

**UNIVERSIDAD NACIONAL
“SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO”**

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



TESIS:

**PROPUESTA DEL TEOREMA DE LA RELACIÓN DE
FUERZA INTERNA VIRTUAL Y LA FUERZA INTERNA
REAL DERIVADO PARCIALMENTE RESPECTO A UNA
CARGA VIRTUAL EXTERNA EN EL ANÁLISIS
ESTRUCTURAL**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL**

PRESENTADO POR EL BACHILLER:

RIMAC MENDEZ WILDER

ASESOR:

Dr. Ing. BLAS CANO JAIME WALTER

HUARAZ – ANCASH – PERÚ

2023



Anexo de la R.C.U N° 126 -2022 -UNASAM
ANEXO 1
INFORME DE SIMILITUD.

El que suscribe (asesor) del trabajo de investigación titulado:

Presentado por:

con DNI N°:

para optar el Título Profesional de:

Informo que el documento del trabajo anteriormente indicado ha sido sometido a revisión, mediante la plataforma de evaluación de similitud, conforme al Artículo 11 ° del presente reglamento y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de : de similitud.

Evaluación y acciones del reporte de similitud de los trabajos de los estudiantes/ tesis de pre grado (Art. 11, inc. 1).

Porcentaje		Evaluación y acciones	Marque con una x
Trabajos de estudiantes	Tesis de pregrado		
Del 1 al 30%	Del 1 al 25%	Esta dentro del rango aceptable de similitud y podrá pasar al siguiente paso según sea el caso.	
Del 31 al 50%	Del 26 al 50%	Se debe devolver al estudiante o egresado para las correcciones con las sugerencias que amerita y que se presente nuevamente el trabajo.	
Mayores a 51%	Mayores a 51%	El docente o asesor que es el responsable de la revisión del documento emite un informe y el autor recibe una observación en un primer momento y si persistiese el trabajo es invalidado.	

Por tanto, en mi condición de Asesor/ Jefe de Grados y Títulos de la EPG UNASAM/ Director o Editor responsable, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera hoja del reporte del software anti-plagio.

Huaraz,

Jaime Walter Blas Cano
Firmado digitalmente por
Jaime Walter Blas Cano
Fecha: 2023.03.08
20:01:05 -05'00'

FIRMA

Apellidos y Nombres: _____

DNI N°: _____

Se adjunta:

1. Reporte completo Generado por la plataforma de evaluación de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

TESIS_RimacMendezWilder.pdf

RECUENTO DE PALABRAS

19073 Words

RECUENTO DE PÁGINAS

100 Pages

FECHA DE ENTREGA

Jan 27, 2023 4:22 PM GMT-5

RECUENTO DE CARACTERES

98466 Characters

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.5MB

FECHA DEL INFORME

Jan 27, 2023 4:23 PM GMT-5**● 13% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos

- 11% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados
- 2% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Bloques de texto excluidos manualmente

DEDICATORIA

A mis padres, a toda mi familia, que siempre han estado ahí para ayudarme a culminar esta gran meta. Agradecidos de corazón por estar ahí y ser fuente de inspiración que me impulsa día a día a ser una gran persona con los buenos principios y valores aprendidos. A los docentes de la facultad de ingeniería Civil por guiar e inspirar la calidad de personas y profesionales que son, ya que sin ellos este logro jamás hubiera sido completado.



AGRADECIMIENTO

A dios por concederme la vida y profesar el bien común, a mi Padre por ser el báculo de la familia, a mi madre por su amor y cariño, los buenos principios y valores enseñados. A mi familia en general por su apoyo incondicional y ser el motivo para luchar por mis metas y sueños. Al asesor Dr. Ing. Blas Cano Jaime Walter por su dedicación, paciencia, por sus orientaciones técnicas en estructuras y ser un ejemplo como profesional y persona. A todos mis amigos que fueron parte del camino para ser un profesional el mutuo aliento para logran nuestros objetivos.

A la universidad Santiago Antúnez de Mayolo en especial a la facultad de ingeniería civil por la formación en las distintas materias que conforma la carrera, Mi alma mater donde vaya siempre llevare el orgullo de decir que me forme en tus dichosas aulas. A los docentes que me acogieron y apoyaron en el desarrollo de prácticas y haberme enseñado lo pragmático de la carrera.

A todos ellos, muchas gracias.



ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTO	iii
RESUMEN	viii
ABSTRACT	ix
INTRODUCCIÓN.....	x
I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN	1
1.1. Planteamiento del problema y situación problemática.....	1
1.1.1. Problema general.....	3
1.1.2. Problemas específicos.....	3
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general.....	3
1.2.2. Objetivos específicos.....	4
1.3. Justificación.....	4
1.4. Delimitación	5
II. MARCO TEÓRICO	6
2.1. Antecedentes de Investigación.....	6
2.2. Bases teóricas.....	21
2.2.1. Energía de deformación interna	21
2.2.1.1. Energía de deformación interna originado por esfuerzo normal	21
2.2.1.2. Energía de deformación interna originado por esfuerzo cortante ...	22
2.2.2. Energía de deformación interna de un elemento reticular	24
2.2.2.1. Energía de deformación interna originado por la fuerza axial	24
2.2.2.2. Energía de deformación interna originado por la fuerza cortante ...	25
2.2.2.3. Energía de deformación interna originado por el momento flector	26
2.2.2.4. Energía de deformación interna originado por el momento torsor .	26
2.2.2.5. Energía de deformación interna total en un elemento reticular en el plano	27
2.2.3. Desplazamiento de un punto en una estructura teorema de Castigliano	28
2.2.4. Trabajo virtual	29
2.3. Definición de términos.....	31
2.4. Hipótesis.....	32
2.4.1. Hipótesis general.....	32
2.4.2. Hipótesis específicas	32

2.5.	Variables.....	32
2.5.1.	Variable independiente.....	32
2.5.2.	Variable dependiente.....	32
2.6.	Operacionalización de variables	33
III.	METODOLOGIA	34
3.1.	Tipo de Investigación	34
3.2.	Diseño de investigación	34
3.3.	Población y muestra.....	34
3.3.1.	Población.....	34
3.3.2.	Muestra	35
3.4.	Técnicas e Instrumento(s) de recolección de datos	35
3.5.	Plan de procesamiento y análisis estadístico de datos.....	35
3.5.1.	Plan de procesamiento	35
IV.	ESTUDIO DE LA RELACIÓN DE FUERZA INTERNA VIRTUAL Y LA FUERZA INTERNA REAL	38
4.1.	Relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trabo virtual.....	38
4.2.	Relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real.....	41
V.	APLICACIONES DE LA RELACIÓN DE FUERZA INTERNA VIRTUAL Y LA FUERZA INTERNA REAL.....	48
5.1.	Desplazamiento de una estructura bajo la energía de deformación interna originado por cargas externas	48
5.1.1.	Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza axial	48
5.1.2.	Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza cortante.....	49
5.1.3.	Desplazamiento de una estructura originado por el momento flector....	49
5.1.4.	Desplazamiento de una estructura originado por el momento torsor.....	50
5.1.5.	Desplazamiento total de un punto de una estructura.....	51
5.2.	Planteamiento del método de flexibilidad.....	52
VI.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	58
6.1.	Comparación de las demostraciones	58
6.2.	Contrastación de hipótesis	63
VII.	CONCLUSIONES.....	64
VIII.	RECOMENDACIONES.....	65
IX.	REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA.....	66
X.	ANEXOS	68
10.1.	Cronograma	68

10.2. Presupuesto	69
10.3. Matriz de consistencia	70
10.4. Ejemplos de aplicación.....	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Elemento Diferencial Bajo Esfuerzos Normales	21
Figura 2 Elemento Diferencial Bajo Esfuerzos Tangenciales.....	23
Figura 3 Barra Sometido a Fuerza Normal	24
Figura 4 Barra Sometido a Fuerza Tangencial	25
Figura 5 Barra Sometido a Momento Flector.....	26
Figura 6 Barra Sometido a Momento Torsor	27
Figura 7 Cuerpo Elástico(a) Sometido a Carga Virtual, El Mismo Cuerpo (b) Sometido a Cargas Reales	30
Figura 8 Esquema para el Proceso de la Demostración del Teorema.....	37
Figura 9 Elemento diferencial de una barra estructural	41
Figura 10 Estructura real equivalente a una estructura equivalente.....	53
Figura 11 La estructura equivalente será igual a la estructura afectado por la carga externa y por las redundantes	54
Figura 12 Principio de linealidad	54
Figura 13 Sistema de cargas.....	55

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Operacionalización de las Variables De Investigación.....	33
Tabla 2 Cronograma de Actividades.....	68
Tabla 3 Presupuesto de la Investigación	69
Tabla 4 Matriz de Consistencia	70

LISTA DE FORMULAS

Fórmula 1 Proporción directa de las fuerzas internas originado por una carga virtual unitaria.....	7
Fórmula 2 Trabajo de deformación total de una barra	7
Fórmula 3 Desplazamiento originado por las fuerzas reales y virtual	7
Fórmula 4 Desplazamiento en el punto(i) de aplicación de la carga virtual.....	8
Fórmula 5 Principio de la conservación de la energía, trabajo externo igual al trabajo interno.....	9



Fórmula 6 Energía de deformación interna bajo el efecto del esfuerzo normal.....	22
Fórmula 7 Energía de deformación interna bajo el efecto del esfuerzo tangencial.....	23
Fórmula 8 Energía de deformación interna bajo el efecto de la fuerza axial.....	25
Fórmula 9 Energía de deformación interna bajo el efecto de la fuerza cortante	25
Fórmula 10 Energía de deformación interna bajo el efecto del momento flector.....	26
Fórmula 11 Energía de deformación interna bajo el efecto del momento torsor	27
Fórmula 12 Energía de deformación interna total de un elemento reticular	28
Fórmula 13 Desplazamiento de un punto con el teorema de Castigliano.....	29
Fórmula 14 Desplazamiento de un punto según el Trabajo Virtual	30
Fórmula 15 Desplazamiento debido a la derivada parcial de la energía de deformación interna respecto de una carga virtual externa	39
Fórmula 16 Desplazamiento bajo el principio del trabajo virtual.....	39
Fórmula 17 Relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trabajo virtual.....	40
Fórmula 18 Relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trabajo virtual cuando la carga virtual externa es unitario	40
Fórmula 19 Fuerza interna general.....	42
Fórmula 20 Características de sesión	43
Fórmula 21 Energía de deformación interna en base a los conceptos definidos.....	44
Fórmula 22 Energía de deformación en base a los conceptos definidos	45
Fórmula 23 Desplazamiento en dirección de la carga δQ_i	45
Fórmula 24 Desplazamiento en base a los conceptos definidos	46
Fórmula 25 Relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real.....	47
Fórmula 26 Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza axial.....	48
Fórmula 27 Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza cortante	49
Fórmula 28 Desplazamiento de una estructura originado por el momento flector	50
Fórmula 29 Desplazamiento de una estructura originado por el momento torsor	51
Fórmula 30 Desplazamiento total de un punto de una estructura	52
Fórmula 31 Definición del método de flexibilidad por proporcionalidad directa	55
Fórmula 32 Desplazamiento por condiciones de contorno.....	56
Fórmula 33 Ecuación de compatibilidad de deformación	56
Fórmula 34 Ecuación de compatibilidad de deformación mediante conceptos matriciales	57

RESUMEN

El proyecto de investigación tuvo como objetivo crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, para determinar desplazamientos de un punto de una estructura linealmente elástica. Se trata de un estudio de tipo investigación básica o pura donde presenta una metodología no experimental, donde la información que se va obtener será información sin manipular las variables. la investigación no cuenta con una población, ya que estamos haciendo un estudio teórico de un tema en singular que es la demostración de un teorema. El instrumento empleado fue la observación científica y cálculo matemático, mediante la percepción intencionada analizamos y demostramos el teorema. Los resultados fueron comparados con los antecedentes de la investigación, encontrando distintos procedimientos que conducen a resultados iguales en el cálculo del desplazamiento de un punto de una estructura elástica.

Palabras claves: Fuerza interna virtual, fuerza interna real y teorema.



ABSTRACT

The objective of the research project was to create the theorem of the relation between the virtual internal force and the real internal force partially derived with respect to an external virtual load in the structural analysis, to determine displacements of a point of a linearly elastic structure. This is a study of basic or pure research type where it presents a non-experimental methodology, where the information to be obtained will be information without manipulating the variables. The research does not have a population, since we are making a theoretical study of a singular subject which is the demonstration of a theorem. The instrument used was scientific observation and mathematical calculation, by means of intentional perception we analyzed and demonstrated the theorem. The results were compared with the background of the research, finding different procedures that lead to equal results in the calculation of the displacement of a point of an elastic structure.

Keywords: Virtual internal force, real internal force and theorem.



INTRODUCCIÓN

Las estructuras presentan un amplio escenario para realizar investigaciones, en particular buscar relación física y/o matemática que existen cuando en ella se realiza un trabajo o disipación de energía cuando están sujetos a cargas. Rodolfo Luthe Garcia, en su libro Análisis Estructural, determina el desplazamiento de un punto mediante la aplicación del teorema de Castiglione y una proporción debido a una carga unitaria virtual. En el libro redactado por Nelson González Villanueva, Análisis Estructural Apuntes y Problema, determina el desplazamiento de un punto mediante la aplicación de la conservación de la energía y el trabajo virtual. En el libro redactado por Russell C. Hibbeler, Análisis Estructural, determina el desplazamiento de un punto mediante la aplicación de la conservación de la energía. Todos estos procedimientos son diferentes, pero conducen a un mismo resultado de la determinación del desplazamiento.

En base al contexto definido nos cuestionamos si existe un teorema que englobe estos conceptos definidos por los distintos autores para determinar el desplazamiento de un punto de una estructura. Este teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real más el teorema de Castigliano, calculan el desplazamiento mediante un procedimiento alternativo a los antecedentes citados.

La hipótesis general indica, el teorema planteado crea la relación entre la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural. De esta manera planteamos nuestro objetivo crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis

estructural, con aplicación en el cálculo de desplazamientos y aplicación en el método de flexibilidad.

El desarrollo de esta investigación se estructura en diez (10) capítulos

Capítulo I, contiene planteamiento de la investigación, formulación de problemas, objetivos, justificación y delimitación.

Capítulo II, contiene los antecedentes, bases teóricas, energía de deformación interna por esfuerzo normal, esfuerzo cortante, y fuerzas internas. Desplazamiento de un punto por el teorema de Castigliano y el trabajo virtual. Definición de términos, hipótesis, variables y operacionalización de variables.

Capítulo III, contiene metodología, tipo y diseño de investigación, población, muestra, instrumento de recolección de datos y plan de procesamiento.

Capítulo IV, contiene el estudio de la relación de fuerza interna virtual y fuerza interna real.

Capítulo V, contiene aplicaciones de la relación de fuerza interna virtual y fuerza interna real, cálculo de desplazamiento y formulación del método de flexibilidad.

Capítulo VI, contiene resultados y discusiones, comparaciones de las demostraciones y contrastación de hipótesis.

Capítulo VII, contiene conclusiones.

Capítulo VIII, contiene recomendaciones.

Capítulo IX, contiene las referencias bibliográficas

Capítulo X, contiene el anexo: Cronograma, presupuesto, la matriz de consistencia y los ejemplos de aplicación.

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema y situación problemática

Para establecer el comportamiento estructural existen muchos métodos en el análisis de estructuras, aplicándose desde métodos aproximados como el método de Cross; métodos de cálculos manuales, es decir métodos que pueden ser usados sin la necesidad de un dispositivo electrónico, método de flexibilidad, método de rigidez y otros; Existen métodos aplicados a un lenguaje de programación para determinar el comportamiento estructural, método matricial de rigidez, el método de los elementos finitos.

Entre la gran cantidad de métodos existe un método en específico que utiliza la derivada de la energía de deformación interna respecto de una carga puntual impuesta para calcular el desplazamiento, de esta manera buscar ecuaciones de compatibilidad que permitan calcular las reacciones desconocidas, los desplazamientos, giros y deformaciones. Es necesario tener presente que la derivada se considera como una operación de cálculo importante para determinar respuestas estructurales en estructuras interpretadas en un plano y en tres dimensiones.

En particular, las estructuras representan un escenario ideal para explorar la relación entre los efectos físicos que se presentan en ella cuando están sujetos a cargas, estos estudios se pueden realizar desde tres enfoques. Uno de ellos es el campo experimental, el otro mediante la perspectiva de la concepción teórico y el mixto experimental y teórico. Este caso de estudio va enfocado en el campo teórico, que nos permitirá entender con más detalle el análisis estructural, encontrado una

relación matemática de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

Previamente se encontrará una relación matemática entre los lemas que son el teorema de Castigliano y la ecuación del trabajo virtual. Para poder hacer una deducción general las fuerzas internas y los esfuerzos se expresan en forma general con la introducción de algunas variables genéricas. Teniendo las consideraciones iniciales se procede a formular la energía de deformación interna en términos generales, es decir la ecuación puede ser aplicado para fuerza axial, fuerza cortante, momento flector y momento torsor. Al igual al procedimiento anterior mediante la ecuación del trabajo virtual calculamos el desplazamiento en términos de fuerzas internas y esfuerzos generalizados. Aplicando la relación matemática entre los lemas definidos podemos encontrar un nuevo teorema que relaciona la fuerzas internas virtuales y fuerzas internas reales derivado parcialmente respecto de una carga virtual externa.

Las expectativas de este nuevo teorema son: nos permite calcular desplazamientos de una estructura de forma general, es decir la ecuación permite aplicar caso particular o todos los casos cuando los efectos sean por fuerza axial, fuerza cortante, momento flector y momento torsor. También nos permite plantear el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.

1.1.1. Problema general

¿Existe algún teorema que relacione la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?

1.1.2. Problemas específicos

- ¿Cómo influyen los lemas para crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?
- ¿Cómo se determina el desplazamiento de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?
- ¿Cómo se plantea el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?

1.2.Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

1.2.2. Objetivos específicos

- Determinar los lemas para crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.
- Determinar el desplazamiento de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.
- Plantear el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

1.3. Justificación

La importancia de este proyecto de investigación es contribuir con un nuevo teorema. Para calcular desplazamientos y plantear el método de flexibilidad mediante conocimientos alternativos a los ya existentes, presentando procedimientos propios y fuentes fidedignas como base teórica para establecer un análisis estructural en el cálculo de desplazamientos.

La información nueva que aporta la investigación es de un nuevo teorema que relaciona la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa. Resuelve la problemática que se presenta cuando se desea calcular desplazamientos mediante los efectos de fuerza axial, fuerza cortante, momento flector y momento torsor ya sea en forma individual o conjunta; los autores citados en los antecedentes de la investigación plantean para cada tipo de fuerza un procedimiento según la naturaleza de la fuerza, debido a que

cada fuerza tiene un comportamiento particular respecto a otra; en cambio el nuevo teorema al aplicarlo calcula el desplazamiento en forma general para cualquier tipo de fuerza interna ya sea en forma individual o conjunta, esta investigación simplifica la demostración del cálculo de desplazamiento para las distintas fuerzas en un solo procedimiento.

Existe un motivo que es impulsar a realizar estudios teóricos ya que la gran mayoría de las investigaciones realizadas por los tesisistas son aplicaciones específicas de estudios, laboratorios en las distintas ramas de la ingeniería civil, con ello se busca la exploración de nuevos conocimientos o conocimientos complementarios a los ya existentes con el fin de fortalecer la investigación teórica.

