869) y de la Sorbona (1870), donde tuvo entre sus alumnos a Poincaré.

Ostrogradsky, Mikhail Vasilevich (1801 – 1862), matemático ruso; sus trabajos versaron sobre elasticidad y teoría del calor.

Esta técnica permite reducir el caso de las raíces múltiples al de las raíces simples.

Consideremos la función fraccionaria propia

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ con

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - r_i)^{n_i} . \prod_{j=1}^{s}\left(x^2 + p_j x - q_j\right)^{m_j}$$

tal que grad (P) < grad(Q)

entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\ dx\ \ (*)$$

donde

$$Q_2(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - r_i)\ .\prod_{j=1}^{s}\left(x^2 + p_j x - q_j\right)$$

$$\mathrm{Q_1(x)} = \prod_{i=1}^{k}(x - r_i)^{n_i - 1}\,.\prod_{j=1}^{s}\left(x^2 + p_j x - q_j\right)^{m_j - 1}$$

$P_1(x)\ y\ P_2(x)$: polinomios desconocidos, de coeficientes indetermiandos

tal que

grad (P_1) = grad(Q_1) - 1 ;

grad(P_2) = grad(Q_2) – 1

Para conocer los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ se deriva ambos miembros de (*), se reduce a un común denominador, se igualan los coeficientes de los mismos grados de la variable “x” obteniéndose un sistema con igual número de

ecuaciones que incógnitas que es siempre compatible y determinado.

Si Q(x) no está expresada en producto, entonces

$$\mathrm{Q}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{MCD}\left\{\mathrm{Q}(\mathrm{x}); \mathrm{Q}'^{(\mathrm{x})}\right\}$$

$$\mathrm{Q}_2(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{Q}(\mathrm{x})}{\mathrm{Q}_1(\mathrm{x})}$$

Ejemplos: determinar

1.) $I = \int \frac{3x^2-5x+37}{(x^3-2x^2+9x-18)^2}\ \mathrm{dx}$

Resolución

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x})}{\mathrm{Q}(\mathrm{x})} = \frac{3x^2-5x+37}{(x^3-2x^2+9x-18)^2} = \frac{3x^2-5x+37}{(x-2)^2(x^2+9)^2}$$

$$P(x) = 3x^2-5x+37 \implies gr(P) = 2$$

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = (x-2)^2(x^2+9)^2 \implies gr(Q) = 6$$

Luego, de acuerdo con la teoría se determina los polinomios:

$$\mathrm{Q}_1(\mathrm{x}) = (x-2)(x^2+9) \implies gr(Q_1) = 3$$

$$\mathrm{Q}_2(\mathrm{x}) = (x-2)(x^2+9) \implies gr(Q_2) = 3$$

De aquí construimos: los polinomios P_1y P_2 con

$$gr(P_1) = gr(Q_1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$gr(P_2) = gr(Q_2) - 1 = 3 - 1 = 2$$

entonces

$$P_1(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 37}{(x^3 - 2x^2 + 9x - 18)^2}\ dx$$

$$= \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-2)(x^2+9)} + \int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-2)(x^2+9)}\ dx$$

derivando ambos miembros

$$\frac{3x^2 - 5x + 37}{(x^3 - 2x^2 + 9x - 18)^2}$$

$$= \frac{d\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-2)(x^2+9)}\right)}{dx} + \frac{ax^2 + bx + c}{(x-2)(x^2+9)}$$

$$\frac{3x^2-5x+37}{(x^3-2x^2+9x-18)^2}$$

$$=-\frac{Ax^4+2Bx^3+(3C-2B-9A)x^2+(36A-4C)x+9C+18B}{\left((x-2)(x^2+9)\right)^2}$$

$$+\frac{ax^2+bx+c}{(x-2)(x^2+9)}$$

$$=-\frac{Ax^4+2Bx^3+(3C-2B-9A)x^2+(36A-4C)x+9C+18B}{\left((x-2)(x^2+9)\right)^2}$$

$$+\frac{ax^5+(9a+c-2b)x^3+(b-2a)x^4+(9b-2c-18a)x^2+(9c-18b)x-18c}{\left((x-2)(x^2+9)\right)^2}$$

simplificando e igualando polinomios se obtiene:

$$\begin{cases} a=0 \\ -A+b-2a=0 \\ 9a-2b-2B+c=0 \\ 9b-18a-2c-3C+2B+9A=3 \\ 9c-18b-36A+4C=-5 \\ -18c-9C-18B=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\dfrac{22}{117} \\ c=-\dfrac{109}{117} \\ A=-\dfrac{22}{117} \\ B=-\dfrac{5}{18} \\ C=-\dfrac{22}{13} \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^2-5x+37}{(x^3-2x^2+9x-18)^2}\,dx = \frac{-\frac{22}{117}x^2-\frac{5}{18}x-\frac{22}{13}}{(x-2)(x^2+9)}+\int \frac{-\frac{22}{117}x-\frac{109}{117}}{(x-2)(x^2+9)}\,dx$$

$$I = \frac{-\frac{22}{117}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{22}{13}}{(x-2)(x^2+9)} + \frac{1}{9126}\left[\text{Ln}\left(\frac{(x^2+9)^{459}}{(x^2-2)^{918}}\right) + 40\,\text{ArcTan}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C$$

2.) $\int \frac{7}{(x^3-x^2)^3}\,dx$

Resolución

$$\int \frac{7}{(x^3-x^2)^3}dx = \frac{Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx+Gx^6}{x^5(x-1)^2} + \int \frac{ax+b}{x(x-1)}dx$$

derivando, reduciendo e igualando los polinomios se obtienen los valores de los coeficientes, reemplazando en la integral e integrando la segunda integral (lado derecho) obtenemos

$$\int \frac{7}{(x^3-x^2)^3}dx = \frac{Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx+Gx^6}{x^5(x-1)^2} + -147Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

Con

$$\mathrm{A} = -147;\ \mathrm{B} = \frac{441}{2};\ \mathrm{C} = -49;\ \mathrm{D} = -\frac{49}{4};\ \mathrm{E} = -\frac{49}{10};$$

$$\mathrm{F} = -\frac{49}{20};\ \mathrm{G} = -\frac{7}{5};\ \mathrm{a} = 0\ ;\ \mathrm{b} = -147$$

3.) $\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}\ \mathrm{dx}$

Resolución

$$\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \int \frac{Ex+F}{x^2+x+1}dx$$

derivando e igualando los coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} E = 0 \\ A + F + 2E = 0 \\ A - 2B + 2F + 3E = 0 \\ 3A - 3C + 3F + 3E = 0 \\ 2B - C - 4D + 2F + E = 3 \\ C - 2D + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 0 \\ A = F = -1 \\ B = -\frac{3}{2} \\ C = -2 \\ D = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}dx = \frac{\frac{-1}{2}(2x^3+3x^2+4x+3)}{(x^2+x+1)^2} + \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{\frac{-1}{2}(2x^3+3x^2+4x+3)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} ArcTan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1) $\int \frac{x}{(x^3-x^2)^2}dx$

2) $\int \frac{x-2}{(x^3-\mathrm{x})^3}dx$

3) $\int \frac{2-5x}{(x^2+6x+10)^2}dx$

4) $\int \frac{x^2+5}{(x^2+1)^3(\mathrm{x}+2)^2(\mathrm{x}+3)}dx$

5) $\int \frac{x}{(x^2-6x+1)^3}dx$

6) $\int \frac{2x^4-5}{(x^2-1)^3(\mathrm{x}-2)^2(\mathrm{x}+3)}dx$

7) $\int \frac{-x}{(x^2+6)(x+1)^2}dx$

8) $\int \frac{x-5}{(x^2+1)^2(\mathrm{x}+2)^3}dx$

3.4.8. Integrales de la Forma

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\ \sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}\right)\boldsymbol{dx}$$

Donde R $\left(\mathrm{x};\ \sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}\right)$ es una función racional de las variables "x" y $\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}$, para determinar la integral se puede utilizar la sustitución de Euler:

CASO 1 $Si\ a>0$: $\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}=\pm\sqrt{\mathrm{a}}.\mathrm{x}+\mathrm{t}$

$$\text{se obtiene}\ \ x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}.t}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{-\sqrt{a}.t^2-c\sqrt{a}+bt}{b-2\sqrt{a}.t}$$

$$dx=\frac{-2\sqrt{a}.t^2-2c\sqrt{a}+2bt}{\left(b-2\sqrt{a}.t\right)^2}\,dt$$

resultando

$$\int \mathrm{R}\left(\mathrm{x};\ \sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}\right)\mathrm{dx}$$

$$=\int R\left(\frac{\mathrm{t}^2-\mathrm{c}}{\mathrm{b}-2\sqrt{\mathrm{a}}.\mathrm{t}},\frac{-\sqrt{\mathrm{a}}.\mathrm{t}^2-\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{a}}+\mathrm{bt}}{\mathrm{b}-2\sqrt{\mathrm{a}}.\mathrm{t}}\right)\frac{-2\sqrt{\mathrm{a}}.\mathrm{t}^2-2\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{a}}+2\mathrm{bt}}{\left(\mathrm{b}-2\sqrt{\mathrm{a}}.\mathrm{t}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

esta integral tiene como variable independiente a "t" correspondiente a una función racional de polinomios.

CASO 2 $Si\ c > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}.x$

$$\text{se obtiene } x = \frac{b - 2\sqrt{c}.t}{t^2 - a}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{-\sqrt{c}.t^2 - a\sqrt{c} + bt}{t^2 - a}$$

$$dx = \frac{2\sqrt{c}.t^2 + 2a\sqrt{c} - 2bt}{(t^2 - a)^2}\, dt$$

resultando

$$\int R\left(x;\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{b - 2\sqrt{c}.t}{t^2 - a}, \frac{-\sqrt{c}.t^2 - a\sqrt{c} + bt}{t^2 - a}\right) \frac{2\sqrt{c}.t^2 + 2a\sqrt{c} - 2bt}{(t^2 - a)^2}\, dt$$

integral que tiene como variable independiente a "t" de una función racional de polinomios.

CASO 3. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$

Dadas λ_1 y λ_2 raíces reales y distintas de

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

usando

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda_1)$$

y el hecho que

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

$$\text{se obtiene } x = \frac{\lambda_1 t^2 - a\lambda_2}{t^2 - a}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{at^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{t^2 - a}$$

$$\text{ademas } dx = \frac{2at(\lambda_2 - \lambda_1)}{t^2 - a}\, dt$$

resultando

$$\int R\left(x;\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$
$$= \int R\left(\frac{\lambda_1 t^2 - a\lambda_2}{t^2 - a}, \frac{at^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{t^2 - a}\right) \frac{2at(\lambda_2 - \lambda_1)}{t^2 - a}\, dt$$

Integral que tiene como variable independiente a “t” de una función racional de polinomios.

Ejemplos: evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{dx}{2-x\sqrt{x^2-2}}$

Resolución

$$\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}=\sqrt{\mathrm{x}^2-2}\Rightarrow\begin{cases}a=1>0\\ b=0\\ c=-2\end{cases}$$

hacer

$$\sqrt{\mathrm{x}^2-2}=\mathrm{x}+\mathrm{t}\ \Rightarrow \mathrm{x}=-\frac{\mathrm{t}^2+2}{2\mathrm{t}}\Rightarrow \mathrm{dx}=-\frac{\mathrm{t}^2-2}{2\mathrm{t}^2}\mathrm{dt}$$

reemplazando en la integral dada se tiene

$$\int \frac{dx}{2-x\sqrt{x^2-2}}=\int \frac{-\frac{\mathrm{t}^2-2}{2\mathrm{t}^2}\mathrm{dt}}{2-\left(-\frac{\mathrm{t}^2+2}{2\mathrm{t}}\right)\left(\frac{\mathrm{t}^2-2}{2\mathrm{t}}\right)}$$

$$=-\int \frac{2(\mathrm{t}^2-2)\mathrm{dt}}{8\mathrm{t}^2+\mathrm{t}^4-4}$$

$$\frac{(t^2-2)}{8t^2+t^4-4}=\frac{A}{t+\sqrt{-4+2\sqrt{5}}}+\frac{B}{t-\sqrt{-4+2\sqrt{5}}}$$

$$+\frac{Ct+D}{t^2+4+2\sqrt{5}}$$

Resolviendo la suma de estas tres fraccione, reduciendo e igualando polinomios obtenemos:

$$A=\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{-4+2\sqrt{5}}}\ ;\ B=\frac{-\sqrt{5}}{20\sqrt{-4+2\sqrt{5}}};\ C=0\ ;\ D=\frac{\sqrt{5}}{20}$$

$$-\int\frac{2(t^2-2)dt}{8t^2+t^4-4}$$

$$=-2\left(\int\frac{Adt}{t+\sqrt{-4+2\sqrt{5}}}+\int\frac{B\,dt}{t-\sqrt{-4+2\sqrt{5}}}\right.$$

$$\left.+\int\frac{D}{t^2+4+2\sqrt{5}}\,dt\right)$$

$$=-2Aln\left|t+\sqrt{-4+2\sqrt{5}}\right|+2Bln\left|t-\sqrt{-4+2\sqrt{5}}\right|$$

$$+\frac{D}{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}ArcTan\left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}\right)$$

2.) $\int \frac{xdx}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$

Resolución

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt+1 \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2t-1}{1-t^2} \\ dx = \dfrac{2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}dt \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}$$

Remplazando en la integra dada y después de reducir se tiene

$$\int \frac{xdx}{x-\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{-2(2t-1)(t^2-t+1)dt}{(t+1)^2(t-1)^3(t-2)}$$

usando fracciones parciales e integrando cada una de estas fracciones obtenemos

$$= \text{Ln}\frac{\sqrt[8]{|t+1||t-1|^{15}}}{|t-2|^2} - \frac{-3t^2-5t+4}{4(t+1)(t-1)^2} + C$$

Reto que deberá realizarlo en el aula, dar la respuesta final al ejercicio

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1) $\int (x-2)\sqrt{-2x^2+2x+3}dx$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x-6}}dx$

3) $\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$

4) $\int \frac{7}{x-\sqrt{x^2+8x+7}}dx$

5) $\int \frac{x-9}{\sqrt{-x^2+3x-6}}dx$

6) $\int \frac{5}{\sqrt{x^2-6x}}dx$

7) $\int \frac{3}{x-\sqrt{x^2+6x-6}}dx$

8) $\int \frac{5}{\sqrt{3x^2+x-6}}dx$

3.4.9. Integración de Funciones Irracionales

$$\mathbf{3.4.9.1.}\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\ \sqrt[n_1]{\boldsymbol{x^{m_1}}}\ ;\ \sqrt[n_2]{\boldsymbol{x^{m_2}}}\ ;\ \ldots;\ \sqrt[n_k]{\boldsymbol{x^{m_k}}}\right)\boldsymbol{dx}$$

$\boldsymbol{m_i}\,,\boldsymbol{n_i}\ \in \mathbb{Z}^+\,,\ \forall\ \boldsymbol{i}$

Hacer $x = t^r$ donde $r = MCM(n_1; n_2; \ldots; n_r)$, al reemplazarlo se obtendrá una nueva integral de una función racional de variable "t".

