



Universidad Nacional
“Santiago Antunez de Mayolo”

ESCUELA DE POST GRADO

**REPRESENTACIÓN Y RECONSTRUCCIÓN
DE CERÁMICOS USANDO EL DISEÑO
GEOMÉTRICO ASISTIDO POR
COMPUTADORA**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS E INGENIERÍA
CON MENCIÓN EN COMPUTACIÓN E
INFORMÁTICA**

PRESENTADO POR:

Vladimir Giovanni Rodríguez Sabino

ASESOR:

Prof. Dr. Jesús Edilberto Espinola González.

Ancash - Perú

2006



ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En la ciudad de Huaraz, a los diecinueve días del mes de enero del año dos mil seis, siendo las dieciséis horas con treinta minutos, se reunieron en el auditorium de la Facultad de Ciencias del Medio Ambiente, los integrantes del Jurado Evaluador de la Tesis para optar el grado académico de MAESTRO en Ciencias e Ingeniería con mención en COMPUTACION e INFORMÁTICA conforme lo señala la Resolución de Comité de Dirección NRO. -2006-UNASOT-EPG. Dichos miembros se reunieron bajo la Presidencia del Mag. César Augusto Narro Cachay, Secretario Mag. Rudecindo Albino Penadillo Lino y como vocal el Dr. Jesús Edilberto Espinola Gonzales, y dieron inicio al proceso de sustentación de la Tesis titulada "Representación y reconstrucción de cerámicos usando el diseño geométrico asistido por computadora" presentada por el Bachiller Vladimir Giovanni Rodríguez Sabino, egresado de la Maestría en Ciencias e Ingeniería con mención en Computación e Informática de la escuela de Post Grado de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo.

El Presidente del Jurado Evaluador dio por iniciado la sustentación de la Tesis otorgándole el tiempo de treinta minutos para efectuar la exposición de la Tesis respectiva.

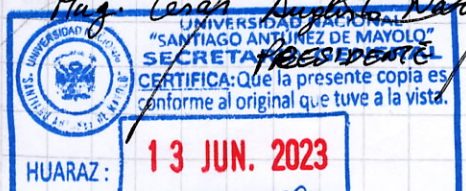
Concluida la etapa de la exposición, el presidente del jurado evaluador dio inicio a la ronda de preguntas para que el Bachiller Vladimir Giovanni Rodríguez Sabino responda y sustente la Tesis.

Finalizada la ronda de preguntas y defensa de la Tesis, el Jurado Evaluador en pleno procedió a la deliberación respectiva, teniendo como resultado conceder la calificación de APROBADO CON MENCIÓN, obteniendo la nota de DIECISIETE (17) de acuerdo al Reglamento General de la Escuela de Post-Grado de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo queda en la condición de ser aprobado por el Comité Directivo de la Escuela de Post-Grado y recibir el grado académico de MAESTRO en Ciencias e Ingeniería con mención en Computación e Informática a otorgarse por la Comisión Organizadora.

Finalizado el acto académico siendo las diecisiete y veinte horas en la fecha indicada inicialmente, los miembros del jurado firman en señal de conformidad:

[Signature]
Mag. César Augusto Narro Cachay

[Signature]
Mag. Rudecindo A. Penadillo Lino
SECRETARIO



[Signature]
Mag. Jesús E. Espinola Gonzales



**REPRESENTACIÓN Y
RECONSTRUCCIÓN DE CERÁMICOS
USANDO EL DISEÑO GEOMÉTRICO
ASISTIDO POR COMPUTADORA**

por

Vladimir Giovanni Rodríguez Sabino

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Escuela de Postgrado de la Universidad Nacional “*Santiago Antunez de Mayolo*”, especialidad Ciencias e Ingeniería como parte de los requisitos necesarios para obtener el Grado de

**Maestro en Ciencias e Ingeniería con Mención en
Computación e Informática.**

Jurado Evaluador:

Presidente:

Miembro :

Miembro :

Msc Optaciano L. Vásquez García
Director de Escuela de PostGrado
Ancash, 5 de Diciembre del 2005

Dedicatoria

En primer lugar un profundo agradecimiento a mis queridos Padres:

Luciano y Teodosia

por su comprensión y apoyo inagotable para mi superación,

A mi hermana *Rocio* a quien aprecio y quiero bastante,

Al amor sólido y maduro de mi amada *Julia*

que me ha permitido sobrellevar las vicisitudes de la propia vida

y a la memoria de mis abuelos:

Francisco R., Feliciano M. y Herminia R.

Mis Agradecimientos

Al Profesor Dr. Jose Arzola Ruiz por su apoyo en el desarrollo de la presente tesis , igualmente, hago extensivo mi agradecimiento a la Comunidad Económica Europea a través del Alfa Project Net Engineering Systems for Preparing and Making Decisions under Multiple Criteria (Project ALFA II-0321-FA SistIng), que ha hecho posible mi estancia en el *Instituto Superior Politécnico José Antonio Echevarría* - CUJAE de la ciudad de La Habana-Cuba para completar el desarrollo del presente trabajo.

El Autor

“REPRESENTACIÓN Y RECONSTRUCCIÓN DE CERÁMICOS USANDO EL DISEÑO GEOMÉTRICO ASISTIDO POR COMPUTADORA”

Vladimir G. Rodriguez Sabino

Escuela de Postgrado, Universidad Nacional "Santiago Antunez de Mayolo"

Resumen

Este trabajo esta orientado a la representación y reconstrucción de cerámicas usando técnicas del Diseño Geométrico. Primeramente, se realiza la representación de la cerámica en el computador, discretizando la cerámica con un digitalizador 3D. Luego, Se genera un conjunto de parches(trozos) B-spline unidos con continuidad C^1 . Finalmente, se procede a reconstruir (estimar) los pedazos de superficies faltante con un error controlable, para tal fin se utiliza las técnicas de aproximación de funciones, por medio del análisis de regresión múltiple. Es así, se introduce un método, no tan complejo y con esfuerzo computacional mínimo, y adecuado para la reconstrucción de superficies en forma local.

Palabras Clave: Representación de Superficies,Reconstrucción de Superficies, superficies B-Spline, análisis de regresión.

“REPRESENTATION AND RECONSTRUCCTION OF CERAMICS
USING THE COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN ”

Vladimir G. Rodriguez Sabino

Escuela de Postgrado, Universidad Nacional ”Santiago Antunez de Mayolo”

Abstract

This research deals about representation and the reconstruction in geometric design of ceramics. For this purpose, first, the ceramic is representate in the computer, it's generating a set of patches B-Spline with smooth C^2 , which is said complex surface, having like sample a set of points non organized (“point cloud”), after, is made the reconstrucction of the piece surfaces non present of the complex surface, for this purpose is used function approximates through multiple regression analysis. So, is introduced a new method that is not very complex and efficient to reconstructing (estimate) locally surface through of a points set .

Keywords: Representation of Surfaces, Reconstruction of Surfaces, surface B-Spline, regression analysis.

ÍNDICE

Resumen	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	vii
1 I.INTRODUCCIÓN	1
2 II. MARCO TEÓRICO	4
2.1 Antecedentes	4
2.2 La Arqueología y la Computación	7
2.3 Funciones aproximatorias	9
2.4 Métodos de Interpolación para la construcción de Superficies	15
2.4.1 Curvas B-Spline	16
2.4.2 Curvas B-spline Racionales	21
2.4.3 Interpolación con Curvas B-spline	22
2.4.4 Superficies B-spline	24
2.4.5 Interpolación de Superficies B-spline	26
2.4.6 Continuidad de Curvas y Superficies	28
2.5 Técnicas de análisis de regresión como método de elaboración de funciones aproximatorias	30
2.5.1 Análisis de regresión	31
2.5.2 Linealización de Modelos	33
2.5.3 Selección de Ecuación de Regresión	35

3	III. MATERIALES Y MÉTODOS	38
3.1	Materiales	38
3.2	Métodos para la Representación y Reconstrucción de Superficies	39
3.3	Herramientas computacionales de diseño gráfico	40
3.4	Resumen de Formatos Estándar del CAGD	46
3.4.1	Breve Descripción de IGES	48
4	IV. RESULTADOS	51
4.1	Digitalización y Representación de la Cerámica en el Computador	51
4.2	Selección de puntos experimentales para la reconstrucción	57
4.3	Generación de los puntos para la reconstrucción de la superficie	60
4.4	Generación de la Superficie Faltante y Análisis del error	67
5	V.DISCUSIÓN	72
5.1	La Representación de Superficies en la Actualidad	72
5.2	Ventajas y Desventajas de los métodos de Reconstrucción de Superficies	73
	CONCLUSIONES	75
	SUGERENCIAS	77
	BIBLIOGRAFÍA	80

Lista de Figuras

Figura 2.1	Ajuste de una curva a traves de un conjunto de puntos	12
Figura 2.2	funciones Bases B-spline	17
Figura 2.3	ejemplo de curva B-spline	19
Figura 2.4	ejemplo de una curva B-spline cerrada	20
Figura 2.5	Superficie B-spline	25
Figura 3.1	Ventana principal del rhinoceros	41
Figura 4.1	descripción matemática de una superficie	52
Figura 4.2	Digitalizador tridimensional	53
Figura 4.3	puntos de la cerámica en el Rhino	54
Figura 4.4	interpolación de dos curvas que tienen continuidad de contacto	55
Figura 4.5	Resultado de aplicar la continuidad de tangencia	55
Figura 4.6	Conjunto de Curvas Generadas con Continuidad de Tangencia	56
Figura 4.7	resultado del comando Edgesrf para a generación de superficies	57
Figura 4.8	cerámica renderizada	57
Figura 4.9	Identificación de superficie a reconstruir	58
Figura 4.10	selección de Superficies adyacentes a la faltante	58

Figura 4.11	Planos de corte	59
Figura 4.12	discretización de las curvas generadas por los planos de corte	59
Figura 4.13	Conjunto de puntos estimados en cada tramos de curva	68
Figura 4.14	Comparación entre puntos y curvas estimadas y reales	69
Figura 4.15	superficie reconstruida a partir de los puntos estimados	70
Figura 4.16	L_{fal}/L_{tot} versus la desviación estándar	71

I.INTRODUCCIÓN

La necesidad histórica de abordar el estudio de cuerpos cada vez mas complejos y de representarlos gráficamente en el computador ha sido uno de los motores del desarrollo de la geometría. Dichos avances a la vez han permitido incrementar históricamente la universalidad y precisión de las representaciones gráficas, al mismo tiempo posibilitando representaciones de objetos cada vez mas complejos. Esta relación entre la geometría y la representación gráfica ha sido una constante a lo largo de la historia, donde el conocimiento geométrico de elementos simples es necesario para el diseño de formas complejas, los cuales junto con las herramientas computacionales han permitido extender el campo de las representaciones gráficas. Así, la computación ha incorporado al diseño geométrico rapidez de ejecución de las representaciones gráficas , asistencia a construcciones geométricas, realizar fácilmente transformaciones geométricas, etc. Siendo el mayor valor añadido por las computadoras, la descripción y concepción de formas de nuevos elementos básicos (curvas y superficies NURBS) que permiten en el diseño la descripción, concepción y transmisión de cualquier objeto real y/o imaginario.

El estudio de curvas, superficies y sólidos como elementos simples, y su composición para obtener objetos complejos han aglutinado en los últimos años diferentes campos de investigación, convergiendo en una nueva disciplina que se denomina modelado geométrico, que con la ayuda del computador lleva el nombre

de diseño geométrico asistido por computadora (CAGD). Esta disciplina constituye un conjunto de métodos matemáticos capaces de describir la forma de los objetos, posibilitando su adecuada representación en el computador, facilitando el análisis y la representación de objetos complejos, además, analizar y evaluar cualidades estéticas y funcionales de cualquier objeto. De esta manera el CAGD se ha desarrollado rápidamente desde que poderosas computadoras han sido desarrolladas. Algunas de sus principales aplicaciones incluyen:

- Representación de conjuntos de datos extensos.
- Visualización de productos de formas variadas.
- Diseño de tuberías en plantas químicas y Oleoductos.
- Modelamiento de superficies que surgen en la construcción de vehículos, chips y aeroplanos.
- Dibujo de Mapas Marinas, ciudades y mapas de relieve en cartografía.
- Creando imágenes en los avisos, televisión e industrias del Film.
- Describiendo caminos para robots y controlando sus movimientos.
- Reconstrucción de superficies de exámenes tomográficos en la medicina.

Esta lista puede ir continuando y sin duda nuevas aplicaciones del CAGD en el futuro surgirán. Entre estas aplicaciones tenemos lo concerniente a la reconstrucción de superficies, los cuales gracias a la evolución de la computación y la informática ha provocado un sin número de aplicaciones, principalmente en el

área de la medicina como es en exámenes tomográficos o la elaboración de prótesis de huesos. Otra área de aplicación de la reconstrucción de superficies viene dado en el campo de la arqueología, para la restauración, conservación de vestigios arqueológicos deteriorados como son esculturas, vasijas, monumentos, ciudades antiguas , etc; o también como una herramienta más de información durante sus excavaciones. De esta manera es necesario el empleo de técnicas adecuadas de fácil manejo y hablando computacionalmente no demasiados complejos.

De esta forma, viendo que el Perú es un país con abundantes zonas arqueológicas y en particular el departamento de Ancash, con un sin numero de restos arqueológicos preincaicos deteriorados, y además no conociéndose trabajos de este tipo en esta parte del país, surge la necesidad de realizar una metodología adecuada usando técnicas del CAGD para reconstruir restos arqueológicos que se encuentra deteriorados a causa del paso de los años, para este trabajo se utiliza como ejemplo de prueba una réplica de una cerámica, el cuál es sometido a un tratamiento adecuado para su representación y reconstrucción.

En el presente trabajo tiene como objetivo general representar la cerámica en el computador con superficies B-spline y posteriormente estimar los pedazos de superficie faltantes mediante una metodología adecuada que usa técnicas de aproximación, todo ello a partir de una muestra de puntos datos, los cuales vienen ha ser la discretización (digitalización) del objeto real en estudio, todo ello usando el computador junto con técnicas del diseño geométrico y el análisis de regresión múltiple.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

En la década de los 60, con la necesidad de las empresas de poseer softwares gráficos, surge la computación gráfica y como consecuencia el avance del diseño geométrico asistido por computadora, dichos softwares sólo estaban al alcance de las grandes empresas; en los años 70, la aparición de potentes minicomputadoras junto con la optimización de paquetes de software gráfico, permitieron que se desarrollen equipos autónomos de diseño por computadora, a precios accesibles para pequeñas y grandes empresas; en los años 80 se ofrecen sistemas de diseño basado en computadoras personales, si bien no pueden facilitar las funciones gráficas avanzadas y complejas de los grandes sistemas, apuntan a una herramienta de trabajo a costos muy inferiores y así aparecen softwares gráficos con funciones específicas para la aplicación en diferentes áreas de la ciencia. Hoy en día existen diferentes softwares mejorados con más precisión como son: el Autocad, Rhino, Cathia, etc; y sus aplicaciones son múltiples hoy en día las cuales son indispensables para varias ramas de la ciencia como es la Ingeniería, la medicina, etc., inclusive áreas como la Arqueología las cuales se basan del diseño geométrico para restaurar restos arqueológicos (monumentos, cerámicos, construcciones antiguas, etc.). Uno de los sistemas más avanzados del diseño geométrico se ha desarrollado en la industria, creándose software muy poderosos,

es así que se han desarrollado el llamado Diseño Geométrico Asistido por Computadora (CAD) y la Fabricación Asistida por Computadora (CAM), hoy en día es muy usual hablar de CAD-CAM.

El término CAGD fue concebido por R. Barnhill and R. Riesenfeld en 1974 cuando ellos organizaron una conferencia sobre diseño geométrico por computadora en la Universidad de UTA en Estados Unidos. Esta conferencia trajo todas las investigaciones de USA y Europa y puede ser considerado el evento fundador de este campo. El primer libro fue escrito en el año de 1979 por Faux and Pratt denominado "Computational Geometry for Design and Manufacture", la revista mas famosa fue fundado en 1984 por R. Barnhill and W. Bohem llamado "Computer Aided Geometric Design".

Posteriormente, en una conferencia realizado en Paris en 1971, el CAGD fue enfocado en diseño de automóviles, el cual fue organizado por P. Bezier, quien era presidente en ese entonces de la societe des Ingenieurs de l'Automobile. Una serie de Workshops comenzaron en 1982 en el instituto de Investigaciones Matemáticas en Oberwolfach; estos eventos fueron organizados por R. Barnhill, W. Boehm, and J. Hoscheck.