1.4.Delimitación

Respecto a la delimitación del espacio, la investigación es realizada en la universidad Santiago Antúnez de Mayolo, Huaraz, Ancash ubicado en Perú. En cuanto a la delimitación temporal se desarrolla y presenta en el año 2022. Respecto a la delimitación teórica, el factor limitante es el rango de análisis estructural, ya que estos estudios son complejos cuando es un análisis no lineal e inelástico; a razón de esta observación es necesario establecer las restricciones del teorema que son deducidas a partir de ecuaciones que gobiernan el análisis estructural en el rango lineal elástico. Los alcances que aborda la presente investigación son, una relación matemática en el campo de la ingeniería estructural que ayudara a calcular desplazamientos de manera significativa y demostrar de manera alternativa de otros autores el método de flexibilidad para el análisis estructural.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de Investigación

Debido al tipo de investigación básica o pura los antecedentes relacionados con este tipo de investigación son nulas, en el estudio de tesis relacionados al cálculo de desplazamiento y el análisis estructural con el método de flexibilidad; pero en cuanto a redacción de libros podemos encontrar una gran cantidad de autores que precisan el estudio del desplazamiento y el análisis estructural mediante el método de flexibilidad, el cual es el punto de estudio (Borjas, 2016).

En el libro redactado por Rodolfo Luthe Garcia, Análisis Estructural, se centra en la aplicación de distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. En el método de la carga unitaria donde se identificó una proporción directa y su aplicación para poder resolver desplazamientos de un punto de la estructura, esta proporción sirve de base para plantear el método de flexibilidad. El argumento tomado por el autor para plantear dicha proporcionalidad se detalla a continuación (Luthe, 1997).

En una barra sujeto a distintas fuerzas, se coloca una carga virtual (p_v) para poder determinar el desplazamiento con el teorema de Castigliano. La carga virtual origina fuerzas internas virtuales: fuerza axial N_v ; fuerza cortante $T_{x,v}$ y $T_{y,v}$; Momentos $M_{x,v}$, $M_{y,v}$ y $M_{z,v}$. Con la condición de no exceder el límite elástico. El autor plantea la siguiente proporción directa. Las variables en la barra de análisis son: n , t_x , t_y , m_x , m_y y m_z ; cuyos valores son obtenidos al considerar $p_v=1$ (Luthe, 1997).

Donde:

$$\begin{aligned} N_v &= n * p_v & M_{x,v} &= m_x * p_v \\ T_{x,v} &= t_x * p_v & M_{y,v} &= m_y * p_v \\ T_{y,v} &= t_y * p_v & M_{z,v} &= m_z * p_v \end{aligned}$$

Fórmula 1

Proporción directa de las fuerzas internas originado por una carga virtual unitaria

El trabajo de deformación total de la barra de longitud (L), obtenida para las seis fuerzas internas es:

$$\begin{aligned} W_T &= \int_0^L \frac{(N + np_v)^2}{2EA} ds + \int_0^L k \frac{(T_x + t_x p_v)^2}{2GA} ds + \int_0^L k' \frac{(T_y + t_y p_v)^2}{2GA} ds \\ &+ \int_0^L \frac{(M_x + m_x p_v)^2}{2EI_x} ds + \int_0^L \frac{(M_y + m_y p_v)^2}{2EI_y} ds + \int_0^L \frac{(M_z + m_z p_v)^2}{2GJ_m} ds \end{aligned}$$

Fórmula 2

Trabajo de deformación total de una barra

El desplazamiento originado por la fuerzas reales y carga virtual es:

$$\begin{aligned} \delta_T &= \frac{\partial W_T}{\partial p_v} = \int_0^L \frac{(N + np_v)n}{EA} ds + \int_0^L k \frac{(T_x + t_x p_v)t_x}{GA} ds \\ &+ \int_0^L k' \frac{(T_y + t_y p_v)t_y}{GA} ds + \int_0^L \frac{(M_x + m_x p_v)m_x}{EI_x} ds \\ &+ \int_0^L \frac{(M_y + m_y p_v)m_y}{EI_y} ds + \int_0^L \frac{(M_z + m_z p_v)m_z}{GJ_m} ds \end{aligned}$$

Fórmula 3

Desplazamiento originado por las fuerzas reales y virtual

Para calcular el desplazamiento en el punto(i) de aplicación de la carga virtual, se considera $p_v=0$. Este resultado es obtenido bajo la premisa de la proporción directa que argumenta el autor, determina el desplazamiento de un punto y es la base para el fundamento del método de flexibilidad (Luthe, 1997).

$$\delta_T = \int_0^L \frac{Nn}{EA} ds + \int_0^L k \frac{T_x t_x}{GA} ds + \int_0^L k' \frac{T_y t_y}{GA} ds + \int_0^L \frac{M_x m_x}{EI_x} ds + \int_0^L \frac{M_y m_y}{EI_y} ds + \int_0^L \frac{M_z m_z}{GJ_m} ds$$

Fórmula 4

Desplazamiento en el punto(i) de aplicación de la carga virtual

En el libro redactado por Nelson González Villanueva, **Análisis Estructural Apuntes y Problemas**, desarrolla distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. En el método del trabajo virtual, hace uso del principio de la conservación de la energía, el trabajo realizado por cargas externas es igual al trabajo originado por las fuerzas internas. Teniendo como base esta relación matemática se podrá calcular desplazamientos y formular el método de flexibilidad. La ecuación expresa la igualdad del trabajo externo originado por la carga virtual $P=1$ que actúa en el punto donde se desea calcular el desplazamiento (Δ) externo originado por cargas reales, todo esto es igual al trabajo interno, Carga virtual interna (u) multiplicado por las deformaciones internas (dL) originadas por fuerzas reales; en síntesis, cargas virtuales y desplazamientos reales (González, 2007):

Donde:

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre la viga o marco, en la dirección Δ estipulada.

m = momento virtual interno en la viga o marco, en función de x , y que se origina por la carga virtual unitaria externa.

Δ = desplazamiento externo del punto, causado por las cargas reales sobre la viga o marco.

M = momento interno en la viga o marco, en función de x , causado por las cargas reales.

E = módulo de elasticidad del material.

I = momento estático de segundo orden de la sección transversal, respecto del eje neutro, momento de inercia).

$$P * \Delta = \sum u * dL$$

Fórmula 5

Principio de la conservación de la energía, trabajo externo igual al trabajo interno

Desplazamiento originado por el momento flector (M).

$$1 * \Delta = m * \theta$$

Un diferencial de flexión $d\theta$, luego se integra.

$$d\theta = \frac{M}{E * I} dx$$

$$1 * \Delta = \int \frac{m * M}{E * I} dx$$

Siguiendo el mismo mecanismo de análisis se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$1 * \Delta = \int \frac{k_1 * v * V}{G * A} dx$$

$$1 * \Delta = \int \frac{t * T}{G * J} dx$$

En el libro redactado por Russell C. Hibbeler, *Análisis Estructural*, desarrolla distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por el autor es similar el que argumenta el autor Nelson González Villanueva, en el cálculo de desplazamiento por el método del trabajo virtual, en otras palabras, el proceso para determinar el desplazamiento es similar ambos autores toman el mismo argumento del principio de la conservación de la energía, en la siguiente ecuación se indica el proceso para el caso de una armadura (Hibbeler, 2012).

Donde:

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre la junta de la armadura en la dirección indicada Δ .

n = fuerza normal virtual interna en un elemento de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa.

Δ = desplazamiento externo de la junta causado por las cargas reales sobre la armadura.

N = Fuerza normal interna en un elemento de la armadura causada por las cargas reales.

L = Longitud de un elemento.

A = área transversal de un elemento.

E = módulo de elasticidad de un elemento.

$$1 * \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

Las ecuaciones deducidas mediante la conservación de la energía son:

$$1 * \Delta = \int \frac{m * M}{E * I} dx \qquad 1 * \theta = \int \frac{m_{\theta} * M}{E * I} dx$$

En el libro redactado por Aslam Kassimali, *Structural Analysis*, desarrolla distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por el autor, en la determinación de desplazamientos mediante la ecuación del trabajo virtual, presente mucha similitud al trabajo realizado por Nelson González Villanueva, la cual se detalla a continuación. Utiliza la conservación de la energía donde el trabajo externo virtual y trabajo interno virtual son iguales (Kassimali, 2020).

Un diferencial de trabajo virtual.

$$dW_{vi} = M_v d\theta$$

Un diferencial de flexión $d\theta$.

$$d\theta = \frac{M}{E * I} dx$$

Reemplazando $d\theta$ en $dW(vi)$, luego se integra.

$$dW_{vi} = M_v * \frac{M}{E * I} dx$$

$$W_{vi} = \int M_v * \frac{M}{E * I} dx$$

Igualando el trabajo externo virtual al trabajo interno virtual.

$$1 * \Delta = \int M_v * \frac{M}{E * I} dx$$

Para el caso de un giro se puede entender que el resultado será.

$$1 * \theta = \int M_v * \frac{M}{E * I} dx$$

Donde el M es momento interno real y M_v es momento virtual.

En el libro redactado por Felix F. Udoeyo, *Structural Analysis*, desarrolla distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por el autor, en la determinación de desplazamientos mediante el método del trabajo y energía. Utiliza la conservación de la energía donde el trabajo externo virtual y trabajo interno virtual son iguales, a continuación, se detalla el procedimiento (Udoeyo, 2020).

Trabajo externo realizado es igual al trabajo interno realizado. 1 carga virtual externa, f carga interna virtual, Δ desplazamiento real, ds deformación interna real,

$$1 * \Delta = f * ds$$

Esfuerzo virtual originado por un momento virtual y calculamos la fuerza.

$$\sigma' = \frac{m * y}{I}$$

$$f = \sigma' * dA = \frac{m * y}{I} * dA$$

Calculamos el esfuerzo por carga externa real debido a un momento real, luego calculamos desplazamientos.

$$\sigma = \frac{M * y}{I}$$

$$\delta = \varepsilon * dx = \frac{\sigma}{E} * dx$$

El trabajo realizado por la fuerza f que actúa sobre el área diferencial debido a la deformación de la longitud diferencial de la viga dx es la siguiente:

$$dW = f * \delta = \frac{m * y}{I} * dA * \frac{M * y}{E * I} dx$$

El trabajo interno realizado por la fuerza total se puede obtener con la carga unitaria virtual aplicada cuando la longitud diferencial de la viga es dx y esta se deforma en δ .

$$dW = \frac{m * M * y^2}{E * I * I} * dA * dx$$

$$\int dW = \int \frac{m * M * y^2}{E * I * I} * dA * dx \rightarrow W = \int \frac{m * M}{EI} dx$$

$$Wi = \int \frac{m * M}{EI} dx$$

Por el principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno.

$$We = 1 * \Delta$$

$$We = Wi$$

$$1 * \Delta = \int \frac{M * m}{E * I} dx$$

$$\Delta = \int \frac{M * m}{E * I} dx$$

Donde 1 es la carga externa virtual, Δ es el desplazamiento externo debido a cargas externas reales, M momento real originado por cargas reales, m es el momento interno virtual originado por una carga virtual externa.

Similar al procedimiento anterior se deduce para el cálculo de un giro, es decir el resultado sería.

$$\theta = \int \frac{M * m_{\theta}}{E * I} dx$$

Donde, θ es el giro externo debido a cargas externas reales, m_{θ} es el momento interno virtual originado por una carga virtual externa.

En el libro redactado por Kenneth M. Leet, Chia-Ming Uang, Joel T. Lanning y Anne M. Gilbert, **Fundamentals of Structural Analysis**, desarrollan distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por los autores, en la determinación de desplazamientos mediante la ecuación del trabajo virtual en vigas y barras. A continuación, se representa el planteamiento por los autores mediante la energía de deformación (Leet et al., 2018).

Un diferencial de giro $d\theta$.

$$d\theta = \frac{M_p}{E * I} dx$$

Trabajo virtual externo W_Q .

$$W_Q = \sum Q * \delta_p$$

Se plantea la energía de deformación virtual en un elemento infinitesimal e integramos para calcular la energía total.

$$dU_Q = M_Q * d\theta \rightarrow U_Q = \int M_Q * d\theta$$

Mediante el principio de la conservación de la energía, el trabajo virtual externo es igual a la energía de deformación interna.

$$\sum Q * \delta_p = \int M_Q * d\theta$$

$$\sum Q * \delta_p = \int M_Q * \frac{M_p}{E * I} dx$$

Donde Q es la carga ficticia, δ_p desplazamiento real, M_Q momento producido por la carga ficticia, M_P Momento producido por la carga real.

En el libro redactado por Jerome J. Connor y Susan Faraji, **Fundamentals of Structural Engineering**, desarrollan distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por los dos autores, en la determinación de desplazamientos mediante desplazamientos con el método de fuerzas virtuales. A continuación, se detalla el principio (Connor & Faraji, 2016).

principio de la fuerza virtual.

$$d * \delta P = \int (\text{Deformación por flexión}) * (\delta M(x)) dx$$

Donde d es el desplazamiento deseado, δP es la fuerza virtual en dirección del desplazamiento, $\delta M(x)$ es el momento virtual debido a δP , aquí no incluye la deformación por cortante ya que es despreciable.

$$\text{Deformación por flexión} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{E * I}$$

Reemplazando en el principio de la fuerza virtual.

$$d * \delta P = \int \frac{M(x)}{EI} * \delta M(x) dx$$

La fuerza virtual correspondiente o el momento virtual en la dirección del desplazamiento o rotación deseados, determina el momento virtual $\delta M(x)$ o $\delta M\theta(x)$, se obtiene como resultado.

$$v = \int \frac{M(x)}{EI} * \delta M_v(x) dx$$

$$\theta = \int \frac{M(x)}{EI} * \delta M_\theta(x) dx$$

En el libro redactado por T. H. G. Megson, **Aircraft Structural Analysis**, desarrollan distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por el autor, en la determinación de desplazamientos mediante el trabajo virtual para el caso de las distintas fuerzas internas presentes. A continuación, se detalla el planteamiento del autor (Megson, 2010).

Fuerza normal.

$$\delta N = \sigma * \delta A = \frac{N}{A} * \delta A \quad \text{Donde: } \delta \text{ es diferencial}$$

Planteamos el trabajo virtual interno realizado por la fuerza axial.

$$\delta w_{i,N} = \int \frac{N}{A} * dA * \varepsilon_v * \delta x \rightarrow \delta w_{i,N} = N * \varepsilon_v * \delta x$$

El trabajo virtual por N es. Si cuenta con varios miembros se suma.

$$W_{i,N} = \int N * \varepsilon_v dx$$

$$W_{i,N} = \sum \int N * \varepsilon_v dx$$

Para un material linealmente elástico, en otras palabras, uno que obedece la ley de Hooke. podemos expresar la deformación virtual en términos de una fuerza normal virtual equivalente:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E} = \frac{N_v}{EA}$$

Si designamos la fuerza normal real en un miembro por N_A , la ecuación puede expresarse en la forma siguiente.

$$W_{i,N} = \sum \int \frac{N_A * N_v}{EA} dx$$

Fuerza cortante.

$$\delta S = \tau * \delta A$$

Planteamos el trabajo virtual interno realizado por la fuerza cortante.

$$\delta w_{i,S} = \int \tau * dA * \gamma_v * \delta x \rightarrow \delta w_{i,S} = \beta * S * \gamma_v * \delta x$$

El trabajo virtual por S es. Si cuenta con varios miembros se suma.

$$W_{i,S} = \int \beta * S * \gamma_v dx$$

$$W_{i,S} = \sum \int \beta * S * \gamma_v dx$$

Para un material linealmente elástico, en otras palabras, uno que obedece la ley de Hooke. podemos expresar la deformación virtual en términos de una fuerza cortante virtual equivalente:

$$\gamma_v = \frac{\tau_v}{G} = \frac{S_v}{GA}$$

Para una estructura que comprende varios miembros elásticos, el trabajo interno total realizado por la fuerza cortante SA.

$$W_{i,S} = \sum \beta \int \frac{S_A * S_v}{GA} dx$$

Momento flector.

Trabajo virtual interno realizado por el momento M.

$$\delta w_{i,M} = \int \sigma * dA * \varepsilon_v * \delta x$$

La deformación virtual ε_v , en el elemento $\delta A \times \delta x$ es, a partir de la ecuación. donde R_v es el radio de curvatura del miembro producido por el desplazamiento virtual.

$$\varepsilon_v = \frac{y}{R_v}$$

Planteamos el trabajo virtual interno realizado por el momento flector.

$$\delta w_{i,M} = \int \sigma * \frac{y}{R_v} dA * \delta x \rightarrow \delta w_{i,M} = \frac{M}{R_v} * \delta x$$

El trabajo virtual por MA es.

$$W_{i,M} = \int \frac{M_A}{R_v} dx$$

Para un material linealmente elástico, en otras palabras, la curvatura virtual, puede expresarse en términos de un momento flector virtual equivalente M_v .

$$\frac{1}{R_v} = \frac{M_v}{EI}$$

Para una estructura que comprende varios miembros elásticos, el trabajo interno total realizado por el momento flector MA.

$$W_{i,M} = \int \frac{M_A * M_v}{EI} dx$$

$$W_{i,M} = \sum \int \frac{M_A * M_v}{EI} dx$$

Momento torsor.

Debido a la torsión en el caso particular de una sección circular linealmente elástica, se puede encontrar de manera similar y viene dada por.

$$W_{i,T} = \sum \int \frac{T_A * T_v}{GI_0} dx$$

En el libro redactado por Kenneth M. Leet y Chia-Ming Uang, **Fundamentals of Structural Analysis**, desarrollan distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por los dos autores, en la determinación de desplazamientos mediante la conservación de la energía aplicando el trabajo virtual externo igual al trabajo interno. A continuación, se detalla el planteamiento de los autores (Leet & Uang, 2005).

Definiendo un diferencial de giro en la curvatura.

$$d\theta = \frac{M_p}{E * I} * dx$$

El trabajo virtual externo W_Q originado por la carga ficticia Q .

$$W_Q = \sum Q * \delta_p$$

La energía de deformación virtual, originado por el momento M_Q . Luego integramos, para calcular la totalidad de la energía.

$$dU_Q = M_Q * d\theta$$

$$U_Q = \int M_Q * d\theta$$

Mediante la conservación de la energía. Reemplazamos $d\theta$.

$$\sum Q * \delta_p = \int M_Q * d\theta$$

$$\sum Q * \delta_p = \int M_Q * \frac{M_p}{E * I} * dx$$

Donde, Q es la carga ficticia, δ_p Desplazamiento real, M_Q momento producido por la carga ficticia, M_P momento producido por la carga real.

En el libro redactado por S. T. Mau, **Fundamentals of Structural Analysis**, desarrollan distintas metodologías para encontrar respuestas estructurales. El trabajo realizado por el autor, en la determinación de desplazamientos mediante la el método de la carga unitaria y conservación de la energía. A continuación, se detalla el planteamiento del autor (Mau, 2003).