Ejemplos

1.) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

Resolución

$$\text{Hacer } x = z^6 \Longrightarrow dx = 6z^5 dz$$

Reemplazando y efectuando operaciones en la integral dada obtenemos

$$6\int \frac{z^9+z^6}{z-1}\,dz = 6\int \left(z^8+z^7+z^6+2z^5+2z^4 + 2z^3+2z^2+2z+\frac{2}{z-1}\right)dz$$

$$= 6\left[\frac{z^9}{9}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^7}{7}+\frac{2z^6}{6}+\frac{2z^5}{5}+\frac{2z^4}{4}+\frac{2z^3}{3}+z^2 + 2\text{Ln}(z-1)\right]+C$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^9}}{9}+\frac{\sqrt[6]{x^8}}{8}+\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}+\frac{2\sqrt[6]{x^6}}{6}+\frac{2\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{2\sqrt[6]{x^4}}{4} + \frac{2\sqrt[6]{x^3}}{3}+\sqrt[6]{x^2}+2\text{Ln}\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\right]+C$$

2.) $\int \frac{1+a\sqrt{x}}{\sqrt{ax}-\sqrt{x}}\text{dx}\,,\ a>0$

Resolución

$$\text{Hacer}\quad x = z^2 \Longrightarrow dx = 2zdz$$

Reemplazando y efectuando operaciones en la integral dada obtenemos

$$-2\int \frac{az^2+z}{z^3-\sqrt{a}z}\text{dz} = -2\int \frac{az}{z^2-\sqrt{a}}\text{dz} - 2\int \frac{dz}{z^2-\sqrt{a}}$$

$$= -a\,Ln\left(\left|x-\sqrt{a}\right|\right) - \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\,Ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{a}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{a}}\right| + C$$

3.) $\int \frac{2-\sqrt{x}}{5+\sqrt[3]{x}}\mathrm{dx}$

Resolución

$$\text{Hacer } \mathrm{x} = \mathrm{z}^6 \Longrightarrow \mathrm{dx} = 6\mathrm{z}^5\mathrm{dz}$$

Reemplazando y efectuando operaciones en la integral dada obtenemos

$$-6\int \frac{z^8 - 2z^5}{z^2+5}\mathrm{dz} =$$

$$-6\int \left(z^6 - 5z^4 - 2z^3 + 25z^2 + 10z - 125 - \frac{50z - 625}{z^2+5}\right)\mathrm{dz}$$

$$\int \frac{50z - 625}{z^2+5}\, dz$$

$$= 5\sqrt{5}\left[\sqrt{5}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z^2+5}{5}\right) - 25\, ArcTan\left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right)\right]$$

3.4.9.2. $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\ \sqrt[n_1]{\left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{m_1}}\ ;\ \ldots;\ \sqrt[n_k]{\left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{m_k}}\right)\boldsymbol{dx}$

donde $\boldsymbol{m_i}\ ,\boldsymbol{n_i}\ \in \mathbb{Z}^+\ ,\ \forall\ \boldsymbol{i}$

a, b, c, d: constates ; $ad - bc\ \neq 0$

$$\text{Hacer } \frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}} = \boldsymbol{t^r}\ ,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{MCM}\{\boldsymbol{n_1};\ \boldsymbol{n_2};\ldots;\boldsymbol{n_k}\}$$

al reemplazarlo se obtendrá una nueva integral de una función racional de variable "t".

Ejemplos

1.) $\int \frac{1-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{x-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\mathrm{dx}$

Resolución

$$\text{Hacer } \frac{x+1}{x-1} = \mathrm{z}^2 \Longrightarrow \mathrm{x} = 1 + \frac{2}{\mathrm{z}^2-1} \Longrightarrow \mathrm{dx} = \frac{-4z}{(\mathrm{z}^2-1)^2}\mathrm{dz}$$

Reemplazando y efectuando operaciones en la integral dada obtenemos

$$-4\int \frac{\mathrm{z}}{(z^3-z^2-z-1)(z+1)}\,\mathrm{dz} =$$

$$= 6\left[\frac{z^9}{9}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^7}{7}+\frac{2z^6}{6}+\frac{2z^5}{5}+\frac{2z^4}{4}+\frac{2z^3}{3}+z^2 + 2\mathrm{Ln}(z-1)\right]+C$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^9}}{9}+\frac{\sqrt[6]{x^8}}{8}+\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}+\frac{2\sqrt[6]{x^6}}{6}+\frac{2\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{2\sqrt[6]{x^4}}{4}+\frac{2\sqrt[6]{x^3}}{3} + \sqrt[6]{x^2}+2\mathrm{Ln}\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\right]+C$$

2.) $\int \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+2}{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}-5}\cdot\left(\frac{3}{x-1}\right)^4 \mathrm{dx}$

Resolución

Hacer $\frac{x+2}{x-1} = \mathrm{z}^6 \Longrightarrow \mathrm{x} = 1+\frac{3}{\mathrm{z}^6-1}$

$$\Longrightarrow \mathrm{dx} = \frac{-18z^5}{(\mathrm{z}^6-1)^2}\,\mathrm{dz}$$

$$\frac{3}{x-1} = \frac{x+2}{x-1} - 1 = \mathrm{z}^6 - 1$$

Reemplazando

$$\int \frac{\mathrm{z}^3+2}{\mathrm{z}^2-5}.(\mathrm{z}^6-1)^4.\frac{-18z^5}{(\mathrm{z}^6-1)^2}\,\mathrm{dz} = \int \frac{-18z^5(\mathrm{z}^3+2)(\mathrm{z}^6-1)^2}{\mathrm{z}^2-5}\,\mathrm{dz}$$

Es una integral que se evalúa usando integrales por fracciones parciales, escriba la función respuesta, el numerado resultante tiene grado 20 y el denominador grado 2, por lo que se obtiene una parte real: polinomio de grado 18: E(x), y otra fraccionaria, así

$$\frac{z^5(\mathrm{z}^3+2)(\mathrm{z}^6-1)^2}{\mathrm{z}^2-5} = E(x) + \frac{768800z+961000}{\mathrm{z}^2-5}$$

Al evaluar la integral se realiza con las técnicas ya presentadas y prácticas por cada usuario de esta material, por lo que le retamos a mostrarnos la respuesta final. .

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1) $\int \dfrac{2-\sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}}{1+\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{3+x}}}dx$

2) $\int \dfrac{3+\sqrt{\dfrac{x-5}{x-7}}}{1+\sqrt[4]{\dfrac{x-5}{x-7}}}dx$

3) $\int \dfrac{9+\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{a+x}}}{1+\sqrt[6]{\dfrac{a-x}{a+x}}}dx$

4) $\int \left(\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+2}}}{1+\sqrt[7]{\dfrac{x}{x+2}}}\right)\sqrt[21]{\dfrac{x}{x+2}}\,dx$

3.4.10. Integrales de Binomios Diferenciales

Una integral binomia es una integral irracional de la forma

$$\int \boldsymbol{x^m(a+bx^n)^p dx}$$

donde $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{m, n, p} \in \mathbb{Q}$

usando las condiciones de CHEBYISHEV, estos tipos de integrales se transforman en integrales racionales, presentándose tres casos.

CASO 1 $\boldsymbol{Si\ p} \in \mathbb{Z}$

Efectuar el cambio de variable:

$$\boldsymbol{x = z^k}, \qquad \boldsymbol{k} = \text{MCM}\{\text{denominadores de "n", "m"}\}$$

CASO 2 $\boldsymbol{Si\ \frac{m+1}{n}} \in \mathbb{Z}$

Hacer $a + bx^n = z^k$, $\boldsymbol{k}$ es el denominador de $\boldsymbol{p}$

CASO 3 $\boldsymbol{Si\ p + \frac{m+1}{n}} \in \mathbb{Z}$

Hacer $ax^{-n} + b = z^k$ ó $a + bx^n = x^n z^k$, $\boldsymbol{k}$ es el denominador de $\boldsymbol{p}$

Ejemplos

1.) $\int \frac{1}{\sqrt{x}.\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}\,dx$

Resolución

La integral se puede escribir como

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{-\frac{1}{4}}\right)^{-10}\,dx$$

$$m=-\frac{1}{2}\ ;\ \ n=\frac{1}{4}\ ;\ \ p=-10\in\mathbb{Z}$$

hacer $x=z^k$, con $k=MCM\{2,4\}=4$

luego $x=z^4\ \Rightarrow\ dx=4z^3\,dz$

reemplazando y efectuando operaciones se tiene

$$\int \frac{4z}{(z+1)^{10}}\,dx=-\frac{9\sqrt[4]{x}+1}{18\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C$$

2.) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2+9}}\,dx$

Resolución

La integral se puede escribir como

$$\int x^{-2}(4x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$m=-2\ ;\ \ n=\ 2\ ;\ \ p=\ -\frac{1}{2}$$

$$\frac{m+1}{n}+p=\ -1$$

$$\text{hacer } 9x^{-2}+4=\ t^2\ \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{9}{t^2-4}} \\ dx=\ -3t(t^2-4)^{-\frac{3}{2}}\,dt \end{cases}$$

reemplazando y efectuando operaciones se obtiene

$$\int -\frac{1}{9}dt=\ -\frac{1}{9}t+C=-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{x}+C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{x^3}{\sqrt{(2x^2+1)^3}} dx$

2.) $\int x^3.\sqrt{2x^2+1} dx$

3.) $\int \frac{1}{x^4.\sqrt{x^2+1}} dx$

4.) $\int x.\sqrt{2-x^{\frac{2}{3}}}\, dx$

5.) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

7.) $\int \frac{1}{x^{11}.\sqrt{x^2+1}}\, dx$

3.4.11. Integración de Funciones Trigonométricas

Se presentarán técnicas para integrar a funciones trigonométricas.

3.4.11.1.) $\int \boldsymbol{Sen^m(x)\,dx}\,;\int \boldsymbol{Cos^m(x)\,dx}\;,\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^+$

Integrales que se reducen a integrales más simple o directas, para ello se puede usar identidades trigonométricas.