En estos últimos 20 años, muchas investigaciones han considerado este problema de representar un objeto en el computador a partir de un conjunto de puntos datos, es decir, sacar una muestra de puntos del objeto físico a estudiar, a la cual se llama proceso de discretización. La importancia principal del presente problema surge de su gran número de posibles aplicaciones. Un área de aplicación puede ser encontrado por ejemplo en la industria manufacturera y en la ingeniería

mecánica o en la medicina, la cual esta bastante desarrollada . Muy a menudo, el desarrollo de un producto nuevo, es primero desarrollado usando un modelo del mundo real o físico como es en la producción, donde un modelo mediante la representación CAD es requerido. Una posibilidad para obtener dicha representación del modelo real es tomar una muestra de puntos de la superficie del modelo y crear una representación tridimensional en la computadora, otra posibilidad viene a ser mediante el tratamiento de imágenes el cual también se encuentra en proceso de estudio. Otra área de gran aplicación puede ser encontrado en la medicina para la representación y/o reconstrucción de superficies para diferentes fines como son los exámenes tomográficos computarizados del cuerpo humano por capas, los cuales reúnen información valiosa acerca de la estructura del tejido, donde es deseable tener (aparte de las vistas por capas) un modelo tridimensional. Para ello es necesario detectar los límites entre diferentes tipos de tejidos, los cuales surgen en cada capa. Usando técnicas de reconstrucción de curvas, esta información puede ser procesado para tener una colecciones de curvas los cuales representan los diferentes tipos de tejidos en cada capa. Finalmente, un conjunto de curvas de diferentes capas son pegados(unidos) para obtener finalmente un modelo tridimensional en forma de superficies. Para el problema de reconstrucción de superficies en el espacio tridimensional, muchas soluciones han sido propuestos, cuales producen aproximaciones a la superficie original, entre estas investigaciones tenemos: "Function representation of solids Reconstructed from scattered surface points and contours" V. Savchenko and Alexander (Japan-1995), "The Surface Reconstruction by Voronoi Filtering" por Nina A. and Marshall B. (Texas-1998), "Cortical Segmentation and surface Reconstrucction" por David C., Hestler A.

y Dona H. (Washington-2002), "Reverse Engineering of a NURBS surface from digitized points subject to boundary condition" Zhongwei Yin (Shanghai-2003), "Piecewise C^1 continuous surface reconstruction of Noisy Point Clouds via Local Implicit Quadratic Regression" por Hui Xie, Jianning Wang and Arie K. (USA-2003), " An Adaptive moving least squares (MLS) surface for reconstruction with guarantees" por Tamal K. and Jian Sun (Ohio-2005), Optimization Methods for scattered Data Aproximation with subdivision surface" por Martim M. and Leif K. (Alemania-2005), y muchos otros temas de investigación . Hasta varios años atrás, si bien, ninguno de estas aproximaciones proveían una garantía para la corrección de la solución producida. Cabe señalar que recientemente, investigaciones en el área de geometría computacional han señalado este problema desde un punto de vista teórico y dirigidos al desarrollo de algoritmos, cuales probablemente calcularán una solución mas precisa en un futuro no muy lejano, y serán de gran ayuda particularmente en el área de la arqueología como una herramienta indispensable para la restauración y representación de restos arqueológicos.

2.2 La Arqueología y la Computación

La arqueología básicamente es el estudio de la cultura material y cultural, el hallazgo de cosas que se encuentran en las excavaciones con su posterior interpretación. Para efectuar estas cosas es necesario saber cuantas cosas son, de que tipo son, a que lugar pertenecen, a que altura se encontraron, de que colores son, a que periodo pertenecen, de que forma son, entre otros. Con todo estos datos se hacen una serie de planos que pueden ser la pauta para entender el modo de

vida de la gente inclusive entender su cultura religiosa, y son todas estas cosas que la arqueología empieza a buscar a principios del siglo XX. Al inicio todo su trabajo se hacia a mano y entonces era una pérdida de tiempo, una de las cosas que se necesitaba realizar es el llamado “análisis de matriz”, un procedimiento que necesita bastante cálculo y experimentación, si no hubiera una computadora se tardaría años en hacer este proceso. Ya en los años 50 y 60, se empezó a emplear la computadora en estos estudios con dos propósitos: uno para analizar los materiales que se encontraban, que es importantísimo hoy en día, con lo cual no se puede hacer arqueología; y otro porque muchas cosas que se encontraban iban a los museos, por ello era fundamental elaborar los catálogos de las piezas, lo cual ayudaba ha saber que cosas hay en todos los museos del mundo y ver los objetos relacionados con las piezas de la región que se desea estudiar. A medida que la tecnología avanzó y se cuenta con las PCs, se facilitan las cosas; pues ya era posible llevar las computadoras al campo, al pie de las excavaciones y hacer análisis inmediatos. Hasta ahora como hemos visto la computadora ha desarrollado una herramienta indispensable en esta rama de la ciencia. sin embargo; aún falta darle más uso a la computadora, el cual junto al diseño geométrico, no sólo un arqueólogo podrá ver mediante una fotografía los catálogos de piezas, las cuales en muchos casos dichos objetos se encuentran deterioradas e incompletas, sino que haciendo uso de un software especializado, podrá visualizar tridimensionalmente dichas piezas ya restauradas y/o reconstruidas, las cuáles le ayudarán a tener una mayor perspectiva del objeto de estudio y permitirle una mayor precisión en sus investigaciones y/o hallazgos. En un futuro no muy lejano, con el avance de la computación y diseño geométrico; los arqueólogos tendrán como herramienta

indispensable un software CAD. Aunque en la actualidad hay proyectos e investigaciones sobre dichos temas, aún no están tan difundido debido a la no existencia de software especializados, falta de conocimiento, entre otras cosas. Sin embargo, su utilización poco a poco va incrementándose como son los trabajos mencionados en la sección anterior.

2.3 Funciones aproximatorias

El carácter complejo de muchas metodologías existentes para la determinación de parámetros propios de procedimientos complejos de cálculo (tales como sistemas de ecuaciones, gráficos, tablas, etc) que explican un fenómeno dado, exige la determinación de funciones analíticas próximas, por sus resultados numéricos a esos procedimientos. Estas funciones son también requeridas para la conciliación del funcionamiento de sistemas, el cálculo aproximado de valores próximos a los óptimos de las variables de decisión, etc. Las funciones analíticas que cumplen estos objetivos reciben en lo adelante el nombre de Funciones Aproximatorias a los procedimientos de cálculo correspondientes.

Un enfoque clásico para la solución de estos problemas consiste en la utilización de la información disponible sobre la función f (llamado indicador del procedimiento de cálculo) y la consideración de otra función φ que es próxima a f por sus resultados numéricos y permite realizar con esta la aproximación correspondiente y obtener la estimación del error de tal sustitución analítica.

La realización de este enfoque requiere responder las siguientes preguntas:

1. Forma de presentación de la función f .
2. Clases de funciones que se aproximan a f .
3. Proximidad de la función aproximada f y de la aproximatoria φ entre si, es decir; el criterio de aceptación que debe satisfacer φ .
4. Error de aproximación, es decir; diferencia entre los valores exacto y aproximado.

En cuanto a la forma de la función aproximada f se distinguen tres casos principales: la función está representada analíticamente, en forma de tabla (gráfico, monograma) o constituye un resultado(indicador) de un procedimiento complejo de cálculo. A continuación se observa la función continua $f(x)$ determinada por sus valores $f_i(x)$ en los nodos(parámetros) x_i de la secuencia:

$$\Omega_n : a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

En cuanto a la clase de funciones aproximatorias es necesario tomar en consideración dos factores principales. En primer lugar, la función aproximatoria debe reflejar las características de la función aproximada f y en segundo lugar, debe ser suficientemente cómoda en el tratamiento al realizar las operaciones necesarias. En el análisis numérico tienen gran aplicación tres grupos de funciones aproximatorias: las funciones potenciales, las polinomiales, y las trigonométricas (generadas por las series de Fourier y la Integral de Fourier) y las funciones exponenciales $e^{a_i x}$ que determinan los fenómenos del tipo descomposición y acumulación.

Así, por ejemplo, para la aproximación polinomial de una función de una variable, se toma como función aproximatoria un polinomio de grado n , el cual tiene la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$$

En cuanto al criterio de aceptación, este consiste en determinar la distancia entre las funciones aproximatoria φ y aproximada f , y entre todas las funciones aproximatorias elegir la que tiene distancia mínima .

Uno de los criterios de aceptación difundidos es el de Tchebycheff, donde el concepto de distancia es concebido como la magnitud máxima de desviación de la función φ con respecto a f en los nodos x_i :

$$\rho_1 = \max_{0 \leq i \leq n} | f(x_i) - \varphi(x_i) |$$

Un caso particular sucede cuando para la función aproximatoria φ , la distancia $\rho_1 = 0$, es decir, la función representada por sus valores $y_i = f_i = f(x_i)$ se requiere construir una función aproximatoria $\varphi(x)$ que coincida en los nodos x_i con los valores f_i , es decir $\varphi(x_i) = f_i$.

Este modo de aproximación, basado en el criterio de coincidencia de f y φ en los nodos x_i se denomina interpolación, ver figura 2.1. En este caso la cantidad de puntos experimentales a emplear tiene que coincidir con la cantidad de parámetros indeterminados a definir. Por esta razón, la aproximación se realiza frecuentemente por tramos consecutivos. Esta idea es utilizada, en particular por

los *spline*. Si el argumento x , para el cual se determina el valor aproximado de la función, pertenece al segmento $[x_0, x_n]$ el problema de determinación del valor de la función en el punto x se denomina simplemente interpolación. En caso contrario, si x esta fuera de este intervalo se denomina Extrapolación.

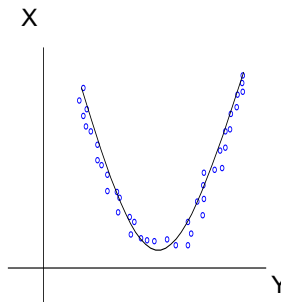


Figura 2.1 Ajuste de una curva a través de un conjunto de puntos

Otro criterio de aceptación se determina a partir de la definición de distancia entre las funciones f y φ , como la suma de cuadrados de sus desviaciones en sus puntos nodales:

$$\rho = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$$

En este caso, los parámetros de la función aproximatoria se determinan de manera que minimizan la distancia entre las funciones f y φ . Este criterio de comparación es el denominado Método de los mínimos cuadrados. Entre las ventajas de este método se pueden mencionar la aplicabilidad en una gran variedad de modelos diferentes y la posibilidad de utilizar un sin numero de programas potentes disponibles para el análisis de regresión.

La cuestión acerca de la exactitud de la solución que se obtiene es, en muchos aspectos, lo fundamental. por esta razón la elección de los puntos nodales, de la clase de funciones aproximatorias y del criterio de aceptación debe ser subordinado a la cuestión de la exactitud requerida. La posibilidad de aproximar tan exactamente como se quiera la función f se somete a investigación para cada caso concreto. En el presente trabajo aparece algunos métodos de interpolación (de curvas y superficies) que serán utilizados en la elaboración de funciones aproximatorias, también se hará uso del análisis de regresión en la elaboración de funciones aproximatorias del numero requerido de variables.

Para el problema de interpolación clásica en caso de curvas y superficies, el problema involucra reemplazar (aproximar) una función "complicada" $y = f(x)$ o $z = f(x, y)$, por una función "mas simple" $y = \varphi(x)$ o $z = \varphi(x, y)$ de tal forma que la función interpolante y la función dada f tengan el mismo valor en un conjunto de puntos dados. Tales curvas y superficies son descritos por puntos los cuales forman parte de alguna construcción matemática, o son obtenidos, como en el presente trabajo, como datos, usando algún dispositivo mecánico tal como un digitalizador. Así, en general, lo que se esta dando es una tabla de valores de la función desconocida f como sigue:

x_0	x_1	...	x_n
f_0	f_1	...	f_n

	y_0	...	y_m
x_0	$f_{0,0}$...	$f_{0,m}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x_n	$f_{n,0}$...	$f_{n,m}$

En el presente trabajo se realizará la interpolación de curvas y superficies en la forma paramétrica (por ser la recomendada por la teoría de los spline). Así nuestro problema de interpolación corresponde a tablas de la forma:

t_0	t_1	...	t_n
P_0	P_1	...	P_n

	v_0	v_1	...	v_m
u_0	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$...	$P_{0,m}$
u_1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$...	$P_{1,m}$
.	.			.
.	.			.
.
u_n	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$...	$P_{n,m}$

Donde se denota por t_i los parámetros estimados correspondientes a los puntos P_i de una curva y (u_i, v_k) a los parámetros estimados correspondientes a los puntos P_{ik} de una superficie. En el presente trabajo se considera aproximar una superficie en \mathbb{R}^3 por una superficie interpolante $X(u, v)$.

La otra alternativa de aproximar funciones, es tratar de hacer la desviación de la función aproximada con las funciones aproximatorias tan pequeñas como sea posible, sin tratar de hacer que dicha función aproximatoria pase por el conjunto de puntos dados. Esta aproximación es a menudo mucho más deseable que interpolación, particularmente para datos obtenidos empíricamente por medición, y cuando la aproximación debe ser aplicada a un entorno de variación amplio de la(s) variable(s) dependiente. Esto se fundamenta, entre otras razones, por lo siguiente:

- Los datos empíricos están usualmente sujetos a errores de medición, por lo que no es recomendable interpolar exactamente por los puntos

de "paso", es decir; de debe permanecer dentro de una tolerancia dada.

- En muchas aplicaciones los datos consisten en un número grande de mediciones. Es así, que los métodos de interpolación tendrán problemas, pues; requerirán de un gran número de funciones base, y al añadir un punto más, este puede cambiar la estructura de la solución.

En vista de estas observaciones el objetivo será:

- Reemplazar una función dada f por una función más simple φ , de tal una forma que minimize la medida de error prescrita.
- Describir un conjunto dado de datos empíricos correspondiente a mediciones en una función desconocida f por una función φ , de tal una forma que minimize la medida de error prescrita.

2.4 Métodos de Interpolación para la construcción de Superficies

Los spline son curvas polinómicas por trozos continuamente diferenciables de un orden especificado. Un ejemplo sencillo viene a ser la línea recta (spline C^0) por trozos, la cual es simplemente una poligonal ya sea en el plano o en el espacio. Otro ejemplo está dado por los spline cúbicos (spline C^1) por trozos. El nombre "spline" es una palabra en idioma inglés que significa "listón elástico". Estos listones eran usados por artesanos para crear curvas que describen

superficies a construir, como cascos de barcos y fuselajes de aviones. Dichos listones elásticos o spline asumen una forma de tal manera que minimiza su energía elástica, propiedades que heredan en forma aproximada los spline de grado tres (spline C^2).

Los Spline se desarrollan para solucionar las limitaciones de las curvas de Bezier, como son, falta de control local, la laboriosidad que es requerida para imponer continuidad C^2 y sobre todo que el número de puntos de control de una curva de Bezier impone su grado, el cual no es conveniente para casos prácticos.

2.4.1 Curvas B-Spline

Definición 2.1. Dado un vector de nodos $T = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k})$, las funciones base B-spline asociadas N_{ik} de orden k (grado $k - 1$) es definido por la siguiente formula recursiva:

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (2.1)$$

para $k = 1$, y

$$N_{ik}(t) = \frac{(t - t_i)}{(t_{i+k-1} - t_i)} N_{i,k-1}(t) + \frac{(t_{i+k} - t)}{(t_{i+k} - t_{i+1})} N_{i+1,k-1}(t) \quad (2.2)$$

para $k > 1$ y $i = 0, \dots, n$

Dichas funciones base poseen las siguientes propiedades:

1. $N_{ik}(t) > 0$, para $t_i \leq t < t_{i+k}$

2. $N_{ik}(t)=0$, para $t_0 \leq t < t_i, t_{i+k} \leq t < t_{n+k}$
3. $\sum_{i=0}^n N_{ik}(t) = 1, t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$
4. $N_{ik}(t)$ tiene continuidad C^{k-2} en cada nodo t_l .

En la figura 2.2 se muestra funciones base B-spline, para nodos uniformes.

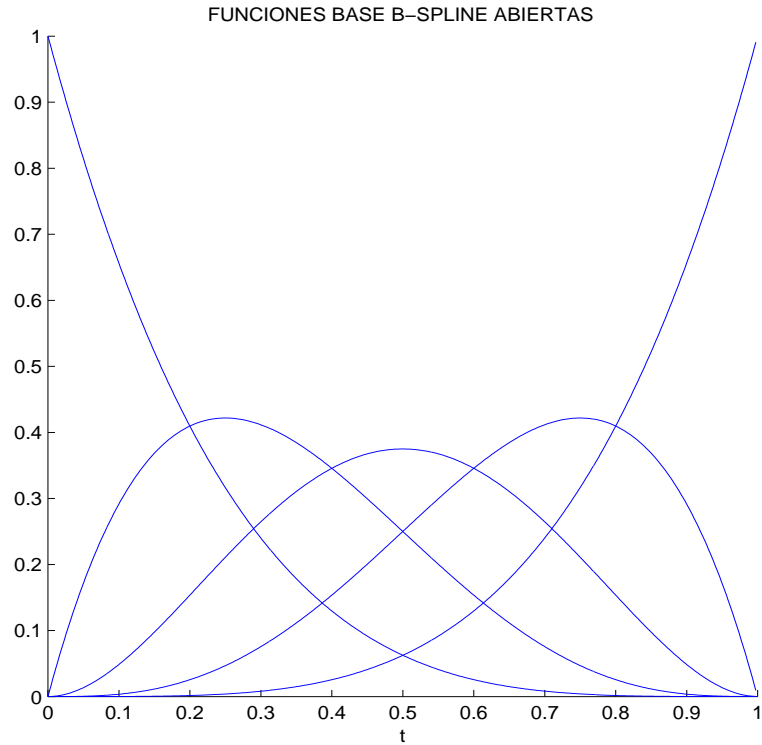


Figura 2.2 funciones Bases B-spline

En la definición 2.1 cada punto del vector de nodos $T = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k})$ es dado en forma "simple" ($t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{n+k}$), los cuales no sirven de mucho para la forma recursiva dada en las ecuaciones 2.1 y 2.2, para que tengan sentido estas funciones base B-Spline sucede cuando los nodos son considerados con multiplicidad $r \leq k$, como por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 T &= (t_0, t_0, t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n+k}) && t_0 \text{ triple} \\
 T &= (t_0, t_1, t_1, t_2, t_3, t_3, t_3, \dots, t_{n+k}) && t_1 \text{ doble}, t_3 \text{ triple} \\
 T &= (t_0, t_0, t_0, t_0, t_1, t_1, t_1, t_1) && \text{primero y último nodo cuádruple}
 \end{aligned}$$

Definición 2.2. Dado los puntos de control d_i en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 para $i = 1, \dots, n$ y T un vector de nodos como en la definición 2.1, entonces

$$X(t) = \sum_{i=0}^n d_i N_{ik}(t) \quad n \geq k, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}],$$

Es llamado una curva B-spline de orden k con vector de nodos T . Los puntos de control d_i son llamados puntos de control o puntos de Boor, los cuales forman el llamado polígono de Boor.