Definimos el ángulo que está relacionado con el momento interno según la siguiente ecuación.

$$d\theta = \frac{M}{E * I} * dx$$

Mediante el principio de conservación de la energía mecánica para encontrar la rotación de la punta, que se denota por θ . El trabajo realizado por las fuerzas externas es.

$$W_{ext} = \frac{1}{2} * M_0 * \theta_0$$

Se platea la ecuación de la energía de deformación, donde $M(x)= M_0$.

$$U = \int \frac{1}{2} * \frac{M^2}{EI} * dx$$

Mediante el principio de la fuerza virtual establece que el trabajo virtual realizado por una fuerza virtual externa, fuerza sobre un sistema de desplazamiento real es igual al trabajo virtual realizado por la fuerza virtual interna.

$$\delta W = \delta U \quad \rightarrow \quad \delta U = \int m(x) * \frac{M(x)}{EI} * dx$$

El trabajo virtual externo es el producto de la unidad de carga y la flecha que se desea calcular Δ . Mediante el principio de la fuerza virtual conduce a la formula útil del método de carga unitaria.

$$\delta W = 1 * \Delta \quad \rightarrow \quad 1 * \Delta = \int m(x) * \frac{M(x)}{EI} * dx$$

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Energía de deformación interna

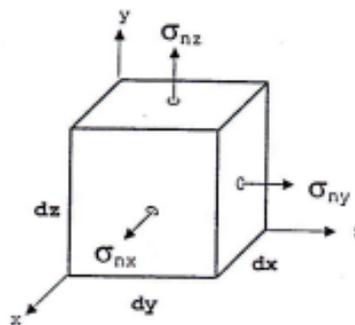
La energía no desaparece solo se trasforma, en el caso de una barra o elemento estructural esta se encuentra sometido a fuerzas externas y estas generar un trabajo externo que será igual al efecto que esta genera transformándose en energía interna de deformación, a este efecto se denomina el equilibrio que se presenta. La energía de deformación le permite al elemento estructural recuperar su estado inicial sin deformación cuando se retiren las cargas externas, esto se presentará bajo la consideración del elemento estructural un cuerpo elástico (Luthe, 1997).

2.2.1.1. Energía de deformación interna originado por esfuerzo normal

La energía será calculada para los esfuerzos normales que actual en el elemento estructural, para lo cual se va considerar un elemento diferencial (González, 2007).

Figura 1

Elemento Diferencial Bajo Esfuerzos Normales



Nota. Tomada de (González, 2007)

Por conservación de la energía.

$$W_e = \frac{1}{2} * P * \Delta$$

Se sabe por la resistencia de materiales.

$$\sigma_n = \frac{P}{A} \rightarrow P = \sigma_n A \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{L} \rightarrow \Delta = \varepsilon L$$

Planteamos la energía de deformación.

$$U = \frac{1}{2} * (\sigma_n * A)(\varepsilon * L) \rightarrow V = A * L, \text{Volumen del elemento}$$

$$U = \frac{1}{2} \sigma_n * \varepsilon * V$$

Plantearemos la energía de deformación interna total bajo el efecto del esfuerzo normal.

$$dU = \frac{1}{2} [\sigma_{nx} * \varepsilon_x + \sigma_{ny} * \varepsilon_y + \sigma_{nz} * \varepsilon_z] dx dy dz$$

$$U = \frac{1}{2} * \iiint [\sigma_{nx} * \varepsilon_x + \sigma_{ny} * \varepsilon_y + \sigma_{nz} * \varepsilon_z] dV$$

Fórmula 6

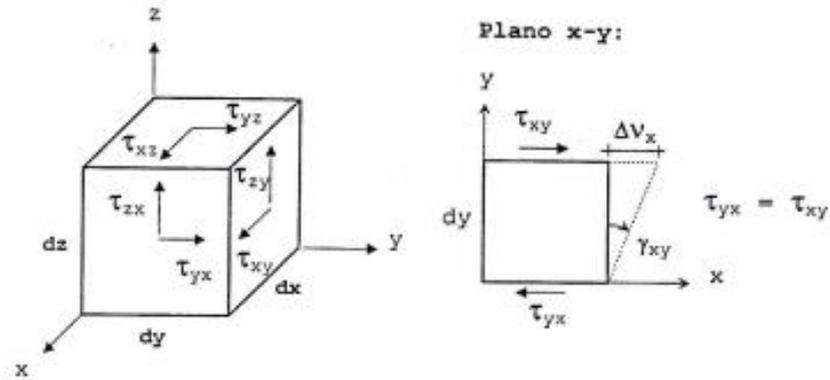
Energía de deformación interna bajo el efecto del esfuerzo normal

2.2.1.2. Energía de deformación interna originado por esfuerzo cortante

La energía será calculada para los esfuerzos cortantes o llamado también tangenciales que actual en el elemento estructural, para lo cual se va considerar un elemento diferencial (González, 2007).

Figura 2

Elemento Diferencial Bajo Esfuerzos Tangenciales



Nota. Tomada de (González, 2007)

Por conservación de la energía.

$$dW_e = \frac{1}{2} * P * \Delta v_x$$

Se sabe por la resistencia de materiales.

$$\tau_{xy} = \frac{P}{dx * dz} \rightarrow P = \tau_{xy} dx dz \quad \gamma_{xy} = \frac{\Delta v_x}{dy} \rightarrow \Delta v_x = \gamma_{xy} * dy$$

Planteamos la energía de deformación.

$$dW_e = \frac{1}{2} \tau_{yx} * dx * dz * \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \tau_{xy} * \gamma_{xy} * dx * dy * dz$$

Plantearemos la energía de deformación interna total bajo el efecto del esfuerzo Cortante o llamado tangencial.

$$dU = \frac{1}{2} [\tau_{xy} * \gamma_{xy} + \tau_{yz} * \gamma_{yz} + \tau_{xz} * \gamma_{xz}] dx dy dz$$

$$U = \frac{1}{2} * \iiint [\tau_{xy} * \gamma_{xy} + \tau_{yz} * \gamma_{yz} + \tau_{xz} * \gamma_{xz}] dV$$

Fórmula 7

Energía de deformación interna bajo el efecto del esfuerzo tangencial

2.2.2. Energía de deformación interna de un elemento reticular

Un elemento reticular será considerado todo aquel elemento estructural donde, las dimensiones longitudinales son mucho mayores a las dimensiones de la sección transversal, además, se cumplirá la ley de Hooke y que se encuentra sujeto a fuerzas normales o axiales, cortantes o tangenciales, momento flexionante y momento torsor. Estas fuerzas son originadas por efectos de la carga externa que afecta a los elementos estructurales mediante la disipación de la energía mediante la deformación (Luthe, 1997).

2.2.2.1. Energía de deformación interna originado por la fuerza axial

La energía será calculada para los esfuerzos normales que se presentan bajo la existencia de fuerzas normales o axiales (González, 2007).

Figura 3

Barra Sometido a Fuerza Normal



Nota. Tomada de (González, 2007)

Cálculo de un diferencial de energía.

$$U_N = \frac{1}{2} P \Delta \rightarrow dU_N = \frac{1}{2} P d\Delta$$

Aplicando la ley de Hooke y cálculo de la energía de deformación.

$$d\Delta = \frac{P}{EA} ds$$

$$dU_N = \frac{1}{2} P * \frac{P}{EA} ds = \frac{1}{2} \frac{P^2}{EA} ds$$

$$U_N = \int \frac{1}{2} \frac{P^2}{EA} ds$$

Fórmula 8

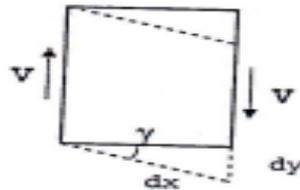
Energía de deformación interna bajo el efecto de la fuerza axial

2.2.2.2. Energía de deformación interna originado por la fuerza cortante

La energía será calculada para los esfuerzos cortantes o llamados también tangenciales que se presentan bajo la existencia de fuerzas cortantes (González, 2007).

Figura 4

Barra Sometido a Fuerza Tangencial



Nota. Tomada de (González, 2007)

Cálculo de un diferencial de energía.

$$U_v = \frac{1}{2} Vy \rightarrow dU_v = \frac{1}{2} V dy$$

Aplicando la ley de Hooke y cálculo de la energía de deformación.

$$dy = \frac{k_1 V}{GA} ds$$

$$dU_v = \frac{1}{2} V * \frac{k_1 V}{GA} ds = \frac{k_1 V^2}{2 GA} ds$$

$$U_V = \int \frac{k_1 V^2}{2 GA} ds$$

Fórmula 9

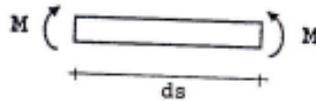
Energía de deformación interna bajo el efecto de la fuerza cortante

2.2.2.3. Energía de deformación interna originado por el momento flector

La energía será calculada para los esfuerzos normales que se presentan bajo los efectos del momento flector (González, 2007).

Figura 5

Barra Sometido a Momento Flector



Nota. Tomada de (González, 2007)

Cálculo de un diferencial de energía.

$$U_M = \frac{1}{2} M \theta \rightarrow dU_M = \frac{1}{2} M d\theta$$

Aplicando la ley de Hooke y cálculo de la energía de deformación.

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

$$dU_M = \frac{1}{2} M * \frac{M}{EI} ds = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds$$

$$U_M = \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds$$

Fórmula 10

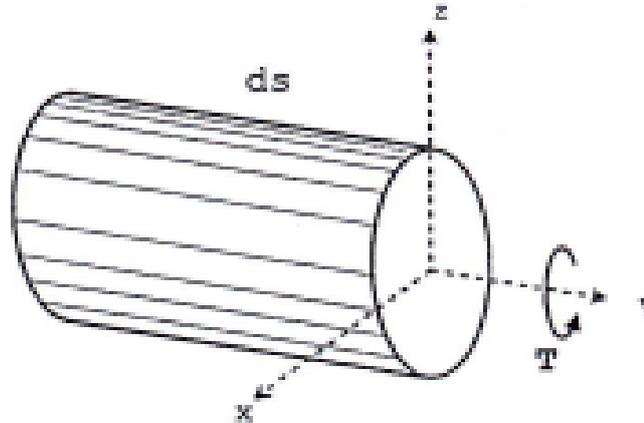
Energía de deformación interna bajo el efecto del momento flector

2.2.2.4. Energía de deformación interna originado por el momento torsor

La energía será calculada para los esfuerzos cortantes que se presentan bajo los efectos del momento torsor (González, 2007).

Figura 6

Barra Sometido a Momento Torsor



Nota. Tomada de (González, 2007)

Cálculo de un diferencial de energía.

$$U_T = \frac{1}{2}T\theta \rightarrow dU_T = \frac{1}{2}Td\theta$$

Aplicando la ley de Hooke y cálculo de la energía de deformación.

$$d\theta = \frac{T}{GJ}ds$$

$$dU_T = \frac{1}{2}T * \frac{T}{GJ}ds = \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ} ds$$

$$U_T = \int \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ} ds$$

Fórmula 11

Energía de deformación interna bajo el efecto del momento torsor

2.2.2.5. Energía de deformación interna total en un elemento reticular en el plano

Bajo la consideración de ser un elemento estructural reticular y en el plano la energía interna total bajo las distintas fuerzas que se presentan será (González, 2007).

$$U = U_N + U_V + U_M + U_T$$

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{P^2}{EA} ds + \int \frac{k_1}{2} \frac{V^2}{GA} ds + \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds + \int \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ} ds$$

Fórmula 12

Energía de deformación interna total de un elemento reticular

2.2.3. Desplazamiento de un punto en una estructura teorema de Castigliano

Considerando una estructura sujeta a fuerzas y bajo el principio de la conservación de la energía, donde el trabajo realizado por las fuerzas externas será igual a la energía de deformación interna de la estructura. Identificamos el punto donde deseamos calcular el desplazamiento y se aplica una fuerza si se desea saber el giro que se presenta en dicho punto se coloca un momento o par, el teorema nos dice derivar parcialmente la energía de deformación respecto a la fuerza colocada en el punto de interés, de esta manera se obtiene el desplazamiento o giro según la fuerza aplicada. A este teorema se le conoce como el segundo teorema de Castigliano (Hibbeler, 2012).

Conservación de la energía.

$$U_i = U_e$$

El trabajo externo está en función de la carga externa.

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad \wedge \quad U_e = \sum \int P dx$$

Incrementando una diferencia dP_i a la carga P_i , el efecto que se presenta es un desplazamiento diferencial $d\Delta$, también se incrementa la energía de deformación.

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_i} dP_i$$

Como no existe restricción en el orden de aplicación de la carga, primero aplicaremos la diferencia de carga dP_i y el planteamiento será.

$$U_i + dU_i = U_i + dP_i * \Delta_i$$

El cuerpo sujeto a las cargas y luego aplicando la diferencia posee la misma energía de deformación al aplicar primero el diferencial de carga luego las cargas.

De esta manera se obtiene al igual el teorema de Castigliano.

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i}$$

Fórmula 13

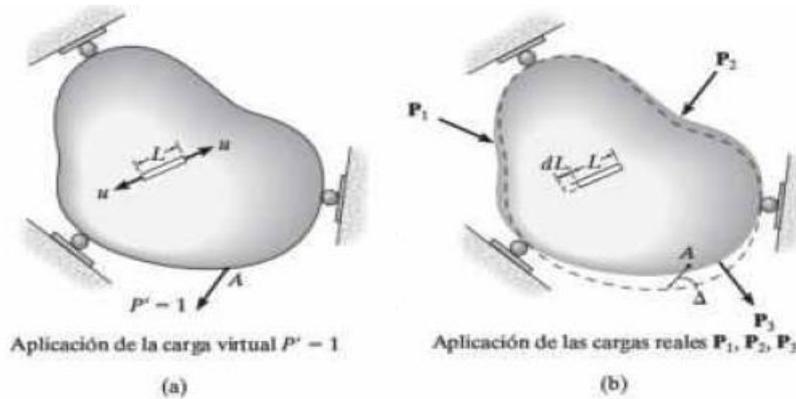
Desplazamiento de un punto con el teorema de Castigliano

2.2.4. Trabajo virtual

Método conocido como la carga unitaria, con este método podemos calcular desplazamientos y pendientes en un punto de interés. Del gráfico para calcular el desplazamiento Δ del punto A, desplazamiento originado por las cargas externas (P_1, P_2, P_3). En el mismo cuerpo si calculamos el desplazamiento del punto A colocando una carga virtual P' . Se van relacionar mediante la ecuación de equilibrio la carga virtual externa P' con la carga virtual interna u . Realizando un trabajo virtual externo con la carga virtual $P'=1$ también conocido como carga unitaria según la conservación de la energía esta será igual al trabajo virtual interno, la notación se escribe de la siguiente manera (Hibbeler, 2012).

Figura 7

Cuerpo Elástico(a) Sometido a Carga Virtual, El Mismo Cuerpo (b) Sometido a Cargas Reales



Nota. Tomada de (Hibbeler, 2012)

Trabajo virtual externo = trabajo virtual interno

$$1 * \Delta = \sum u * dL$$

Fórmula 14

Desplazamiento de un punto según el Trabajo Virtual

Donde:

$P'=1$ = carga unitaria virtual externa que actúa en la dirección indicada Δ .

u = carga virtual interna que actúa sobre el elemento en la dirección de dL

Δ = desplazamiento externo causado por las cargas reales.

dL = deformación interna del elemento causada por las cargas reales.

L = Longitud de un elemento.

A =área transversal de un elemento.

E =módulo de elasticidad de un elemento.

2.3. Definición de términos

- 1 Análisis estructural: Es la búsqueda de valores desconocidos como las fuerzas que reacción en la estructura, las fuerzas internas en la estructura, desplazamientos y otros, a los cuales llamaremos respuesta estructural. El proceso es identificar la estructura: Puentes, casas, represas, otros. Estas estructuras se idealizan para el proceso de análisis (Hibbeler, 2012).
- 2 Lema: Proposición, teorema que sirve de base fundamental para demostrar otro teorema (Soto, 2011).
- 3 Teorema: Es una proposición donde el enunciado puede ser probado mediante una demostración (Rosas, 2009).
- 4 Proporción directa: Se da cuando dos magnitudes están en proporción donde ambas magnitudes crecen o ambas magnitudes disminuyen (Soto, 2011).
- 5 Carga virtual: Es aquella fuerza que en realidad no existe como parte de la carga real ya que es imaginario, en particular se usa la carga virtual unitaria donde el valor es la unidad (Hibbeler, 2012).
- 6 Conservación de la energía: En una estructura sujeto a fuerzas externas, el trabajo realizado por las fuerzas externas genera un trabajo interno o energía de deformación todo esto bajo los límites elásticos del material (Hibbeler, 2012).
- 7 Fuerzas externas: Las cargas se idealizan según el tipo de estructura y las conexiones que tiene entre ellas además de basarse en el código o normativa del país, para el caso de la norma peruana se tomara en cuenta el reglamento nacional de edificaciones la E .030 cargas (Hibbeler, 2012).

2.4.Hipótesis

2.4.1. Hipótesis general

El teorema planteado crea la relación entre la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

2.4.2. Hipótesis específicas

- Existe una relación matemática entre los lemas para la creación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.
- Se calcula el desplazamiento de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, mediante la energía de deformación interna.
- Se plantea el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, mediante la energía de deformación interna.

2.5.Variables

2.5.1. Variable independiente

X: Fuerza interna real y virtual.

2.5.2. Variable dependiente

Y: Teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.

2.6.Operacionalización de variables

Tabla 1

Operacionalización de las Variables De Investigación

	VARIABLES	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	INDICADORES	INSTRUMENTOS
INDEPENDIENTE	Fuerza interna real y virtual.	Fuerza interna real y virtual, se presenta dentro del elemento estructural, a causa de una carga externa real y virtual.	<ul style="list-style-type: none"> • Análisis lineal elástico. • Fuerza axial. • Fuerza cortante. • Momento flector. • Momento torsor. 	Cálculo matemático
DEPENDIENTE	Teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.	Teorema que relaciona mediante una ecuación la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Castigliano • Ecuación del trabajo virtual. 	Cálculo matemático

III. METODOLOGIA

3.1. Tipo de Investigación

Es una investigación básica o pura, considerando que se concentra en demostrar la existencia de un teorema que relaciona la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en un análisis estructural, a fin de brindar un aporte en la rama de estructuras y brindar una solución alterna del método de flexibilidad (Borjas, 2016).

3.2. Diseño de investigación

Desde el punto de vista metodológico se sustenta en una investigación no experimental, donde la información que se va obtener será información sin manipular las variables, ya que se identifican las variables que son las fuerzas internas virtuales y las fuerzas internas reales y se busca una relación matemática entre ellas sin alterar su estado o naturaleza de las variables (Borjas, 2016).

3.3. Población y muestra

3.3.1. Población

Dentro de la investigación, la población es definida como un conjunto de individuos donde reúnen una serie de características a ser estudiadas. Por ende, en base a este razonamiento podemos indicar que la investigación no cuenta con una población, ya que estamos haciendo un estudio teórico de un tema en singular que es la demostración de un teorema que relaciona la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

3.3.2. Muestra

La muestra, es definida como un subgrupo de la población, el problema de estudio es algo singular. Dentro de este marco conceptual, se ha adoptado como carencia de muestra, ya que estamos haciendo un estudio teórico de un tema en singular que es la demostración de un teorema que relaciona la fuerza interna virtual y la fuerza interna real en el análisis estructural.

3.4. Técnicas e Instrumento(s) de recolección de datos

La observación científica y el cálculo matemático, mediante la percepción intencionada, haciendo uso de los conocimientos adquiridos en la formación profesional, precisamos la observación en el análisis estructural, donde se observa características comunes en dos teoremas para proceder a obtener la relación matemática y demostrar el teorema (Borjas, 2016).

3.5. Plan de procesamiento y análisis estadístico de datos

3.5.1. Plan de procesamiento

El procesamiento de datos está estructurado en tres etapas las cuales van relacionadas con los objetivos, se programa de la siguiente manera:

En una etapa inicial se va a determinar y analizar los lemas, estos teoremas nos servirán de base para poder determinar una relación matemática entre los lemas. Para poder demostrar la fórmula que nos permita aplicar para cualquier tipo de fuerza interna que origina el desplazamiento bajo la energía de deformación; vamos a definir las fuerzas internas y el esfuerzo en forma general, es decir una expresión de fuerza y esfuerzo que sea aplicada para cualquier tipo de naturaleza de la fuerza ya sea fuerza axial, fuerza cortante, momento flector y momento torsor. Para poder definir estas expresiones en forma general se definirán algunos conceptos y algunas

expresiones de características de sección que dependen de la posición del elemento de análisis más no de las cargas que están en ellas afectándolas.