1) Si "m" es impar usar: $Sen^2\,x + Cos^2\,x = 1$

2) Si "m" es par usar:

$$\begin{cases} Sen^2x = \dfrac{1}{2}(1-\operatorname{Cos}2x) \\ Cos^2x = \dfrac{1}{2}(1+\operatorname{Cos}2x) \end{cases}$$

Ejemplos

1.) $\int \operatorname{Sen}^3(x)\,dx$

Resolución

$$\int \text{Sen}^3(\text{x})\,\text{dx} \quad = \int \text{Sen}(\text{x})\,\text{Sen}^2(\text{x})\,\text{dx}$$

$$= \int \text{Sen}\,(\text{x})\,.\big(1 - Cos^2(x)\big)\text{dx}$$

$$= \int \text{Sen}(\text{x})\,\text{dx} \; - \int Sen(x).Cos^2(x)\,\text{dx}$$

$$= -\,\text{Cos}(x) \; + \frac{Cos^3(x)}{3} + C$$

$$= \frac{\text{Cos}(3x) - 9\,\text{Cos}(x)}{12} + C$$

2.) $\text{I} = \int \text{Sen}^6(\text{x})\,\text{dx}$

Resolución

$$\int \text{Sen}^6(x)\,\text{d}x = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \text{Cos}(2x))\right]^3 \text{dx}$$

$$= \int \frac{1}{8}(1 - \text{Cos}(2x))^3\,\text{dx}$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3\,\text{Cos}(2x) + 3\,\text{Cos}^2(2x) - \text{Cos}^3(2x))\,\text{dx}$$

$$= \frac{1}{8}\Big[x - \frac{3}{2}Sen(2x) + \frac{3}{2}\int (1 + \text{Cos}(2x))dx - \int \text{Cos}(2x).(1 - Sen^2(2x))dx\Big]$$

Por tanto

$$I = \frac{5\text{x}}{16} - \frac{5}{32}Sen(2x) + \frac{1}{48}\,Sen^2(2x) + C$$

3.) $\int \text{Sen}^4(\text{x})\,\text{dx}$

Resolución

$$\int \text{Sen}^4(\text{x})\,\text{dx} = \int \Big(\frac{1 - \text{Cos}(2x)}{2}\Big)^2\,\text{dx}$$

$$= \int \frac{(1 - 2\,\text{Cos}(2x) + Cos^2(2\text{x}))}{4}\text{dx}$$

$$= \frac{1}{4}\Big(x - 2\int \text{Cos}(2x)\;dx + \int \frac{1 + \text{Cos}(4x)}{2}\text{dx}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(x - Sen(2x) + \frac{x}{2} + \frac{Sen(4x)}{8}\Big) + C$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{1}{2}Sen(2x) + \frac{Sen(4x)}{32} + C$$

4.) $\int \mathrm{Cos}^5(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$

Resolución

$$\int \mathrm{Cos}^5(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int \mathrm{Cos}^4(\mathrm{x})\,\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int (1 - Sen^2(x))^2\,\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int (1 - 2\,Sen^2(x) + Sen^2(\mathrm{x}))\,\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int \mathrm{Cos}\,x\;\,dx + \int Sen^2(x)\,\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{dx} + \int Sen^4(x)\,\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= Sen(x) + \frac{2}{3}\,Sen^3(x) + \frac{Sen^5(x)}{5} + C$$

$$= \frac{5}{8}Sen(x) + \frac{5}{48}Sen(3x) + \frac{1}{80}Sen(5x) + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int -2\text{Cos}^7(3\text{x})\ \text{dx}$

2.) $\int \text{Sen}^3\left(\frac{5\text{x}+7}{9}\right)\text{dx}$

3.) $\int \text{Cos}^3\left(-6\text{x}-\frac{2}{5}\right)+\text{Sen}^4\left(\frac{-7\text{x}+13}{17}\right)dx$

4.) $\int \text{Sen}^5\left(\frac{2\pi}{5}\right)\text{Sen}^4\left(\frac{\pi x}{5}\right)\ dx$

3.4.11.2.) $\int \boldsymbol{Sen^m(x).Cos^n(x)\,dx}\,;\ \ \boldsymbol{m,n} \in \mathbb{Z}^+$

<u>CASO 1</u> Si "m" o "n" es impar

1.) m impar , usar

$$\mathrm{Sen^m(x) = Sen^{m-1}(x).Sen(x)}$$

$$\mathrm{Sen^2(x) = 1 - Cos^2(x)}$$

$$\text{resultando } \int \mathrm{P(Cos\,(x)).Sen(x)\,dx}$$

2.) n impar , usar

$$\mathrm{Cos^n(x) = Cos^{n-1}(x).Cos(x)}$$

$$\mathrm{Cos^2(x) = 1 - Sen^2(x)}$$

$$\text{resultando } \int \mathrm{P(Sen\,(x)).Cos(x)\,dx}$$

P(.) es un polinomio de variable Sen(x) ó Cos(x)

<u>CASO 2</u> Si "m" y "n" son pares

Usando

$$Sen^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}(2x))$$

$$Cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos}(2x))$$

$$Sen(x).\text{Cos}\,x = \frac{1}{2}Sen(2x)$$

Resulta que la nueva integral tiene la forma del **<u>CASO 1</u>**

Ejemplos

1.) $\int \text{Sen}^3(\text{x}).\text{Cos}^4(\text{x})\,\text{dx}$

Resolución

$$hacer\ Cos(x) = t \implies -\,\text{Sen}(x)\,dx = dt$$

$$\int \text{Sen}^3(\text{x}).\text{Cos}^4(\text{x})\,\text{dx} = \int \text{Sen}^3(\text{x}).\text{t}^4\,\frac{\text{dt}}{-Sen\,x}$$

$$= -\int \text{Sen}^2(\text{x}).\text{t}^4\,\text{dt}$$

$$= -\int \left(1 - \text{Cos}^2(\text{x})\right).\text{t}^4 \, \text{dt}$$

$$= -\int (1 - \text{t}^2).\text{t}^4 \, \text{dt} = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right) + C$$

$$= -\frac{Cos^5(x)}{5} + \frac{Cos^7(x)}{7} + C$$

$$\int \text{Sen}^3(\text{x}).\text{Cos}^4(\text{x}) \, \text{dx} = \frac{1}{70} Cos^5(x).(5\,\text{Cos}(2x) - 9) + C$$

2.) $\int \text{Sen}^7(\text{x}).\text{Cos}^5(\text{x}) \, \text{dx}$

Resolución

$hacer\ Sen(x) = t \implies \text{Cos(x)}\ dx = dt$

$$\int \text{Sen}^7(\text{x}).\text{Cos}^5(\text{x}) \, \text{dx} = \int \text{t}^7 \text{Cos}^5(\text{x}) \frac{\text{dt}}{\text{Cos}\, x}$$

$$= \int \text{t}^7 \text{Cos}^4(\text{x}) \text{dt}$$

$$= \int \text{t}^7 \left(1 - \text{Sen}^2(\text{x})\right)^2 \, \text{dt}$$

$$= \int (1 - t^2)^2 . t^7 \, dt$$

$$= \frac{Sen^8(x)}{8} - \frac{Sen^{10}(x)}{5} + \frac{Cos^{12}(x)}{12} + C$$

$$\int sen^7(x) . \cos^5(x) \, dx = \frac{sen^8 x}{8} - \frac{sen^{10} x}{5} + \frac{cos^{12} x}{12} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int 4\text{Cos}^3\left(\frac{x}{3}\right)\text{Sen}^4\left(\frac{x}{3}\right) \, dx$

2.) $\int \text{Cos}^2\left(-6x - \frac{2}{5}\right)\text{Sen}^4\left(-6x - \frac{2}{5}\right) \quad dx$

3.) $\int \text{Sen}^5\left(\frac{2\pi x}{5}\right) \text{Sen}^4\left(\frac{2\pi x}{5}\right) \, dx$

3.4.11.3.) $\int \mathrm{Tan}^{m}(x).\mathrm{Sec}^{n}(x)\,dx$

$\int \mathrm{CoTan}^{m}(x).\mathrm{CoSec}^{n}(x)\,dx \;\; , m, n \in \mathbb{Z}^{+}$

tener en cuenta:

$$\mathrm{Sec}^{2}(x) = 1 + \mathrm{Tan}^{2}(x)$$

$$\mathrm{CoSec}^{2}(x) = 1 + \mathrm{CoTan}^{2}(x)$$

Para determinar la integral indefinida se presentan

CASO 1 *Si* "m" *es* impar

Se factoriza

$$\mathrm{Tan}(x).\mathrm{Sec}\,(x) \;\; ; \;\; \mathrm{CoTan}(x).\mathrm{CoSec}\,(x)$$

respectivamente , luego usar las identidades anteriores

CASO 2 ***Si*** **"*n*" *es* par**

Se factoriza

$$\mathrm{Sec}^{2}(x) \quad \text{ó} \;\; \mathrm{CoSec}^{2}\,(x)$$

respectivamente , luego usar las identidades anteriores.

Así:

A) $\mathrm{Tan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).\mathrm{Sec}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}) = \mathrm{Tan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).\mathrm{Sec}^{\mathrm{n}-2}(\mathrm{x}).\mathrm{Sec}^{2}(\mathrm{x})$

$$= \mathrm{Tan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).(\mathrm{Tan}^{2}(\mathrm{x}) + 1)^{\frac{\mathrm{n}-2}{2}}.\mathrm{Sec}^{2}(\mathrm{x})$$

B) $\mathrm{CoTan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).\mathrm{CoSec}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$ se puede escribir como

$$= \mathrm{CoTan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).\mathrm{CoSec}^{\mathrm{n}-2}(\mathrm{x}).\mathrm{CoSec}^{2}(\mathrm{x})$$

$$= \mathrm{CoTan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).(\mathrm{CoTan}^{2}(\mathrm{x}) + 1)^{\frac{\mathrm{n}-2}{2}}.\mathrm{CoSec}^{2}(\mathrm{x})$$

<u>CASO 3</u> ***Si*** **"m"** ***y*** **"*n*" son impar**

$\mathrm{Tan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).\mathrm{Sec}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$ se puede escribir como

$$= \mathrm{Tan}^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{x}).\mathrm{Sec}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}).Tan(x).Sec(x)$$

$$= (\mathrm{Sec}^{2}(\mathrm{x}) - 1)^{\frac{\mathrm{m}-1}{2}}.\mathrm{Sec}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}).Tan(x).Sec(x)$$

respectivamente , luego usar las identidades anteriores

Ejemplos

1.) $\int \mathrm{Tan}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}).\mathrm{Sec}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$

Resolución

$$\int \frac{\mathrm{Tan}^3(\mathrm{x})}{\sqrt{\mathrm{Sec}\,x}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{(Sec^2(x)-1)\mathrm{Tan}(\mathrm{x})}{\sqrt{\mathrm{Sec}(x)}}\,\mathrm{dx}$$

$$= \int Sec^{\frac{1}{2}}(x).Sec(x).\mathrm{Tan}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} - \int Sec^{-\frac{3}{2}}(x).Sec(x).\mathrm{Tan}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

$$= \int \mathrm{u}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} - \int \mathrm{u}^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{dx}$$

$$= \frac{2}{3}\,\mathrm{u}^{\frac{1}{2}} + 2\,\mathrm{u}^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{Sec}^3(x)} + \frac{2}{\sqrt{Sec\,(x)}} + C$$

2.) $\int \mathrm{Tan}^3(2\mathrm{x}).\mathrm{Sec}^2(2\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$

Resolución

$$= \int \mathrm{Tan}^3(2\mathrm{x}).(\mathrm{Tan}^2(2\mathrm{x})+1)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int \mathrm{Tan}^5(2x)\,dx + \int \mathrm{Tan}^3(2x)\,dx$$

Usando

$$\int \mathrm{Tan}^n(kx)\,dx = \frac{1}{k(n-1)}\,\mathrm{Tan}^{n-1}(kx) - \int \mathrm{Tan}^{n-2}(kx)\,dx$$

Se tiene

$$= \frac{1}{8}\mathrm{Tan}^4(2x) - \int \mathrm{Tan}^3(2x)\,dx + \int \mathrm{Tan}^3(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\mathrm{Tan}^4(2x) + C$$

3.) $\int \mathrm{Tan}^6(6x)dx$

Resolución

$$\int \mathrm{Tan}^6(6x)\,dx = \frac{1}{6}\int \mathrm{Tan}^6(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{6}\int \mathrm{Tan}^4(z)\,.\mathrm{Tan}^2(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{6}\int \mathrm{Tan}^4(z)\,.(\mathrm{Sec}^2(z) - 1\,)dz$$

$$= \frac{1}{6}\left[\int \mathrm{Tan}^4(\mathrm{z}).\mathrm{Sec}^2(\mathrm{z}) \; - \int \mathrm{Tan}^4(\mathrm{z}) \; \mathrm{dz}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\int u^4 \, du - \int \mathrm{Tan}^2(\mathrm{z}).\mathrm{Tan}^2(\mathrm{z}) \; \mathrm{dz}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{u^5}{5} - \int \mathrm{Tan}^2(\mathrm{z}).(\mathrm{Sec}^2(\mathrm{z}) - 1) \; \mathrm{dz}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{Tan^5(x)}{5} - \int \mathrm{Tan}^2(\mathrm{z}).\mathrm{Sec}^2(\mathrm{z})\,\mathrm{dz} + \int \mathrm{Tan}^2(\mathrm{z})\,\mathrm{dz}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{Tan^5(x)}{5} - \frac{\mathrm{Tan}^3(z)}{3} + \int \mathrm{Tan}^2(z)\,\mathrm{dz}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{Tan^5(x)}{5} - \frac{\mathrm{Tan}^3(\mathrm{z})}{3} + \int (\mathrm{Sec}^2(\mathrm{z}) - 1)\,\mathrm{dz}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{Tan^5(x)}{5} - \frac{\mathrm{Tan}^3(\mathrm{z})}{3} + \int \mathrm{Sec}^2(\mathrm{z})\,\mathrm{dz} - \int dz\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{Tan^5(x)}{5} - \frac{\mathrm{Tan}^3(6x)}{3} + Tan(6x) - 6\mathrm{x}\right] + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \mathrm{CoTan}^2(x).\,\mathrm{CoSec}^3(x)\,dx$