Cabe mencionar que dicha curva B-spline queda completamente definida en el intervalos de definición $[t_{k-1}, t_{n+1}]$, además, dicho vector de nodos determina la continuidad de la curva en cada uno de los nodos t_j , es decir; si t_j tiene multiplicidad $1 \leq l < k$, la curva tendrá continuidad C^{k-l-1} en dicho nodo. por otra parte el escogimiento de un determinado vector de nodos influye en el comportamiento de la curva B-spline.

Al introducir una curva B-spline con un vector de nodos "simple", la curva generada por los puntos de control, no pasa por los extremos de su polígono de Boor, cual si lo realizan las curvas de Bezier, pues con esto se obtiene propiedades geométricas convenientes, pero si el vector de nodos es tomado como

$$t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1}$$

$$t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k}$$

se tiene que la curva B-spline generada pasa por los extremos de su polígono de Boor ya definido.

Así, para una curva B-spline abierta de orden k , el vector de nodos debe tener la forma:

$$T = (t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}) \quad (2.3)$$

Donde los elementos interiores del vector de nodos también pueden ser múltiples, si además $n = k - 1$ y el vector de nodos es dado como la ecuación (2.3), las curvas B-spline se reducen a curvas de Bezier. En la figura 2.3 se muestra una curva B-spline abierta con vector de nodos $T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8)$; de grado 3 y con puntos de control $(0,0,0)$; $(1,1,0)$; $(2.5,0.3,0)$; $(3,2.5,0)$; $(4.5,2.2,0)$; $(7,-3,0)$; $(9.5,1,0)$; $(11,-1,0)$; $(14,2,0)$; $(15,1,0)$.

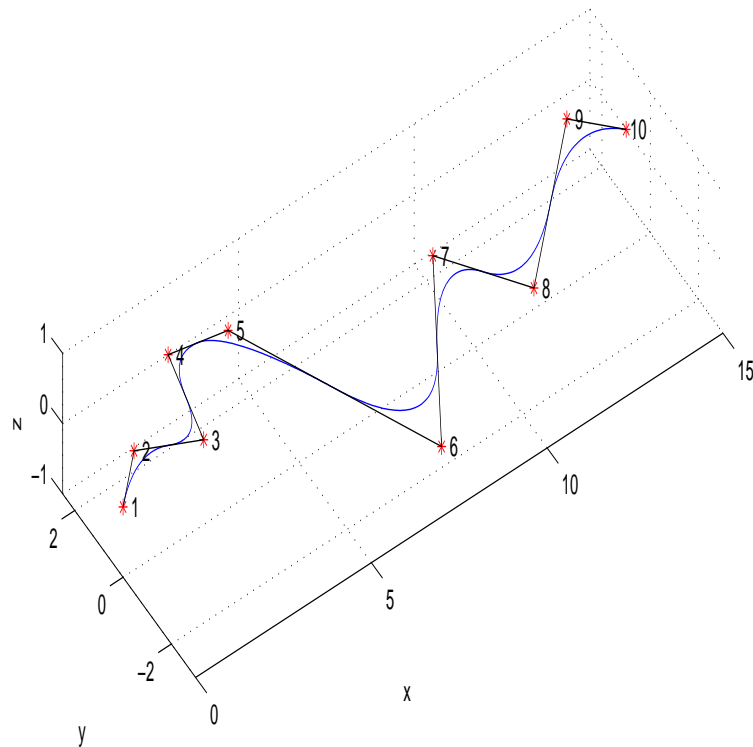


Figura 2.3 ejemplo de curva B-spline

Una curva B-spline cerrada es una extensión de los puntos de control d_0, d_1, \dots, d_n al insertar al final un nuevo nodo $d_0 = d_{n+1}$ y expandir el vector

de nodos periódicamente como sigue:

$$t_{n+1} = t_0, \quad t_{n+2} = t_{n+1} + (t_1 - t_0) = t_1, \quad t_{n+3} = t_{n+2} + (t_2 - t_1) = t_2, \dots \quad (2.4)$$

así, se obtiene el siguiente vector de nodos

$$T = t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = t_0, t_{n+2} = t_1, \dots, t_{n+k} = t_{k-1}$$

En la figura 2.4 se muestra una curva B-spline cerrada con puntos de control $(-1,-1.5,0)$; $(0,0,0)$; $(1,2,0)$; $(2,1.5,0)$; $(3,2,0)$; $(4,1.5,0)$; $(4,-1.5,0)$; $(3,-1.5,0)$; $(2,-2,0)$; $(0.5,-1.5,0)$; $(-1,-1.5,0)$; $(0,0,0)$.

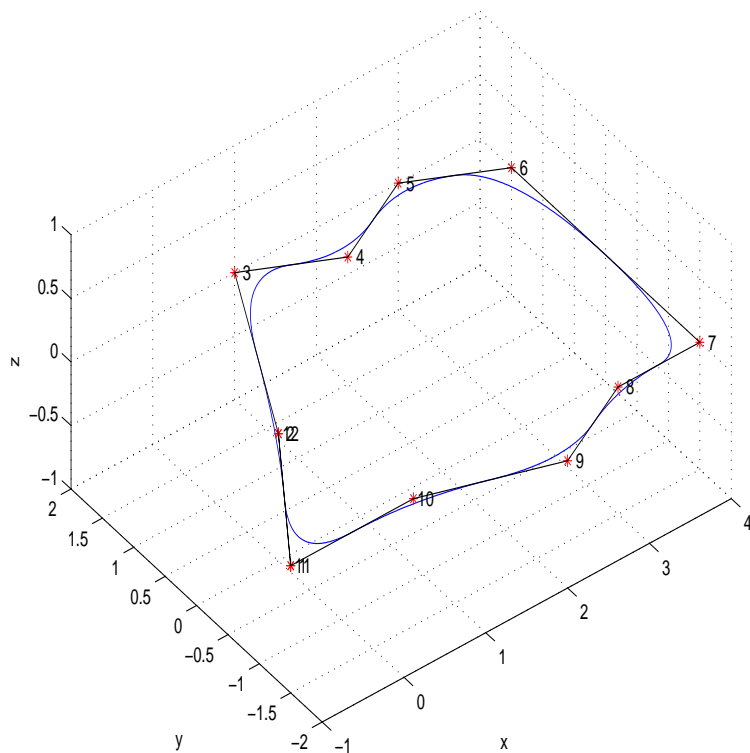


Figura 2.4 ejemplo de una curva B-spline cerrada

Teorema 2.1. *Sea x una curva B-spline de orden k . Entonces*

- *Si l nodos coinciden (se repiten), entonces la diferenciabilidad de x es reducido a C^{k-l-1} en el punto correspondiente al nodo.*

- Si $k - 1$ puntos del polígono de Boor son colineales, entonces x toca dicho polígono.
- Si $k - 1$ puntos de Boor coinciden, entonces x interpola el punto común (la curva B-spline pasa por este punto) y los dos lados adyacentes del polígono son tangentes a x . Dicho punto puede ser una cúspide.
- La propiedad de cápsula convexa tiene lugar para cada conjunto de k puntos de Boor vecinos o adyacentes, es decir; cada segmento de curva B-spline se encuentra dentro de la cápsula convexa asociados a los k puntos de Boor .

2.4.2 Curvas B-spline Racionales

Dado un vector de nodos T y un conjunto de puntos de Boor en coordenadas homogéneas

$$D_j = \begin{cases} (\beta_j, u_j\beta_j, v_j\beta_j, w_j\beta_j)^t = (\beta_j, \beta_j d_j)^t & \beta_j \neq 0, d_j \in \mathbb{R}^3 \\ (0, u_j, v_j, w_j)^t = (0, \vec{d}_j)^t & \beta_j = 0, \vec{d}_j \in R^3 \end{cases} \quad (2.5)$$

Se define una curva B-spline Racional de orden k de forma paramétrica y con coordenadas homogéneas como:

$$X(t) = \sum_{j=0}^n D_j N_{jk}(t) \quad n \geq k - 1.$$

o en coordenadas no homogéneas (x, y, z) como:

$$x = \frac{\sum_{j=0}^n u_j \beta_j N_{jk}(t)}{\sum_{j=0}^n \beta_j N_{jk}(t)}, \quad y = \frac{\sum_{j=0}^n v_j \beta_j N_{jk}(t)}{\sum_{j=0}^n \beta_j N_{jk}(t)}, \quad z = \frac{\sum_{j=0}^n w_j \beta_j N_{jk}(t)}{\sum_{j=0}^n \beta_j N_{jk}(t)} \quad (2.6)$$

los β_j son llamados pesos, que cuando son todos igual a uno, se obtiene la definición de una curva B-spline, además si las curvas B-spline racionales son definidos en un vector de nodos no uniforme estos son llamados NURBS (Non Uniform Rational B-spline). Además, dichas curvas B-spline Racionales heredan todas las propiedades de los B-spline.

2.4.3 Interpolación con Curvas B-spline

Como en el caso de los spline, en muchos casos es deseable, como es en el presente estudio, interpolar un conjunto de puntos datos, lo cual también es posible de realizar con los B-spline. Dado un conjunto de puntos P_i asociados con parámetros estimados t_i , $i = 1, \dots, n$, se desea encontrar una curva B-spline que pase a través de los puntos P_i en los cuales los puntos de control o de Boor vienen a ser las incógnitas .

Un aspecto crítico para este tipo de problema viene a ser una selección adecuada de los parámetros t_i , es decir; es necesario una parametrización adecuada de los puntos de control P_i . Asumiendo que nuestro intervalo paramétrico es $[0, a]$, las siguientes estrategias de parametrización pueden ser usadas:

- Parametrización igualmente espaciada: $t_i = ia/n$ correspondiente a los puntos P_i , $i = 1, \dots, n$
- Parametrización de la cuerda(aproximación a la longitud de la cuerda):

$$t_i = \sum_{j=0}^i \frac{a\Delta_j}{s} \quad i = 0, \dots, n$$

Donde $\Delta_i = |P_i - P_{i-1}|$, $\Delta_0 = 0$, $s = \sum_{i=0}^n \Delta_i$

- Parametrización centrípeta: Es análogo a la parametrización de la cuerda, con la única variante $\Delta_i = \sqrt{|P_i - P_{i-1}|}$

Entre otras, el más recomendado para nuestro estudio es la parametrización centrípeta, pues reflejan una mayor relación con los puntos P_i . Una vez ya estimados los parámetros, procedemos a plantear el problema de interpolación para curvas B-spline.

Supongase que se desea interpolar los puntos P_i con una curva B-spline de la forma

$$X(t) = \sum_{i=0}^l d_i N_{ik},$$

donde $l = n$ y los puntos de control d_i son desconocidos. Para curvas B-spline abiertas, escogemos el vector de nodos

$$T = (\bar{t}_0 = \bar{t}_1 = \dots = \bar{t}_{k-1}, \bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}, \dots, \bar{t}_n, \bar{t}_{n+1} = \dots = \bar{t}_{n+k})$$

y para curvas cerradas

$$T = (\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$$

Donde los nodos interiores se sugiere tomarlos como:

$$t_j = \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{j+k-1} u_i$$

donde u_i son los parámetros estimados de los puntos a ser interpolados. Así, deseamos hallar el B-spline X tal que

$$X(u_i) = \sum_{j=0}^l d_j N_{jk}(u_i) = P_i \quad i = 1, \dots, n$$

Para ello se tiene que resolver el siguiente sistema lineal

$$\begin{bmatrix} N_{0k}(u_0) & \dots & N_{lk}(u_0) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ N_{0k}(u_l) & \dots & N_{lk}(u_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_l \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Abreviando se tiene $ND = P$, donde se observa que el sistema consta de varios sistemas, los cuales son resueltos independientemente, una para cada columna de D . La matriz N es llamada la matriz de colocación. Nuestro interés es el caso cuando el problema de interpolación tiene solución única. Así, la matriz N es inversible si y sólo si tiene diagonal positiva, es decir; $N_{ik} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, lo cual es equivalente a que $u_i \in (t_i, t_{i+n+1})$.

2.4.4 Superficies B-spline

A continuación se trata la clase de superficies Producto tensorial(dominio paramétrico rectangular)con funciones base B-spline, los cuales poseen propiedades geométricas manejables y adecuadas para el presente trabajo.

Definición 2.3. Una superficie B-spline producto tensorial o simplemente superficie B-spline es definido como

$$X(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n d_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v)$$

Donde $N_{ik}(u)$ y $N_{jl}(v)$ son funciones base B-spline de orden k y l respectivamente y d_{ij} son los puntos de Boor o puntos de control, los cuales en conjunto forman la llamada la red de Boor, en la figura 2.5 vemos un ejemplo de superficie B-Spline junto con sus respectivos puntos de control.

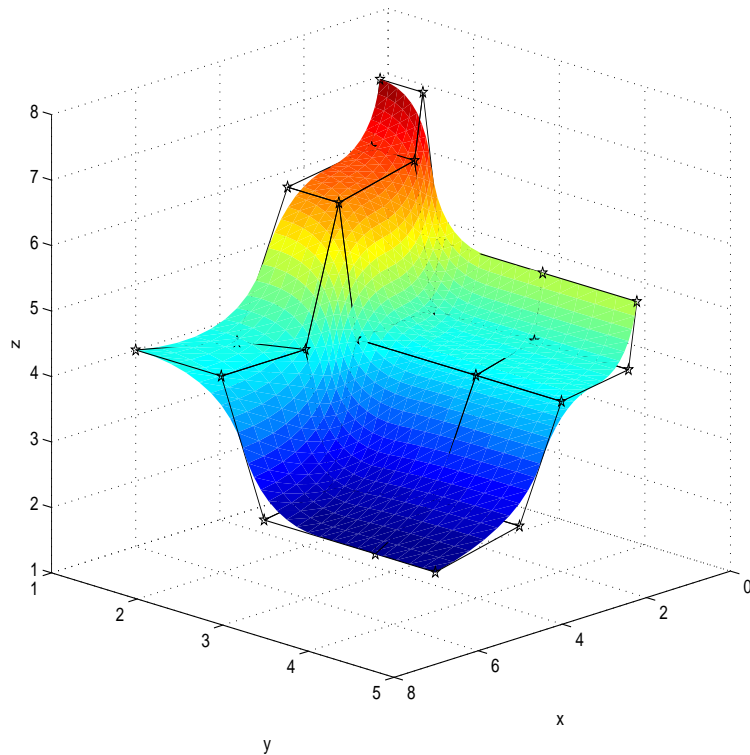


Figura 2.5 Superficie B-spline

Dichas superficies poseen propiedades similares a las curvas B-spline, tal como la propiedad de la cápsula convexa, y un criterio de convexidad para superficies y curvas. También los puntos de control poseen un efecto local sobre la

superficie. Así mismo, los vectores nodos tanto en la dirección u como v pueden ser abiertos y/o periódicos.

2.4.5 Interpolación de Superficies B-spline

Similar a la interpolación de curvas B-spline, dado un conjunto de puntos datos P_{ij} asociados a los parámetros (u_i, v_j) que forman una red rectangular, interpolar dichos puntos usando una superficie B-spline, como caso particular y además el mas común a este problema son las superficies producto tensorial B-spline bicúbicos (funciones Base B-spline de grado 3 en la dirección u y v). Se supone que son dados $(K + 1) \times (L + 1)$ puntos datos P_{ij} y una secuencia de nodos u_0, \dots, u_K y v_0, \dots, v_L , se desea interpolar dichos puntos mediante una superficie B-spline Bicúbica,

$$X(u, v) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^N d_{ij} N_i^3(u) N_j^3(v)$$

cuál tiene tres nodos repetidos en cada extremo de las dos secuencias de nodos y en su interior nodos simples , para que el problema este bien planteado, que tenga solución única, es necesario que $M = K + 2$ y $N = L + 2$; es decir, la red de puntos de control tiene dos filas y dos columnas más que la matriz de los puntos datos. Así, el problema consiste en encontrar los puntos de control d_{ij} en

la superficie B-spline $X(u, v)$, tal que $X(u_i, v_j) = P_{ij}$, lo cual da como resultado

las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_{i,j} d_{ij} N_i^3(u_0) N_j^3(v_0) = P_{0,0} & \dots & \sum_{i,j} d_{ij} N_i^3(u_0) N_j^3(v_{L+2}) = P_{0,L+2} \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 \sum_{i,j} d_{ij} N_i^3(u_{K+2}) N_j^3(v_0) = P_{K+2,0} & \dots & \sum_{i,j} d_{ij} N_i^3(u_{K+2}) N_j^3(v_{L+2}) = P_{K+2,L+2}
 \end{array} \tag{2.8}$$

De esta manera se obtiene varios sistemas de ecuaciones. Los pasos a seguir para su solución son lo siguiente: primero, para cada fila de puntos datos, se soluciona el problema como el caso de interpolación de curvas B-spline, ver (2.7), puesto que todos los problemas de interpolación tienen la misma secuencia de nodos y cada problema tiene la matriz de coeficientes en forma tridiagonal; Segundo, se toma cada columna y se resuelve el mismo problema de interpolación con curvas B-spline. Los puntos de control resultantes constituyen la red de control deseada.