Se va expresar la ecuación de la energía de deformación interna en forma general, es decir será determinado bajo las características generales de fuerza, esfuerzo y propiedades de sección; luego calculamos el desplazamiento mediante la energía de deformación interna general de un elemento estructural. Por otro lado, mediante la ecuación del trabajo virtual calculamos el desplazamiento, nuevamente precisando la incorporación de las expresiones generales deducidas.

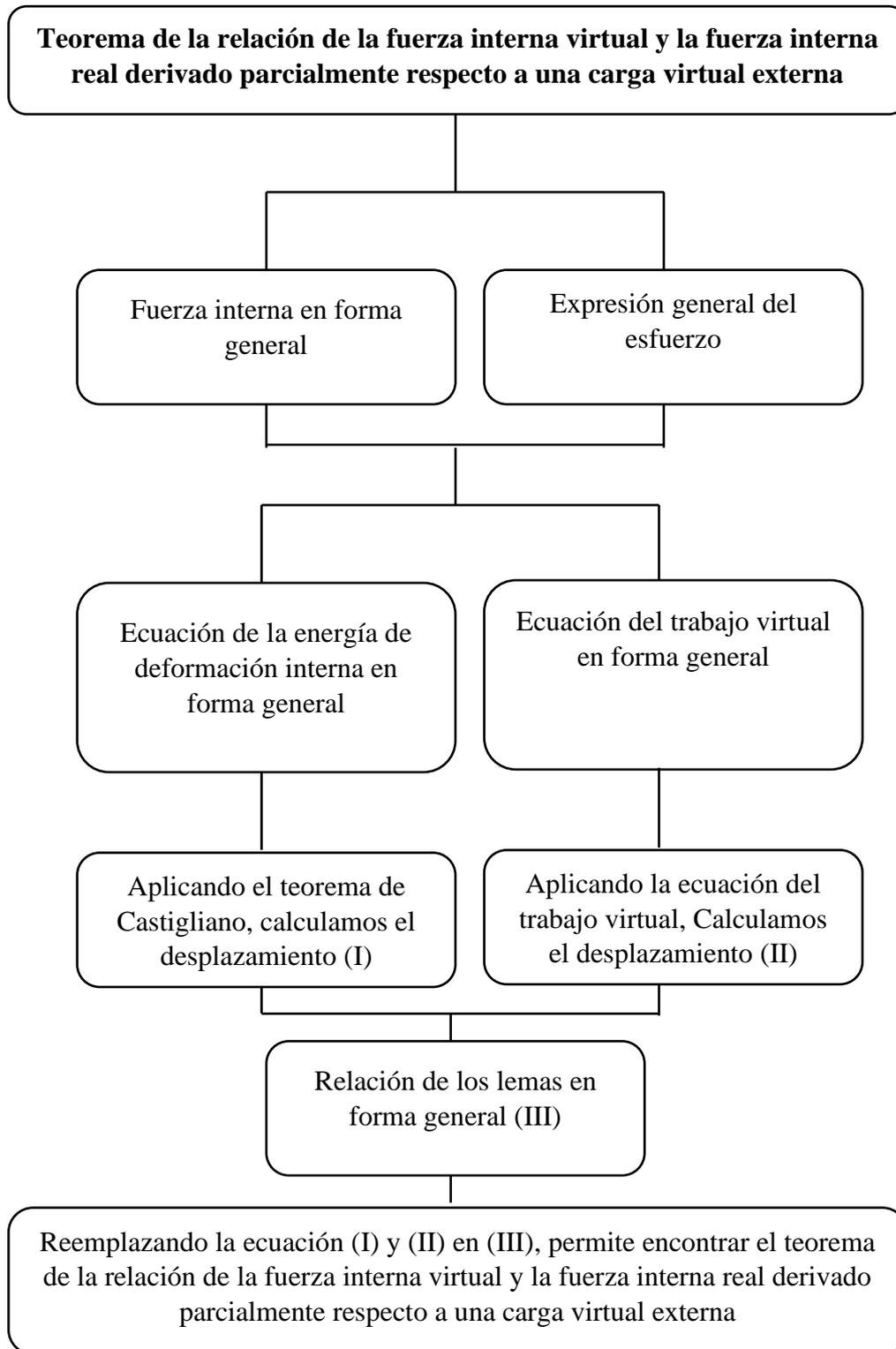
Aplicando la relación matemática de los lemas y reemplazando los desplazamientos determinados mediante la energía de deformación interna y la ecuación del trabajo virtual, se demuestra el teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.

Segunda etapa se va determinar los desplazamientos de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, para todas las fuerzas internas de un elemento reticular.

Tercera etapa del plan de procesamiento consiste en determinar el planteamiento del método de flexibilidad aplicado el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.

Figura 8

Esquema para el Proceso de la Demostración del Teorema



Nota. Tomada de (Fuente propia)

IV. ESTUDIO DE LA RELACIÓN DE FUERZA INTERNA VIRTUAL Y LA FUERZA INTERNA REAL

4.1. Relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trazo virtual

Sobre un elemento reticular de cuerpo elástico, si determinamos el desplazamiento de un punto (Sea el punto i), donde se tendrá en cuenta las siguientes notaciones para el caso de características reales y virtuales.

Donde:

Q = Carga externa (real).

i = Coordenada que se desea calcular el desplazamiento.

Δp = Desplazamiento de la coordenada punto p (real).

L_i = Longitud inicial del elemento reticular.

dL_i = Deformación de L_i (real).

q_i = Fuerzas internas (real).

W_e = Trabajo externo.

Anteponiendo el símbolo (δ) significa de origen virtual.

Con el propósito de dar respuesta al problema de investigación se observaron múltiples procesos y ecuaciones, en este proceso se identificaron dos teoremas aplicados en el análisis estructural, estos dos serán lemas para poder definir un teorema que relacione fuerzas internas virtuales y fuerzas internas reales en un cuerpo elástico en los límites de un análisis lineal.

Partimos del teorema de Castigliano, el cual consideramos como nuestro primer lema, para lo cual utilizamos la ecuación (13) de la presente investigación citada.

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i}$$

Esta ecuación lo adecuamos a nuestra notación, donde se puede interpretar como la derivada parcial de la energía de deformación interna respecto de una carga virtual externa aplicado en la coordenada o punto (i) del cuerpo elástico.

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i}$$

Fórmula 15

Desplazamiento debido a la derivada parcial de la energía de deformación interna respecto de una carga virtual externa

Considerando el teorema del Trabajo Virtual, el cual consideramos como nuestro segundo lema, para lo cual utilizamos la ecuación (14) de la presente investigación citada.

$$1 * \Delta = \sum u * dL$$

La ecuación lo adecuamos a nuestra notación, donde despejamos la carga virtual externa y el resultado del cálculo del desplazamiento en el punto (i) será.

$$\Delta_i = \frac{\delta q_i * dl_i}{\delta Q_i}$$

Fórmula 16

Desplazamiento bajo el principio del trabajo virtual

La ecuación (15) y la ecuación (16) son congruentes, igualamos las dos ecuaciones y obtendremos la relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trabajo virtual.

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i} = \frac{\delta q_i * dl_i}{\delta Q_i}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i} = \frac{\delta q_i * dl_i}{\delta Q_i}$$

Fórmula 17

Relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trabajo virtual

En la ecuación (17) en el primero miembro se va a considerar la carga virtual externa en modo de variable para que pueda ser derivable. En el segundo miembro vamos a tener la consideración del caso particular cuando la carga virtual externa tome el valor de una carga unitaria.

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i * dl_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Fórmula 18

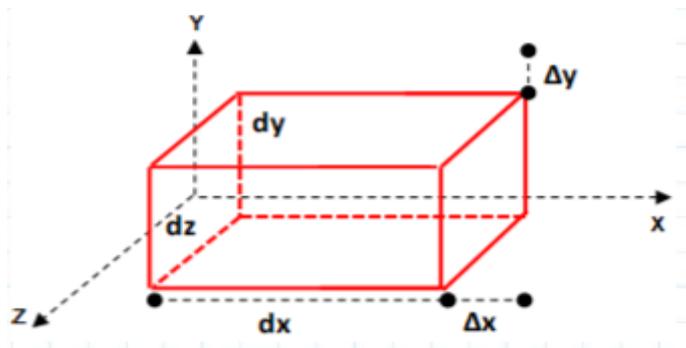
Relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trabajo virtual cuando la carga virtual externa es unitario

4.2. Relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real

Para poder demostrar la existencia de esta ecuación, se va trabajar en un elemento reticular. La estructura este sujeto a esfuerzo normal y de corte, estos esfuerzos están originados por las fuerzas internas axial y cortante; momento flector y de torsión. Δx , deformación en dirección longitudinal; Δy , deformación en la sección transversal.

Figura 9

Elemento diferencial de una barra estructural



Nota. Tomada de (Fuente propia)

Definimos una expresión general para un esfuerzo normal y de corte.

$$\sigma_{jj} = \sigma_{xx} \quad \wedge \quad \sigma_{jj} = \sigma_{xy} = \tau_{xy}$$

Deformación en dirección del esfuerzo normal y de corte.

$$dl_i = \Delta_x \quad \wedge \quad dl_i = \Delta_y$$

Deformación unitaria en dirección del esfuerzo normal y de corte.

$$\varepsilon_{jj} = \frac{dl_i}{dx}$$

$$\varepsilon_{jj} = \varepsilon_{xx} \quad \wedge \quad \varepsilon_{jj} = \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

Módulo de elasticidad en la dirección del esfuerzo normal y cortante.

$$K = E \quad \wedge \quad K = G$$

Esfuerzo normal y de corte relacionado con el módulo de elasticidad en la dirección del esfuerzo normal y cortante.

$$\varepsilon_{jj} = \frac{\sigma_{jj}}{K}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{K} \quad \wedge \quad \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{K}$$

Definimos la fuerza interna (q_i) en forma general, fuerza interna originada por la carga externa donde el sistema de cargas están incluido todas las cargas más la carga virtual (δQ_i), solo para este caso cuando se antepone delta a la carga interna será netamente de origen virtual. Además, tener la consideración que la carga virtual se introduce con el fin de realizar la derivada parcial de la energía de deformación y poder calcular así el desplazamiento, fuera del fin de su uso que es la derivada parcial dicha carga virtual es nula, es decir si no existe derivada la carga interna es netamente de origen de carga externa.

$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} \leftrightarrow q_i = \begin{cases} N(x) = F(\Sigma Q_i, \delta Q_i, x) & \text{Fuerza axial} \\ V(x) = F(\Sigma Q_i, \delta Q_i, x) & \text{Fuerza cortante} \\ M(x) = F(\Sigma Q_i, \delta Q_i, x) & \text{Momento flector} \\ T(x) = F(\Sigma Q_i, \delta Q_i, x) & \text{Momento torsor} \end{cases}$$

$$q_i \leftrightarrow q_i = \begin{cases} N(x) = F(\Sigma Q_i, x) & \text{Fuerza axial} \\ V(x) = F(\Sigma Q_i, x) & \text{Fuerza cortante} \\ M(x) = F(\Sigma Q_i, x) & \text{Momento flector} \\ T(x) = F(\Sigma Q_i, x) & \text{Momento torsor} \end{cases}$$

Fórmula 19

Fuerza interna general

Deducción de una expresión general que relaciona el esfuerzo y la fuerza interna.

Esfuerzo normal originado por la fuerza axial.

$$\sigma = \frac{N(x)}{dy * dz}$$

Esfuerzo normal originado por el momento flector. Damos forma multiplicando y dividiendo por $dy * dz$.

$$\sigma = \frac{M_{zz} * y}{I_{zz}} \rightarrow \sigma = \frac{M_{zz}}{dy * dz} * \frac{dy * dz * y}{I_{zz}}$$

Esfuerzo cortante originado por la fuerza cortante. Damos forma multiplicando y dividiendo por $dy * dz$. (Q) es el momento estático y (b) ancho de la fibra considerado.

$$\tau_{xy} = \frac{V_{xy} * Q}{I_{zz} * b} \rightarrow \tau_{xy} = \frac{V_{xy}}{dy * dz} * \frac{dy * dz * Q}{I_{zz} * b}$$

Esfuerzo cortante originado por el momento torsor. Damos forma multiplicando y dividiendo por $dy * dz$.

$$\tau = T \frac{r}{J} \rightarrow \tau = \frac{T}{dy * dz} * \frac{dy * dz * r}{J}$$

Vamos a definir una expresión general del esfuerzo en función de las definiciones previas indicadas. Donde $Cs(x)$ la nominamos características de sesión la cual no depende de las cargas Q_i y δQ_i .

$$\sigma_{jj} = \frac{q_i}{dy * dz} * Cs(x)$$

$$Cs(x) = \begin{cases} 1 & \text{Fuerza axial} \\ \frac{dy * dz * Q}{I_{zz} * b} & \text{Fuerza cortante} \\ \frac{dy * dz * y}{I_{zz}} & \text{Momento flector} \\ \frac{dy * dz * r}{J} & \text{Momento torsor} \end{cases}$$

Fórmula 20

Características de sesión

Plantaremos la energía de deformación interna en base a los conceptos definidos, encontraremos una expresión general para las distintas fuerzas internas. Para un diferencial de energía de deformación interna será igual al trabajo realizado por las fuerzas internas.

$$dU = \frac{1}{2} * q_i * dl_i$$

Fórmula 21

Energía de deformación interna en base a los conceptos definidos

Se conoce en base a las ecuaciones definidas la deformación unitaria general y el esfuerzo general, despejamos los dos términos de interés y reemplazamos en la ecuación (21):

$$\epsilon_{jj} = \frac{dl_i}{dx} \rightarrow dl_i = \epsilon_{jj} * dx \quad \wedge \quad q_i = \frac{\sigma_{jj} * dy * dz}{Cs(x)}$$

$$dU = \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{jj} * dy * dz}{Cs(x)} * \epsilon_{jj} * dx$$

La ecuación que se está procesando, vamos introducir el concepto de diferencial de volumen; y la ecuación que relaciona el esfuerzo, deformación unitaria y el módulo de elasticidad. Luego integramos la expresión para calcular la energía de deformación interna:

$$dv = dx * dy * dz \quad \wedge \quad \epsilon_{jj} = \frac{\sigma_{jj}}{K}$$

$$dU = \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{jj} * dy * dz}{Cs(x)} * \epsilon_{jj} * dx$$

$$dU = \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{jj}}{Cs(x)} * \frac{\sigma_{jj}}{K} * dv$$

$$dU = \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{jj}^2}{Cs(x) * K} * dv$$

$$U = \int dU = \int \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{jj}^2}{C_S(x) * K} * dv$$

Fórmula 22

Energía de deformación en base a los conceptos definidos

Aplicamos el teorema de Castigliano, calculamos el desplazamiento en dirección de la carga δQ_i en el punto de aplicación (i).

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i}$$

$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial \delta Q_i} \left[\int \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{jj}^2}{C_S(x) * K} * dv \right]$$

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i} = \int \frac{\sigma_{jj}}{C_S(x) * K} * \frac{\partial(\sigma_{jj})}{\partial \delta Q_i} dv$$

Fórmula 23

Desplazamiento en dirección de la carga δQ_i

Aplicamos el teorema del trabajo virtual, calculamos el desplazamiento en dirección de la carga δQ_i en el punto de aplicación o coordenada (i), hacemos uso de la ecuación citada en la investigación (16).

$$\Delta_i = \delta q_i * dl_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Considerando el análisis de un elemento diferencial, calculamos el diferencial de desplazamiento. Trabajo de la fuerza virtual interna bajo una deformación real que es un diferencial. Reemplazamos sus equivalencias e integramos.

$$\epsilon_{jj} = \frac{dl_i}{dx} \rightarrow dl_i = \epsilon_{jj} * dx, \quad \epsilon_{jj} = \frac{\sigma_{jj}}{K} \quad \wedge \quad 1 = \frac{dy * dz}{dy * dz}$$

$$d\Delta_i = \delta q_i * dl_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$d\Delta_i = \frac{\delta q_i}{dy * dz} * \epsilon_{jj} * dx * dy * dz$$

$$d\Delta_i = \frac{\delta q_i}{dy * dz} * \frac{\sigma_{jj}}{K} * dv$$

$$\Delta_i = \int \frac{\delta q_i}{dy * dz} * \frac{\sigma_{jj}}{K} * dv$$

Fórmula 24

Desplazamiento en base a los conceptos definidos

Aplicamos la relación del teorema de Castigliano y la ecuación del trabajo virtual la ecuación número (18), donde se va reemplazar las ecuaciones (23) y (24).

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i * dl_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$\int \frac{\sigma_{jj}}{Cs(x) * K} * \frac{\partial(\sigma_{jj})}{\partial \delta Q_i} dv = \int \frac{\delta q_i}{dy * dz} * \frac{\sigma_{jj}}{K} * dv$$

Estas ecuaciones son congruentes, vamos a igualar términos para obtener igualdades.

$$\int \frac{\sigma_{jj}}{Cs(x) * K} * \frac{\partial(\sigma_{jj})}{\partial \delta Q_i} dv = \int \frac{\delta q_i}{dy * dz} * \frac{\sigma_{jj}}{K} * dv$$

$$\frac{1}{Cs(x)} * \frac{\partial(\sigma_{jj})}{\partial \delta Q_i} = \frac{\delta q_i}{dy * dz} \quad \text{sí: } \sigma_{jj} = \frac{q_i}{dy * dz} * Cs(x)$$

$$\frac{1}{Cs(x)} * \frac{\partial}{\partial \delta Q_i} \left(\frac{q_i}{dy * dz} * Cs(x) \right) = \frac{\delta q_i}{dy * dz} \quad \text{sí: } Cs(x), \text{ no depende de } Q_i, \delta Q_i$$

$$\frac{Cs(x)}{Cs(x) * dy * dz} * \frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \frac{\delta q_i}{dy * dz}$$

La ecuación (25) representa la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real. Donde: q_i : Fuerza interna real más fuerza interna virtual según la fórmula (19), δQ_i : Es la fuerza externa virtual.