2.) $\int \mathrm{Tan}^2(x).\,\mathrm{Sec}^3(x)\,dx$

3.) $\int \mathrm{CoTan}^3(x).\,\mathrm{CoSec}^6(x)\,dx\;\;dx$

4.) $\int \mathrm{Tan}^4(x).\,\mathrm{CoSec}^6(x)\,dx$

3.4.12. Integrales de la Forma

$$\int \boldsymbol{Sen(mx).Sen(nx)\,dx};$$

$$\int \boldsymbol{Sen(mx).Cos(nx)\,dx};$$

$$\int \boldsymbol{Cos(mx).Cos(nx)\,dx}$$

Se reduce a integrales inmediatas si utilizamos las siguientes identidades:

$$Sen(mx).Sen(nx) = \frac{1}{2}[Cos(m-n)x - Cos\,(m+n)x]$$

$$Sen(mx).Cos(nx) = \frac{1}{2}[Cos(m-n)x + Cos\,(m+n)x]$$

$$Cos(mx).Cos(nx) = \frac{1}{2}[Cos(m-n)x - Cos\,(m+n)x]$$

Ejemplos

1.) $\int \text{Sen}(3x).\text{Cos}(7x)\,dx$

Resolución

$$\int \text{Sen}(3x).\text{Cos}(7x)\,dx = \int \frac{1}{2}[\text{Cos}(10x) + \text{Cos}(4x)]\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\text{Cos}(10x)\, dx \; + \int \frac{1}{2}\text{Cos}(4x)\; \text{dx}$$

$$= \frac{1}{20}\text{Sen}(10x) \; + \frac{1}{8}\text{Sen}(4x) \; + C$$

2.) $\text{I} = \int \text{Sen}(2\text{x}).\text{Cos}(3\text{x})\,.\text{Sen}(4\text{x})\text{dx}$

Resolución

$$I = \int \frac{1}{2}[\text{Cos}(5x) + \text{Cos}(x)]\text{Sen}(4\text{x})\text{dx}$$

$$= \int \frac{1}{2}\text{Cos}(5x)\,\text{Sen}(4x)dx + \int \frac{1}{2}\text{Cos}(x)\,\text{Sen}(4x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}[\text{Cos}(9x) + \text{Cos}(x)]\text{dx} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}[\text{Cos}(5x) + \text{Cos}(x)]\text{dx}$$

$$= \frac{1}{4}\int \text{Cos}(9x)\,\text{dx} + \frac{1}{4}\int \text{Cos}(x)\,\text{dx} + \frac{1}{4}\int \text{Cos}(5x)\,\text{dx} + \frac{1}{4}\int \text{Cos}(x)\,\text{dx}$$

$$= \frac{1}{36}Sen(9x) + \frac{1}{2}Sen(x) + \frac{1}{20}\text{Sen}\,(5\text{x}) + \text{C}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \text{Cos}(3x).\text{Sen}(2x)\,dx$

2.) $\int \text{Cos}(4x).\text{Sen}(6x)\,dx$

3.) $\int \text{Sen}(5x).\text{Sen}(7x)\,dx$

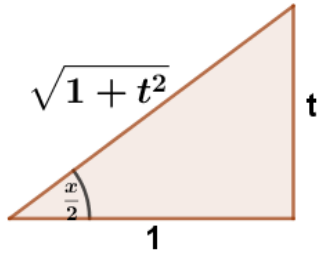
4.) $\int \text{Cos}\left(\frac{5x}{3}\right).\text{Cos}\left(\frac{7x}{3}\right)\,dx$

5.) $\int \text{Sen}(3x).\text{Cos}(9x)\,dx$

3.4.13. Integrales de Funciones Racionales de Seno y Coseno

$$\int R\big(Sen(x); Cos(x)\big)\, dx$$

Estos tipos de integrales se reducen a integrales de funciones racionales mediante la sustitución universal



$$\mathbf{t} = \mathbf{Tan}\left(\frac{x}{2}\right), -\pi < x < \pi$$

$$\mathbf{Sen(x)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\boldsymbol{Cos}\,\mathbf{(x)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Se puede seleccionar otras sustituciones siempre que la función integrando tenga una de las siguientes formas:

1.) $\boldsymbol{R(-Sen(x)\,;Cos(x)) = -R(Sen(x)\,;Cos(x))}$

Usar Cos(x) = t

2.) $\boldsymbol{R(Sen(x)\,;-Cos(x)) = -R(Sen(x)\,;Cos(x))}$

Usar Sen(x) = t

3.) $\boldsymbol{R(-Sen\,(x)\,;-Cos\,(x)) = R(Sen\,(x)\,;Cos\,(x))}$

Usar Tan(x) = t

Ejemplos

1.) $\int \frac{1+\mathrm{Sen(x)}}{1-\mathrm{Cos(x)}}\,\mathrm{dx}$

Resolución

Sustitución universal:

$$t = Tan(\frac{x}{2}), \qquad \text{Sen(x)} = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad Cos\ (\text{x}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1+\text{Sen(x)}}{1-\text{Cos(x)}}\text{dx} = \int \frac{1+\frac{2\text{t}}{1+t^2}}{1-\frac{1-\text{t}^2}{1+t^2}} \frac{2\text{dt}}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1}{t^2}\text{dt} + \int \frac{2}{t(1+t^2)}\text{dt}$$

$$= -\frac{1}{\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)} + \text{Ln}\frac{\text{Tan}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\text{Tan}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} + C$$

2.) $\int \frac{1}{4+5\text{Cos}^2(\text{x})}\text{dx}$

Resolución

$$R(-Sen\ (x); -\text{Cos}(x)) = \frac{1}{4+5(-\text{Cos}\,x)^2} = \frac{1}{4+5\text{Cos}^2\,\text{x}}$$

Luego hacer

$$t = \text{Tan}(x) \Rightarrow x = Arc\,\text{Tan}(t)\ dt \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}\ dt$$

reemplazando en la integra dada:

$$\int \frac{1}{4+5\text{Cos}^2(\text{x})}\text{dx} = \int \frac{1}{4+5\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{1}{9+4t^2}dt = \frac{1}{6}ArcTan\left(\frac{2t}{3}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{4+5\text{Cos}^2(\text{x})}\text{dx} = \frac{1}{6}ArcTan\left(\frac{2\,\text{Tan}(x)}{3}\right) + C$$

3.) $\int \frac{\text{Sen}\,(x).\text{Cos}(x)+1}{\text{Sen}(x).\text{Cos}(x)-1}\text{dx}$

Resolución

$$\int \frac{\text{Sen}(x).\,\text{Cos}(x)+1}{\text{Sen}(x).\,\text{Cos}(x)-1}\text{dx} = \int \left(1+\frac{2}{\text{Sen}(x).\,\text{Cos}(x)-1}\right)\text{dx}$$

$$= \int \text{dx} + \int \frac{2}{\text{Sen(x)}.\,\text{Cos}(\,x)-1}\text{dx}$$

$$= x + \int \frac{2}{\text{Sen}(x).\text{Cos}(x) - 1}\,\text{dx}$$

determinaremos el equivalente de

$$\int \frac{2}{\text{Sen}(x).\text{Cos}(x) - 1}\,\text{dx}$$

Observamos que

$$\text{R}(-\text{Sen}(x); -\text{Cos}(x)) = \frac{2}{(-\text{Sen}(x)).(-\text{Cos}(x)) - 1}$$

$$= \text{R}(-\text{Sen}(x); -\text{Cos}(x))$$

Usamos el cambio de variable:

$$\text{Tan}\, x = t \Rightarrow \begin{cases} Sen(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \text{Cos}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{cases}$$

Reemplazando y reduciendo se obtiene

$$\int \frac{1}{\text{Sen}(x).\text{Cos}(x)-1}\,\text{dx} = \int \frac{-1}{t^2-\text{t}+1}\,\text{dx}$$

$$= \int \frac{-1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\text{dx} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\text{ArcTan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{3}}\text{ArcTan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Por tanto

$$\int \frac{\text{Sen}(x).\text{Cos}(x)+1}{\text{Sen}(x).\text{Cos}(x)-1}\,\text{dx} = x + \int \frac{2}{\text{Sen x.Cos}\,x-1}\,\text{dx}$$

$$= x - \frac{4}{\sqrt{3}}\text{ArcTan}\left(\frac{2\,\text{Tan}(x)-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{\mathrm{Cos}(9x)}{\mathrm{Sec}(9x) - \mathrm{Tan}(9x)}\ \mathrm{dx}$

2.) $\int \frac{\mathrm{Cos}(8x)}{1 - \mathrm{Cos}(8x)}\ \mathrm{dx}$

3.) $\int \frac{Sen^{2}(x)}{Cos^{6}(x)}\ \mathrm{dx}$

4.) $\int \frac{Cos^{2}(x)}{Sen^{4}(x)}\ \mathrm{dx}$

5.) $\int \frac{1 + Cos^{3}(x)}{1 - Sen^{4}(x)}\ \mathrm{dx}$

3.4.14. Integrales de Funciones Irracionales Mediante Sustituciones Trigonométricas

$$\int \boldsymbol{R\left(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx}$$

Estos tipos de integrales se pueden transformar en integrales de la forma

$$\int \boldsymbol{R_1\big(Sen(x);Cos(x)\big)\,dx}$$

Utilizándose las sustituciones trigonométricas (cambio de variables) adecuada, para tal efecto se procede a completar cuadrado perfecto la cantidad sub radical: $ax^2 + bx + c$ presentándose los siguientes casos

Caso 1.) $\int \boldsymbol{R\left(z;\ \sqrt{m^2z^2+n^2}\right)\,dz}$

cambio de variable $z = \dfrac{n}{m}\,Tan(t)$

Caso 2.) $\int \boldsymbol{R\left(z;\ \sqrt{m^2z^2-n^2}\right)\,dz}$

cambio de variable $z = \dfrac{n}{m}\,Sec(t)$

$Caso\ 3.)\ \int R\left(z;\ \sqrt{n^2 - m^2 z^2}\right)\ dz$

$$\text{cambio de variable } z = \frac{n}{m}\ Sen(t)$$

Si tuviésemos una integral de la forma

$$\int R\left(x^n;\ \sqrt{a^2 \pm x^2}\right)\ dz \quad \text{ó} \quad \int R\left(x^n;\ \sqrt{x^2 - a^2}\right)\ dz$$

es preferible usar

$$z^2 = a^2 \pm x^2 \quad \text{ó} \quad z^2 = x^2 - a^2$$

respectivamente.

Ejemplos

1.) $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^3} \text{dx}$

Resolución

$$hacer\ x = \sqrt{3}\ Sen(t) \implies dx = \sqrt{3}\ Cos(t)\ dt$$

$$\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{3-\left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sen(t)}\,\right)^2}}{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sen(t)}\right)^3}\sqrt{3}\,\mathrm{Cos(t)dt}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3}Cos(t)}{3\sqrt{3}\mathrm{Sen}^3(t)}\sqrt{3}\,\mathrm{Cos(t)}\;\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\mathrm{Cos}^2(t)}{\mathrm{Sen}^3(t)}dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \mathrm{CoTan}^2(t)\,.\,\mathrm{Cosec}(t)\;\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int (\mathrm{Cosec}^2(t)-1\,).\,\mathrm{Cosec}(t)\;\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \mathrm{Cosec}^3(t)\,dt - \frac{\sqrt{3}}{3}\int \mathrm{Cosec}(t)\;\,dt$$

usando

$$\int \mathrm{Cosec}^n(t)\,dt = \frac{n-2}{n-1}\int \mathrm{Cosec}^{n-2}(t)\,dt - \frac{CoTan(t)\,.\,Cosec^{n-2}(t)}{n-1}$$

en nuestro caso n = 3, resultando

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\frac{-\mathrm{CoTan(t)}.\mathrm{Cosec}(t)}{2} - \frac{1}{2}\int \mathrm{Cosec}(\,t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\frac{-\text{CoTant.Cosec}(t)}{2} + \frac{1}{2}\text{Ln}|\text{Cosec}(t) + CoTan(t)|\right\} + C$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{6}\left\{\frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\frac{\sqrt{3}}{x} - \text{Ln}\left|\frac{\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\right|\right\} + C$$

2.) $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x+1}\text{dx}$

Resolución

Hacer: $x = 3\,\text{Tan}(z) \implies dx = \sqrt{3}\,\text{Sec}^2(z)\,dz$

Reemplazando

$$\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x+1}\text{dx} = \int \frac{\sqrt{9+9\,Tan^2(z)}}{3\,\text{Tan}(z)+1}.3\,\text{Sec}(z)\,dz$$

$$= \int \frac{9Sec^3(z)}{3\,\text{Tan}(z)+1}\,\text{dz}$$

$$= \int \frac{9}{Cos^2(z).(3Sen(z)+\text{Cos}(z))}\,\text{dz}$$

Haciendo $\text{w} = \text{Tan}(\frac{z}{2})$

$$= \int \frac{18(1+w^2)^2}{(1-w^2)^2(-w^2+6w+1)}\,\mathrm{dz}$$

$$= -\sqrt{10}ln\left|\frac{w-\sqrt{10}-3}{w+\sqrt{10}-3}\right| + ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right| - \frac{6}{(w-1)(w+1)} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{3x}\,\mathrm{dx}$

2.) $\int \frac{x+\sqrt{5-x^2}}{4-\sqrt{5-x^2}}\,\mathrm{dx}$

3.) $\int \frac{\sqrt{5\mathrm{x}-x^2}}{5\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$

4.) $\int \frac{1}{\sqrt{(3+x^2)^3}}\,\mathrm{dx}$

5.) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a-2x^2)^3}}\,\mathrm{dx}$

3.4.15. Integrales de la Forma

$$\int \boldsymbol{P_n(x)}.\begin{cases} \boldsymbol{e^{bx}} \\ \boldsymbol{Sen(ax)} \\ \boldsymbol{Cos(ax)} \end{cases} \boldsymbol{dx}$$

Donde:

$$\boldsymbol{P_n(x)} = \sum_{\boldsymbol{i=o}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_i x^i}$$

para determinar el equivalente de la integral dada se presentan los siguientes casos:

$\boldsymbol{Caso\ 1}.)$

$$\int \mathrm{P_n(x)}.\mathrm{e^{bx}}\ \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{e^{bx}}}{\mathrm{b}}\left[\mathrm{P(x)} - \frac{\mathrm{P'(x)}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{P''(x)}}{\mathrm{b^2}} - \frac{\mathrm{P'''(x)}}{\mathrm{b^3}} + \ldots\right]$$

También se puede usar

$$\int \mathrm{P_n(x)}.\mathrm{e^{bx}}\ \mathrm{dx} = \mathrm{Q}_n(x)\frac{\mathrm{e^{bx}}}{\mathrm{b}} + C(*)$$

donde

$$\mathbf{Q_n(x)} = \boldsymbol{r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_o}$$

los coeficientes r_i se determinan derivando ambos miembros de (*)

***Caso* 2.**)

$$\int P_n(x).\,Sen(ax)\ dx = -\frac{Cos\,(ax)}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - .\ldots\right] + \frac{Sen\,(ax)}{a}\left[\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^5} - .\ldots\right]$$

***Caso* 3.**)

$$\int P_n(x).\,Cos(ax)\ dx = \frac{Sen\,(ax)}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - .\ldots\right] + \frac{Cos\,(ax)}{a}\left[\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^5} - .\ldots\right]$$

Ejemplos

1.) $\int (5x^6 - 9x - 7)e^{3x}\ dx =$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(5x^6 - 9x - 7 - \frac{5.6x^5 - 9}{3} + \frac{5.6.5x^4}{3^2} - \frac{5.6.5.4x^3}{3^3} + \frac{5.6.5.4.3x^2}{3^4} - \frac{5.6.5.4.3.2x}{3^5} + \frac{5.6.5.4.3.2.1}{3^6}\right) + C$$

2.) $\int (5x^6 - 3x)Sen(7x)\mathrm{dx} =$

$$= -\frac{\mathrm{Cos}(7x)}{7}\left(5x^6 - 3x - \frac{150x^4}{7^2} + \frac{1800x^2}{7^4} - \frac{3600}{7^6}\right) + \frac{\mathrm{Sen}(7x)}{7}\left(\frac{30x^5 - 3}{7} + \frac{1800x^3}{7^3} + \frac{3600x}{7^5} - \frac{3600}{7^7}\right) + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int (x^7 - 7)e^{7x}\ \mathrm{dx}$

2.) $\int (5x^9 - 9)e^{3x-5}\ \mathrm{dx}$

3.) $\int (3x^6 - 4x^5 + 12)\mathrm{e}^{13x+16}\ \mathrm{dx}$

4.) $\int 2(3x - 4)(x + 7).\mathrm{x}.\mathrm{e}^{x+6}\ \mathrm{dx}$

5.) $\int (3x^3 + 4x^4 - 5x^5 - 6x^6)(x + 7).\mathrm{Cos}(12x - 5)\ \ \mathrm{dx}$

6.) $\int (x + x^4 - x^6)(7x + 8).\mathrm{Cos}\left(\frac{2x - 9}{4}\right)\ \ \mathrm{dx}$

7.) $\int (x + 3x^2)(7x - 2).\mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\ \ \mathrm{dx}$

8.) $\int (2 + 3x^3)(x - 2)(x + 3).Sen(3x - 1)\mathrm{dx}$

9.) $\int \left(\frac{2 + 3x^2}{4}\right).\mathrm{x}.(x - 4).Sen(x + 4)\mathrm{dx}$

10.) $\int (x - 2).(3x^6 - x).Sen(x + 4).Cos(x + 4)\mathrm{dx}$

3.4.16. Integrales de Funciones Trascendentes

3.5.16.1. De funciones exponenciales

$$\int \boldsymbol{R}(\boldsymbol{e^{m_1 x}}; \boldsymbol{e^{m_2 x}}; \ldots; \boldsymbol{e^{m_n x}})\, \boldsymbol{dx}\ , \qquad \boldsymbol{con}\ \ \boldsymbol{m_i} \in \mathbb{Q}$$

Al realizar el cambio de variable

$$e^x = t$$

obtenemos

$$\int \frac{\boldsymbol{R_1}(\boldsymbol{t^{m_1}}; \boldsymbol{t^{m_2}}; \ldots; \boldsymbol{t^{m_n}})}{\boldsymbol{t}}\, \boldsymbol{dt}$$

luego al hacer

$$z^r = t$$

donde r : MCM de los denominadores de los m_i

se reduce a una integral de una función racional.

Ejemplos

1.) $\int \frac{e^x+e^{-2x}}{e^{3x}+e^x}\,dx$

Resolución

hacer $e^x = t \implies x = \mathrm{Ln}(t) \implies dx = \frac{1}{t}dt$

Reemplazando

$$\int \frac{e^x + e^{-2x}}{e^{3x} + e^x}\,dx = \int \frac{t + t^{-2}}{t^3 + t}.\frac{1}{t}dt = \int \frac{1 + t^3}{t^3(t^2 + 1)}dt$$

Usando las técnicas de integrales de fracciones parciales,

se tiene:

$$\int \frac{1 + t^3}{t^3(t^2 + 1)}dt = \mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{|t|}\right) + \mathrm{ArcTan}(t) - \frac{1}{2t^2} + C$$

$$\int \frac{1 + t^3}{t^3(t^2 + 1)}dt = ln\left(\frac{\sqrt{e^{2x} + 1}}{|e^x|}\right) + \mathrm{ArcTan}(e^x) - \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

2.) $\int \frac{e^x+e^{2x}-e^{3x}}{e^{2x}-e^{3x}+e^{4x}}\,dx$

Resolución

Hacer $e^x = t \implies x = \text{Ln}(t) \implies dx = \frac{1}{t}dt$

reemplazando

$$\int \frac{e^x + e^{2x} - e^{3x}}{e^{2x} - e^{3x} + e^{4x}}\,dx = \int \frac{t + t^2 - t^3}{t^2 - t^3 + t^4}.\frac{1}{t}dt$$

$$= \text{Ln}\frac{t^2}{t^2 - t + 1} - \frac{2\,\text{ArcTan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{t} + C$$

$$= \text{Ln}\frac{e^{2x}}{e^{2x} - e^x + 1} - \frac{2\,\text{ArcTan}\left(\frac{2e^{2x}-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{e^{2x}} + C$$

3.) $\int \frac{\sqrt{e^x} + e^{\frac{x}{3}}}{e^x - \sqrt[3]{e^x}}\,dx$

Resolución

Hacer $e^x = t \implies x = \text{Ln}(t) \implies dx = \frac{1}{t}dt$

reemplazando

$$I = \int \frac{\sqrt{e^x} + e^{\frac{x}{3}}}{e^x - \sqrt[3]{e^x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}}{t - \sqrt[3]{t}} . \frac{1}{t} dt$$

hacer $z^6 = t \implies dt = 6z^5 dz$

$$I = \int \frac{z^3 + z^2}{z^6 - z^2} . 6z^5 dz = \int \frac{6z^5(z+1)}{z^4 - 1} dz$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\text{Ln}\left(\sqrt[3]{e^x} + 1\right)^{-3}\left(\sqrt[6]{e^x} - 1\right)^{-6} - 6\text{ArcTan}\left(\sqrt[6]{e^x}\right) - 2\sqrt[3]{e^x}\left(2\sqrt[6]{e^x} + 3\right)\right] + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int \frac{\sqrt{e^{2x}} - 2e^{\frac{2x}{3}}}{e^{2x} + \sqrt[3]{e^{2x}}}\, dx$

2.) $\int \frac{\sqrt{e^{3x}} + 3e^{\frac{2x}{3}}}{\sqrt{e^{3x}} - 4\sqrt[3]{e^{2x}}}\, dx$

3.5.16.2. De funciones Hiperbólicas

La integral de las funciones hiperbólicas es análoga a las integrales de funciones circulares; se debe tener presente las siguientes definiciones e identidades

1.) $\text{Senh}\,(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

2.) $\text{Cosh}\,(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

3.) $\text{Tanh}\,(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

4.) $\text{CoTanh}\,(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

5.) $\text{Sech}\,(x) = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

6.) $\text{Cosech}\,(x) = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

7.) $\text{Cosh}^2(x) - \text{Senh}^2\,(x) = 1$

8.) $\text{Senh}^2(x) = \dfrac{\text{Cosh}(2x) - 1}{2}$

9.) $\text{Cosh}^2(x) = \dfrac{\text{Cosh}(2x) + 1}{2}$

10.) $Senh(2x) = 2\,Senh\,(x).\text{Cosh}(x)$

11.) $\text{Tanh}(x) = \dfrac{2\text{Tanh}\,(x)}{1 + \text{Tanh}^2\,(x)}$

12.) $\text{Cosh}(x+y) = \text{Cosh(x)}.\text{Cosh}(y) + senh\ (\text{x}).Senh(y)$

13.) $\text{Cosh}(x-y) = \text{Cosh(x)}.\text{Cosh}(y) - senh\ (\text{x}).Senh(y)$

14.) $\text{Senh}(x+y) = \text{Senh(x)}.\text{Cosh}(y) + Cosh\ (\text{x}).Senh(y)$

15.) $\text{Senh}(x-y) = \text{Senh(x)}.\text{Cosh}(y) - Cosh\ (\text{x}).Senh(y)$

16.) $Senh(x).Senh(y) = \dfrac{\text{Cosh}(x+y) - \text{Cos h}(x-y)}{2}$

17.) $Cosh(x).Cosh(y) = \dfrac{\text{Cosh}(x+y) + \text{Cos h}(x-y)}{2}$

18.) $Senh(x).Cosh(y) = \dfrac{\text{Senh}(x+y) + \text{Sen h}(x-y)}{2}$

Resultados para integrales

1.) $\int \text{Senh(ax)dx} = \dfrac{1}{a}\text{Cosh(ax)} + \text{C}$

2.) $\int \text{Cosh(ax)dx} = \dfrac{1}{a}\text{Senh(ax)} + \text{C}$

3.) $\int \text{Tanh(ax)dx} = \dfrac{1}{a}\text{Ln}|\text{Cosh(ax)}| + \text{C}$

4.) $\int \text{CoTanh(ax)dx} = \dfrac{1}{a}\text{Ln}|\text{Senh(ax)}| + \text{C}$

5.) $\int \text{Sech(ax)dx} = \frac{1}{a}\text{ArcTan}\big(senh(ax)\big) + \text{C}$

6.) $\int \text{Csch(ax)dx} = \frac{1}{a}\text{Ln}\left|\text{Tanh}\left(\frac{(\text{ax})}{2}\right)\right| + \text{C}$

7.) $\int \text{ArcSen h}\left(\frac{\text{x}}{a}\right)\text{dx} = \text{x.ArcSenh}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 + a^2} + \text{C}$

8.) $\int \text{ArcCosh}\left(\frac{\text{x}}{a}\right)\text{dx} = \text{x.ArcCosh}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 - a^2} + \text{C}$

Ejemplos

1.) Demostrar que $\text{Cosh}^2(x) - \text{Senh}^2\,(x) = 1$

En efecto:

$$\text{Senh}^2(x) = \left(\frac{\text{e}^{\text{x}} - \text{e}^{-\text{x}}}{2}\right)^2 \;;\; \text{Cosh}^2\,(x) = \left(\frac{\text{e}^{\text{x}} + \text{e}^{-\text{x}}}{2}\right)^2$$

$$\text{Cosh}^2(x) - \text{Senh}^2\,(x) = \left(\frac{\text{e}^{\text{x}} + \text{e}^{-\text{x}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{e}^{\text{x}} - \text{e}^{-\text{x}}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\text{e}^{2\text{x}} + 2 + \text{e}^{-2\text{x}}}{4} - \frac{\text{e}^{2\text{x}} - 2 + \text{e}^{-2\text{x}}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

2.) Demostrar que $Senh(2x) = 2\,Senh(x)\,.\mathrm{Cosh}(\,x)$

En efecto:

$$2\,Senh\,(x)\,.\mathrm{Cosh}(x) = 2.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}}{2}$$

$$= Senh(2x)$$

3.) Evaluar: $I = \int \frac{\mathrm{Senh}(3\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}\,dx$

Resolución

$$Hacer\ \sqrt{x} = z\ \Rightarrow x = z^2\ \Rightarrow dx = 2zdz$$

$$I = \int \frac{\mathrm{Senh}(3z)}{4z}\,2zdz = \int \frac{\mathrm{Senh}(3z)}{2} = \frac{\mathrm{Cosh}(3z)}{6} + C$$

$$= \frac{\mathrm{Cosh}(3\sqrt{x})}{6} + C$$

4.) Evaluar: $I = \int \frac{7\,\mathrm{Sec}\,h(5\,\mathrm{Ln}(x))}{5x}\,dx$

Resolución

$$Hacer 5\,\mathrm{Ln}(x) = z \Rightarrow \frac{5}{x}dx = dz \Rightarrow x = e^{\frac{z}{5}}$$

$$I = \int \frac{7\,\mathrm{Sec}\,h\,(5\,\mathrm{Ln}(x))}{5x}\,dx = \int \frac{7\,\mathrm{Sec}\,h\,(\mathrm{z})}{25}\,dz$$

$$I = \frac{7\,\mathrm{ArcTan}\big(Senh(5\,\mathrm{Ln}(x))\ \big)}{25} + C$$

5.) $I = \int \mathrm{ArcCosh}\left(\frac{3\mathrm{x}-7}{9}\right)\mathrm{dx}$

Resolución

$$Hacer\ \frac{3\mathrm{x}-7}{9} = z\ \Rightarrow dx = 3\,dz\ \Rightarrow x = \frac{9z+7}{3}$$

$$\int \mathrm{ArcCosh}\left(\frac{3\mathrm{x}-7}{9}\right)\mathrm{dx}\ =\ \int 3.\,\mathrm{ArcCosh}(\mathrm{z})\ \mathrm{dz}$$

$$= 3\left(z.\,\mathrm{ArcCosh}(\mathrm{z}) - \sqrt{z^2-1}\right) +\ \mathrm{C}$$

$$I = 3\left(\frac{(3\mathrm{x}-7).\,\mathrm{ArcCosh}\ \left(\frac{3\mathrm{x}-7}{9}\right)}{9} - \sqrt{\left(\frac{3\mathrm{x}-7}{9}\right)^2 - 1}\right) + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Demostrar las igualdades que a las identidades hiperbólicas presentadas anteriormente con los numerales:8; 10; 12; 15; y 18.