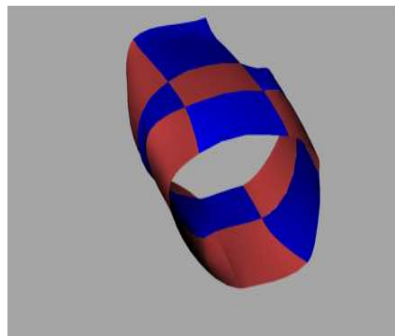
Un obstáculo presentado, al igual que en curvas, es el problema de parametrización de puntos datos; en este caso de la generación adecuada de los parámetros (u_i, v_i) . Cuando los puntos datos se desvían significativamente de una cuadrícula regular, el problema de encontrar una adecuada parametrización puede ser bastante difícil. Un escogimiento pobre en los parámetros de una curva isométrica (curva generada por hacer constante uno de los parámetros) puede causar oscilaciones no adecuadas, y este efecto se reflejará en la superficie. Una forma de encontrar una razonable parametrización es crear una buena parametrización para cada curva isoparamétrica como en el caso de curvas.

2.4.6 Continuidad de Curvas y Superficies

Hay dos tipos de continuidad o suavidad, asociado con curvas y superficies paramétricas:

1. Continuidad Geométrica: Si dos segmentos de curva son unidos a la vez en sus respectivos puntos extremos, la curva resultante se dice que tiene continuidad G^0 , es decir, de orden cero o continuidad posicional, en la unión. El segmento de curva puede tener un alto grado de continuidad internamente. Aquí sólo interesa la continuidad en la unión. Si los vectores tangentes en la unión para ambas curvas apuntan en la misma dirección, es decir; sus pendientes son iguales, entonces la continuidad G^1 existe en dicha unión. La magnitud de los vectores tangente en la unión no tienen que ser iguales, solo necesitan ser múltiplos uno al otro, es decir, $|\vec{V}_{T1}| = \alpha|\vec{V}_{T2}|$ para algún $\alpha > 0$.
2. Continuidad Paramétrica: Si dos segmentos de curva son unidos a la vez, la curva resultante tiene continuidad C^0 . Aquí también la curva puede tener un alto grado de continuidad. En este caso, C^0 continuidad implica G^0 continuidad y viceversa. Si los vectores tangentes en la unión tienen ambos la misma dirección y misma magnitud, entonces se dice que la curva tiene continuidad C^1 en el parámetro t . Este tipo de continuidad es más restrictivo que continuidad G^1 . Claramente, continuidad C^1 implica continuidad G^1 . Sin embargo, la inversa no es necesariamente cierto, es decir; una curva puede ser G^1 continua y no puede ser C^1 continua. Si la n -ésima derivada de una curva, $d^n P(t)/dt^n$, en el punto donde se unen

dos segmentos de curva son iguales en dirección y magnitud, entonces se dice que la curva tiene continuidad paramétrica C^n en dicha unión. En la siguiente figura se muestra un conjunto de superficies unidos con continuidad C^1 .



Una interpretación física sirve para clarificar la diferencia entre continuidad geométrica y paramétrica. Dado una función vectorial geométrica, $P(t)$, sobre un rango paramétrico que describe una curva, entonces cualquier estimación dada de t representa un punto específico sobre la curva. La derivada $P'(t)$, representa la velocidad de un punto que se mueve a lo largo de la curva; y $P''(t)$ representa la aceleración. Si la curva es C^1 continua en la unión, entonces la magnitud y dirección del vector tangente son iguales a través de la unión; y el punto cambia suavemente de un segmento de curva a la siguiente.

En cambio, si la curva solo tiene continuidad G^1 en la unión, la dirección de movimiento no cambia, pero hay un cambio instantáneo en rapidez (magnitud de la velocidad), cual representa la aceleración instantánea a medida que el punto cambie a través de la unión. Aunque muchas aplicaciones encuentran G^1 continuidad adecuada, para aplicaciones que dependen de la equidad o suavidad de una curva o superficie, G^1 y G^2 continuidad no son adecuados, para ello al menos C^2 continuidad es requerido para alcanzar el resultado deseado.

2.5 Técnicas de análisis de regresión como método de elaboración de funciones aproximatorias

Como se puede apreciar en la sección 1.1, una forma de aproximar funciones es utilizando el análisis de regresión, lo cual sirve de mucha utilidad para el proceso de reconstrucción de superficies. Esta herramienta nos servirá para estimar curvas sobre la superficie faltante, generar puntos sobre ella y posteriormente elegir y/o modificar puntos de paso apropiados para ser interpolados en la superficie faltante. Es decir, se utilizará una herramienta concebida para procesar datos aleatorios en el procesamiento de datos determinísticos.

Según el enfoque tradicional, se requiere establecer la mejor relación posible entre una variable aleatoria, con respecto a un conjunto de variables independientes no aleatorias t_1, t_2, \dots, t_n . Se parte del supuesto que los valores de la variable t_i pueden ser controlados o seleccionados a voluntad. Primero se verá el caso de una regresión simple, donde la variable x se supone que depende de una

sola variable independiente t . Estas mismas ideas serán generalizados al caso de la regresión múltiple, cuando x depende de dos o mas variables t_1, t_2, \dots, t_n .

2.5.1 Análisis de regresión

Definición 2.4. Sea x una variable aleatoria que depende de una variable t . Se denomina ecuación de regresión de x con respecto a t , a la función $x = f(t)$ que contiene el valor promedio de x para cada valor fijo de t .

Así, teniendo n resultados experimentales; de acuerdo con la definición 2.4 la ecuación de regresión incluye los puntos:

$$(t_1, E(x|t_1)), (t_2, E(x|t_2)), \dots, (t_n, E(x|t_n))$$

. De tal forma:

$$f(t) = E(x|t) \tag{2.9}$$

donde: $E(x|t)$ es el valor medio que adopta la variable x para un valor cualesquiera de t . Así, se tendrán ecuaciones de regresión del tipo:

$$x = b_0 + b_1t + b_2t^2,$$

$$x = b_0e^{b_1t}$$

Se denominan parámetros de la ecuación de regresión a los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_l , que aparecen en la ecuación. Hay que tener en cuenta que la diferencia entre cada valor observado de x (x_i) y el valor obtenido por la ecuación de regresión (\hat{x}_i),

existe una diferencia $u_i = x_i - \hat{x}_i$ para el mismo valor de t para el cual se calcula el valor de x .

Las ecuaciones de regresión se clasifican en lineales y no lineales de acuerdo a los parámetros de las ecuaciones (b_j) y no entre la variable t . así, por ejemplo $x = b_0 + b_1t + b_2t^2$ se considera una ecuación de regresión lineal y $x = b_0e^{b_1t}$ una ecuación de regresión no lineal de acuerdo a los parámetros b_0, b_1 . Para la determinación de dichos coeficientes, se hace uso del método de mínimos cuadrados (para el caso de una regresión lineal).

Para obtener dicha ecuación de regresión, es necesario estimar los coeficientes del modelo, de tal forma que se tenga un error mínimo de estimación. Para lo cual se utiliza el siguiente criterio:

$$\min \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2 \quad (2.10)$$

Los coeficientes de la ecuación de regresión calculados en correspondencia con (2.10) serán denominados estimadores mínimos cuadráticos y su correspondiente ecuación de regresión mínima cuadrática.

Para obtener resultados eficientes con esta técnica, hay que tener en cuenta si el modelo de regresión ha sido bien seleccionado, para ello la variable aleatoria x_i debe cumplir los siguientes supuestos:

- El valor promedio de x tiene que coincidir con el valor calculado de la ecuación de regresión, es decir:

$$\hat{x} = E(x|t)$$

- La varianza de las x_i para cada valor fijo de x debe ser constante (requisito de homocedasticidad en las varianzas, es decir:

$$V(x_i) = \sigma^2 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

- Para cada valor fijo de t las x_i deben de ser estadísticamente independientes, o sea, la covarianza de dos experimentos distintos, para los mismos valores de t debe ser:

$$\text{cov}(x_i, x_j) = 0, \quad \text{para } i \neq j.$$

- Las y_i correspondiente a valores iguales de t se distribuyen normalmente con valor medio \hat{y} (valor calculado de la ecuación de regresión) y dispersión σ (correspondiente al error estándar de la ecuación).

2.5.2 Linealización de Modelos

El análisis realizado hasta el momento es para el caso de modelos lineales en los parámetros, para los cuales se utiliza el método de mínimos cuadrados en la obtención de los coeficientes de regresión. Sin embargo, en muchas aplicaciones incluyendo esta, son aplicables los modelos no lineales en los parámetros. Lo cual, con la utilización de determinadas transformaciones permite convertir una gran cantidad de modelos no lineales a modelos lineales, y así poder aplicar las técnicas de regresión a este tipo de modelos. Veamos algunos casos de estos modelos y sus transformaciones correspondientes:

- Modelo potencial:

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}. \quad (2.11)$$

Aplicando logaritmo de cualquier base, se obtiene:

$$\log(y) = \log b_0 + b_1 \log x_1 + \dots + b_n \log x_n$$

Y haciendo

$$y' = \log y$$

$$x'_1 = \log x_1$$

$$x'_2 = \log x_2$$

..

..

..

$$x'_n = \log x_n$$

Se obtiene el siguiente modelo lineal:

$$y' = b_0 + b_1 x'_1 + b_2 x'_2 + \dots + b_n x'_n$$

Finalmente se tiene

$$y = \text{anti log } y'.$$

- Modelo Exponencial

$$y = e^{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n}$$

aplicando logaritmo natural se obtiene:

$$\ln y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$$

- Modelo recíprocos: Por ejemplo, la expresión

$$y = \frac{1}{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n}$$

invirtiéndolo se tiene:

$$\frac{1}{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$$

Y así existen muchos más modelos que admiten la linealización.

2.5.3 Selección de Ecuación de Regresión

La determinación del modelo adecuado es una tarea compleja, que requiere mucho trabajo por parte del investigador. existen varias técnicas al respecto; a continuación se presenta una técnica (Ver [Arz00]pag. 42) que es usado en el siguiente trabajo, denominado procedimiento de selección hacia atrás, para ello se tiene en cuenta los siguientes pasos:

1. Selección de todos los factores "sospechosos" que ejercen influencia sobre la variable dependiente y generación de estos factores. Aquí se pueden utilizar procedimientos auxiliares diferentes. Por ejemplo, los factores de interacción entre las variables se pueden establecer mediante un modelo potencial auxiliar, que incluye toda las variables de inteacción; luego de hallada la ecuación de regresión de este modelo auxiliar quedan esclarecidos los exponentes mas adecuados del factor de interacción.
2. Se halla la ecuación de regresón con todos los factores "sospechosos" (supongamos que son k factores)
3. Se registra el coeficiente de correlación múltiple y el error estándar de la ecuación.
4. Se registra los coeficientes de correlación simple y el error estándar de la ecuación.
5. Se elimina el factor con menor coeficiente de correlación parcial y se halla una nueva ecuación de regresión con $k - 1$ factores. Este proceso se repite mientras se observa el incremento del coeficiente de correlación simple o la reducción del error estándar, inicialmente ambos coeficientes mejoran, pero, posteriormente el coeficiente de correlación múltiple comienza a disminuir y continua reduciéndose el error estándar.
6. Finalmente, se verifica el cumplimiento de los requisitos formulados con anterioridad. si ellos cumplen, para valores de error estándar

tales que $2\sigma \leq \delta$, donde σ es el error estándar y δ es el error máximo permisible en la estimación de la variable dependiente, se puede dar por definido el modelo buscado.

En la práctica si el coeficiente de correlación múltiple es superior a 0.9; el error de apreciación es inferior al permisible y más del 95% de los errores de estimación son inferiores a $\pm 2\sigma$, se cumplen generalmente los requisitos señalados.

III. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Materiales

Para el desarrollo de la presente tesis, fue necesario contar con los siguientes medios y materiales:

1. EQUIPOS

- Una computadora portátil Pentium IV.
- Una Impresora HP deskjet 3550.
- Un digitalizador 3D.
- Una cámara digital Sony.

2. SOFTWARE

- Windows XP profesional
- Software de diseño Asistido por computadora: Para la representación y posterior reconstrucción de superficies se uso el Rhinoceros version 5.1, el cual viene ha ser un programa de modelamiento 3D para Windows. Este software trabaja esencialmente con superficies NURBS.
- Software estadístico: Durante el proceso de reconstrucción de superficies y posteriormente para el análisis de errores se eligió el software

STATGRAPHICS versión 5.0, por su fácil manejo y un profundo análisis esencialmente para la aproximación de funciones por medio del análisis de regresión.

- Software de calculo numérico: se utilizo el software MATLAB versión 6.5 para Windows como herramienta para cálculos numéricos complejos, así como una calculadora para los cálculos numéricos sencillos.

3.2 Métodos para la Representación y Reconstrucción de Superficies

El procedimiento para el desarrollo de métodos de Representación tridimensional de un objeto en el computador se realiza empleando el siguiente procedimiento general:

1. Digitalización del objeto en estudio, usando escaners o digitalizadores tridimensionales.
2. Generar una estructura tipo alambre con el conjunto de puntos obtenidos en el proceso de discretización usando un software de diseño.
3. Aplicar una continuidad C^1 o C^2 en el punto de union entre dos curvas.
4. A partir de la estructura de alambre ya suavizada proceder a generar los pedazos o parches de superficies, en nuestro caso superficie B spline.

Para el proceso de reconstrucción de superficies (reconstrucción del cerámico) en estudio, es realizado empleando los siguientes procedimientos generales:

1. Se realizó una representación tridimensional del objeto de estudio en el computador, de acuerdo a los pasos tratados en el proceso de representación.
2. Luego se quitan pequeños trozos de superficies del objeto representado en el computador, para después aplicar la reconstrucción de cada trozo quitado. El trozo quitado nos servirá para evaluar el grado de aceptación del procedimiento empleado durante la reconstrucción de los diferentes tramos(trozos) de la superficie faltante.
3. utilizar las técnicas del análisis de regresión convenientemente para reconstruir cada tramo de superficie faltante.
4. Una vez reconstruida la pieza, se procede a la comparación de la pieza reconstruida con la quitada, de tal modo poder evaluar "que tan próxima" se encuentra la pieza reconstruida a la pieza quitada (pieza real).

3.3 Herramientas computacionales de diseño gráfico

Para la representación y posterior reconstrucción del cerámico, es necesario la utilización de algunas herramientas propias del CAGD, en particular, lo correspondiente al modelado geométrico. Existen diversos paquetes con estas características, Entre estos podemos mencionar: el Autocad, MAYA, Render, CATHIA, Rhinoceros, Mecánica Desktop entre otros. Como el presente trabajo

hace uso de las superficies B-spline, se eligió entre estas el Rhinoceros (ver figura 3.1), por su manejo, principalmente, con las curvas y superficies NURBS.

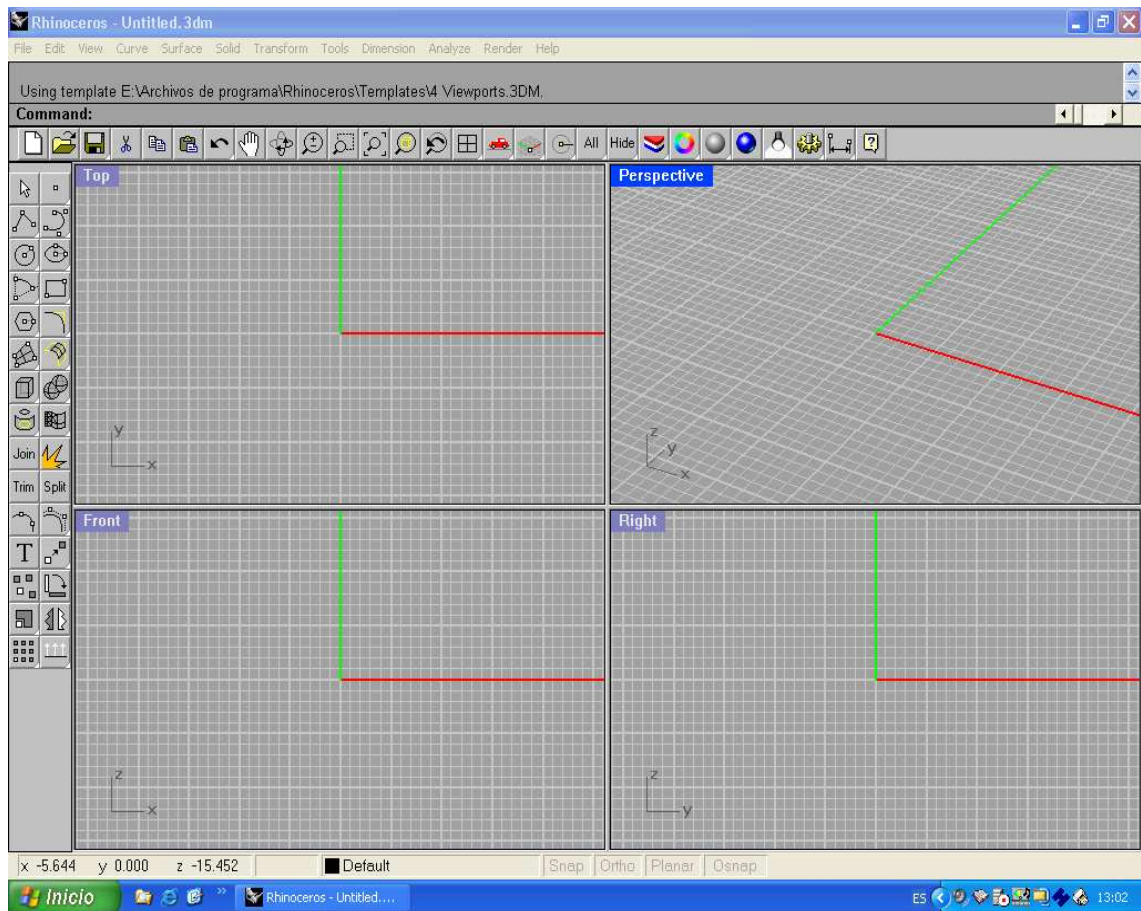


Figura 3.1 Ventana principal del rhinoceros

El Rhinoceros, el cual es llamado simplemente "RHINO", combina la precisión del tradicional CAGD (diseño geométrico asistido por computadora) con la flexibilidad de la tecnología de modelamiento basado con NURBS, es decir, se puede crear objetos que son representadas mediante curvas y superficies NURBS suaves y no simplemente segmentos de línea o una red poligonal (malla). Rhino usa secciones de superficies NURBS (superficies de forma libre) para representar formas curvadas, incluso con huecos en ellos. Integra también modelado de sólidos (unión de superficies en sus bordes) y superficies. Cualquier combinación de curvas, superficies y sólidos pueden ser seccionados.