$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Fórmula 25

Relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real

V. **APLICACIONES DE LA RELACIÓN DE FUERZA INTERNA VIRTUAL Y LA FUERZA INTERNA REAL**

5.1.Desplazamiento de una estructura bajo la energía de deformación interna originado por cargas externas

5.1.1. Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza axial

En base a la ecuación (8), que representa la energía de deformación interna bajo el efecto de la fuerza axial denotada por $N(x)$. Aplicamos el teorema de Castigliano para poder calcular el desplazamiento en un punto o coordenada (i) de la estructura. Luego aplicamos la ecuación (25) para poder eliminar la derivada parcial. La interpretación será, fuerzas internas virtuales de condición axial, cuando $\delta Q_i=1$.

$$U_N = \int \frac{1}{2} \frac{N(x)^2}{EA} ds$$

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i}$$

$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial \delta Q_i} \left[\int \frac{1}{2} \frac{N(x)^2}{EA} * dx \right]$$

$$\Delta_i = \int \frac{N(x)}{A * E} * \frac{\partial(N(x))}{\partial \delta Q_i} * dx$$

$$\Delta_i = \int \frac{N(x)}{A * E} * \delta q_i * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$\Delta_i = \int \frac{N(x)}{A * E} * \delta N(x) * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Fórmula 26

Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza axial

5.1.2. Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza

cortante

En base a la ecuación (9), que representa la energía de deformación interna bajo el efecto de la fuerza cortante denotada por $V(x)$. Aplicamos el teorema de Castigliano para poder calcular el desplazamiento en un punto o coordenada (i) de la estructura. Luego aplicamos la ecuación (25) para poder eliminar la derivada parcial. La interpretación será, fuerzas internas virtuales de condición cortante, cuando $\delta Q_i=1$, k_1 viene a ser el factor de forma.

$$U_V = \int \frac{k_1 V(x)^2}{2 GA} ds$$

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i}$$

$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial \delta Q_i} \left[\int \frac{k_1 V(x)^2}{2 GA} * dx \right]$$

$$\Delta_i = \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} * \frac{\partial(V(x))}{\partial \delta Q_i} * dx$$

$$\Delta_i = \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} * \delta q_i * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$\Delta_i = \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} * \delta V(x) * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Fórmula 27

Desplazamiento de una estructura originado por la fuerza cortante

5.1.3. Desplazamiento de una estructura originado por el momento

flector

En base a la ecuación (10), que representa la energía de deformación interna bajo el efecto del momento flector denotada por $M(x)$. Aplicamos el teorema de Castigliano para poder calcular el desplazamiento en un punto o coordenada (i) de la estructura. Luego aplicamos la ecuación (25) para poder eliminar la derivada

parcial. La interpretación será, fuerzas internas virtuales de condición de momento flector, cuando $\delta Q_i=1$.

$$U_M = \int \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EI} ds$$

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i}$$

$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial \delta Q_i} \left[\int \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EI} * dx \right]$$

$$\Delta_i = \int \frac{M(x)}{I * E} * \frac{\partial(M(x))}{\partial \delta Q_i} * dx$$

$$\Delta_i = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta q_i * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$\Delta_i = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Fórmula 28

Desplazamiento de una estructura originado por el momento flector

5.1.4. Desplazamiento de una estructura originado por el momento

torsor

En base a la ecuación (11), que representa la energía de deformación interna bajo el efecto del momento torsor denotada por $T(x)$. Aplicamos el teorema de Castigliano para poder calcular el desplazamiento en un punto o coordenada (i) de la estructura. Luego aplicamos la ecuación (25) para poder eliminar la derivada parcial. La interpretación será, fuerzas internas virtuales de condición de momento Torsor, cuando $\delta Q_i=1$.

$$U_T = \int \frac{1}{2} \frac{T(x)^2}{GJ} ds$$

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial \delta Q_i}$$

$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial \delta Q_i} \left[\int \frac{1}{2} \frac{T(x)^2}{GJ} * dx \right]$$

$$\Delta_i = \int \frac{T(x)}{J * G} * \frac{\partial(T(x))}{\partial \delta Q_i} * dx$$

$$\Delta_i = \int \frac{T(x)}{J * G} * \delta q_i * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$\Delta_i = \int \frac{T(x)}{J * G} * \delta T(x) * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Fórmula 29

Desplazamiento de una estructura originado por el momento torsor

5.1.5. Desplazamiento total de un punto de una estructura

Para poder determinar el desplazamiento total en el punto o coordenada (i) bajo todos los efectos de las cargas internas en un cuerpo elástico, será mediante la suma de los casos particulares analizados en las ecuaciones (26), (27), (28) y (29). A partir del desplazamiento total encontrado podemos generar una función de forma general, con el fin de realizar conclusiones generales que servirán en la aplicación del desplazamiento para distintas fuerzas internas.

$$\Delta_i = \int \frac{N(x)}{A * E} \delta q_i dx + \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} \delta q_i dx + \int \frac{M(x)}{I * E} \delta q_i dx + \int \frac{T(x)}{J * G} * \delta q_i * dx$$

$$\Delta_i = \int \frac{N(x)}{A * E} \delta N(x) dx + \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} \delta V(x) dx +$$

$$\int \frac{M(x)}{I * E} \delta M(x) dx + \int \frac{T(x)}{J * G} * \delta T(x) * dx$$

Siendo Cse(x) características de sección y propiedades elásticas.

$$Cse(x) = \begin{cases} \frac{1}{AE} & \text{Fuerza axial} \\ \frac{k}{A * G} & \text{Fuerza cortante} \\ \frac{1}{I * E} & \text{Momento flector} \\ \frac{1}{J * G} & \text{Momento torsor} \end{cases}$$

$$\Delta_{ij} = \int Cse(x) * q_i * \delta q_i dx \leftrightarrow \delta Q_i = 1$$

Fórmula 30

Desplazamiento total de un punto de una estructura

Donde:

Δ_{ij} = Desplazamiento en la coordenada (i) debido a la aplicación del sistema de cargas (j).

q_i = Carga interna real del i-ésimo tramo del cuerpo elástico analizado. Esta carga interna está relacionado al sistema de carga que genera el desplazamiento requerido, que corresponde a la coordenada (j) de la notación del desplazamiento.

δq_i = Carga virtual interna del i-ésimo tramo del cuerpo elástico analizado, originado por una carga virtual externa unitaria. Esta carga interna virtual está relacionado al sistema de carga que corresponde a la coordenada (i) de la notación del desplazamiento.

5.2.Planteamiento del método de flexibilidad

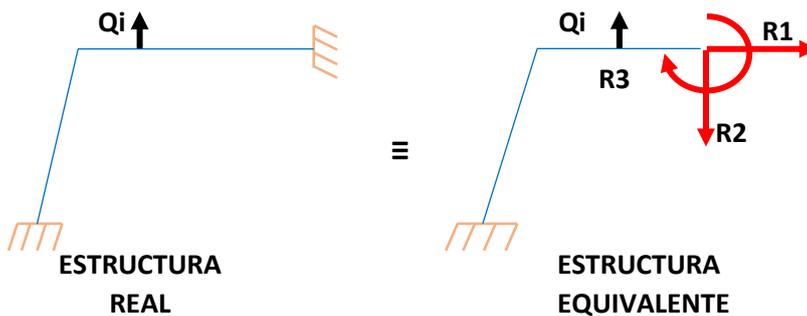
El método consiste en determinar las fuerzas y/o momentos llamados también redundantes en la estructura, estas redundantes son las cantidades

excedentes de incógnitas cuando se realiza la búsqueda de solución mediante las ecuaciones estáticas de equilibrio, la suma de fuerzas en el eje X, la suma de fuerzas en el eje Y y el momento en cualquier punto de la estructura generado en el plano XY (González, 2007).

En la siguiente figura (10) lado izquierdo se observa la estructura real a cargas Q_i y en la figura (10) lado derecho se observa la estructura donde se libera aquellas fuerzas y/o momentos que exceden el número de ecuaciones estáticas de equilibrio. Al liberar se coloca las fuerzas y/o momentos como carga externa.

Figura 10

Estructura real equivalente a una estructura equivalente

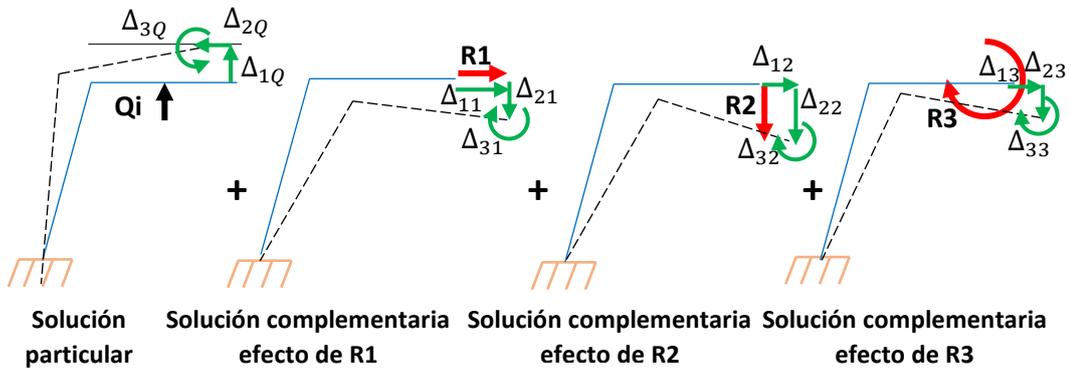


Nota. Tomada de (Fuente propia)

En el siguiente gráfico (11) se puede observar, la aplicación del principio de superposición, donde el efecto de la estructura equivalente será igual a la estructura afectado por la carga externa, por las redundantes identificadas en la estructura liberadas.

Figura 11

La estructura equivalente será igual a la estructura afectado por la carga externa y por las redundantes

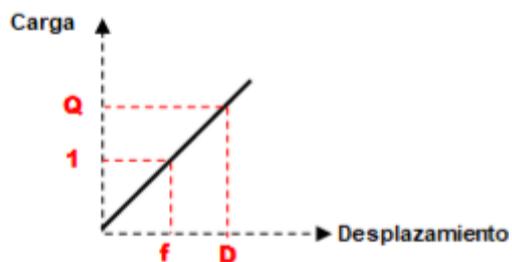


Nota. Tomada de (Fuente propia)

En el siguiente grafico (12) se puede observar, mediante el principio de linealidad, para un análisis lineal elástico, donde el cuerpo elástico no tendrá variación de la rigidez, se puede plantear la siguiente proporcionalidad.

Figura 12

Principio de linealidad



Nota. Tomada de (Fuente propia)

Del gráfico (12) planteamos, El desplazamiento (D) originado por una carga (Q) es directamente proporcional a desplazamiento (f) conocido como coeficiente de flexibilidad originado por una carga unitaria, que representa un desplazamiento.

$$\frac{1}{f} = \frac{Q}{D} \quad \rightarrow \quad D = f * Q$$

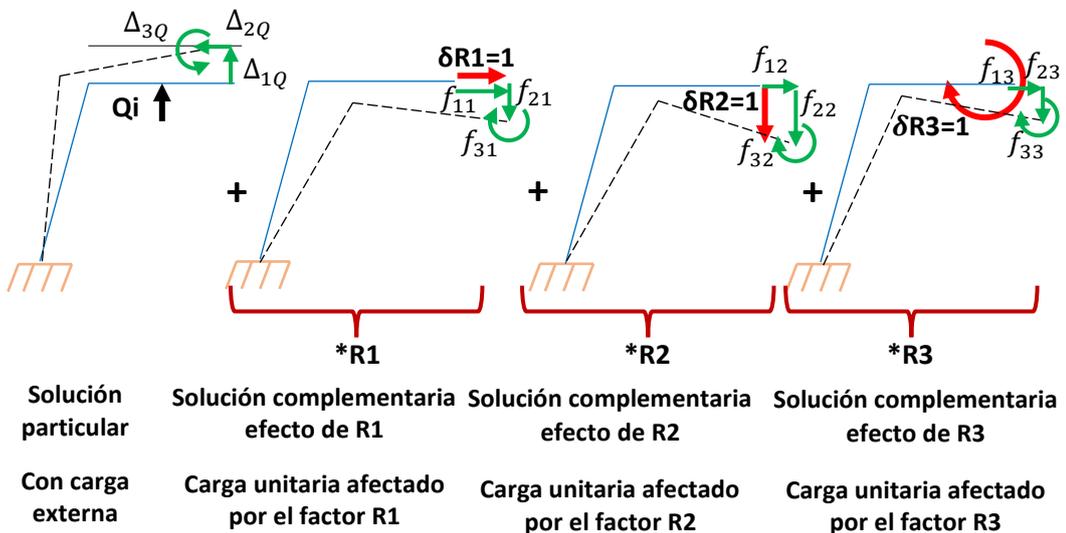
Fórmula 31

Definición del método de flexibilidad por proporcionalidad directa

Vamos a definir el sistema de cargas en base a la figura (11), además de considerar que el efecto del desplazamiento de un punto de un cuerpo elástico debido a una carga unitaria multiplicado por el factor que es la redundante en dicho punto cumple con la condición de la ecuación (31) para calcular el desplazamiento total.

Figura 13

Sistema de cargas



Nota. Tomada de (Fuente propia)

El siguiente paso es analizar las condiciones de contorno, se debe identificar los desplazamientos y/o giros de los puntos de aplicación de las redundantes, a los cuales denominaremos desplazamientos iniciales.

Δ_{10} = Desplazamiento en condiciones iniciales en dirección de la redundante 1.

Δ_{20} = Desplazamiento en condiciones iniciales en dirección de la redundante 2.

Δ_{30} = Desplazamiento en condiciones iniciales en dirección de la redundante 3.

Fórmula 32

Desplazamiento por condiciones de contorno

En el siguiente paso vamos a plantear ecuaciones, basándonos en todos los desplazamientos que se producen en los puntos identificados como redundantes, al efecto de la combinación de todos los desplazamientos en una dirección se le llama ecuación de compatibilidad de deformación.

$$\Delta_{10} = \Delta_{1Q} + \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13}$$

$$\Delta_{20} = \Delta_{2Q} + \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23}$$

$$\Delta_{30} = \Delta_{3Q} + \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33}$$

Aplicando las condiciones aplicadas en la figura (12) es decir la formula (31).

$$\Delta_{10} = \Delta_{1Q} + f_{11} * R_1 + f_{12} * R_2 + f_{13} * R_3$$

$$\Delta_{20} = \Delta_{2Q} + f_{21} * R_1 + f_{22} * R_2 + f_{23} * R_3$$

$$\Delta_{30} = \Delta_{3Q} + f_{31} * R_1 + f_{32} * R_2 + f_{33} * R_3$$

Fórmula 33

Ecuación de compatibilidad de deformación

Este sistema de ecuaciones podemos formularlas a partir de conceptos matriciales, logrando la siguiente expresión.

$$\begin{vmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{1Q} \\ \Delta_{2Q} \\ \Delta_{3Q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$$

Fórmula 34

Ecuación de compatibilidad de deformación mediante conceptos matriciales

En la ecuación (34) se va introducir el concepto de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real.

f_{ij} : Desplazamiento en la coordenada (i) debido a la aplicación de una carga unitaria en la coordenada (j). La coordenada (i) está relacionada al sistema de cargas de la redundante cuando se aplica una carga unitaria; i=1 será sistema de carga redundante uno, i=2 será sistema de carga redundante dos y i=3 será sistema de carga redundante tres. La coordenada (j) está relacionada al sistema de carga que genera ese desplazamiento requerido cuando j=1 será sistema de carga redundante uno, j=2 será sistema de carga redundante dos y j=3 será sistema de carga redundante tres. Para calcularlo podemos aplicar la formula (30).

VI. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1. Comparación de las demostraciones

Dada distintas propuestas que conducen a resultados iguales en la determinación del desplazamiento de una coordenada en específico de un cuerpo elástico. Realizando una comparación entre lo sostenido por los autores citados en los antecedentes de la investigación y la demostración de un nuevo teorema que se plantea en la investigación se logra obtener resultados iguales.

En el libro redactado por Rodolfo Luthe Garcia, en la ecuación que plantea se observa el desplazamiento total de una coordenada de una estructura elástica, haciendo uso de una proporción directa de las fuerzas internas originado por una carga virtual y en el trabajo de deformación interna total se deriva respecto de la carga virtual y teniendo en cuenta consideraciones iniciales de la proporcionalidad y que la carga ficticia toma el valor nulo se encuentra la ecuación que nos permite calcular desplazamientos de un punto de un cuerpo elástico.

$$\begin{aligned}
 W_T &= \int_0^L \frac{(N + np_v)^2}{2EA} ds + \int_0^L k \frac{(T_x + t_x p_v)^2}{2GA} ds + \int_0^L k' \frac{(T_y + t_y p_v)^2}{2GA} ds \\
 &+ \int_0^L \frac{(M_x + m_x p_v)^2}{2EI_x} ds + \int_0^L \frac{(M_y + m_y p_v)^2}{2EI_y} ds + \int_0^L \frac{(M_z + m_z p_v)^2}{2GJ_m} ds \\
 \delta_T &= \frac{\partial W_T}{\partial p_v} = \int_0^L \frac{(N + np_v)n}{EA} ds + \int_0^L k \frac{(T_x + t_x p_v)t_x}{GA} ds \\
 &+ \int_0^L k' \frac{(T_y + t_y p_v)t_y}{GA} ds + \int_0^L \frac{(M_x + m_x p_v)m_x}{EI_x} ds \\
 &+ \int_0^L \frac{(M_y + m_y p_v)m_y}{EI_y} ds + \int_0^L \frac{(M_z + m_z p_v)m_z}{GJ_m} ds \\
 \delta_T &= \int_0^L \frac{Nn}{EA} ds + \int_0^L k \frac{T_x t_x}{GA} ds + \int_0^L k' \frac{T_y t_y}{GA} ds \\
 &+ \int_0^L \frac{M_x m_x}{EI_x} ds + \int_0^L \frac{M_y m_y}{EI_y} ds + \int_0^L \frac{M_z m_z}{GJ_m} ds
 \end{aligned}$$

En el libro redactado por Nelson González Villanueva, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$1 * \Delta = m * \theta \quad \wedge \quad d\theta = \frac{M}{E * I} dx \quad \rightarrow \quad 1 * \Delta = \int \frac{m * M}{E * I} dx$$

En el libro redactado por Russell C. Hibbeler, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$1 * \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

En el libro redactado por Aslam Kassimali, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$dW_{vi} = M_v d\theta \quad \wedge \quad d\theta = \frac{M}{E * I} dx \quad \rightarrow \quad 1 * \Delta = \int M_v * \frac{M}{E * I} dx$$

En el libro redactado por Felix F. Udoeyo, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$1 * \Delta = f * ds \quad \wedge \quad dW = f * \delta = \frac{m * y}{I} * dA * \frac{M * y}{E * I} dx \rightarrow Wi = \int \frac{m * M}{EI} dx$$

$$We = Wi \rightarrow 1 * \Delta = \int M_v * \frac{M}{E * I} dx$$

En el libro redactado por Kenneth M. Leet, Chia-Ming Uang, Joel T. Lanning y Anne M. Gilbert, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$\sum Q * \delta_P = \int M_Q * \frac{M_p}{E * I} dx$$

En el libro redactado por Jerome J. Connor y Susan Faraji, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$d * \delta P = \int (\text{Deformación por flexión}) * (\delta M(x)) dx$$

$$\text{Deformación por flexión} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{E * I}$$

$$d * \delta_P = \int \frac{M(x)}{EI} * \delta M(x) dx$$

En el libro redactado por T. H. G. Megson, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$\delta w_{i,N} = \int \frac{N}{A} * dA * \varepsilon_v * \delta x \rightarrow \delta w_{i,N} = N * \varepsilon_v * \delta x$$

$$W_{i,N} = \int N * \varepsilon_v dx$$

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E} = \frac{N_v}{EA}$$

$$W_{i,N} = \int \frac{N_A * N_v}{EA} dx$$

En el libro redactado por Kenneth M. Leet y Chia-Ming Uang, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$\sum Q * \delta_p = \int M_Q * d\theta$$

$$d\theta = \frac{M_p}{E * I} * dx$$

$$\sum Q * \delta_p = \int M_Q * \frac{M_p}{E * I} * dx$$

En el libro redactado por S. T. Mau, se basa en la formulación del principio de la conservación de la energía, el trabajo externo es igual al trabajo interno, aplicando el trabajo virtual mediante esta ecuación se formula el desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica. Para el cálculo del desplazamiento con este criterio depende de la naturaleza del tipo de fuerza interna que genera el desplazamiento.

$$\delta W = \delta U$$

$$\delta U = \int m(x) * \frac{M(x)}{EI} * dx$$

$$\delta W = 1 * \Delta$$

$$1 * \Delta = \int m(x) * \frac{M(x)}{EI} * dx$$

En la investigación desarrollada en la tesis, se plantea y se demuestra la ecuación que representa el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural. Mediante esta ecuación y de por medio la ecuación del teorema de Castigliano podemos calcular el desplazamiento de una coordenada de un cuerpo elástico.