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\int ArcTanh\,(5x)dx$

2.) $\int Tanh\,(x-7)dx$

3.) $\int Cosh\,(x-8)dx$

4.) $\int Arc\,Senh\,(7x+11)dx$

3.5.16.3 Integrales de la Forma

$$\int \boldsymbol{R(Senh(x); Cosh(x))\, dx}$$

al considerar $\boldsymbol{t = Tan\, h\left(\frac{x}{2}\right)}$ se obtiene

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2};\ Senh(x) = \frac{2t}{1-t^2}\ ,\ Cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$Senh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ ,\ Cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

después de reemplazar y simplificar se obtendrá una integral de una función racional.

Si $\boldsymbol{R(Senh(x); -Cosh(x)) = -R(Senh(x); Cosh(x))}$

Hacer el cambio de variable:

$$\boldsymbol{Senh(x) = t}$$

$$\boldsymbol{Cosh(x) = \sqrt{t^2+1}},$$

$$\boldsymbol{dx = \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}}$$

Si $\boldsymbol{R(-Senh(x); Cosh(x)) = -R(Senh(x); Cosh(x))}$

Hacer el cambio de variable:

$$\boldsymbol{Cosh(x) = t}$$

$$\boldsymbol{Senh(x) = \sqrt{t^2 - 1}}$$

$$\boldsymbol{dx = \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}}$$

Si $\boldsymbol{R(-Senh(x); -Cosh(x)) = R(Senh(x); Cosh(x))}$

Hacer el cambio de variable:

$$\boldsymbol{Tanh(x) = t}$$

$$\boldsymbol{Cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}}$$

$$\boldsymbol{Senh(x) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}}$$

$$\boldsymbol{dx = \frac{dt}{1 - t^2}}$$

En los otros casos se hacer:

$$\boldsymbol{Tanh\left(\frac{x}{2}\right) = t}$$

$$\boldsymbol{Cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\boldsymbol{Senh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\boldsymbol{Sen\, h(x) = \frac{2t}{1-t^2}}$$

$$\boldsymbol{Cos\, h(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

$$\boldsymbol{\left(1 - Tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) d\left(\frac{x}{2}\right) = dt \implies dx = \frac{2dt}{1-t^2}}$$

En muchos casos resulta más cómodo utilizar:

1.) $t = Senh(x);\ \ t = Cosh(x);\quad t = Tanh(x)$

2.) $t\ =\ e^x$

Ejemplos: evaluar

1.) $\int \boldsymbol{Senh}^{\mathbf{2}}(x)\,\boldsymbol{dx}$

Resolución

$$\int \text{Senh}^{\,2}(x)\,\text{dx} = \int \frac{\text{Cosh}(2x)-1}{2}\,dx$$

$$= \int \frac{\text{Cosh}(2x)}{2}\,dx - \int \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \frac{\text{Senh}(2x) - 2x}{4} + C$$

2.) $\int \dfrac{\boldsymbol{Senh}\sqrt{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}$

Resolución

Hacer: $z = \sqrt{x}$

$$\int \frac{Senh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\text{dx} = \frac{1}{2}\int \text{Senh(z)}\;\; dz = \frac{1}{2}\text{Cosh}(z) + C$$

$$= \frac{1}{2}\text{Cosh}\sqrt{\boldsymbol{x}} + C$$

3.) $\int \boldsymbol{Cosh^2(5x-9)dx}$

Resolución

$$\int \text{Cosh}^2(5\text{x}-9)\,\text{dx} = \frac{1}{2}\int (1+\text{Cosh}(10x-18))\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{x} + \frac{1}{24}\text{Senh}(10\text{x}-18) + C$$

4.) $\int \dfrac{\boldsymbol{Senh(x)}}{\boldsymbol{Senh^2(x) - 5Cosh^2(x) + 7}}\boldsymbol{dx}$

Resolución

$$\text{R}(-\text{Senh (x)}; \text{Cosh (x)}) = \frac{-\text{Senh (x)}}{\text{Senh}^2\text{ (x)} - 5\text{Cosh}^2\text{ (x)} + 7}$$

$$= -\text{R}(\text{Senh(x)}; \text{Cosh(x)})$$

Hacer

$$Senh(x) = t \quad \text{de aqui } Cosh(x) = \sqrt{t^2-1}, dx = \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\int \frac{\text{Senh x}}{\text{Senh}^2\text{ x} - 5\text{Cosh}^2\text{ x} + 7}\,\text{dx} = \int \frac{\text{t}}{-4(\text{t}^2\ -3)}\,\text{dx}$$

$$= \frac{\text{Ln}(|t^2-3|)}{-8} + C$$

$$= \frac{\text{Ln}(|\text{Senh}^2\text{ x} - 3|)}{-8} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) $\dfrac{1+Senh\,(x)}{1-\,Cosh(x)}dx$

2.) $\displaystyle\int \dfrac{2Senh\,(x)}{Tanh(\,x)-CoTanh(x)}dx$

3.) $\dfrac{Cosh(x)+S}{2Senh\,(x)-\,Cosh(\,x)}dx$

4.) $\displaystyle\int \dfrac{2Senh\,(x)-3}{Tanh(x)-CoTanh\,(x)}dx$

5.) $\dfrac{Cosh(2x)-4\,Senh\,(2x)}{5Senh\,(2x)-\,7Cosh(2x)}dx$

6.) $\displaystyle\int \dfrac{2Cosh\,(x)}{Senh\,(x)-CoTanh(x)}dx$

7.) $\dfrac{Cosh^2(2x)-4\,Senh^2\,(2x)}{5Senh\,^2(2x)-\,7Cosh^2(2x)}dx$

8.) $\displaystyle\int \dfrac{Tanh(x)+CoTanh(x)}{Cosech(x)-Sech(x)}dx$

3.5.16.4 Integrales de la Forma

$$\int \boldsymbol{Senh^m}\,(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}\,;\int \boldsymbol{Cosh^n}\,(\boldsymbol{x})\;\boldsymbol{dx}\quad \boldsymbol{con\ m,n}\in\mathbb{Q}$$

se realiza cualquiera de las sustituciones

1.) $t = Senh(x)$

2.) $t\ = \mathrm{Cosh}(x)$

la que permite utilizar el procedimiento de las integrales Binomios Diferenciales.

Ejemplo:

1.) $\boldsymbol{Evaluar}\int \boldsymbol{Senh^3}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$

Resolución

hacer $\mathrm{Senh(x)} = \mathrm{z}\ \Rightarrow \mathrm{dx} = \dfrac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$

$$\int \mathrm{Senh}^3(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\ = \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{z^2+1}}\ = \frac{(z^2-1)}{3}\sqrt{z^2+1}+C$$

$$= \frac{(\mathrm{Senh}^2(x)-1)}{3}.\sqrt{\mathrm{Senh}^2(x)+1}+C$$

2.) $\boldsymbol{Evaluar} \int \boldsymbol{Cosh^4(x)\, dx}$

Resolución

hacer $\boldsymbol{Cosh}(x) = z \;\Rightarrow dx = \dfrac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$

$$\int \text{Cosh}^4(x)\, dx = \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$= \frac{z^3(3z^2-4)}{\sqrt{(z^2-1)^3}} + C$$

$$= \frac{Cosh^3(x)\,.\,(3\,Cosh^2(x)-4)}{\sqrt{(Cosh^2(x)-1)^3}} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales

1.) Evaluar $\int \text{Cosh}^5(2x)dx$

2.) Evaluar $\int \text{Senh}^5(2x+5)dx$

3.) Evaluar $\int \left(\text{Cosh}^2(x-4)+\text{Senh}^5(3x+1)\right)dx$

4.) Evaluar $\int \left(5\text{Cosh}^3(5x)+7\text{Senh}^7(7x-7)\right)dx$

CAPÍTULO N° 4

INTEGRALES DE FUNCIONES ELEMENTALES QUE NO PUEDEN EXPRESARSE COMO FUNCIONES ELEMENTALES.

Si se tiene una función f(x), no siempre es posible encontrar una función antiderivada, es decir, una función F(x) cuya derivada F′(x) sea igual a f(x), y cuando es posible dicha solución no siempre se puede expresar en forma elemental. Se presenta algunas integrales que no tienen antiderivada.

4.1. Funciones algebraicas.

Entre las funciones algebraicas destacan las elípticas, en particular:

1.) $\int \sqrt{ax^n + b}\, dx \ , a, b \in \mathbb{R} - \{0\} \ , n \in \mathbb{Q} \ , n > 2$

2.) $\int \frac{1}{\sqrt{ax^n + b}}\, dx \ , a, b \in \mathbb{R} - \{0\} \ , n \in \mathbb{Q} \ , n > 2$

3.) $\int \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}\, dx \ , \qquad 0 < k < 1$

5.) $\int \frac{\sqrt{1 - k^2x^2}}{\sqrt{1 - k^2x^2}}\, dx \ , \ \ 0 < k < 1$

6.) $\int \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} dx, P(x)\ y\ Q(x)$ polinomios, $Q(x)$ sin raíces repetidas, $gr(Q) \geq 3$ y $gr(P) < \frac{gr(Q)}{2} - 1$

7.) $\int x^m (ax^n + b)^P\, dx, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}, a, b, n;$ y $\frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p \notin \mathbb{Z}$

4.2. Funciones trigonométricas.

Algunas de las integrales trigonométricas son:

1.) $\int Sen\big(P(x)\big)dx, P(x)$ polinomio de $Gr(P) \geq 2$

2.) $\int Cos\big(P(x)\big)dx, P(x)$ polinomio de $\mathrm{G}r(P) \geq 2$

3.) $\int Sen^n(x)Cos^m(x)\,dx$

$$m, n, p \in \mathbb{Q}, \frac{n+1}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{n+m}{2} \notin \mathbb{Z}$$

4.) $\int \frac{Sen(x)}{x}\,dx$

5.) $\int \frac{Cos(x)}{x}\,dx$

6.) $\int Sen\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

7.) $\int Cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

8.) $\int Sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$ 9.) $\int Cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

10.) $\int \sqrt{Sen\,x}\,dx$ 11.) $\int \frac{ArcCos(x)}{x}\,dx$

4.3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones exponenciales, sus correspondientes inversas

1.) $\int e^{x^2}\,dx$

2.) $\int e^{\frac{1}{x}}\,dx$

3.) $\int e^{e^x}\,dx$

4.) $\int \sqrt{x}e^{ax}\,dx, a \neq 0$

5.) $\int e^x Ln(x)\,dx$

6.) $\int \sqrt{Ln(x)}\,dx$

7.) $\int \frac{1}{\sqrt{Ln(x)}}\,dx$

8.) $\int Ln\,(Ln(x)))\,\,dx$

9.) $\int x^x\,dx$

10.) $\int Ln(x)^k(Ln(a.x^p))\,\,dx\,\,, k \in \mathbb{Z} - \{0\}\,, a, p \in \mathbb{R} - \{0\}$

4.4. Funciones hiperbólicas.

1.) $\int \frac{Senh(x)}{x}\, dx$

2.) $\int \frac{Cosh(x)}{x}\, dx$

3.) $\int Senh\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$

4.) $\int Cosh\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$

5.) $\int \sqrt{x} Senh(x)\, dx$

6.) $\int \sqrt{x}\, Cosh(x)\, dx$

7.) $\int \frac{Senh(x)}{\sqrt{x}}\, dx$

8.) $\int \frac{Cosh(x)}{\sqrt{x}}\, dx$

9.) $\int Ln(x).Senh(x)\, dx$

10.) $\int Ln(x)\,.Cosh(x)\, dx$

4.5. Teoremas que Caracterizan a las Funciones Elementales

TEOREMA

Sean f y g funciones elementales, entonces

$$f+g\ , f.g, \frac{f}{g}\ (g \not\equiv 0)\ , fog \text{ son elementales}$$

TEOREMA.