Rhino puede crear, editar, analizar, y trasladar curvas y superficies NURBS en Windows. No hay límites en complejidad, grado o tamaño.

Las NURBS son representaciones geométricas en 3D capaces de describir cualquier forma con precisión, desde simples líneas en 2D, círculos, arcos, o curvas hasta los más complejos sólidos o superficies en 3D, se pueden representar objetos reales o crear objetos propios de la imaginación. Gracias a su flexibilidad y precisión, se pueden utilizar estos modelos NURBS en cualquier proceso, como son la ilustración y animación hasta el proceso de fabricación inclusive. Algunas características principales de RHINO, para lo cual fue elegido son:

- Interfaz del usuario: gráficos 3D extremadamente rápidos, ventanas ilimitadas, ventanas de trabajo sombreadas, ventanas de trabajo en perspectiva, extracción de coordenadas, menú de comandos recientes, administrador de capas emergente, manipulación de vistas con cámara, igualación de imagen en perspectiva, espacio de trabajo del usuario e iconos personalizables, barra de herramientas de menú contextual personalizable, etc(ver 3.1).
- Ayudas de construcción: orden de deshacer ilimitado, base de datos numérico exacto, unidades que incluyen pies, pulgadas y fracciones, referencia a objetos con etiqueta identificativa, planos de construcción con nombre, planos de construcción previos y posteriores, plano de construcción orientado a la curva, capas, filtración de capas, grupos, mapa de bits de fondo, mostrar/ocultar objetos, mostrar objetos seleccionados, seleccionar por capa, color, tipo de objeto último

objeto y conjunto previo seleccionado, cambiar objetos ocultos, bloquear/desbloquear objetos, desbloquear objetos seleccionados, punto de control y de edición activados/desactivados y puntos desactivados para objetos seleccionados y otros.

- Crear curvas: punto, línea, polilínea, polilínea en malla, curva de forma libre, círculo, arco, elipse, rectángulo, polígono, hélice, espiral, cono, punto de interpolación, puntos de control (vértices) y otros.
- Crear curvas a partir de otros objetos: a través de puntos, a través de polilínea, extender, empalmar, equidistantes, unión, desde dos vistas, perfil transversal, intersección, contorno en malla o superficie NURBS, sección en malla o superficie NURBS, borde, silueta, obtención de curva isoparamétrica, proyección, proyección de curvas sobre superficies, dibujos 2D con cotas y texto, extraer puntos y otros.
- Editar curvas: muestra puntos de control y puntos de paso, barras de iconos manejables, buscar, esclarecer, cambiar de grado, añadir/quitar nodos, cambiar peso, hacer periódicamente, ajustar tangente final, ajustar costura, polilíneas o segmentos de línea, girar y otros.
- Crear superficies: a partir de 3 o 4 puntos, a partir de 3 o 4 curvas (bordes de la superficie), a partir de curvas planas, rectángulo, por extrusión, desarrollable, barrido a lo largo de un camino con igualación de borde, barrido a lo largo de dos carriles con continuidad

de borde, revolucionar, revolucionar carriles, parche, proyectar, empalme, equidistantes, plano a través de puntos, etc.

- Editar superficies: los puntos de control, barras de iconos manejables, cambio de grado, añadir/quitar nodos, igualar, extender, fusionar, unir, deshacer el recorte, dividir la superficie en isoparamétrica, cambiar grado, encoger, hacer periódicamente, operaciones booleanas (unión, diferencia, intersección), entre otros.
- Crear sólidos: caja, esfera, cilindro, tubo, tubería, cono, cono truncado, elipsoide, toro, extrusión de curva plana, extrusión de superficie, selección de agujeros planos, unir superficies y otros.
- Editar sólidos: redondear bordes, extracción de superficies, operaciones booleanas (unión, diferencia, intersección).
- Crear mallas: a partir de superficies NURBS, a partir de una polilínea cerrada, plano, caja, cilindro, cono y esfera.
- Editar mallas: explotar, unir, soldar, unificar, aplicar una superficie, reducir o aumentar polígonos.
- Herramientas de edición: recortar, copiar, pegar, eliminar, eliminar duplicados, mover, rotar o girar, reflejar, graduar, alargar, alinear, duplicar, unir, cortar, dividir, descomponer, extender, construir chaflán, establecer equidistancia, deformar, doblar, tapar, orientar un objeto plano sobre una curva, fluir a lo largo de una curva, proyectar, propiedades de objeto, entre otros.

- Análisis: punto, longitud, distancia, ángulo, radio, dirección normal, área, centroide de área, momentos de área, volumen, centroide de volumen, momentos de volumen, curvatura de superficie, continuidad geométrica, desviación, punto más cercano, gráfico de curvatura en curvas y superficies, mostrar bordes, curvatura Gaussiana, radio de curvatura mínimo y máximo, y otros.
- Renderizado: Sombreado de objetos, renderizado por trazado de rayos (con texturas, iluminaciones, transparencias, ángulo y dirección, etc.), renderizado de objetos seleccionados en vista preliminar, renderizado girable, y otros.
- Formatos de archivo que soporta el Rhino: DWG/DXF(AutoCAD 2000 y posteriores), SAT (ACIS), 3DS, POV, BMP, TGA, JPG,VDA, GHS, SLC, Deep Paint 3D, IGES entre otros .
- Continuidad (cambio de curvatura igualado en una costura). La mayoría de programas de CAD ni siquiera tienen herramientas para igualar curvaturas, sin mencionar que sean lo bastante precisas. Si su aplicación requiere superficies de forma libre suaves necesitará las herramientas que sólo tiene Rhino o programas de modelado de superficies de alta capacidad como CATIA.
- Intersecciones. En Rhino, cuando dos superficies de forma libre se entrecruzan, la curva de intersección resultante se calcula con la precisión especificada por el usuario. La precisión (tolerancia) de Rhino

por defecto es de 1/100 milímetros. Muchos sistemas CAD han incorporado tolerancias que el usuario no puede dominar.

- Unidades. En Rhino, el usuario puede especificar las unidades. Cuando las unidades se cambian, todos los cálculos se realizan en esas unidades. En muchos programas de CAD, las unidades sólo se pueden visualizar en pantalla, pero no modificar. Aunque esté especificado en milímetros, todos los cálculos se hacen en metros.
- En resumen, Rhino es tan preciso como cualquier otro programa de diseño del mercado actual. Además, Rhino proporciona herramientas para configurar la precisión y las unidades, así como para controlar y calcular continuidades, de lo cual no disponen muchos productos CAD. Rhino no tiene las limitaciones que poseen otros productos anteriores de CAD. Además cabe señalar la intercambiabilidad de objetos entre Rhino y AutoCAD , Mechanical Desktop, Inventor, Cosmos y, además, con los sistemas de programación Visual C, VisualBasic, etc; a través del formato IGES. Por estas razones se eligió principalmente el Rhino como herramienta de tratamiento gráfico de este trabajo.

3.4 Resumen de Formatos Estándar del CAGD

1. DXF (Drawing eXchange Format). Este formato fue usado originalmente para almacenar modelos 3D creados por el autoCAD. DXF representa información en modo de datos etiquetados. Es decir, un

entero precedido de toda una sección de datos. Hoy en día existen herramientas para bajar archivos DXF y usar estos datos en aplicaciones OpenGL. Estos archivos son desarrollados en formato ASCII y binario.

2. VDA (Verband Der Automobilindustrie). Este es un formato de archivo que tiene su origen en la asociación manufacturera de vehículos alemana VDA. Este formato es reconocido por su capacidad para manipular libremente superficies 3D cuales son frecuentemente desarrollados en diseño de vehículos. su extensión es “.VDA”.
3. SET (Standar Échange et de Transfert). Su desarrollo comienza en 1983 y viene a ser un estándar Francés para intercambio de datos CAD en el año de 1985.
4. IGES (Initial Graphics Exchange Specification). Es un archivo estándar americano para intercambio de datos CAD. Este formato es más que solamente un archivo de almacenamiento de entidades geométricas como son las curvas y superficies. Este también contiene propiedades gráficas como colores en modo RGB (cuales pueden ser fácilmente convertidos en otros modos de colores) y propiedades de material. El IGES contiene exclusivamente entidades NURBS. Debido a que la mayoría de las entidades de curvas y superficies en IGES pueden ser expresados en términos de curvas y superficies NURBS este formato es el mas popular en modelos CAD.

5. STEP (STandar of the Exchange of Product model data). Este formato fue introducido por la International Organization for Standardization (ISO) a fin de liberar un modelo de Intercambio CAD cual debería ser aceptado como estandar alrededor del mundo. STEP es el mas moderno interfaz CAD, pero no es muy utilizado alrededor del mundo, lo que mas usan es el IGES por la presencia que tiene este formato desde 1979 y esta ampliamente difundido.
6. SAT (Standar ACIS Text) and SAB (Standar ACIS Binary) son formatos de archivo usados para almacenar y transferir datos en ACIS cual es una muy flexible librería C++ y SCHEME producido por tecnología espacial para propósitos de manipulación geométrica. Estos dos formatos son también conocidos como archivos guardados.

3.4.1 Breve Descripción de IGES

IGES es actualmente la interfaz CAD mas usada hoy en día. Esto es debido probablemente a su introducción cronológica. IGES fue desarrollado en 1979 por la US National Bureau de estandarización. Entre los años 1979-1994, muchas aplicaciones se han estado ya realizando , cuales necesitan datos CAD, tal como elementos finitos o generación de mallas. La extensión de estos archivos es “.igs”. Un archivo IGES es estructurado en cinco secciones principales: sección inicio, sección global , directorio de entrada, parameétro de datos y fin de sección.

- En la sección inicio uno puede escribir cosas como el directorio de localización del archivo. Este debería tener al menos una línea.

- En la sección global, se encuentra la información general los cuales sirven para leer el archivo actual, donde, cuando y por quien fue generado el archivo. Este también puede especificar el parámetro delimitador como también el registro delimitador.
- El directorio de entrada provee un resumen general de las diferentes componentes del archivo IGES y este indica también un registro, en el parámetro de datos, el cual contiene información completa acerca de todos los parámetros. Por ejemplo, en el directorio de entrada se puede ver que entidades tenemos para tratar con superficies NURBS. La información como puntos de control, secuencia de nodos y pesos no pueden ser encontrados en el directorio de entrada. Toda entidad tiene su propia identificación la cual varía de 100 a 514 a lo más. En la siguiente tabla se resume el número de entidades correspondiente a unos cuantos objetos geométricos importantes.

Entidad	ID number
Circular arc	100
Curva B-spline Rational	126
Curva compuesta	102
Línea	110
Superficie de revolución	120
Cilindro tabulado	122
Superficie B-spline Racional	128

- Es en el parámetro de datos que se encuentran los valores de todos los parámetros necesarios para cada entidad. Esta sección cambia de una entidad a otra pero esta tiene en general la siguiente forma,

suponiendo que el delimitador de parámetros es una coma (,) y el delimitador de registro es un punto y coma (;):

Numero de entidad, parámetro 1, parámetro 2, ..., parámetro N;

después del delimitador de registro, cualquier comentario puede ser agregado.

- El fin de sección consiste solo de una simple línea. Las columnas 33-72 no son usados en esta sección. Aquí se encuentra cuatro campos correspondiente a las cuatro secciones formadas.

Campo	Columna	Sección
1	1-8	Comienzo
2	9-16	Global
3	17-24	Directorio de entrada
4	25-32	Datos de parametro

IV. RESULTADOS

4.1 Digitalización y Representación de la Cerámica en el Computador

Para este proceso se tiene en cuenta las siguientes fases:

1. Descripción Física y matemática de la cerámica

El Objeto de estudio con el cual se trabaja es una réplica de una cerámica correspondiente a la época preincaica, cuyas características o rasgos son mayormente de forma ovoide y con asa (usualmente tubular) con figuras antropomorfas ; el objeto con lo cual se trabaja es de forma ovoide con 2 estribos tubulares cerrados y un asa (o puente) también de forma tubular.

Matemáticamente, dicha cerámica se representa como una superficie en forma paramétrica, o más precisamente, como la unión (de trozos) de superficies paramétricas , es así que el universo matemático corresponde a una función paramétrica $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ para todo $(u, v) \in U$, Donde U es llamado plano paramétrico o dominio de la superficie. Geométricamente, la cerámica es descrita como el gráfico de la función paramétrica φ (ver

figura 4.1), es decir:

$$\text{Graf}(\varphi) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \forall (u, v) \in U$$

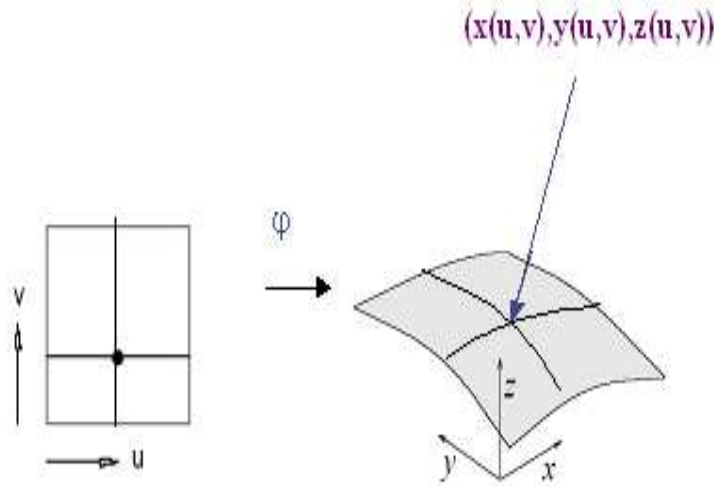


Figura 4.1 descripción matemática de una superficie

2. Discretización de los objetos Para la representación de la cerámica es necesario tener un conjunto de puntos datos correspondientes al objeto de estudio, es decir, obtener una discretización de dicha cerámica, en nuestro caso, por medio de un digitalizador tridimensional (ver figura 4.2).

Dichos digitalizadores 3D son basados en pruebas de contacto, óptico o escáner Láser, y sensores acústicas o magnéticos. Las pruebas de contacto son realizados o montados sobre un pantograma 3D, y son operados manualmente, los cuales son medidos por sensores



Figura 4.2 Digitalizador tridimensional

electrónicos o ópticos, y estas mediciones son transformadas en coordenadas x,y,z . En la industria mecánica son también ampliamente usadas maquinas de medición automática manufacturera, por ejemplo para el control de calidad. Una vez digitalizada la cerámica, dichos puntos se guardan en un formato de archivo del tipo IGES (The Initial Graphics Exchange Specification) u otro, dependiendo del tipo de digitalizador, para su procesamiento, en nuestro ejemplo, en el proceso de digitalización de la cerámica se obtuvieron un total de 1601 puntos datos, dichos puntos son mostrados en formato IGES en el ANEXO A-3. Es así, que se comienza el proceso de representación en el computador a través de la interpolación de dichos datos de puntos para la generación de las superficies. Hay que tener en cuenta que el formato de Archivo IGES (IGS) es un formato estándar de amplio uso en el CAGD, para el intercambio de información CAD.

3. Representación del objeto de estudio en el computador En esta sección se exponen los procedimientos realizados, durante la representación de la cerámica antes de pasar a la fase de reconstrucción. Con este fin se usa como herramienta computacional el Rhinoceros , el cual por sus características explicadas en la sección anterior son adecuadas para dicho proceso. Así, se realizan los siguientes pasos:

- Se procede la lectura de los puntos datos con el rhino, los cuales se encuentran en el formato IGES, Ver figura 4.3.

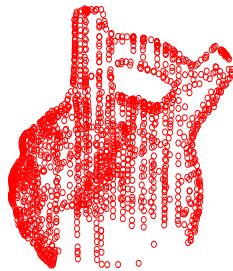


Figura 4.3 puntos de la cerámica en el Rhino

- Se procede a crear la interpolación de curvas (interpolación de curvas NURBS) por medio del comando *InterpCrv*, teniendo como datos de entrada los puntos datos, los cuales definirán los bordes de cada uno de los pedazos de superficies (Superficies NURBS rectangulares), obteniéndose una especie de "mallado", cabe recalcar que dichas curvas NURBS fueron creadas de tal

forma definan los cuatro bordes de cada pedazo de superficie y así mantener la topología rectangular para este tipo de superficies.

- A cada par de tramos de curva generada que inicialmente solo tienen continuidad de contacto (Continuidad C^0) se comienza a darle continuidad de tangencia (Continuidad C^1) en cada extremo de las curvas, haciendo uso para ello el comando *Match* del RHINO, ver figura 4.4.