$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$\Delta_i = \int \frac{N(x)}{A * E} \delta N(x) dx + \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} \delta V(x) dx +$$

$$\int \frac{M(x)}{I * E} \delta M(x) dx + \int \frac{T(x)}{J * G} * \delta T(x) * dx$$

$$\Delta_{ij} = \int Cse_{(x)} * q_i * \delta q_i dx$$

6.2. Contrastación de hipótesis

Bajo Las limitaciones de un análisis lineal en un cuerpo elástico identificamos dos lemas, teorema de Castigliano y la Ecuación del trabajo virtual. Estos lemas nos sirven de base para la determinación del proceso de demostración de un teorema que se plantea como una relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, para el cálculo del desplazamiento de una coordenada de una estructura elástica.

El teorema demostrado y el primer lema considerado nos conducen a la aplicación en el cálculo del desplazamiento de una coordenada de una estructura y plantear el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema que relaciona la fuerza interna virtual y la fuerza interna real, por lo tanto, se pueda afirmar que quedan demostrado las hipótesis planteadas en el presente trabajo de investigación, mediante las siguientes ecuaciones.

Teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa

$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

Desplazamiento total de una coordenada de una estructura

$$\Delta_{ij} = \int Cse(x) * q_i * \delta q_i dx$$

$$\Delta_i = \int \frac{N(x)}{A * E} \delta N(x) dx + \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} \delta V(x) dx + \int \frac{M(x)}{I * E} \delta M(x) dx + \int \frac{T(x)}{J * G} \delta T(x) * dx$$

$$Cse(x) = \begin{cases} \frac{1}{AE} & \text{Fuerza axial} \\ \frac{k}{A * G} & \text{Fuerza cortante} \\ \frac{1}{I * E} & \text{Momento flector} \\ \frac{1}{J * G} & \text{Momento torsor} \end{cases}$$

Método de flexibilidad

$$\begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{1Q} \\ \Delta_{2Q} \\ \Delta_{3Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad \text{Para un } \mathbf{f}_{ij} = \Delta_{ij}$$

VII. CONCLUSIONES

El objetivo general crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real, los objetivos específicos conducen a determinar el objetivo general y darle utilidad. Cálculo de desplazamiento de una coordenada de una estructura y también en aplicar en la formulación del método de flexibilidad.

Esta tesis ha demostrado que existe un teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

Se afirma que existe una ecuación matemática que relaciona las fuerzas internas virtuales y fuerzas internas reales, que son obtenidas con los lemas.

Se puede calcular el desplazamiento de una coordenada de una estructura aplicando el teorema de Castigliano y el nuevo teorema que relaciona la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

Se pueden calcular las redundantes de un cuerpo elástico aplicando el método de flexibilidad donde se introduce el teorema de Castigliano y el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.

Por ultimo, mediante un solo procedimiento podemos demostrar el desplazamiento de una coordenada de una estructura, sea cual sea la naturaleza de la fuerza interna. Esto aplicando la energía de deformación interna de la estructura, el teorema de Castigliano, el teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.

VIII. RECOMENDACIONES

Incentivar la producción de investigación básica o pura, para la obtención de conocimientos nuevos y/o complementarios a los ya existentes, con el fin de hacer nuevos descubrimientos.

Se recomienda al lector que este teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, es aplicable a elementos estructurales en un análisis línea elástico.

Se puede hacer uso de este teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, en el proceso de enseñanza y aprendizaje en los cursos donde se enseñe el análisis estructural, donde se determinen desplazamientos de una coordenada de una estructura elástica y redundantes de una estructura hiperestática.

Se recomienda continuar con el trabajo de investigación, buscar otras aplicaciones del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural. También se pueden aumentar condiciones teniendo en cuenta los límites del análisis, se puede realizar un estudio para posteriores investigaciones en un rango no lineal.

IX. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Borjas, M. (2016). *Metodología de la Investigación Científica para Ingenieros*. https://www.academia.edu/33692697/Metodolog%C3%ADa_de_Investigaci%C3%B3n_Cient%C3%ADfica_para_ingenier%C3%ADa_Civil.
- Connor, J., & Faraji, S. (2016). *Fundamentals of Structural Engineering*. Springer. <https://www.technicalbookspdf.com/fundamentals-of-structural-engineering-second-edition-by-jerome-j-connor-and-susan-faraji/>.
- González, N. (2007). *Análisis Estructural Apuntes y Problemas*. https://www.academia.edu/15105545/An%C3%A1lisis_Estructural_Gonz%C3%A1lez_Cuevas.
- Hibbeler, R. (2012). *Análisis Estructural*. Pearson. https://www.academia.edu/15952734/An%C3%A1lisis_Estructural_R_C_Hibbeler_8va_Edici%C3%B3n.
- Kassimali, A. (2020). *Structural Analysis*. Cengage. https://engforall.com/structural-analysis-si-edition-sixth-edition-2020-by-aslam-kassimali/?feed_id=1729&_unique_id=606b2dbc48909.
- Leet et al., .. (2018). *Fundamentals of Structural Analysis*. Mc Graw Hill Education. <https://es.scribd.com/document/542010905/Fundamentals-of-Structural-Analysis-5th-Edition-c2018-Txtbk>.
- Leet, K., & Uang, C.-M. (2005). *Fundamentals of Structural Analysis*. Mc Graw Hill. https://www.academia.edu/16206259/Leet_K_M_Fundamentals_of_Structural_ysis_2nd_ed_2005.
- Luthe, R. (1997). *Análisis Estructural*. Alfaomega. <https://www.udocz.com/apuntes/13048/analisis-estructural---luthe-pdf-2>.
- Mau, S. (2003). *Fundamentals of Structural Analysis*. <https://documents.pub/document/fundamentals-of-structural-analysis-mau.html?page=1>.

Megson, T. (2010). *Aircraft Structural Analysis*. Elsevier. <https://www.technicalbookspdf.com/download/?file=14809>.

Rosas, J. (2009). *Diccionario de Matemáticas*. EMU. <https://miranda800329.files.wordpress.com/2015/07/diccionario-de-matematicas.pdf>.

Soto, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. <https://www.aprendematematicas.org.mx/wp-content/uploads/2017/04/Diccionario-Illustrado-de-Conceptos-Matematicos.pdf>.

Udoeyo, F. (2020). *Structural Analysis*. North Broad. <https://www.coursehero.com/file/92178626/Udoeyo-Structural-Analysis-02-05-21pdf/>.

X. ANEXOS

10.1. Cronograma

Tabla 2

Cronograma de Actividades

ACTIVIDADES	Duración (semanas)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ejecución del Proyecto	X	X	X	X								
Determinar los lemas que sirven de base para poder formular la relación matemática que existe entre las fuerzas internas virtual y fuerzas internas reales derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.	X	X	X									
Demostrar el teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.				X	X							
Captación de datos	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
Aplicación del instrumento de recolección de datos, observación científica y el cálculo matemático.	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
Procesamiento y Análisis					X	X	X	X	X			
Determinación del desplazamiento de una coordenada de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.					X	X	X					
Planteamiento del método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa.								X	X			
Elaboración del Informe Final								X	X	X	X	
Revisión general de los resultados								X	X	X		
Preparación del informe final									X	X	X	
Publicación												X
Presentación y sustentación del informe final												X

10.2.Presupuesto

Tabla 3

Presupuesto de la Investigación

ÍTEM	Unidad medida	cantidad	P.U. S/.	Sub Total
PRESUPUESTO TOTAL				S/. 5,642.00
<i>Servicio</i>				S/. 4,159.00
Fotocopias	global	2000	S/. 0.40	S/. 800.00
Internet	meses	7	S/. 110.00	S/. 770.00
Antivirus	global	1	S/. 300.00	S/. 300.00
Microsoft 365	global	1	S/. 290.00	S/. 290.00
Office Profesional	global	1	S/. 1,999.0	S/. 1,999.0
<i>Útiles y materiales de oficina</i>				S/. 1,104.00
Papel bond	millar	10	S/. 20.00	S/. 200.00
Folder manilo A4	unidad	10	S/. 1.00	S/. 10.00
Sobre manila A4	unidad	10	S/. 1.00	S/. 10.00
Lapiceros	caja	1	S/. 20.00	S/. 20.00
Anillados	unidad	10	S/. 3.00	S/. 30.00
Archivadores	unidad	4	S/. 17.00	S/. 68.00
USB	unidad	2	S/. 75.00	S/. 150.00
Libros de Especialidad	unidad	8	S/. 90.00	S/. 720.00
Libros de investigación	unidad	4	S/. 65.00	S/. 260.00
<i>Trámite administrativo</i>				S/. 15.00
Revisión y designación de jurados	global	1	S/. 15.00	S/. 15.00

10.3. Matriz de consistencia

Tabla 4

Matriz de Consistencia

TÍTULO: “PROPUESTA DEL TEOREMA DE LA RELACIÓN DE FUERZA INTERNA VIRTUAL Y LA FUERZA INTERNA REAL DERIVADO PARCIALMENTE RESPECTO A UNA CARGA VIRTUAL EXTERNA EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL”

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	VARIABLES	HIPÓTESIS GENERAL	METODOLOGÍA
¿Existe algún teorema que relacione la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?	Crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.	VARIABLE INDEPENDIENTE Fuerza interna real y virtual	El teorema planteado crea la relación entre la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.	TIPO DE INVESTIGACIÓN Investigación básica o pura
PROBLEMAS ESPECÍFICOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS		HIPÓTESIS ESPECÍFICA	
¿Cómo influyen los lemas para crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?	Determinar los lemas para crear el teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.	VARIABLE DEPENDIENTE	Existe una relación matemática entre los lemas para la creación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.	DISEÑO DE INVESTIGACIÓN No experimental
¿Cómo se determina el desplazamiento de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?	Determinar el desplazamiento de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.	Teorema de la relación de la fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa	Se calcula el desplazamiento de una estructura mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, mediante la energía de deformación interna.	POBLACIÓN No cuenta con una población
¿Cómo se plantea el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural?	Plantear el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural.		Se plantea el método de flexibilidad mediante la aplicación del teorema de la relación de fuerza interna virtual y la fuerza interna real derivado parcialmente respecto a una carga virtual externa en el análisis estructural, mediante la energía de deformación interna.	MUESTRA No cuenta con una muestra
				INSTRUMENTO Cálculo matemático



10.4. Ejemplos de aplicación

DENOMINACIÓN DE LOS TÉRMINOS

EEE: Ecuaciones estáticas de equilibrio, en el plano serían: la sumatoria de fuerzas en el X igual a cero, la sumatoria de fuerzas en el Y igual a cero y el momento total en un punto igual a cero.

Isostática: Cuando las reacciones de una estructura pueden ser determinadas con las EEE.

Hiperestática: La estructura está en equilibrio y las EEE no son suficientes para determinar las reacciones y/o fuerzas internas.

δ : cuando se antepone a cualquier notación, esta expresa ser de origen virtual.

GHT: Grado de hiperestáticidad total, resulta de la suma de GHE más GHI.

GHE: Grado de hiperestáticidad exterior, Son el número de reacciones denominadas redundantes que no pueden ser determinadas con las EEE.

GHI: Grado de hiperestáticidad interior, Son el número de fuerzas internas denominada redundantes que no pueden ser determinadas con las EEE.

RAXQ: Reacción en el punto (A) en la dirección (X) en el sistema de cargas (Q).

RAX1: Reacción en el punto (A) en la dirección (X) en el sistema de cargas (1).

$\delta RAX1$: Reacción virtual en el punto (A) en la dirección (X) en el sistema de cargas (1), cuando ($\delta R1=1$).

ΔC : Desplazamiento en el punto (C).

ΔCQ : Desplazamiento en el punto (C), bajo el sistema de carga (Q).

$\Delta C1$: Desplazamiento en el punto (C), bajo el sistema de carga (1).

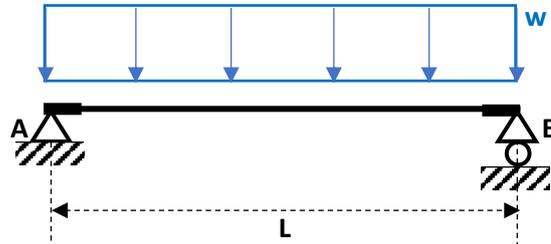
Δ_{ij} : Cuando aplicamos el nuevo teorema, desplazamiento en dirección de la redundante y/o coordenada (i) bajo el efecto de la carga en la redundante y/o coordenada (j).

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga y/o coordenada (j). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas y/o coordenada ($\delta R_i=1$).

Δ_{Aij} : Cuando aplicamos el nuevo teorema, desplazamiento en el punto (A) en dirección de la redundante y/o coordenada (i) bajo el efecto de la carga en la redundante y/o coordenada (j).

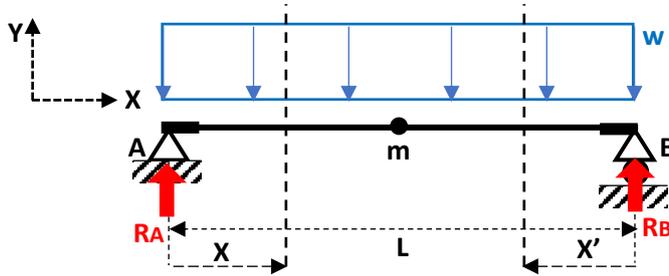
Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga y/o coordenada (j). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de carga y/o coordenada ($\delta R_i=1$).

1) Calcular el desplazamiento lineal en el punto medio y el giro en el apoyo (A) en la viga isostática con una carga distribuida (w), las propiedades de $EI = \text{cte.}$



Solución:

- Determinación de las fuerzas internas reales debido a la carga real externa.



○ Cálculo de las reacciones.

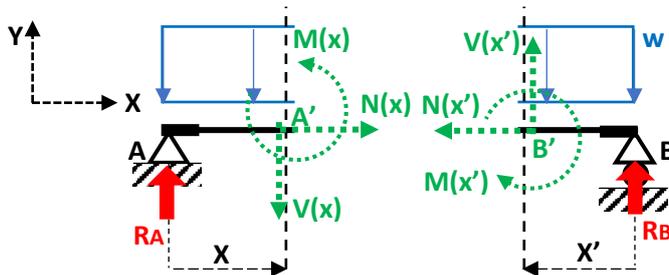
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow R_A + R_B = w * L \quad \dots (EEE1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B * L = w * L * \frac{L}{2} \rightarrow R_B = w * \frac{L}{2} \quad \dots (EEE2)$$

Reemplazando la EEE (2) en (1)

$$R_A + R_B = w * L \rightarrow R_A + \frac{w * L}{2} = w * L \rightarrow R_A = \frac{w * L}{2}$$

○ Fuerzas internas reales, en dirección de las referencias tomadas.



$$0 \leq X \leq L/2$$

$$\sum M_{A'} = 0 \rightarrow M_{(x)} = R_A * X - w * X * \frac{X}{2} = \frac{w}{2} (L * X - X^2)$$

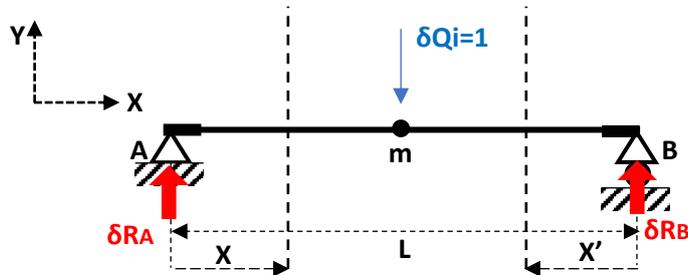
$$0 \leq X' \leq L/2$$

$$\sum M_{B'} = 0 \rightarrow M_{(x')} = R_B * X' - w * X' * \frac{X'}{2} = \frac{w}{2} (L * X' - X'^2)$$

- Determinación de las fuerzas internas virtuales debido a la carga virtual externa.

$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1 \quad \dots \text{Aplicando el nuevo teorema}$$

- Para el cálculo del desplazamiento lineal del medio.



- Cálculo de las reacciones virtuales.

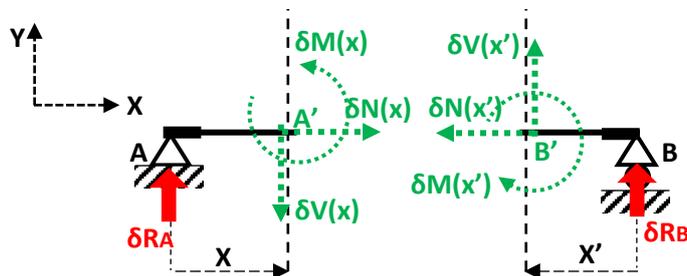
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \delta R_A + \delta R_B = 1 \quad \dots (\delta EEE1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \delta R_B * L = 1 * \frac{L}{2} \rightarrow \delta R_B = \frac{1}{2} \quad \dots (\delta EEE2)$$

Reemplazando la δEEE (2) en (1)

$$\delta R_A + \delta R_B = 1 \rightarrow \delta R_A + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \delta R_A = \frac{1}{2}$$

- Fuerzas internas virtuales, en dirección de las referencias tomadas.



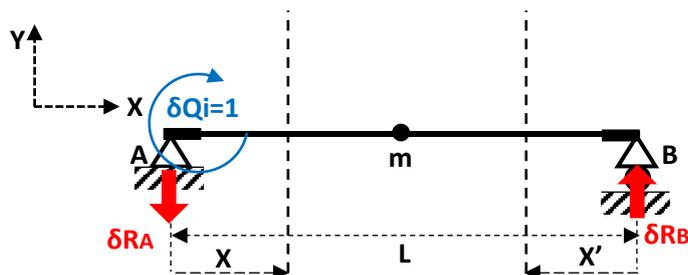
$$0 \leq X \leq L/2$$

$$\sum M_{A'} = 0 \rightarrow \delta M_{(x)} = \delta R_A * X = \frac{1}{2} * X$$

$$0 \leq X' \leq L/2$$

$$\sum M_{B'} = 0 \rightarrow \delta M_{(x')} = \delta R_B * X' = \frac{1}{2} * X'$$

- Para el cálculo del giro en el apoyo A.



o **Cálculo de las reacciones virtuales.**

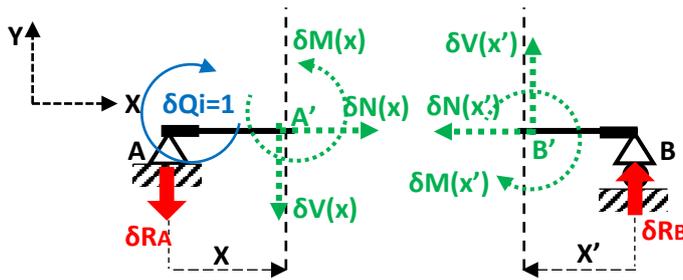
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \delta R_A = \delta R_B \quad \dots (\delta EEE3)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \delta R_B * L = 1 \rightarrow \delta R_B = \frac{1}{L} \quad \dots (\delta EEE4)$$

Reemplazando la δEEE (4) en (3)

$$\delta R_A = \delta R_B = \frac{1}{L}$$

o **Fuerzas internas virtuales, en dirección de las referencias tomadas.**



$$0 \leq X \leq L/2$$

$$\sum M_{A'} = 0 \rightarrow \delta M_{(x)} = 1 - \delta R_A * X = 1 - \frac{X}{L}$$

$$0 \leq X' \leq L/2$$

$$\sum M_{B'} = 0 \rightarrow \delta M_{(x')} = \delta R_B * X' = \frac{X'}{L}$$

• **Cálculo del desplazamiento lineal en el punto medio y el giro en el apoyo A.**

o **Desplazamiento lineal en el punto medio.**

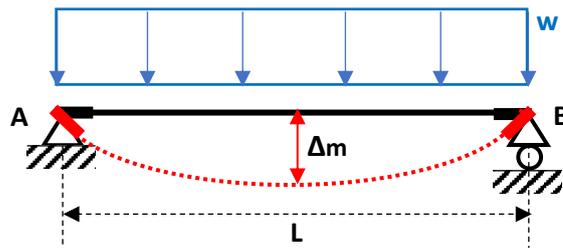
Aplicando el nuevo teorema

$$\Delta_i = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx \leftrightarrow \delta Q_i = 1$$

$$\Delta_m = \int_0^{L/2} \frac{1}{EI} * \frac{w}{2} (L * X - X^2) * \frac{X}{2} dx + \int_0^{L/2} \frac{1}{EI} * \frac{w}{2} (L * X' - X'^2) * \frac{X'}{2} dx'$$

$$\Delta_m = 2 * \int_0^{L/2} \frac{1}{EI} * \frac{w}{2} (L * X - X^2) * \frac{X}{2} dx = \frac{w}{2EI} * \int_0^{L/2} (L * X^2 - X^3) dx$$

$$\Delta_m = \frac{w}{2EI} * \frac{5 * L^4}{192} = \frac{5wL^4}{384EI}$$



o Giro en el apoyo A.