Sean f, g y h son funciones tal que h es elemental y

$$\int f = h - \int g$$

es elemental si y sólo sí

$$\int g \ \ lo\ es.$$

TEOREMA

Sean f(x) es elemental e invertible y

$$f^{-1}(y)\ su\ inversa$$

entonces

$$\int f(x)dx \ \ es\ elemental$$

sí y sólo sí

$$\int f^{-1}(y)dy \ \ es\ elemental$$

4.6. Integrales no Elementales Notables

Muchas aplicaciones de las integrales tienen modelos de integrarles de funciones no elementales

Funcion error:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$$

Integral exponencial:

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt = \gamma + \text{Ln}(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,n}\,, x > 0$$

Integral logarítmica:

$$\mathrm{li(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{1}{\mathrm{l\,n(t)}}\,\mathrm{dt} = \mathrm{Ei(Ln}(x)) = \gamma + \mathrm{Ln\ (Ln(x))} + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln^n}\ (x)}{\mathrm{n!\,n}}$$

Integral senoidal:

$$Si(\mathrm{x}) = \int_0^{x} \frac{Sen(t)}{\mathrm{t}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}$$

$$si(\mathrm{x}) = -\int_x^{\infty} \frac{Sen(t)}{\mathrm{t}}\ dt$$

Se define la función integral senoidal complementaria como:

$$si(\mathrm{x}) = Si(x) - \frac{\pi}{2} = -\int_x^{\infty} \frac{Sen(t)}{\mathrm{t}}\ dt$$

Integral cosenoidal:

$$\mathrm{ci(x)} = -\int_{\mathrm{x}}^{\infty} \frac{\mathrm{Cos\ t}}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

$$\mathrm{Ci(x)} = \gamma + \mathrm{Ln}(x) + \int_{0}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{Cos\ t} - 1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

$$= \gamma + \mathrm{Ln}(x) + \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{x}^{2\mathrm{n}}}{(2\mathrm{n})!\,(2\mathrm{n})}$$

$$\mathrm{Cin(x)} = \int_{0}^{\mathrm{x}} \frac{1 - \mathrm{Cos\ t}}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

ci(x) : es la primitiva de $\frac{\mathrm{Cos}\,x}{x}$ que es cero para $\mathrm{x} = \infty$

se tiene:

$$\mathrm{ci(x)} = Ci(x), Cin(x) = \gamma + \mathrm{Ln}(x) - Ci(x)$$

Integral de Fresnel:

$$S(\mathrm{x}) = \int_{0}^{x} sen\,(t^2)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!\,(4n+3)}$$

$$C(\mathrm{x}) = \int_0^x cos\ (t^2)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!\,(4n+1)}$$

Integral senoidal hiperbólica:

$$Shi(\mathrm{x}) = \int_0^x \frac{senh\ (t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2(2n)!}$$

γ es la constante de Euler y se dfine como

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \approx 0{,}5772156649$$

Ejemplos

Las siguientes integrales no se pueden escribir como funciones elementales

1.) $\int 2\sqrt{x^3+1}\, dx$

2.) $\int 7\sqrt{3x^4+5}\,dx$

3.) $\int \frac{1-9x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-9x^2)}}\,dx$

4.) $\int \sqrt[4]{\mathrm{Ln}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt[x]{x}}{4}\right)\right)}\,dx$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Comprobar que

1.) $\int e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.erf(x)$

2.) $\int \frac{sen\left(\sqrt{x}+5\right)}{x}\,\mathrm{dx}$

$$= 2\left(\mathrm{Cos}(5)\,.Si\left(\sqrt{x}\right) + sen(5)Ci\left(\sqrt{x}\right)\right) + C$$

CAPÍTULO N° 5

ALGUNAS FÓRMULAS DE RECURRENCIA PARA INTEGRALES INDEFINIDAS

Las integrales por recurrencias son aquellas integrales que se obtienen de la aplicación sucesiva, representada por una fórmula, hasta llegar a una integral conocida o inmediata. Generalmente la descripción es a través de una fórmula que dependa de los valores de "n".

A continuación, presentamos algunas de ellas.

1.) $I_n = \int \left(\frac{au \pm b}{pu \pm q} \right)^n du = -\frac{(au \pm b)^n}{p(n-1)(pu \pm q)^{n-1}} + \frac{an}{p(n-1)} I_{n-1}$

2.) $I_n = \int \left(\frac{b \pm au}{q \pm pu} \right)^n du = \mp \frac{(b \pm au)^n}{p(n-1)(q \pm pu)^{n-1}} + \frac{an}{p(n-1)} I_{n-1}$

3.) $I_n = \int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{b(2n+1)} u^n \sqrt{a+bu} - \frac{2an}{(2n+1)b} I_{n-1}$

4.) $I_n = \int \frac{1}{u^n} \sqrt{a+bu}\, du = -\frac{1}{(n-1)au^{n-1}} (a+bu)^{3/2} - \frac{(2n-5)b}{2(n-1)a} I_{n-1}$

5.) $I_n = \int u^n \sqrt{a+bu}\, du = \frac{2}{(2n+3)b} u^n (a+bu)^{3/2} - \frac{2na}{(2n+3)b} I_{n-1}$

6.) $I_n = \int \frac{du}{u^n \sqrt{a+bu}} = -\frac{1}{(n-1)au^{n-1}}\sqrt{a+bu} - \frac{(2n-3)b}{2(n-1)a} I_{n-1}$

7.) $I_n = \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{u}{2a^2(n-1)(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$

8.) $I_n = \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^n} = \pm\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2 \pm a^2)^{n-1}} \pm \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$

9.) $I_n = \int (a^2 \pm u^2)^n du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^n}{2n-1} + \frac{2a^2 n}{2n-1} I_{n-1}$

10.) $I_n = \int (u^2 - a^2)^n du = \frac{u(u^2 - a^2)^n}{2n+1} - \frac{2a^2 n}{2n+1} I_{n-1}$

11.) $I_n = \int \frac{u^n du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{n} u^{n-1}\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{n-1}{n} a^2 I_{n-2}$

12.) $I_n = \int \frac{1}{u^n}\sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \mp\frac{1}{(n-1)a^2 u^{n-1}}(u^2 \pm a^2)^{3/2} \mp \frac{n-4}{(n-1)a^2} I_{n-2}$

13.) $I_n = \int \frac{1}{u^n}\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{(n-1)a^2 u^{n-1}}(a^2 - u^2)^{3/2} - \frac{n-4}{(n-1)a^2} I_{n-2}$

14.) $I_n = \int u^n \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{1}{n+2} u^{n-1}(u^2 \pm a^2)^{3/2} \mp \frac{n-1}{n+2} a^2 I_{n-2}$

15.) $I_n = \int u^n \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{n+2} u^{n-1} (a^2 - u^2)^{3/2} - \frac{n-1}{n+1} a^2 I_{n-2}$

16.) $I_n = \int \frac{1}{u^n} \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{(n-1)a^2 u^{n-1}} (a^2 - u^2)^{3/2} - \frac{n-4}{(n-1)a^2} I_{n-2}$

17.) $I_n = \int \frac{du}{u^n \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{(n-1)a^2 u^{n-1}} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{n-2}{(n-1)a^2} I_{n-2}$

18.) $I_n = \int \frac{du}{u^n \sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp \frac{1}{(n-1)a^2 u^{n-1}} \sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{n-2}{(n-1)a^2} I_{n-2}$

19.) $I_n = \int Ln^n(u)\, du = u\, Ln^n(u) - n\, I_{n-1}$

20.) $I_n = \int \frac{du}{Ln^n(u)} = -\frac{u}{(n-1)Ln^n(u)} + \frac{1}{n-1} n\, I_{n-1}$

21.) $I_n = \int u^n ArcSen(u)\, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} ArcSen(u) - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}}$

Ejemplo: Fórmula de Wallis y de Stirling

Demostrar que:

$$\int Sen^n(x)dx = -\frac{1}{n}Cos(x)Sen^{n-1}(x)+\frac{n-1}{n}\int Sen^{n-2}(x)dx$$

Demostración

Sea $I_n = \int Sen^n(x)dx = \int Sen^{n-1}(x)Sen(x)dx$

Integrando por partes

$$u = Sen^{n-1}(x) \Rightarrow du = (n-1)Sen^{n-2}(x)Cos(x)dx$$
$$dv = Sen(x)dx \Rightarrow v = -Cos(x)$$

Luego:

$$I_n = -Cos(x)Sen^{n-1}(x)+(n-1)\int Cos^2(x)Sen^{n-2}(x)dx$$

$$I_n = -Cos(x)Sen^{n-1}(x)+(n-1)\int \left[1-Sen^2(x)\right]Sen^{n-2}(x)dx$$

$$I_n = -Cos(x)Sen^{n-1}(x)+(n-1)\int Sen^{n-2}(x)dx-(n-1)I_n$$

$$nI_n = -Cos(x)Sen^{n-1}(x)+(n-1)\int Sen^{n-2}(x)dx$$

Por lo tanto:

$$\int Sen^n(x)dx = -\frac{1}{n}Cos(x)Sen^{n-1}(x)+\frac{n-1}{n}\int Sen^{n-2}(x)dx$$

Si usamos este resultado en una integral definida, tal como

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^{n-2}(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\,.I_{n-2}$$

Deducir: $I_0 = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = 1$,y de aqui:

$$I_{2n+1} = \frac{2.4.6.\ .\ \ldots(2n)}{3.5.7.\ldots.(2n+1)}$$

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}.\frac{1.3.5.\ldots..(2n-1)}{2.4.6.\ldots..(2n)}$$

$con\ n = 1,2,\ldots..$

Además, la sucesión $\{I_n\}$ es decreciente:

$$I_{n+1} \ < \ I_{2n} \ < \ \ I_{2n-1}$$

de donde

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

Por el principio de las sucesiones encajadas se obtiene

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$$

$$1 \sim \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} . \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots \dots (2n)} . \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)(2n+1)}{2.4.6 \dots \dots (2n)}$$

$$= \frac{\pi(2n+1)}{2} . \left(\frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots \dots (2n)} \right)^2$$

$$\sim \pi n . \left(\frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots \dots (2n)} \right)^2$$

$$1 \sim \pi n . \left(\frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots \dots (2n)} \right)^2$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2.4..6.\dots.(2n)}{3.5.7.\dots..(2n-1)} \right)^2 = \pi \quad : \textit{fórmula de Wallis}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}.(2n)!} = \frac{\left(2.4.6.\dots(2n)\right)^2}{\sqrt{n}.\left(2.4.\dots.(2n)\right)\left(3.5.7.\dots.(2n-1)\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2.4.6.\dots.(2n)}{\left(3.5.7.\dots.(2n-1)\right)}$$

Deducimos que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}.(2n)!}$$

Definamos

$$a_n = \frac{(n!)^2 e^n}{\sqrt{n}.\, n^n} \Rightarrow \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}.\,(2n)!} = \frac{(a_n)^2}{\sqrt{2}.\, a_{2n}}$$

$$\text{luego } \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}.\,(2n)!}$$

consideremos que $\{a_n\}$ converge a L , entonces

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n)^2}{\sqrt{n}.\, a_{2n}} = \frac{L^2}{\sqrt{2}L} = \frac{L}{\sqrt{2}} \Rightarrow L = \sqrt{2\pi}$$

Por tanto, se tiene la fórmula de Stirling

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n.\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n.\sqrt{2\pi.n}} = 1$$

Ejercicio: demostrar que:

$$\int x^2 Cos(nx)\, dx = \frac{x^2}{n} Sen(nx) + \frac{2x}{n^2} Cos(nx) - \frac{2}{n^3} Sen(nx) + C$$

Demostración

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ v = Cos(nx)\,dx \Rightarrow v = \dfrac{Sen(nx)}{n} \end{cases}$$

$$\int x^2 Cos(nx)\,dx = \frac{x^2}{n} Sen(nx) - \frac{2}{n}\int x.Sen(nx)\,dx$$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ v = Sen(nx)\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{Cos(nx)}{n} \end{cases}$$

$$\int x.Sen(nx)\,dx = -\frac{x}{n} Cos(nx) + \frac{1}{n}\int Cos(nx)\,dx$$

$$= -\frac{x}{n} Cos(nx) + \frac{1}{n^2} Sen(nx)$$

Por tanto, en (*)

$$\int x^2 Cos(nx)\,dx = \frac{x^2}{n} Sen(nx) - \frac{2}{n}\left(-\frac{x}{n} Cos(nx) + \frac{1}{n^2} Sen(nx)\right)$$

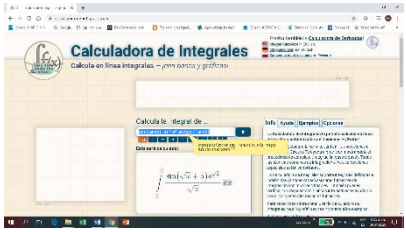
$$\int x^2 Cos(nx)\,dx = \frac{x^2}{n} Sen(nx) + \frac{2x}{n^2} Cos(nx) - \frac{2}{n^3} Sen(nx) + C$$

CAPÍTULO N° 6

CALCULO DE INTEGRALES ASISTIDO POR SOFTWARE MATEMÁTICO

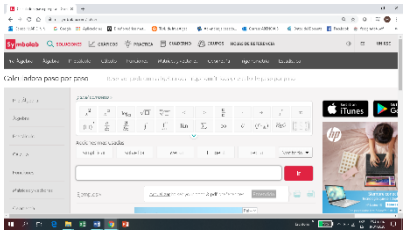
A continuación, presentaremos una serie de softwares matemáticos online para determinar las integrales indefinidas, los cuales nos permite evaluar casi de manera inmediata, entre ellas tenemos

1. Calculadora de integrales:



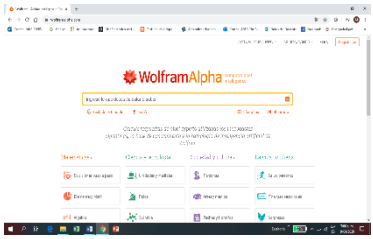
https://www.calculadora-de-integrales.com/