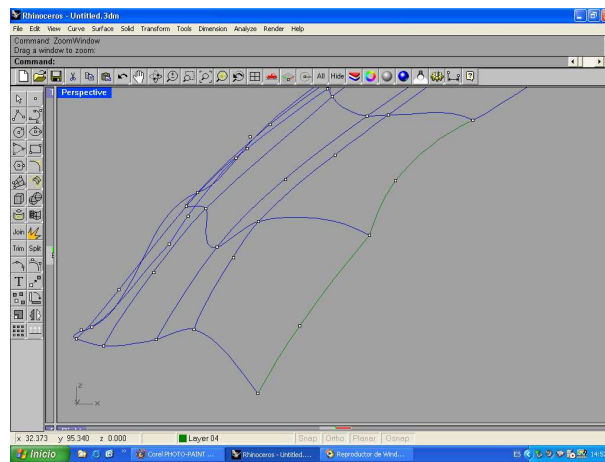


Figura 4.4 interpolación de dos curvas que tienen continuidad de contacto

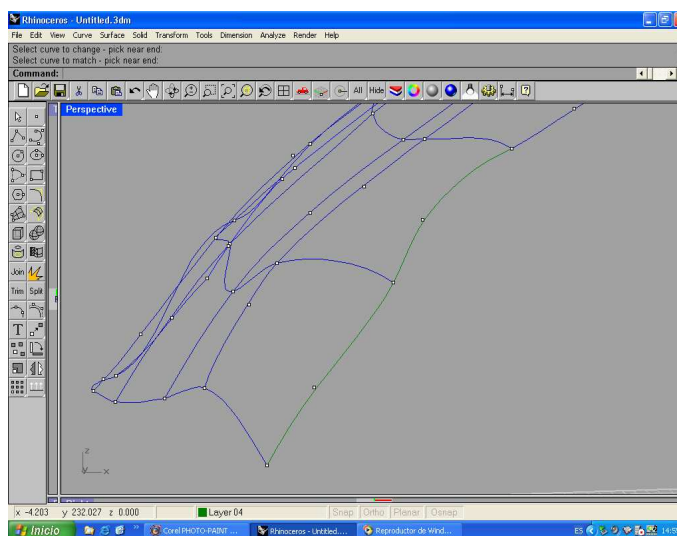


Figura 4.5 Resultado de aplicar la continuidad de tangencia

Así, Aplicando la continuidad de tangencia a cada par de curvas obtenemos la figura 4.6, el cual como se aprecia ya se tiene la forma del objeto de estudio, se puede decir que esta representación es de tipo alambre, que los cuales se rellenaran posteriormente con superficies.

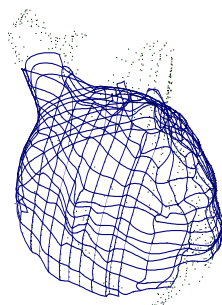


Figura 4.6 Conjunto de Curvas Generadas con Continuidad de Tangencia

- Luego se comienza a generar los pedazos de superficies B-spline (NURBS) de grado tres, una por una, los cuales son generados a partir del ingreso de los cuatro bordes que definirán la superficie, para ello se utilizó el comando *EdgeSrf* del RHINO. Ver figura 4.7. Este proceso, se repite pedazo a pedazo por cada 4 tramos de curva (superficie B-spline cuadrangular o superficies producto tensorial), los cuales conforman los bordes de dicha superficie a generar, en la figura 4.7 las líneas de color verde son superficies ya generadas, finalmente se obtiene la superficie deseada ver figura 4.8 la cual se encuentra renderizado.

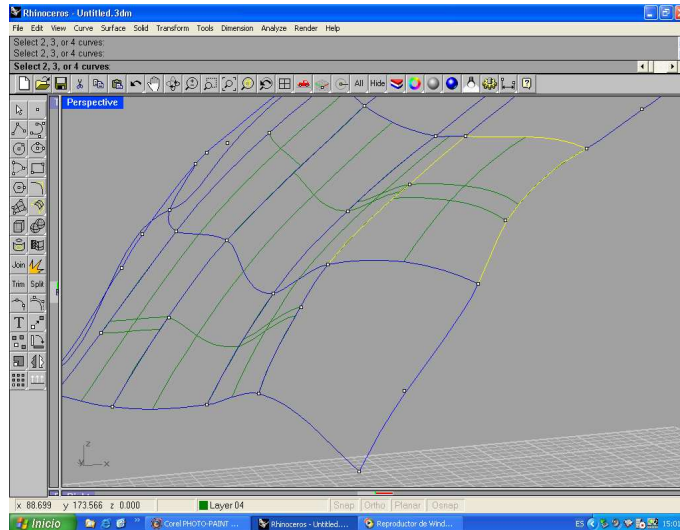


Figura 4.7 resultado del comando Edgesrf para a generación de superficies

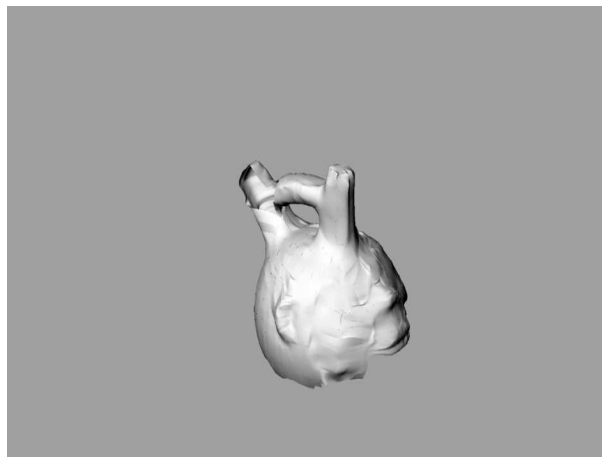


Figura 4.8 cerámica renderizada

4.2 Selección de puntos experimentales para la reconstrucción

Para la selección de los puntos datos experimentales, se realizaron los siguientes pasos:

- Se identifica la superficie faltante a reconstruir, así como también las superficies adyacentes ("vecinas") a esta. La región de superfi-

cie a reconstruir no debe ser demasiada grande con respecto a las adyacentes. Ver figuras 4.9 y 4.10.

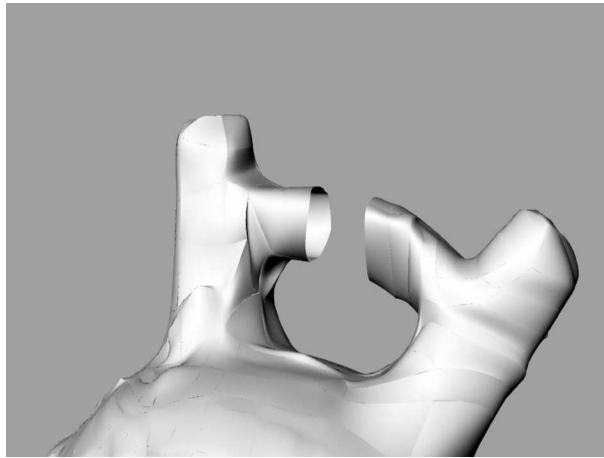


Figura 4.9 Identificación de superficie a reconstruir

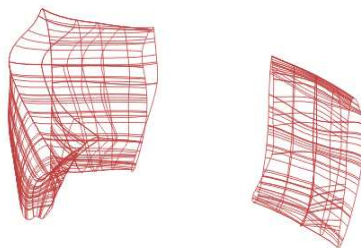


Figura 4.10 selección de Superficies adyacentes a la faltante

- En este ejemplo en particular se calcula el centro geométrico del borde o bordes donde sucedió la "rotura" de la cerámica. Se genera una recta que une dichos centros geométricos y se construyen planos que pasen sobre esta recta, las cuales viene a ser planos de corte

sobre la superficie adyacente, se generan 5 planos de corte al rededor de las superficies adyacentes. Ver figura 4.11

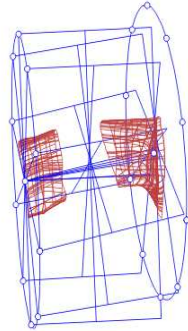


Figura 4.11 Planos de corte

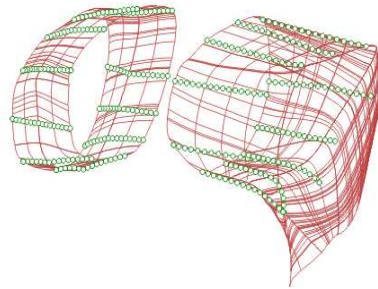


Figura 4.12 discretización de las curvas generadas por los planos de corte

- una vez generado dichos planos de corte alrededor de la superficie de rotura, se procede a la intersección de la superficie con tales planos de corte, Generándose de esta manera una serie de curvas sobre super-

ficies, en nuestro ejemplo se obtuvieron curvas en ambas superficies adyacentes, es decir, por cada intersección con un plano de corte se obtuvieron dos curvas, haciendo un total de 20 curvas, los cuales serán tratados de dos en dos.

- Se discretiza las curvas generadas por cada plano de corte que se hizo a la superficie. De esta forma se obtiene inicialmente un conjunto de 30 puntos por cada par de curvas, los cuales serán de gran ayuda para la generación de puntos en la región faltante. Ver figura 4.12

El uso de planos de corte sobre la superficie se realiza con el fin que se generen una secuencia ordenada de puntos y además de tener facilidad en cuanto al análisis y manejo que se hará a dichos puntos posteriormente.

4.3 Generación de los puntos para la reconstrucción de la superficie

Durante el proceso de reconstrucción de la superficie faltante, primero se procede a la generación de puntos datos en dicha región faltante. Usándose para tal motivo técnicas de análisis de regresión como herramienta de generación de funciones aproximatorias. Para la generación de estas funciones se parte del hecho que los spline que se han de generar constituyen modelos polinomiales paramétricos de tercer orden, por lo que el modelo elegido debe de incluir términos de primer, segundo y tercer orden; Además, los parámetros de los B-spline varían de uno a otro, por tanto en el modelo aproximatorio buscado debe de incluirse términos que provoquen la variación de la posición y el ángulo de inclinación

por cada coordenada como función de este parámetro. En la selección de estos términos adicionales se utilizan las técnicas de selección del mejor modelo, tal y como se describe en la sección 1.5.3. Para ello se realiza los siguientes pasos.

1. Una vez obtenido el conjunto de puntos experimentales generados por los planos de corte, se procede al tratamiento estadístico de dichos puntos usando el software estadístico STATGRAPHICS. Para la cerámica se considera un conjunto de 30 puntos con coordenadas X, Y y Z los cuales corresponden a la discretización de una de las curvas a estimar.

	X	Y	Z
1	37.965	6.12921	64.1657
2	38.1432	6.90422	64.0683
3	38.3547	7.67345	63.9977
4	38.5816	8.43899	63.9399
5	38.8063	9.20644	63.8799
6	39.0154	9.97453	63.808
7	39.2082	10.7495	63.7215
8	39.3854	11.5242	63.6234
9	39.5488	12.3004	63.5143
10	39.6975	13.0777	63.3938
11	39.8295	13.8578	63.2598
12	39.9415	14.6366	63.111
13	40.0316	15.416	62.9454
14	40.0981	16.1928	62.7627
15	40.1407	16.9667	62.5628
16	42.2638	33.7868	59.1251
17	42.144	34.7202	58.7543
18	42.2008	35.6995	58.5035
19	42.3473	36.689	58.3177
20	42.4457	37.6725	58.0971
21	42.3401	38.6126	57.7351
22	42.102	39.4928	57.2906
23	41.8702	40.3769	56.8497
24	41.6234	41.2522	56.4
25	41.2923	42.0728	55.9029
26	40.9098	42.8527	55.3791
27	40.5253	43.6313	54.8542
28	40.1976	44.4541	54.359
29	40.0709	45.3795	53.9853
30	40.4233	46.3012	53.9758

Hay que fijarse que el punto de rotura sucede entre los puntos número 15 y número 16.

2. Se procede a la parametrización de cada uno de los puntos, esta parte viene ha ser crítico, pues una buena elección dará una mejor ajuste en el proceso de regresión, la parametrización que es usada es la distancia “acumulada”, desde un punto situado al inicio de la curva hacia cada punto. Lo cual indica que los puntos datos dependerán de su posición con respecto a su primer punto, en consecuencia, los puntos que se generan posteriormente, se comportan de acuerdo a esta característica.

	u		
1	0.80186925	16	29.31576159
2	1.603044948	17	30.32723588
3	2.403939075	18	31.33973545
4	3.204486352	19	32.35713121
5	4.006402552	20	33.36985979
6	4.805686399	21	34.38276816
7	5.608950111	22	35.39717631
8	6.409689482	23	36.41194568
9	7.210369699	24	37.42648519
10	8.010886551	25	38.44143345
11	8.813342786	26	39.45578876
12	9.614101726	27	40.4704701
13	10.41597811	28	41.48516719
14	11.21674011	29	42.49118396
15	12.01717498	30	43.4780005

Se puede escoger otro tipo de parametrización dependiendo del problema que se presente, inclusive no solo que dependa de un sólo parámetro sino de dos o más. Si al realizar el análisis de regresión

el coeficiente correlación no es "aceptable", se sugiere comenzar por cambiar otro tipo de parametrización .

3. Se empieza a usar el análisis de regresión usando el statgraphics, teniendo como variables independientes el parámetro u y como variables dependiente las coordenadas de los puntos X, Y y Z . Se realizan los pasos mostrados en la subsección 2.5.3 donde se sugiere una adecuada selección de la ecuación de regresión. Se hace uso de una combinación de los modelos: potencial, logarítmico, lineal, cuadrático y cúbico. Empleándose el siguiente modelo general:

$$f = a_0 + a_1 * U + a_2 * U^2 + a_3 * U^3 + a_4 * U^\alpha$$

donde f es la variable dependiente, a_i son los estimadores, U es el parámetro y α es también un estimador que es calculado previamente mediante el modelo potencial. Al aplicar el statgraphics se obtuvo los siguiente resultados:

Teniendo como variable dependiente $f = X$ y $\alpha = 0.0265068$ se tiene:

parametros	estimadores	Error estándar	P-valor
CONSTANT	16.8404	3.167	0.0000
U2	0.00901117	0.000587777	0.0000
U3	-0.000211367	0.0000124429	0.0000
XUA	21.0964	3.05281	0.0000

Análisis de Varianza

origen	Suma de cuad.	Df	minimo cuad.	P-Valor
Model	55.6988	3	18.5663	0.0000
Residual	1.03552	26	0.0398275	
Total (Corr.)	56.7343	29		

R-cuadrado = 98.1748 por ciento

R-cuadrado (ajustado para d.f.)=97.9642 por ciento

Error Estándar de Estimación = 0.199568

Error mínimo cuadrado = 0.138934

Esto indica que el resultado de ajustar un modelo de regresión lineal múltiple describe la relación entre X y la variable U . Dicha ecuación del modelo de ajuste es:

$$X = 16.8404 + 0.00901117 * U^2 - 0.000211367 * U^3 + 21.0964 * U^0 .0265068$$

Puesto que los p-valores en la tabla de análisis de la variable dependiente es menos que 0.01, estadísticamente, hay una relación significativa entre las variables en un nivel de aceptación del 99 por ciento.

Puesto que el P-valor es casi nula en cada variable independiente, y el grado de correlación es alto, no es necesario mover cualquiera de las variables del modelo.

Resultados similares se obtiene para el caso de las variables Y y Z , como se ve a continuación.

Para $f = Y$ y $\alpha = 0.601976$ se tiene:

Parámetro	Estimador	Error Estándar	P-Valor
Constante	5.41966	0.041681	0.0000
U	0.927922	0.00923469	0.0000
U2	0.00398376	0.000462336	0.0000
U3	-0.0000866242	0.00000668	0.0000

Análisis de Varianza

origen	suma de cuad.	Df	Mínimo Cuad.	P-Valor
Modelo	6548.3	3	2182.77	0.0000
Residual	0.103149	26	0.00396727	
Total (Corr.)	6548.41	29		

R-cuadrado = 99.9984 por ciento

R-cuadrado (ajustado por d.f.) = 99.9982 por ciento

Error estándar = 0.0629863

Error mínimo cuadrado = 0.0427492

Esto muestra que el resultado de ajustar un modelo de regresión lineal múltiple a dicho conjunto de puntos describe la relación entre Y y la variable independiente U . Dicha ecuación del modelo de ajuste es;

$$Y = 5.41966 + 0.927922 * U + 0.00398376 * U^2 - 0.0000866242 * U^3$$

Puesto que los p-valores en la tabla es menos que 0.01, estadísticamente hay una relación significativa entre las variables en un nivel de aceptación del 99 por ciento.

Para el caso de $f = Z$ y $\alpha = -0.0486371$ se tiene

Parámetro	Estimadores	Error estándar	P-Valor
Constante	64.2978	0.0552323	0.0000
U	-0.115541	0.00550541	0.0000
U3	-0.0000687449	0.00000306215	0.0000

Análisis de Varianza

Origen	suma de cuad.	Df	Minimo Cuad.	P-Valor
Modelo	403.572	2	201.786	0.0000
Residual	0.513533	27		
Total (Corr.)	404.086	29		

R-cuadrado = 99.8729 por ciento

R-cuadrado (ajustado para d.f.) =99.8635 por ciento

Error Estándar = 0.137912

Error absoluto mínimo = 0.103763

Prueba Durbin-Watson = 0.721309 (P=0.0000)

Lag 1 autocorrelación residual= 0.517558

Estos muestra que el resultado de ajustar un modelo de regresión lineal múltiple a dicho conjunto de puntos describe la relación entre Y y la variable independiente U . Dicha ecuación del modelo de ajuste es;

$$Z = 64.2978 - 0.115541 * U - 0.0000687449 * U^3$$

Puesto que los p-valores en la tabla es menos que 0.01, estadísticamente hay una relación significativa entre las variables en un nivel de aceptación del 99 por ciento.