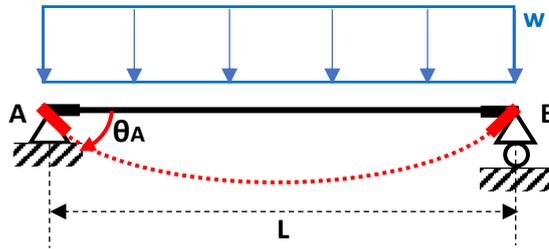
Aplicando el nuevo teorema

$$\theta_i = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx \leftrightarrow \delta Q_i = 1$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{1}{EI} * \frac{w}{2} (L * X - X^2) * (1 - \frac{X}{L}) dx + \int_0^L \frac{1}{EI} * \frac{w}{2} (L * X' - X'^2) * \frac{X'}{L} dx'$$

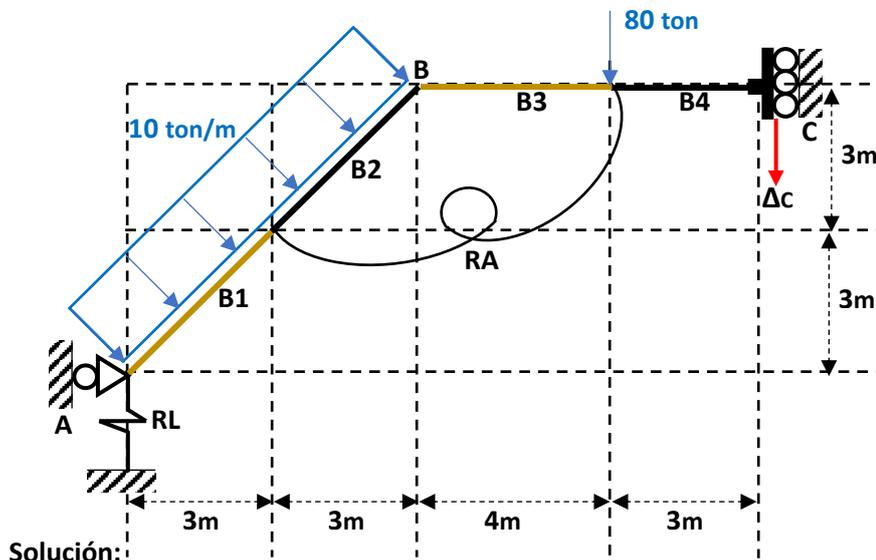
$$\theta_A = \frac{w}{2EI} \int_0^L (L * X - X^2) * (1 - \frac{X}{L}) dx + \frac{w}{2EI} \int_0^L (L * X' - X'^2) * \frac{X'}{L} dx'$$

$$\theta_A = \frac{w}{2EI} * \frac{11L^3}{192} + \frac{w}{2EI} * \frac{5L^3}{192} = \frac{wL^3}{24EI}$$



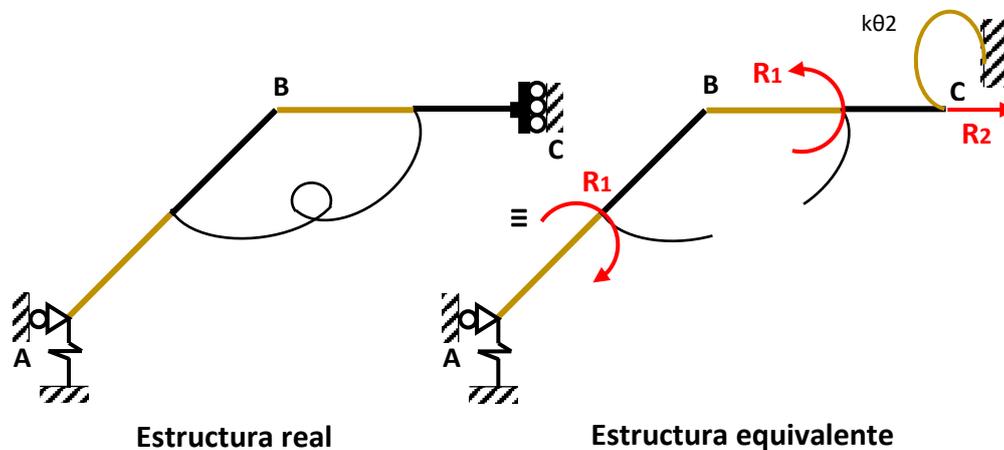
2) En la estructura propuesta en el plano se pide calcular las reacciones y el desplazamiento lineal en el punto (C) en la estructura hiperestática con las siguientes propiedades.

ELEMENTO	EI	RIGIDEZ
BARRA 1 (B1)	∞ (Sólido rígido)	
BARRA 2 (B2)	68266.66 ton*m ²	
BARRA 3 (B3)	∞ (Sólido rígido)	
BARRA 4 (B4)	68266.66 ton*m ²	
RESORTE RL (deformación lineal) k _{l1}		1000ton/m
RESORTE RA (deformación angular) k _{θ1}		2000ton*m/rad
RESORTE RAR (deformación angular Rígida) k _{θ2}		∞ (rígido)

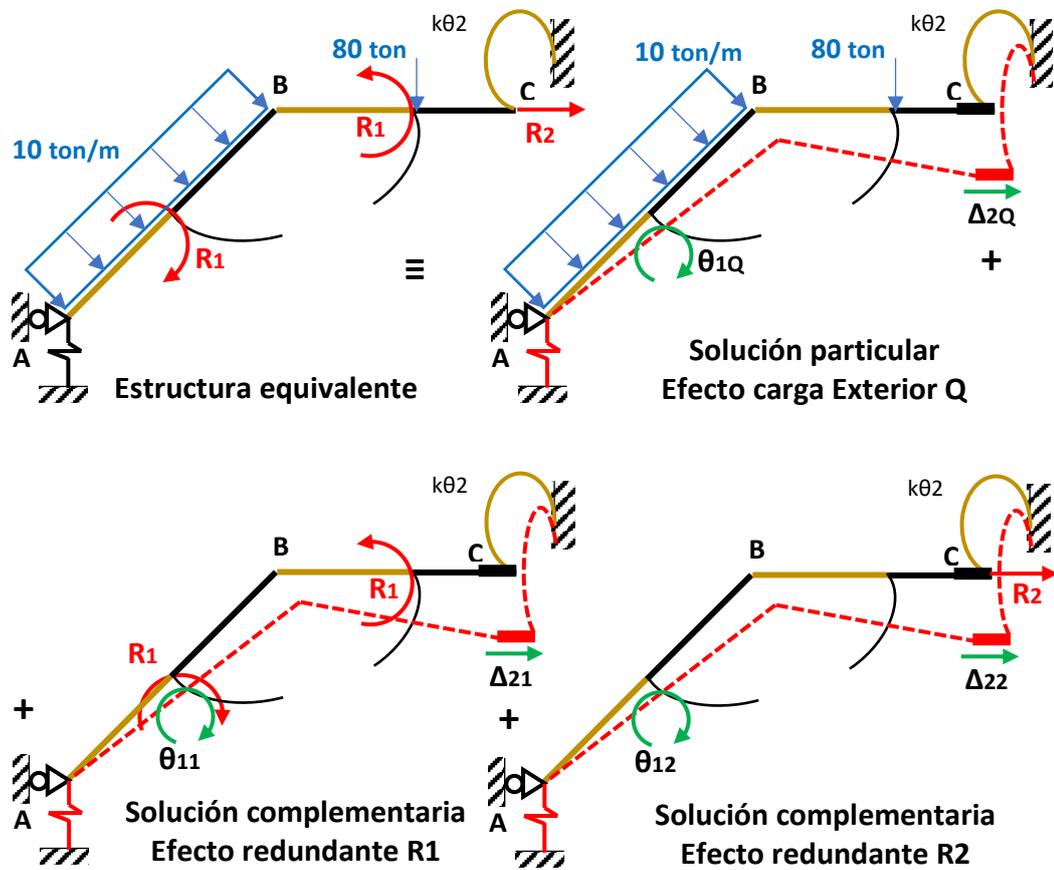


Solución:

- Estructura real en equivalente.
Isostatizamos la estructura
 $GHT = GHE + GHI = 1 + 1 = 2$
Liberamos una carga interna R1 y una carga externa R2.

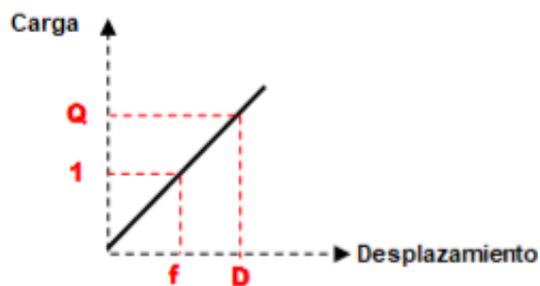


- Principio de superposición.



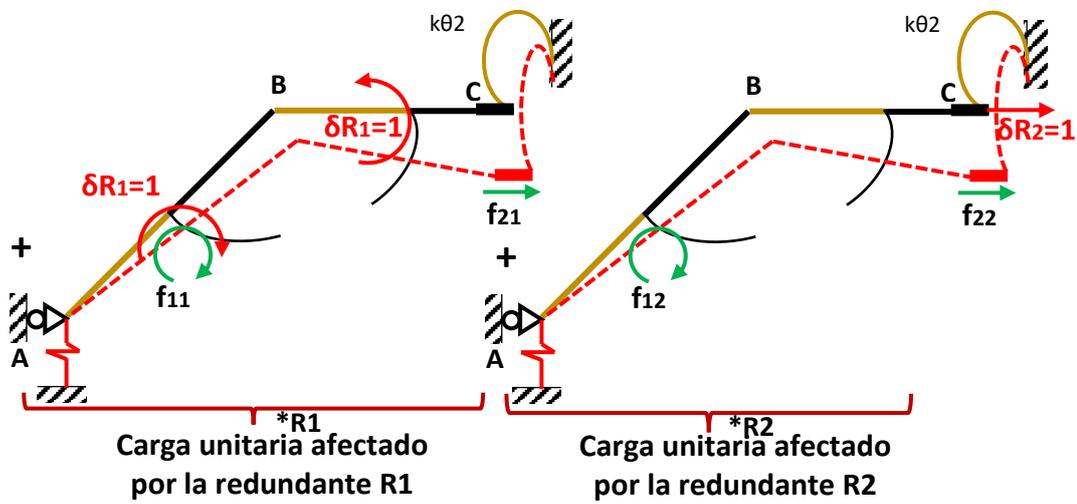
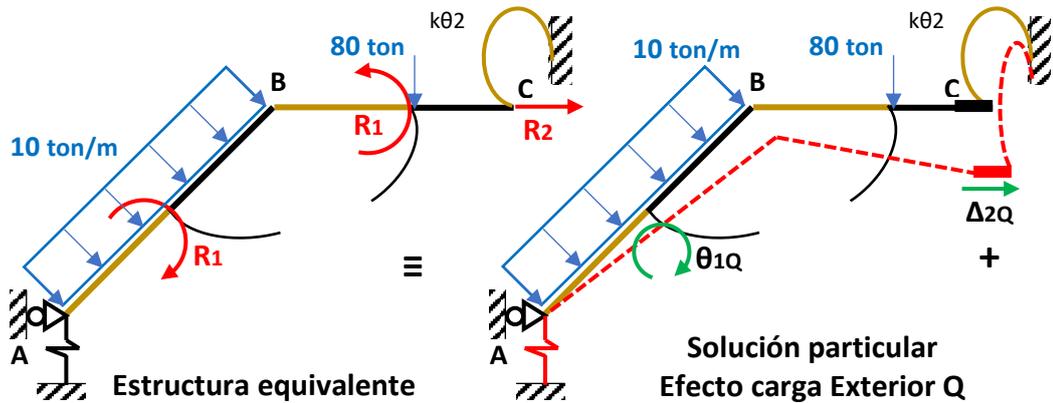
- Principio de linealidad.

Al aplicar una carga unitaria se obtiene un desplazamiento f , si queremos calcular el desplazamiento total multiplicamos el f por Q .



$$\frac{1}{f} = \frac{Q}{D} \quad \rightarrow \quad D = f * Q$$

- Sistema de cargas.



- **Desplazamiento por condición de contorno.**
Planteamos las ecuaciones de compatibilidad de deformación.
Reemplazando por el principio de linealidad.

$$\theta_{10} = 0 \rightarrow \theta_{10} = \theta_{1Q} + \theta_{11} + \theta_{12} \rightarrow \theta_{10} = \theta_{1Q} + f_{11} * R_1 + f_{12} * R_2$$

$$\Delta_{20} = 0 \rightarrow \Delta_{20} = \Delta_{2Q} + \Delta_{21} + \Delta_{22} \rightarrow \Delta_{20} = \Delta_{2Q} + f_{21} * R_1 + f_{22} * R_2$$

Bajo conceptos matriciales.
Reemplazando valores

$$\begin{vmatrix} \theta_{10} \\ \Delta_{20} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_{1Q} \\ \Delta_{2Q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_{1Q} \\ \Delta_{2Q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix}$$

Simplificando

Para un $f_{ij} = \Delta_{ij}$

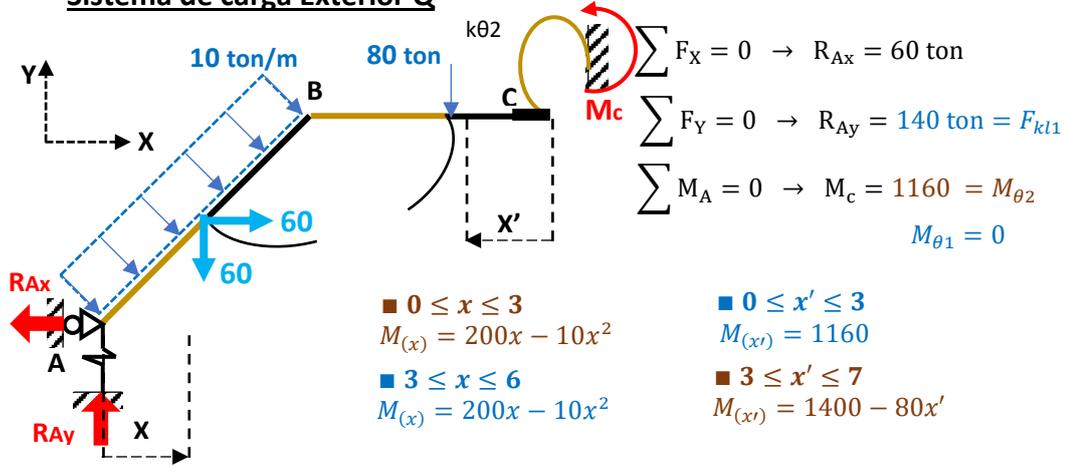
$$\Delta_{ij} = \int Cse(x) * q_i * \delta q_i dx \quad \begin{vmatrix} -\theta_{1Q} \\ -\Delta_{2Q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} \quad \dots (I)$$

- Fuerzas internas en los Sistemas de cargas.

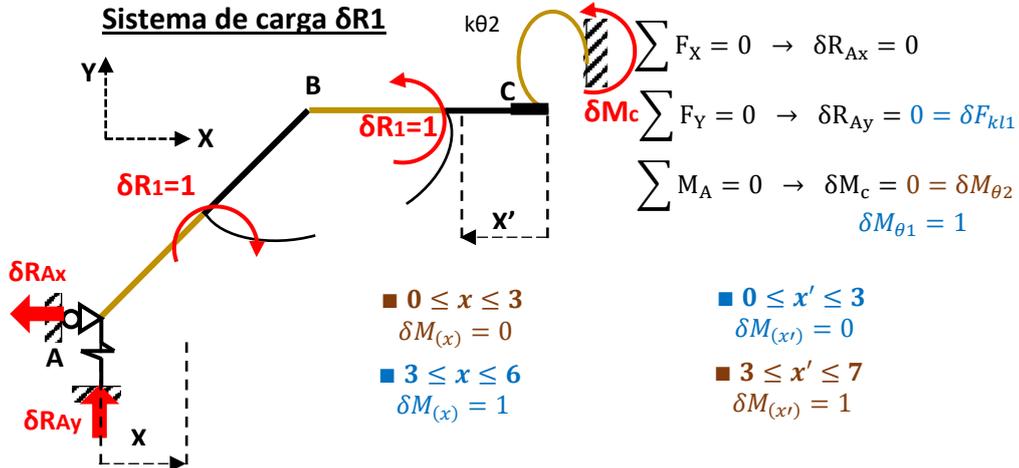
$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

... Aplicando el nuevo teorema

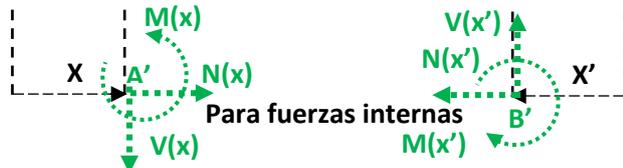
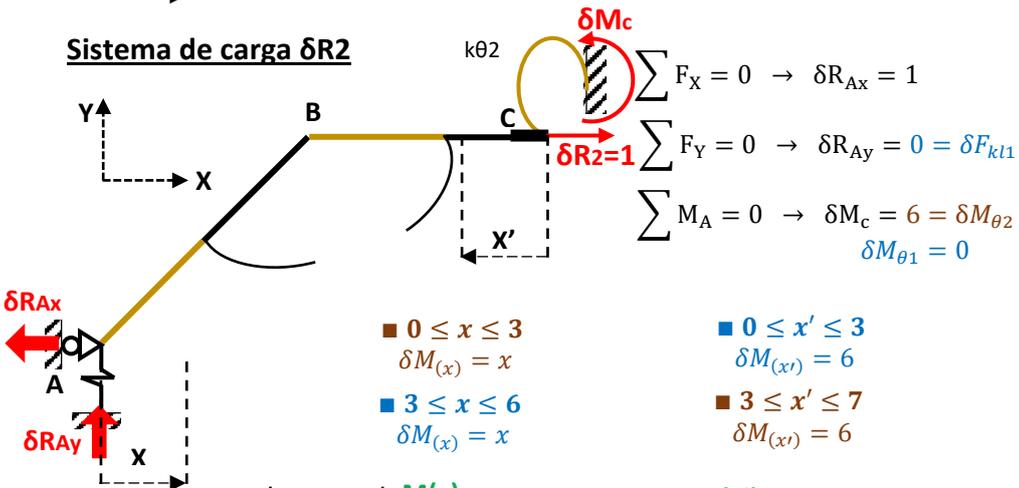
Sistema de carga Exterior Q



Sistema de carga $\delta R1$

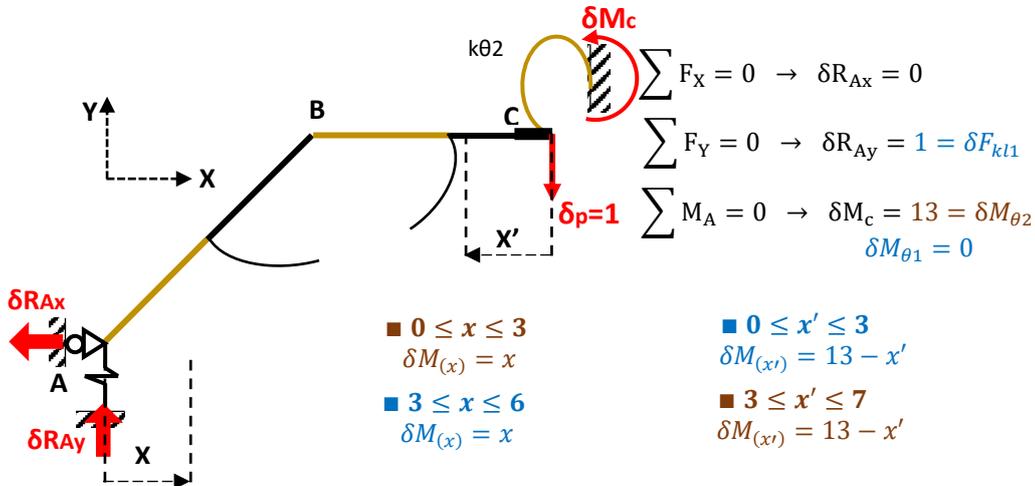


Sistema de carga $\delta R2$



Sistema de carga δp

Este sistema de carga se utiliza con el fin de determinar el desplazamiento en el punto C.