2. Calculadora paso por paso Symbolab



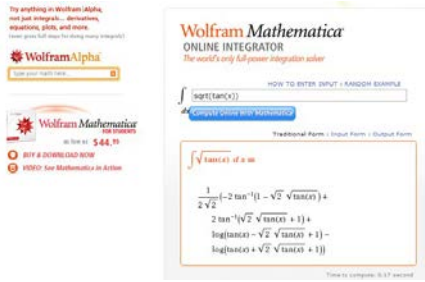
https://es.symbolab.com/solver

3. WolframAlpha

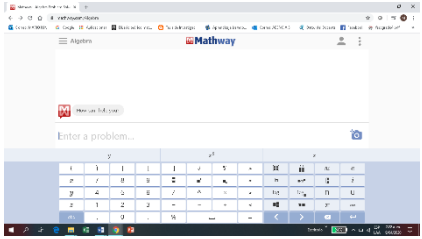


https://www.wolframalpha.com/

Wolfram Integrator

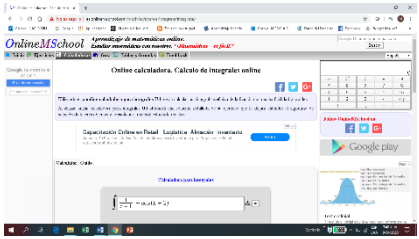


4. Mathway



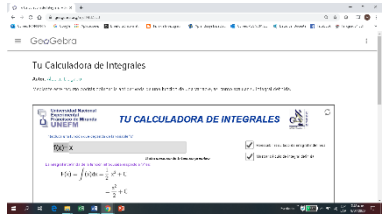
https://www.mathway.com/Calculus

5. OnlineMSchgool



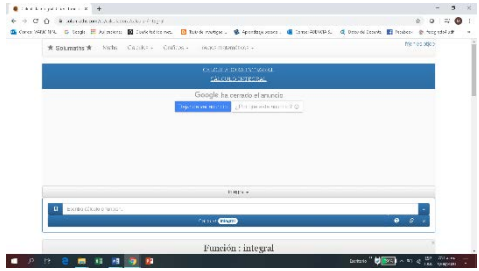
http://es.onlinemschool.com/math/assistance/integrate/integrate/

6. Geogebra



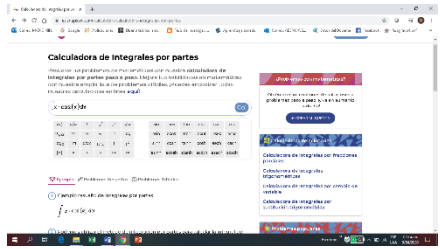
https://www.geogebra.org/m/JrMdZac3

7. Solumaths



https://www.solumaths.com/es/calculadora/calcular/integral

8. Calculadora de Integrales por partes



https://es.snapxam.com/calculators/calculadora-integrales-por-partes

A continuación, se presenta una serie de ejercicios propuestos, resolver utilizando los diversos métodos y/o técnicas de integración indefinidas; luego compruebe sus resultados usando alguno de los softwares online presentados anteriormente.

1.) $\int \frac{x^3\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}+1}\,dx$

Usando calculadora de integrales

https://www.calculadora-de-integrales.com/

$$Rpta: \frac{2Ln\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)-2\sqrt{1+x^4}+x^4}{4}+C$$

2.) $\int \frac{Cos(x)+1}{Sen(x)+Cos(x)+2}\,dx$

3.) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

4.) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)^3}\,dx$

EJERCICIOS ADICIONALES

A continuación, encontrará una diversidad de ejercicios sobre integrales indefinidas, algunos han sido presentados en evaluaciones de la UNASAM, cuando resuelva presente todo el proceso con una secuencia clara, lógica y precisa.

1.) Determine la fórmula de recurrencia para

1.1.) $\int x^n . Senh(2x)\, dx$

1.2.) $\int \sqrt{x+b}.(x+a)^n\, dx\ , con\ a, b > 0$

1.3.) $\int x^p . Ln^q(2x)\, dx\ , con\ p, q\ naturales$

2.) Determine las condiciones sobre a, b y c para que al evaluar la integral $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\, dx$ de como resultado una función racional, es decir, no contenga términos logarítmicos.

3.) Usar el método de Hermite – Ostrograsdsky para evaluar:

3.1) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\, dx$

3.2) $\int \frac{1}{(x^4-1)^4}\, dx$

4.) Usar el método de Facciones Parciales para evaluar

$$\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}\,dx$$

Después compare su respuesta con el mismo ejercicio resuelto mediante el método de Hermite- Ostrodsky.

5.) $\int x\,Sec(x).Tan(x)\;dx$

6.) $\int \frac{1}{1+Cosec(ax)}\,dx$

7.) $\int \frac{Tan(x)}{(1+(Sec(x))^9)^3}\,dx$; *resolver mediante tres técnicas de integración, compare sus respuestas.*

8.) $\int \frac{3x^2-k}{(x-k)(x-1)}dx$, *evalúe la integral para los diferentes valores de* k

9.) $\int Ln\sqrt{x+2}\,dx$

10.) $\int Ln(x)\,.\,ArcSen(x)\,dx$

11.) $\int Ln\left(\sqrt[n]{x}.e^{9x}\right)dx$

12.) $\int Tan^{\frac{3}{2}}(x)\,.Sec^{4}(x)\,dx$

13.) $Si\ f(x)=\int \text{Sen}\left(4\int Sen(x)\,dx\right)Sen(x)\,dx$

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a) $f(x)$ es una función par.

b) $f(x)$ es una función periódica.

c) $f(0)$*=-1/4*

d) $\int f(x)dx=Cos(x)+C$

14.) $\int Sen(x).\sqrt{\text{Cos(x)}+1}.\sqrt{Sen(x)-1}dx$

15.) $\int Sen(kx).Sen\left(\frac{x}{k}\right)dx\ ,x\in\mathbb{R}$

16.) $\int (Ln(x)+1).Cos(x.Ln(x))\,dx$

17.) $\int \frac{1}{x}.\mathrm{Log}_2\sqrt{\mathrm{x}}\,.\mathrm{Log}_3\sqrt[3]{x}\,.\mathrm{Log}_4\sqrt[4]{x}.dx$

18.) $\int x.\mathrm{Cos}\sqrt{2x+1}\;dx$

19.) $\int x.\mathrm{Cos}\left(\sqrt{2x}+1\right)\;dx$

20.) $\int (Sen^4(x).Cos^3(x) - Sen^5(x).Cos^7(x) + Sen^4(x).Cos^6(x))dx$

En los ejercicios 21 al 25, completar la tabla

	Integral original	Reescribir	Integrar	Simplificar
21.)	$\int \sqrt{x}dx$			
22.)	$\int \frac{1}{4x^2}dx$			
23.)	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$			
24.)	$\int x(x^3+1)dx$			
25.)	$\int \frac{1}{(3x)^2}dx$			

Fuente: Cálculo 1 de una variable. Ron Larson y Bruce H. Edwars

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

G. H. HardyDY. *The Integration of Functions of a Single Variable.* 2nd ed., Cambridge University. Cambridge, Inglaterra, 1916

W. Mora. *¿Se puede saber si una función tiene primitiva elemental?*, Revista digital Matemática, Educación e Internet. 15(2), 60 págs. Costa Rica, 2015. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/8003/1/Mora2015Puede.pdf

A.C.Santiago Z. y M.J. Santiago P. *Resúmenes de Matemáticas II con notas históricas"* Editorial Visión Libros, 1ª ed., 1ª imp.(23/09/2011) 194 páginas; 24x17 cm Este libro está en Español ISBN: 8490081344 ISBN-13: 9788490081341

L.D. Hoffmann y G.L. Bradley. *Cálculo. Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. Editorial McGraw-Hill Interamericana, S.A.5ta ed., 1995.Colombia.

E.J. Purcell, D. Varberg y S. E. Rigdon. *Cálculo*. Edit. Pearson Educación. 8ta edición. 2001. México.

G.B. Thomas Jr. y R.L. Finney. *Cálculo una variable.* Editorial Addison Wesley Longman de Mexico S.A. de C.V. 9na edición. 1998.

Bell, e.t. (1985): *Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México.

SUMA 45. Febrero 2004, pp17-28. *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. https://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Sánchez V., C. Michel.(s/f). *Historia del cálculo integral. Ensayo historia del cálculo integral*. Universidad Alfonso Reyes. http://cesarvalente.blogspot.com/2012/06/universidadalfonso-reyes-unidad-linda_11.html. Fuente: Santiago Zaragoza, A.C. y Santiago Puertas, M.J. (2011). Resúmenes de Matemáticas II. Con Notas Históricas. Editorial Visión Libros, 1 ene. 2011 - 190 páginas

Goldstein, L.J. , Lay, D.C. y Schneider D.I. *Cálculo y sus Aplicaciones.* Edit. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A: México. 1990.

Larson R. y Edwars B. Calculo 1 de una variable. Edit. Mc Graw Hill. 9na edición. Mexico 2010.

M. R. Spiegel, S. Lipschutz and J. Liu. *Fórmulas y tablas de matemáticas aplicada*. 3ra edición. Edit. Mc Graw Hill. México. 2010.

S. Josa. *Cómo iniciarse en la resolución de integrales*. Edit. EDUNSA. 1992. Barcelona. España

G.N. Berman. *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Edit. MIR 1977. URSS

D. P. Kanoussis Ph. D. Integral *Calculus vo. 2: The definite integral (The mathematics series*). Edit. Kindle. 30 abril de 2018

ANEXOS

FÓRMULAS

DERIVADAS: u = u(x), v=v(x)
$\frac{d}{dx}u^n = n(u^{n-1})\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$
$\frac{d}{dx}(Sen\ (u)) = \mathrm{Cos}(u)\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{Cos}(u)) = -Sen(u)\ \frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{Tan}(u)) = \mathrm{Sec}^2(u)\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(Cotan\ (u)) = \mathrm{Cosec}^2(u)\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{Sec}(u)) = \mathrm{Sec}(u)\,\mathrm{Tan}(u)\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{Cosec}(u)) = -\mathrm{Cosec}(u)\ Cotan(u)\ \frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(Arc\ Sen(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}(u)$

$\frac{d}{dx}(ArcCos(u)) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(ArcTan(u)) = \frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(ArcCotan(u)) = \frac{-1}{1+u^2}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(ArcSec(u)) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(ArcCsc(u)) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(Ln(u)) = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u Lna\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(Log(u)) = \frac{log\, e}{u}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{d}{dx}(u) + (Ln\, u)(u^v)\frac{d}{dx}(v)$

INTEGRALES: u = u(x), v=v(x)
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$\int a \, dx = ax + k$
$\int a \, u \, dx = a \int u \, dx$
$\int u' \, u^n \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k \; para \; n \neq -1$
$\int \frac{u'}{u} dx = Ln(u) + k$
$\int (u + v - w) dx = \int u \, dx + \int v \, dx - \int w \, dx$
$\int u' \, e^u \, dx = e^u + k$
$\int u' \, a^u \, dx = \frac{a^u}{Ln(a)} + k$
$\int u' \, Sen(u) \, dx = -Cos(u) + k$
$\int u' \, Cos(u) \, dx = Sen(u) + k$
$\int u' \, Tan(u) \, dx = -Ln(Cos(u)) + k$
$\int u' \, Cotan(u) \, dx = Ln(Sen(u)) + k$
$\int u' \, Sec(u) \, dx = Ln(Sec(u) + Tan(u)) + k$

$\int u' \, Cosec(u)\, dx = Ln(Cosec(u) - Cotan(u))$
$\int u' \, Sec^2(u) dx = Tan(u)$
$\int u' \, Cosec^2(u) dx = -Cotan(u) + k$
$\int u' \, Sec(u)\, Tan(u)\, dx = Sec(u) + k$
$\int u' \, Cosec(u)\, Cotan(u)\, dx = -Cosec(u) + k$
$\int \frac{u'}{u^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} ArcTan\left(\frac{u}{a}\right) + k$
$\int \frac{u'}{u^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{u - a}{u + a}\right) + k$
$\int \frac{u'}{a^2 - u^2} dx = \frac{1}{a} Ln\left(\frac{a + u}{a - u}\right) + k$
$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = ArcSen\left(\frac{u}{a}\right) + k$
$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 + a^2}} dx = Ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)$
$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 - a^2}} dx = Ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$
$\int \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} ArcSec\left(\frac{u}{a}\right) + k$
$\int \frac{u'}{u\sqrt{u^2 + a^2}} dx = -\frac{1}{a} Ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + k$

$\int \frac{u'}{u\sqrt{a^2-u^2}}dx = -\frac{1}{a}Ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$
$\int u'\sqrt{a^2-u^2}dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}ArcSen\left(\frac{u}{a}\right)+k$
$\int u'\sqrt{u^2\pm a^2}\,dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}Ln\left(u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right)+k$

VIDEOS

En las siguientes direcciones de YouTube podrá ver y escuchar videos relacionados a Historia del cálculo integral, etc

1. Historia del Cálculo Integral
   https://www.youtube.com/watch?v=v1wqUTOwk_Y
2. Historia del Cálculo Integral
   https://www.youtube.com/watch?v=WuhBxx60uPk
3. Historia cálculo diferencial e integral
   https://www.youtube.com/watch?v=1DT0YKKy7FE
4. La integral: qué es, de dónde surge y para qué sirve
   https://www.youtube.com/watch?v=m3vzgzA77Ms

La primera edición de este manual se terminó de imprimir
en agosto del 2021