4. Se generan puntos en la región a reconstruir a partir de las ecuaciones de regresión calculadas anteriormente , para ello ingresamos valores a u , en nuestro caso, como la rotura sucede entre el punto 15 ($u = 12.01717498$) y el punto 16 ($u = 29.31576159$), es en este intervalo que se da valores a u para así obtener los puntos estimados:

t	X	Y	Z
13.58977376	40.58128355	18.54823042	62.55508897
15.16237254	40.84814549	20.10306172	62.30629388
16.73497132	41.10569646	21.65810806	62.0420322
18.3075701	41.35012881	23.21134807	61.76069976
19.88016888	41.57735846	24.76076038	61.46069243
21.45276766	41.78310876	26.30432364	61.14040604
23.02536644	41.96296486	27.84001648	60.79823645
24.59796522	42.11241004	29.36581753	60.4325795
26.170564	42.22685086	30.87970544	60.04183105
27.74316278	42.30163499	32.37965885	59.62438693

De esta manera obtenemos los siguientes puntos sobre la región a estimar:

4.4 Generación de la Superficie Faltante y Análisis del error

Para General y luego controlar el error de estimación se tuvo en cuenta los siguientes pasos:

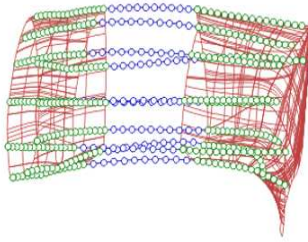


Figura 4.13 Conjunto de puntos estimados en cada tramos de curva

1. Una vez estimados los puntos sobre la superficie faltante generamos las curvas que interpolan estas curvas y lo comparamos dichas curvas con las originales las que fueron quitadas inicialmente para verificar la efectividad del método empleado, para ello hacemos se hizo uso de la siguiente fórmula, que viene ha ser la desviación estándar de todo el conjunto de puntos estimados:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{i=1}^{\bar{i}_j} (x_{i,j}^1 - x_{i,j}^2)^2 + (y_{i,j}^1 - y_{i,j}^2)^2 + (z_{i,j}^1 - z_{i,j}^2)^2}{\sum_{j=1}^{\bar{j}} \bar{i}_j}}$$

donde:

\bar{j} es el número de curvas generadas por los planos de corte , el cual varía de 1 hasta 10

\bar{i}_j es el números de puntos generadas en la curva j .

En nuestro ejemplo se tuvo un error estándar de 0.038862608 (3 por ciento aproximadamente) lo cual es muy significativo, gráficamente también se puede apreciar en la figura 4.14 dicha comparación, donde los puntos estimados y los puntos originales se encuentran bastante próximos.

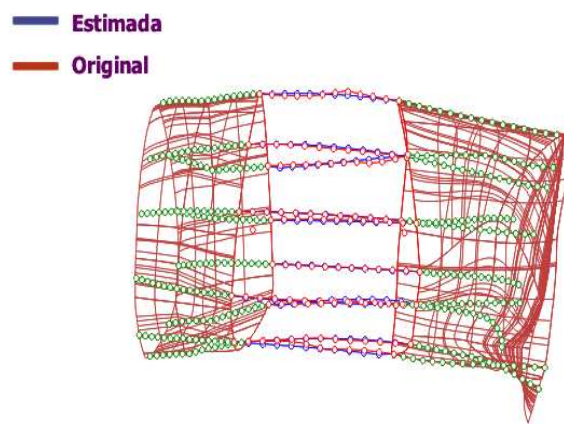


Figura 4.14 Comparación entre puntos y curvas estimadas y reales

2. Luego de estimados los puntos sobre la región faltante se procede a aplicar la interpolación de superficies sobre esta. Este procedimiento es similar al realizado en el proceso de representación de una superficie. En la figura 4.15 vemos la superficie ya reconstruida.

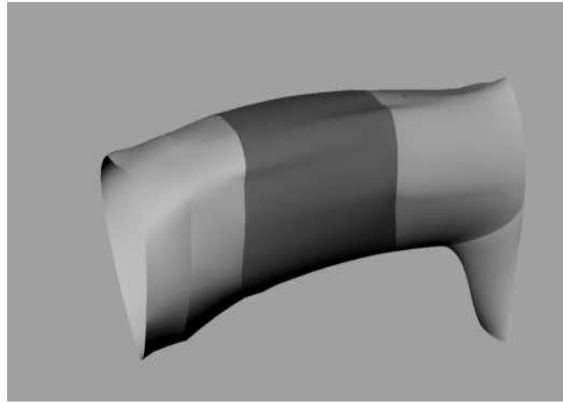


Figura 4.15 superficie reconstruida a partir de los puntos estimados

3. Finalmente, es necesario tener un control sobre el error, es decir que tanto puede variar el error y en que condiciones podemos aplicar la presente técnica sin tener errores grandes, para ello se hizo la estimación del error estándar según la razón entre la longitud de la curva faltante (L_{falt}) y la longitud total (L_{tot}), el cual es la longitud de la curva correspondiente a la superficie vecina más la superficie faltante, Así, mediante una experimentación usando el software estadístico, se obtuvo el siguiente gráfico 4.16, en el cual se puede observar, que a medida que el porcentaje de la curva faltante (región faltante) es mayor a la total el error estándar crece de una manera exponencial, es decir; va creciendo cada vez más rápido.

De esta manera podemos ver la relación existente entre el error

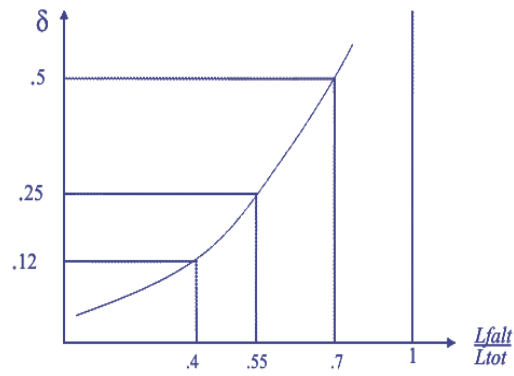


Figura 4.16 L_{falt}/L_{tot} versus la desviación estándar

estándar y el tramo que va a ser reconstruido, lo cual es de gran ayuda para saber hasta qué porción del tramo de la región faltante es posible reconstruirlo.

V.DISCUSIÓN

5.1 La Representación de Superficies en la Actualidad

El problema de representar un objeto real mediante superficies en el computador a través de un conjunto de puntos datos, es una técnica importante para representar diferentes objetos tridimensionalmente. En los últimos 20 años se han desarrollado considerablemente varias técnicas para ello, por otra parte con la ayuda de la computadora, han ido proporcionando un mayor manejo para el diseño y por tanto múltiples aplicaciones, al inicio eran solamente aplicados a la ingeniería para el diseño de partes de automóviles, de aviones y buques, y también en la tecnología espacial, posteriormente, con el avance de la tecnología fueron aplicados en la medicina teniendo bastante aceptación y siendo uno de los mayores logros alcanzados por el diseño geométrico asistido por Computadora, principalmente en la representación tridimensional de los exámenes tomográficos y recientemente en la reconstrucción de huesos para la creación de prótesis de metal. En estos últimos años ha surgido un gran interés en la industria cinematográfica, el cual está revolucionando considerablemente la animación de objetos reales y/o imaginarios, objetos que son creados inicialmente usando superficies NURBS. La arqueología es uno de las recientes aplicaciones del CAGD la cual puede ser utilizada para la restauración de diferentes piezas arqueológicas como son monumentos, estatuas, cerámicas, etc., en la representación digital a escala de ciudades

antiguas, para la restauración de pinturas o imágenes fotográficas deterioradas. En la paleontología, sobre todo de restos óseos, tanto de seres humanos como dinosaurios, en la cual se hace una reconstrucción tridimensional a partir de sus huesos, para luego simularlo en la computadora y así obtener una representación animada y poder idealizar dichas criaturas para un mejor estudio.

5.2 Ventajas y Desventajas de los métodos de Reconstrucción de Superficies

Hoy en día existen varias investigaciones sobre la reconstrucción de superficies como mencionábamos algunos artículos de investigación en los antecedentes. Estos métodos que tratan acerca de la arqueología están mayormente orientados a la restauración de superficies, es decir a objetos deteriorados por el paso del tiempo y no tanto a objetos “rotos”, estos trabajos aplican técnicas de mallado de superficies, técnicas de interpolación con restricciones, y en algunos los elementos finitos, los cuales obviamente requieren un esfuerzo computacional bastante amplio. Una de los métodos bastante estudiados y empleado es la reconstrucción y representación de superficies de objetos 3D con funciones Base Radiales. Hay trabajos en la medicina, para reconstruir prótesis de huesos, así podemos mencionar el artículo “Surface Interpolation with radial basis functions for medical imaging”, en la cual hace la reconstrucción de un cráneo humano para obtener una prótesis, esta técnica de Bases Radiales es presentado como una solución al problema de interpolación de superficies incompletas para imágenes médicas 3D. Estos requieren altos requerimientos computacionales y además es limitado su uso a problemas donde el número de interpolaciones es menor que 300. Recientemente

se están siendo investigaciones sobre este método para superar estas dificultades y aplicar a un conjunto de datos amplio. También existen otros métodos para tratar con un conjunto de datos, que utilizan el mallado como son: Triangulación por Delaunay, este método tienen alta complejidad computacional; los Diagramas de Voronoi, son sensibles a los datos, debido a que pueden aparecer huecos y además la superficie puede ser equivocadas o sufrir deformaciones; las Aproximaciones Volumétricas, necesitan un mallado inicial, y un muestreo uniforme para un conjunto de datos extensos. El método que presentamos aquí tiene poca complejidad computacional y además es efectivo, sin producir perturbaciones y conservando una forma suave de la superficie a reconstruir, no es sensible a los puntos datos, es decir si un punto dato o unos pocos no fue ingresado adecuadamente o simplemente no fueron ingresados, no afecta demasiado a la superficie, la cual sigue manteniendo la suavidad. Una desventaja es que sólo es aplicable a superficies que tengan superficies faltantes no demasiados extensos y además las regiones adyacentes a la faltante no deben tener cambios bruscos, es decir deben guardar una suavidad. En el proceso de reconstrucción se aplicó el análisis de regresión múltiple como una aproximación de curvas, es posible también aplicar otro tipo de método para el ajuste de curvas, como por ejemplo, el uso de los algoritmos genéticos, con el cual es posible trabajar con varios tipos de funciones, tales como las funciones seno y coseno, y no simplemente con funciones polinómicas o exponenciales, por consiguiente, el presente método puede ser estudiado usando dicha aproximación, ver bibliografía [CAR03].

VI. CONCLUSIONES

1. Se confirma la hipótesis planteada inicialmente, pues es posible aplicar una modelación matemática adecuada usando el diseño geométrico asistido por computadora para la representación de superficies, donde dicha superficie generada vienen a ser un conjunto de superficies B-spline de tercer grado, unidas con continuidad de tangente (continuidad o suavidad C^1).
2. El proceso de reconstrucción (estimación) de las superficie faltante es realizado por medio de aproximación de curvas (aproximación de funciones), haciendo uso para tal fin del análisis de regresión múltiple.
3. Las técnicas del análisis de regresión permiten realizar estimaciones adecuadas de las funciones generatrices de las superficies faltantes, siempre que se realice una adecuada selección de la estructura del modelo a emplear, en el trabajo para estimar puntos sobre la región faltante a partir de un conjunto de puntos datos, es empleado el siguiente modelo por cada coordenada X, Y e Z:

$$w = a_0 + a_1 \ln t + a_2 t^b + a_3 t + a_4 t^2 + a_5 t^3 \quad (5.1)$$

donde $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ y b son parámetros a estimar .

4. El error de estimación de los puntos sobre la superficie faltante crece exponencialmente a medida que la región (curvas) Faltante crece con respecto a la región(curvas)total.
5. Debido al error que se produce a medida que la región faltante es mayor, el presente método es aplicable para reconstruir superficies localmente, es decir, en regiones no demasiado grandes en proporción a la superficie total (superficie adyacente más la superficie faltante).
6. La reconstrucción de superficies es aplicado con éxito sobre superficies suaves, es decir, la superficie no sufre cambios bruscos como pueden ser los picos elevados o mucha oscilación.

VII. SUGERENCIAS

1. A partir de este trabajo, es aconsejable realizar convenios con el Instituto Nacional de Cultura, y otras instituciones interesadas, ya sean nacionales e internacionales, con el fin de realizar estudios y financiamientos de proyectos para la preservación y restauración de restos arqueológicos en el Perú, haciendo uso de las herramientas CAD (Diseño asistido por computadora).
2. El método empleado aquí para la reconstrucción de superficies complejas esta limitado a estimar regiones de forma local, para regiones mas amplias, se sugiere la generación de múltiples soluciones y/o alternativas en la cual es necesario la intervención de un especialista, en este caso un arqueólogo, para elegir la mejor opción; de esta forma desarrollar un método adecuado que involucre el diseño geométrico, la gráfica por computadora y la investigación operativa para la toma de decisiones.
3. El presente trabajo no sólo puede ser aplicable en el campo de la Arqueología, sino también, en áreas como la medicina, como es el caso de reconstrucción de huesos para la generación de prótesis, o

la mecánica para la restauración de piezas deterioradas, por esta razón es necesario ampliar las aplicaciones en otras áreas de la ciencia teniendo como referencia el método empleado en el presente trabajo.

4. Realizar convenios con otras Universidades del país o del exterior interesadas en estos temas.
5. Realizar la compra de escáners 3D o digitalizadores 3D, como también software CAD, para un mejor trabajo.
6. Implementar a futuro una maestría en modelado geométrico , pues esta área tiene diferentes aplicaciones como es en la medicina para exámenes tomográficos, en la ingeniería, en la matemática, etc.

BIBLIOGRAFÍA

- [Arz00] José Arzola R. *Sistemas de Ingeniería*. Editorial Félix Varela, Ciudad de la Habana, Cuba, 2000.
- [Cal03] Arístides Calero V. *Estadística II*. Editorial Félix Varela, Ciudad de la Habana, Cuba, 2003.
- [Car03] Carvalho Paulo; Figueiredo Luiz; Gomez J. and Velho Luiz *Mathematical Optimization in Graphics and Vision*. Monografías del IMCA, Lima, Perú, 2003.
- [Cho98] Choi Byoung; Jerard R. *Sculpture Surface Machining Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, London, 1998.
- [Far99] Farin Gerald; Hoscheck J. *HandBook of Computer Aided Geometric Design*. ElSevier Science, 1999.
- [Fer] Ferré Masip *Diseño Industrial por computadora 2*. Colección Productiva.
- [Gue03] Caridad Guerra B.; Menéndez A.; Barreto M. *Estadística*. Editorial Félix Varela, Ciudad de la Habana, Cuba, 2003.

- [Hos92] Hoscheck J.;Lasser D. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [IGES91] IGES *Initial Graphics Exchange Specification, version 5.1*. Kent Reed National Institute of Standards and Technology,Gaithersburg MD, 1991.
- [Pra02] Prautzsch H.;Boehm W.;Paluszny M. *Methods of Bezier and B-spline*. Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, 2002.
- [Pie97] Piegl Les;Tiller Wayne *The Nurbs Book*. Springer - Verlag, Heidelberg, Alemania,1997.
- [Rog89] Rogers David F.;Adams Alan J. *Mathematical Elements For Computer Graphics*. McGraw-Hill Publishing Company., Annapolis,1989.
- [Rog01] Rogers David F. *An Introduction to Nurbs*. Academic Press San Diego,Annapolis, USA , 2001.

ANEXOS

ANEXO 1

**Análisis del regresión múltiple usando
el Statgraphics**

A continuación se muestran los resultados al aplicar el *statgraphics* para la estimación de curvas sobre la superficie faltante, los siguientes resultados corresponden a una de las curvas estimadas, para las demás curvas dicho resultado es similar, así se tiene:

primeramente, para el modelo potencial de la forma

$$w = b_0 t^{b_1}. \quad (2)$$

se obtuvo los siguientes valores :

En la coordenada X $b_1=0.0184342$,

en la coordenada Y $b_1=0.439448$

y en la coordenada Z $b_1=-0.0264248$

Análisis en la variable X:

Análisis de regresión múltiple

variable dependiente: X

Parameter	Estimate	Standard error	T Statistic	P-Value
CONSTANT	684.295	68.9605	9.923	0.0000
LnU	12.0782	1.29837	9.30263	0.0000
U3	0.000149401	0.00000311359	47.9833	0.0000
XUa	-655.912	68.9672	-9.51049	0.0000

Análisis de Varianza

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	20.2827	3	6.76088	3752.88	0.0000
Residual	0.0468395	26	0.00180152		
Total(Corr.)	20.3295	29			

R-squared = 99.7696 percent.

R-squared (adjusted for d.f.)=99.743percent.

Standard Error of Est. = 0.0424443

Mean absolute error = 0.0318721

Durbin-Watson statistic = 0.416667 (P=0.0000).

Lag 1 residual autocorrelation = 0.705597.

The StatAdvisor

The output shows the results of fitting a multiple linear regression model to describe the relationship between X and 3 independent variables. The equation of the fitted model is

$$X = 684.295 + 12.0782 * LnU + 0.000149401 * U3 - 655.912 * XUa$$

Since the P-value in the ANOVA table is less than 0.01, there is a statistically significant relationship between the variables at the 99 percent confidence level.

The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 99.7696 percent of the variability in X. The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with different numbers of independent variables, is 99.743percent. The standard error of the estimate shows the standard deviation of the residuals to be 0.0424443. This value can be used to construct prediction limits for new observations by selecting the Reports option from the text menu. The mean absolute error (MAE) of 0.0318721 is the average value of the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file. Since the P-value is less than 0.05, there is an indication of possible serial correlation. Plot the residuals versus row order to see if there is any pattern which can be seen.

In determining whether the model can be simplified, notice that the highest P-value on the independent variables is 0.0000, belonging to LnU. Since the P-value is less than 0.01, the highest order term is sta-

tistically significant at the 99 percent confidence level. Consequently, you probably don't want to remove any variables from the model.

Analisis en la variable Y:

Analisis de Regresion multiple

variable Dependiente: Y

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
CONSTANT	7.57328	0.322003	23.5193	0.0000
LnU	-0.286712	0.116499	-2.46106	0.0214
U	0.827422	0.0554836	14.9129	0.0000
U2	0.00519411	0.00131549	3.94843	0.0006
U3	-0.000105562	0.0000174217	-6.05924	0.0000
YUa	0.99734	0.372824	2.67509	0.0132

Análisis de Varianza

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	3123.22	5	624.6431019	3394.29	0.0000
Residual	0.0014707	24	0.0000612792		
Total(Corr.)	3123.22	29			

R-squared = 100.0 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 99.9999 percent.

Standard Error of Est. = 0.0078281

Mean absolute error = 0.00569931

Durbin-Watson statistic = 0.403973 (P=0.0000)

Lag 1 residual autocorrelation = 0.706819

The StatAdvisor

The output shows the results of fitting a multiple linear regression model to describe the relationship between Y and 5 independent variables. The equation of the fitted model is

$$Y = 7.57328 - 0.286712 * LnU + 0.827422 * U + 0.00519411 * U2 - 0.000105562 * U3 + 0.99734 * YUa$$

Since the P-value in the ANOVA table is less than 0.01, there is a statistically significant relationship between the variables at the 99 percent confidence level.

The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 100.0 percent of the variability in Y. The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with different numbers of independent variables, is 99.9999 percent. The standard error of the estimate shows the standard deviation of the residuals to be 0.0078281. This value can be used to construct prediction limits for new observations by selecting the Reports option from the text menu. The mean absolute error (MAE) of 0.00569931 is the average value of

the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file. Since the P-value is less than 0.05, there is an indication of possible serial correlation. Plot the residuals versus row order to see if there is any pattern which can be seen.

In determining whether the model can be simplified, notice that the highest P-value on the independent variables is 0.0214, belonging to LnU. Since the P-value is less than 0.05, that term is statistically significant at the 95 percent confidence level. Consequently, you probably don't want to remove any variables from the model.

Analisis en la variable Z:

Análisis de Regresión Múltiple

variable Dependiente: Z

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
CONSTANT	-130.5	84.04	-1.55283	0.1330
LnU	5.12676	2.21017	2.31963	0.0288
U	-0.130556	0.0139903	-9.33195	0.0000
U3	-0.000106865	0.00000519491	-20.5712	0.0000
ZUa	193.465	84.0497	2.3018	0.0300

Análisis de Varianza

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	114.956	4	28.7391	31746.90	0.0000
Residual	0.0226314	25	0.000905257		
Total (Corr.)	114.979	29			

R-squared = 99.9803 percent.

R-squared (adjusted for d.f.)=99.9772 percent

Standard Error of Est. = 0.0300875

Mean absolute error = 0.0220436

Durbin-Watson statistic = 0.439985 (P=0.0000)

Lag 1 residual autocorrelation = 0.711501

The StatAdvisor

The output shows the results of fitting a multiple linear regression model to describe the relationship between Z and 4 independent variables. The equation of the fitted model is

$$Z = -130.5 + 5.12676 * LnU - 0.130556 * U - 0.000106865 * U^3 + 193.465 * ZUa$$

Since the P-value in the ANOVA table is less than 0.01, there is a statistically significant relationship between the variables at the 99 percent

confidence level.

The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 99.9803 percent of the variability in Z. The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with different numbers of independent variables, is 99.9772 percent. The standard error of the estimate shows the standard deviation of the residuals to be 0.0300875. This value can be used to construct prediction limits for new observations by selecting the Reports option from the text menu. The mean absolute error (MAE) of 0.0220436 is the average value of the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file. Since the P-value is less than 0.05, there is an indication of possible serial correlation. Plot the residuals versus row order to see if there is any pattern which can be seen.

In determining whether the model can be simplified, notice that the highest P-value on the independent variables is 0.0300, belonging to ZUa. Since the P-value is less than 0.05, that term is statistically significant at the 95 percent confidence level. Consequently, you probably don't want to remove any variables from the model.

En resumen se obtuvo las siguientes ecuaciones de estimación de dicha curva en cada coordenada:

$$X = 684.295 + 12.0782 * \text{Log}(U) + 0.000149401 * U^3 - 655.912 * U^{(0.0184342)}$$

$$Y = 7.57328 - 0.286712 * \text{Log}(U) + 0.827422 * U + 0.00519411 * U^2 - 0.000105562 * U^3 + 0.99734 * U^{(0.439448)}$$

$$Z = -130.5 + 5.12676 * \text{Log}(U) - 0.130556 * U - 0.000106865 * U^3 + 193.465 * U^{(-0.0264248)}$$

ANEXO 2

Análisis del error usando el Statgraphics

Para el análisis del error también fue usado el statgraphics para lo cual se hizo el tratamiento para 10 tramos de curva, en el ejemplo presentamos las ecuaciones resultante de 5 iteraciones (en total fueron 10 iteraciones) para solo 2 tramos de curvas, dichas iteraciones sirven para ver el cambio en los errores , a medida que las iteraciones suben el tramos a reconstruir va disminuyendo con respecto a la total, y se obtendrá un error cada vez mas pequeño :

CURVA1

iteración 1

$$\begin{aligned}
 X &= 26.8638 - 0.0467172 * U + 0.00325568 * U^2 + 5.86106 * U^0.0154676 \\
 Y &= 7.01444 - 0.261843 * LOG(U) + 0.855043 * U + 0.00391853 * U^2 - 0.0000793785 * \\
 &U^3 + 0.834446 * U^0.467292 \\
 Z &= 63.7759 - 0.282248 * LOG(U) + 0.180789 * U - \\
 &0.0100637 * U^2
 \end{aligned}$$

iteración 2

$$\begin{aligned}
 X &= 26.7983 - 0.0467339 * U + 0.00325758 * U^2 + 5.92669 * U^0.015253 \\
 Y &= 7.07416 - 0.239584 * LOG(U) + 0.867941 * U + 0.00362233 * U^2 - 0.0000755877 * \\
 &U^3 + 0.762656 * U^0.466839 \\
 Z &= 63.7753 - 0.281468 * LOG(U) + 0.180849 * U - \\
 &0.0100693 * U^2
 \end{aligned}$$

iteración 3

$$X = 26.6879 - 0.0468269 * U + 0.00325985 * U^2 + 6.03717 * U^{(0.0150184)} Y = 7.11686 - 0.223336 * LOG(U) + 0.877155 * U + 0.00341885 * U^2 - 0.0000730536 * U^3 + 0.711351 * U^{(0.466132)} Z = 63.7751 - 0.282277 * LOG(U) + 0.181135 * U - 0.0100759 * U^2$$

Iteración 4

$$X = 26.5757 - 0.0468662 * U + 0.0032604 * U^2 + 6.14936 * U^{0.0147808} Y = 7.14302 - 0.213176 * LOG(U) + 0.882944 * U + 0.00329454 * U^2 - 0.0000715313 * U^3 + 0.6798 * U^{0.465292} Z = 48.9066 + 0.179631 * U - 0.0100563 * U^2 + 14.8701 * U^{(-0.0190587)}$$

Iteración 5

$$X = 32.7247 + 0.0910403 * LOG(U) - 0.0464527 * U + 0.00325509 * U^2 Y = 7.15874 - 0.206958 * LOG(U) + 0.886631 * U + 0.00321572 * U^2 - 0.0000705602 * U^3 + 0.660639 * U^{0.464432} Z = 48.6262 + 0.179645 * U - 0.0100559 * U^2 + 15.1505 * U^{(-0.0187093)}$$

CURVA 3

Iteración 1

$$X = 254.826 + 4.84097 * LOG(U) + 0.233267 * U - 0.0037421 * U^2 - 218.753 * U^{0.0226267} Y = 6.54958 - 0.112614 * LOG(U) + 0.895687 * U + 0.00303945 * U^2 - 0.0000574567 * U^3 + 0.405735 * U^{0.502903} Z = 63.8364 - 0.230513 * LOG(U) + 0.149218 * U - 0.00696738 * U^2 - 0.0000515441 * U^3$$

Iteración 2

$$X = 96.768 + 0.171834 * U - 0.00194553 * U^2 - 0.0000236809 * U^3 - 60.64 * U^{0.00109678} Y = 6.54708 - 0.113607 * LOG(U) + 0.895357 * U + 0.00304409 * U^2 - 0.0000515441 * U^3$$

$$U^2 - 0.0000574775 * U^3 + 0.408529 * U^0.50248 \quad Z = 63.8429 - 0.217582 * LOG(U) + 0.142212 * U - 0.00663017 * U^2 - 0.0000568827 * U^3$$

Iteración 3

$$X = 38.7844 + 0.169141 * U - 0.00181896 * U^2 - 0.000025475 * U^3 - 2.65406 * U^0.0226941 \quad Y = 6.54121 - 0.11595 * LOG(U) + 0.894354 * U + 0.00306206 * U^2 - 0.0000576481 * U^3 + 0.415337 * U^0.501818 \quad Z = 63.8517 - 0.197619 * LOG(U) + 0.132156 * U - 0.00619405 * U^2 - 0.0000630206 * U^3$$

Iteración 4

$$X = 36.1341 - 0.0521209 * LOG(U) + 0.164733 * U - 0.00164857 * U^2 - 0.0000276765 * U^3 \quad Y = 6.5328 - 0.119267 * LOG(U) + 0.892782 * U + 0.00309319 * U^2 - 0.0000579928 * U^3 + 0.425214 * U^0.501032 \quad Z = 54.0278 + 0.119491 * U - 0.00569684 * U^2 - 0.0000694559 * U^3 + 9.83479 * U^(-0.0176571)$$

Iteración 5

$$X = -173.573 - 4.77395 * LOG(U) + 0.107005 * U - 0.00004904 * U^3 + 209.758 * U^0.0226934 \quad Y = 6.52378 - 0.122785 * LOG(U) + 0.891044 * U + 0.00312945 * U^2 - 0.0000584193 * U^3 + 0.435869 * U^0.5000227 \quad Z = 63.7943 + 0.0693534 * U - 0.00377706 * U^2 - 0.0000964927 * U^3 + 0.0979979 * U^(-1.55809)$$

ANEXO 3

**Puntos Discretizados de la Cerámica en
Formato IGES**

A continuación se muestra el conjunto de puntos discretizados en formato IGES:

File created by METROLOG XG	S	1	
Copyright (c) 2000 METROLOGIC GROUP	S	2	
,,,18HJesus Espinola.igs	G	1	
,,33HMETROLOGIC GROUP/METROLOG XG/V.II,4HV.II,			G
2			
32,38,6,308,15,,,1.0,2,2HMM,1,1.0,13H040609.090618,0.0001,10000.0,,			G
3			
16HMETROLOGIC GROUP,6,0;	G	4	
116	1	0	D 1
116	1	PNT1	D 2
116	2	0	D 3
116	1	PNT2	D 4
116	3	0	D 5
116	1	PNT3	D 6
116	4	0	D 7
116	1	PNT4	D 8
116	5	0	D 9

116	1	PNT5	D	10
116	6	0	D	11
116	1	PNT6	D	12
116	7	0	D	13
116	1	PNT7	D	14
116	8	0	D	15
116	1	PNT8	D	16
116	9	0	D	17
116	1	PNT9	D	18
116	10	0	D	19
116	1	PNT10	D	20
116	11	0	D	21
116	1	PNT11	D	22
116	12	0	D	23
116	1	PNT12	D	24
116	13	0	D	25
116	1	PNT13	D	26
116	14	0	D	27
116	1	PNT14	D	28
116	15	0	D	29
116	1	PNT15	D	30
116	16	0	D	31
116	1	PNT16	D	32
116	17	0	D	33

116	1	PNT17	D	34
116	18	0	D	35
116	1	PNT18	D	36
116	19	0	D	37
116	1	PNT19	D	38
116	20	0	D	39
116	1	PNT20	D	40
116	21	0	D	41
116	1	PNT21	D	42
116	22	0	D	43
116	1	PNT22	D	44
116	23	0	D	45
116	1	PNT23	D	46
116	24	0	D	47
116	1	PNT24	D	48
116	25	0	D	49
116	1	PNT25	D	50

116,50.51,-38.30,-12.60,0,0,0;	3059P	1530
116,50.51,-38.78,-9.35,0,0,0;	3061P	1531
116,51.53,-38.92,-6.24,0,0,0;	3063P	1532
116,54.78,-37.12,-6.24,0,0,0;	3065P	1533
116,54.69,-36.02,-12.18,0,0,0;	3067P	1534
116,61.63,-30.41,-12.19,0,0,0;	3069P	1535

116,61.72,-32.88,-7.96,0,0,0;	3071P	1536
116,60.56,-32.88,-8.55,0,0,0;	3073P	1537
116,61.44,-32.88,-4.29,0,0,0;	3075P	1538
116,61.54,-32.89,-1.62,0,0,0;	3077P	1539
116,61.05,-32.88,1.15,0,0,0;	3079P	1540
116,50.82,-38.50,6.28,0,0,0;	3081P	1541
116,50.91,-40.47,0.34,0,0,0;	3083P	1542
116,50.91,-39.17,-6.41,0,0,0;	3085P	1543
116,50.91,-38.06,-12.95,0,0,0;	3087P	1544
116,50.90,-35.17,-18.45,0,0,0;	3089P	1545
116,50.90,-30.35,-22.14,0,0,0;	3091P	1546
116,57.14,-27.64,-22.15,0,0,0;	3093P	1547
116,62.67,-31.65,-0.99,0,0,0;	3095P	1548
116,57.01,-36.11,-0.96,0,0,0;	3097P	1549
116,51.39,-40.04,-0.96,0,0,0;	3099P	1550
116,51.44,-40.00,-0.09,0,0,0;	3101P	1551
116,51.44,-39.51,2.74,0,0,0;	3103P	1552
116,51.43,-38.56,5.24,0,0,0;	3105P	1553
116,51.43,-37.30,7.87,0,0,0;	3107P	1554
116,51.43,-36.11,9.93,0,0,0;	3109P	1555
116,51.43,-35.39,12.84,0,0,0;	3111P	1556
116,51.43,-34.03,16.15,0,0,0;	3113P	1557
116,49.97,-38.76,-10.71,0,0,0;	3115P	1558
116,49.97,-38.29,-13.99,0,0,0;	3117P	1559

116,46.93,-39.28,-14.01,0,0,0;	3119P	1560
116,46.91,-39.29,-14.01,0,0,0;	3121P	1561
116,46.91,-39.58,-11.33,0,0,0;	3123P	1562
116,46.92,-39.82,-9.41,0,0,0;	3125P	1563
116,46.92,-37.62,-17.80,0,0,0;	3127P	1564
116,46.92,-37.45,-18.03,0,0,0;	3129P	1565
116,46.92,-37.25,-18.26,0,0,0;	3131P	1566
116,46.92,-32.97,-21.66,0,0,0;	3133P	1567
116,51.29,-30.73,-21.67,0,0,0;	3135P	1568
116,56.95,-27.88,-21.66,0,0,0;	3137P	1569
116,61.69,-24.78,-21.66,0,0,0;	3139P	1570
116,60.19,-27.20,-18.27,0,0,0;	3141P	1571
116,47.09,-41.30,6.19,0,0,0;	3143P	1572
116,47.09,-39.31,8.75,0,0,0;	3145P	1573
116,55.53,-35.98,4.72,0,0,0;	3147P	1574
116,55.48,-36.54,2.94,0,0,0;	3149P	1575
116,56.95,-36.06,0.05,0,0,0;	3151P	1576
116,58.84,-34.85,-2.73,0,0,0;	3153P	1577
116,60.23,-33.56,-5.11,0,0,0;	3155P	1578
116,60.37,-32.85,-8.22,0,0,0;	3157P	1579
116,60.37,-32.18,-10.56,0,0,0;	3159P	1580
116,60.37,-31.03,-13.24,0,0,0;	3161P	1581
116,60.37,-28.77,-16.55,0,0,0;	3163P	1582
116,60.37,-27.96,-17.42,0,0,0;	3165P	1583

116,42.47,64.34,57.08,0,0,0;	3167P	1584
116,38.57,64.07,57.08,0,0,0;	3169P	1585
116,36.02,63.89,57.08,0,0,0;	3171P	1586
116,34.49,63.61,57.07,0,0,0;	3173P	1587
116,34.49,60.92,58.74,0,0,0;	3175P	1588
116,38.15,60.92,59.48,0,0,0;	3177P	1589
116,40.45,60.92,59.71,0,0,0;	3179P	1590
116,43.68,60.92,59.45,0,0,0;	3181P	1591
116,43.59,62.81,58.60,0,0,0;	3183P	1592
116,40.65,62.59,58.67,0,0,0;	3185P	1593
116,38.66,62.48,58.68,0,0,0;	3187P	1594
116,36.80,62.29,58.68,0,0,0;	3189P	1595
116,35.40,62.09,58.68,0,0,0;	3191P	1596
116,33.45,61.46,58.68,0,0,0;	3193P	1597
116,38.57,62.77,58.22,0,0,0;	3195P	1598
116,39.85,62.77,58.27,0,0,0;	3197P	1599
116,42.87,62.77,58.45,0,0,0;	3199P	1600
116,44.85,62.77,58.21,0,0,0;	3201P	1601
S 2G 4D 3202P	1601	T 1

I hereby declare that I am the only author of this thesis and that no sources other than those listed have been used in this work.

Ancash, 5 de Diciembre del 2005

Vladimir Giovanni Rodríguez Sabino