- Determinación de las redundantes.**

Según la ecuación (I).

Para un $f_{ij} = \Delta_{ij}$

$$\Delta_{ij} = \int Cse(x) * q_i * \delta q_i dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

$$\begin{vmatrix} -\theta_{1Q} \\ -\Delta_{2Q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} \quad \dots (I)$$

- o θ_{1Q} : Giro en dirección de la redundante 1 bajo el efecto de la carga externa Q.

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga externas (Q). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas ($\delta R_1=1$).

Aplicando el nuevo teorema

$$\theta_{1Q} = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \frac{N(x) * \delta N(x)}{k_{l1}} + \frac{M(x) * \delta M(x)}{k_{\theta 1}} \quad \leftrightarrow \quad \delta R_1 = 1$$

$$\theta_{1Q} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (200X - 10X^2) * (1) dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (1160) * (0) dx' + \frac{-140 * 0}{k_{l1}} + \frac{0 * -1}{k_{\theta 1}}$$

$$\theta_{1Q} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (200X - 10X^2) dx = \frac{2070}{EI} = 0.03032$$

- o Δ_{2Q} : Desplazamiento en dirección de la redundante 2 bajo el efecto de la carga externa Q.

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga externas (Q). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas ($\delta R_2=1$).

Aplicando el nuevo teorema

$$\Delta_{2Q} = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \frac{N(x) * \delta N(x)}{k_{l1}} + \frac{M(x) * \delta M(x)}{k_{\theta 1}} \quad \leftrightarrow \quad \delta R_2 = 1$$

$$\Delta_{2Q} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (200X - 10X^2) * (X)dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (1160) * (6)dx' + \frac{-140 * 0}{k_{l1}} + \frac{0 * 0}{k_{\theta 1}}$$

$$\Delta_{2Q} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (200X - 10X^2) * (X)dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (6960)dx' = \frac{60885}{2EI} = 0.446$$

o **f11: Desplazamiento en dirección de la redundante 1 bajo el efecto de la carga de la redundante 1 cuando $\delta R_1=1$.**

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga ($\delta R_1=1$). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas ($\delta R_1=1$). "Se está resolviendo un caso de desplazamiento o giro de una estructura isostática, donde la estructura está sujeto a una carga unitaria en dirección de la redundante que es considerado su carga externa para este subproblema, por eso se obtiene fuerzas internas (q_i).

$$f_{11} = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \frac{N(x) * \delta N(x)}{k_{l1}} + \frac{M(x) * \delta M(x)}{k_{\theta 1}} \leftrightarrow \delta R_1 = 1$$

$$f_{11} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (1) * (1)dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (0) * (0)dx' + \frac{0 * 0}{k_{l1}} + \frac{-1 * -1}{k_{\theta 1}}$$

$$f_{11} = \int_3^6 \frac{1}{EI} dx + \frac{1}{k_{\theta 1}} = \frac{3}{EI} + \frac{1}{k_{\theta 1}} = 0.00054$$

o **f12= f21: Desplazamiento en dirección de la redundante 1 bajo el efecto de la carga de la redundante 2 cuando $\delta R_2=1$.**

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga ($\delta R_2=1$). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas ($\delta R_1=1$).

$$f_{12} = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \frac{N(x) * \delta N(x)}{k_{l1}} + \frac{M(x) * \delta M(x)}{k_{\theta 1}} \leftrightarrow \delta R_2 = 1$$

$$f_{12} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (1) * (x)dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (0) * (6)dx' + \frac{0 * 0}{k_{l1}} + \frac{-1 * 0}{k_{\theta 1}}$$

$$f_{12} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (x)dx = \frac{27}{2EI} = 0.00019$$

o **f22: Desplazamiento en dirección de la redundante 2 bajo el efecto de la carga de la redundante 2 cuando $\delta R_2=1$.**

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga ($\delta R_2=1$). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas ($\delta R_2=1$).

$$f_{22} = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \frac{N(x) * \delta N(x)}{k_{l1}} + \frac{M(x) * \delta M(x)}{k_{\theta 1}} \leftrightarrow \delta R_2 = 1$$

$$f_{22} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (x) * (x)dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (6) * (6)dx' + \frac{0 * 0}{k_{l1}} + \frac{0 * 0}{k_{\theta 1}}$$

$$f_{22} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (x^2)dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (36)dx' = \frac{171}{EI} = 0.00250$$

○ **Determinación de la redundante.**

$$\begin{vmatrix} -\frac{2070}{EI} \\ 60885 \\ -\frac{27}{2EI} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{EI} + \frac{1}{k_{\theta 1}} & \frac{27}{2EI} \\ \frac{27}{2EI} & \frac{171}{EI} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -0.03032 \\ -0.446 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.00054 & 0.00019 \\ 0.00019 & 0.00250 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.00054 & 0.00019 \\ 0.00019 & 0.00250 \end{vmatrix}^{-1} * \begin{vmatrix} -0.03032 \\ -0.446 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1902.7323 & -144.6076 \\ -144.6076 & 410.9901 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -0.03032 \\ -0.446 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6.8041 \text{ ton} * m \\ -178.9171 \text{ ton} \end{vmatrix}$$

● **Determinación de las reacciones.**

Para determinar las reacciones hacemos uso del sistema de cargas. Conociendo las redundantes la estructura equivalente es un caso isostático y bajo el principio de superposición podemos determinar las reacciones que estos tres sistemas independizados generar sobre las reacciones.

- Principio de superposición.
- Planteamos las ecuaciones reemplazando por el principio de linealidad.

$$R_{Ax} = R_{AxQ} + R_{Ax1} + R_{Ax2} \rightarrow R_{Ax} = R_{AxQ} + \delta R_{Ax1} * R_1 + \delta R_{Ax2} * R_2$$

$$R_{Ay} = R_{AyQ} + R_{Ay1} + R_{Ay2} \rightarrow R_{Ay} = R_{AyQ} + \delta R_{Ay1} * R_1 + \delta R_{Ay2} * R_2$$

$$M_C = M_{CQ} + M_{C1} + M_{C2} \rightarrow M_C = M_{CQ} + \delta M_{C1} * R_1 + \delta M_{C2} * R_2$$

Bajo conceptos matriciales.

Reemplazando valores

$$\begin{vmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{AxQ} \\ R_{AyQ} \\ M_{CQ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta R_{Ax1} & \delta R_{Ax2} \\ \delta R_{Ay1} & \delta R_{Ay2} \\ \delta M_{C1} & \delta M_{C2} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 60 \\ 140 \\ 1160 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 6.8041 \\ -178.9171 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -118.9171 \text{ ton} \\ 140.0000 \text{ ton} \\ 86.49729 \text{ ton} * m \end{vmatrix}$$

- **Determinación del desplazamiento en el punto (Δ_C).**

Para determinar el desplazamiento hacemos uso del sistema de cargas. Conociendo las redundantes la estructura equivalente es un caso isostático y bajo el principio de superposición podemos determinar los desplazamientos que estos tres sistemas independizados generar sobre el desplazamiento del punto C. Para este caso necesitamos un sistema de carga donde se desea calcular el desplazamiento, conocido como Sistema de carga $\delta_c=1$.

- Principio de superposición.
- Para calcular el desplazamiento en cada sistema, combinamos con el sistema de cargas $\delta_c=1$.
- Planteamos las ecuaciones reemplazando por el principio de linealidad.

$$\Delta_C = \Delta_{CQ} + \Delta_{C1} + \Delta_{C2} \rightarrow \Delta_C = \Delta_{CpQ} + \Delta_{Cp1} * R_1 + \Delta_{Cp2} * R_2 \quad \dots (II)$$

$$\Delta_{CpQ} = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \frac{N(x) * \delta N(x)}{k_{l1}} + \frac{M(x) * \delta M(x)}{k_{\theta 1}} \leftrightarrow \delta_p = 1$$

$$\Delta_{CpQ} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (200X - 10X^2) * (X) dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (1160) * (13 - X') dx' + \frac{-140 * -1}{k_{l1}} + \frac{0 * 0}{k_{\theta 1}}$$

$$\Delta_{CpQ} = \int_3^6 \frac{1}{EI} (200X^2 - 10X^3) dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} (15080 - 1160X') dx' + \frac{140}{k_{l1}}$$

$$\Delta_{CpQ} = \frac{99165}{2EI} + \frac{140}{k_{l1}} = 0.86630$$

$$\Delta_{Cp1} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (1) * (X) dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (0) * (13 - X') dx' + \frac{0 * -1}{k_{l1}} + \frac{-1 * -1}{k_{\theta 1}}$$

$$\Delta_{Cp1} = \int_3^6 \frac{1}{EI} (X) dx + \frac{1}{k_{\theta 1}}$$

$$\Delta_{Cp1} = \frac{27}{2EI} + \frac{1}{k_{\theta 1}} = 0.00069$$

$$\Delta_{Cp2} = \int_3^6 \frac{1}{EI} * (X) * (X) dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} * (6) * (13 - X') dx' + \frac{0 * -1}{k_{l1}} + \frac{0 * 0}{k_{\theta 1}}$$

$$\Delta_{Cp2} = \int_3^6 \frac{1}{EI} (X^2) dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} (78 - 6X') dx'$$

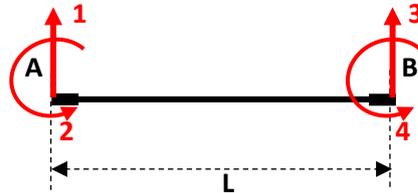
$$\Delta_{Cp2} = \frac{270}{EI} = 0.00395$$

Reemplazando en la ecuación (II)

$$\Delta_C = \Delta_{CpQ} + \Delta_{Cp1} * R_1 + \Delta_{Cp2} * R_2$$

$$\Delta_C = 0.8663 + 0.00069 * 6.8041 + 0.00395 * (-178.9171) = 0.164 m$$

3) En una viga inextensible se pide terminar su matriz de rigidez, donde la viga cuenta con 4 grados de libertad (4gdl), 2 gdl traslacionales y 2gdl rotacionales. Tomar el efecto a flexión y corte, con las siguientes propiedades: $EI=cte$, $GA=cte$. Y $EA=\infty$.



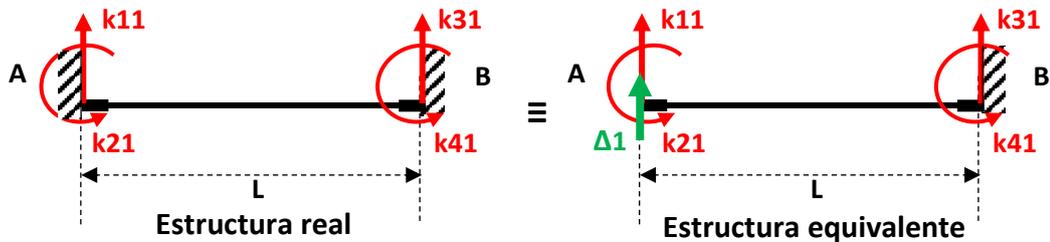
Solución:

- **Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez k_{ij} .**

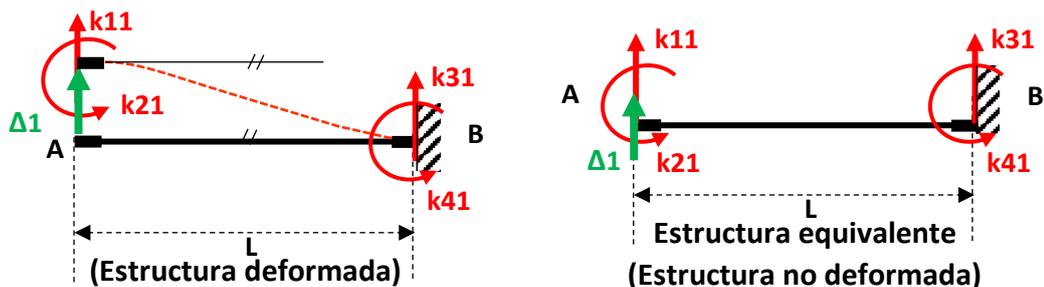
○ Cuando $\Delta_1=1$ y $\theta_2=\Delta_3=\theta_4=0$

La estructura puede idealizarse en ambos extremos empotrado sujeto a una carga externa originado por un desplazamiento según las condiciones del problema. Donde k_{ij} son las reacciones o fuerzas de empotramiento de la estructura hiperestática.

- **Estructura real:** Estructura idealizada que posee la característica hiperestática.
GHT=GHE+GHI=2+0=2
- **Estructura equivalente:** Estructura idealizada que posee la característica isostática.
Debido a que el GHT=2, las dos redundantes del extremo (A) se liberan y son consideradas cargas externas.



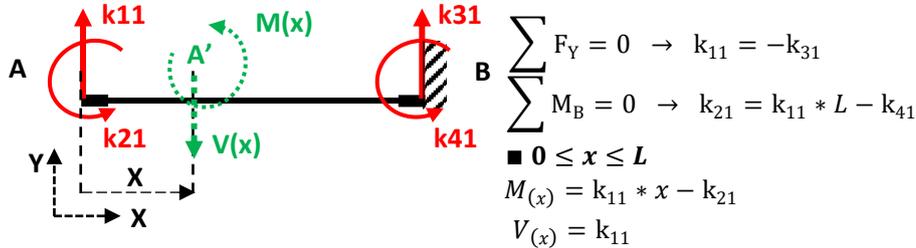
La estructura equivalente por condiciones iniciales del problema posee una deformación, es como se muestra en el grafico izquierdo. Pero debido al uso de la energía de deformación, implica determinar las reacciones para poder determinar las fuerzas internas, es por eso que el equilibrio se realiza en la estructura no deformada en el grafico derecho.



Nota: Por condiciones de equilibrio no es necesario determinar la deformación, pero si tener en cuenta que es una condición inicial del problema y las EEE se realizan en la estructura no deformada. En los siguientes planteamientos se considerará esta nota.

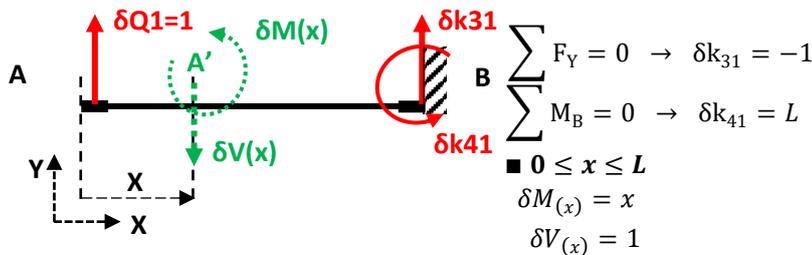
o **Sistema de cargas Q**

Carga externa originada por un desplazamiento $\Delta_1=1$ y $\theta_2=0$.



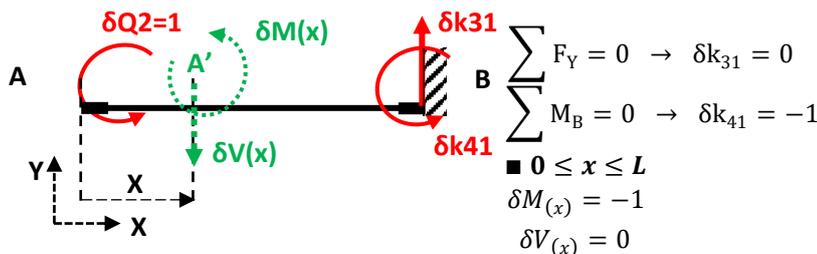
o **Sistema de cargas $\delta Q_1=1$**

$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$
... Aplicando el nuevo teorema



o **Sistema de cargas $\delta Q_2=1$**

$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$
... Aplicando el nuevo teorema



o **Desplazamiento por condiciones de contorno.**

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga externas (Q). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas ($\delta Q_1=1$).

El factor de forma lo cambiaremos $k_1=f$ (para evitar la confusión con la rigidez).

Aplicando el nuevo teorema

$$\Delta_1 = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} * \delta V(x) * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_1 = 1$$

$$\Delta_1 = \int_0^L \frac{1}{EI} * (k_{11} * X - k_{21}) * (X) dx + \int_0^L \frac{f}{GA} * (k_{11}) * (1) dx$$

$$\Delta_1 = 1 = \frac{1}{EI} \int_0^L (k_{11} * X^2 - k_{21} * X) dx + \frac{f}{GA} \int_0^L (k_{11}) dx$$

$$1 = \frac{1}{EI} \left(k_{11} * \frac{L^3}{3} - k_{21} * \frac{L^2}{2} \right) + \frac{f}{GA} * (k_{11}) * L = \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{f * L}{GA} \right) * k_{11} - \frac{L^2}{2EI} * k_{21}$$

$$1 = \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{f * L}{GA} \right) * k_{11} - \frac{L^2}{2EI} * k_{21} \quad \dots (I)$$

Fuerzas internas (qi) bajo el primer sistema de carga externas (Q). Fuerzas internas virtuales (δqi) bajo el segundo sistema de cargas (δQ2=1).

Aplicando el nuevo teorema

$$\theta_2 = \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x})}{\mathbf{I} * \mathbf{E}} * \delta \mathbf{M}(\mathbf{x}) * d\mathbf{x} + \int \frac{\mathbf{k}_1 * \mathbf{V}(\mathbf{x})}{\mathbf{A} * \mathbf{G}} * \delta \mathbf{V}(\mathbf{x}) * d\mathbf{x} \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_2 = 1$$

$$\theta_2 = \int_0^L \frac{1}{EI} * (k_{11} * X - k_{21}) * (-1) dx + \int_0^L \frac{f}{GA} * (k_{11}) * (0) dx$$

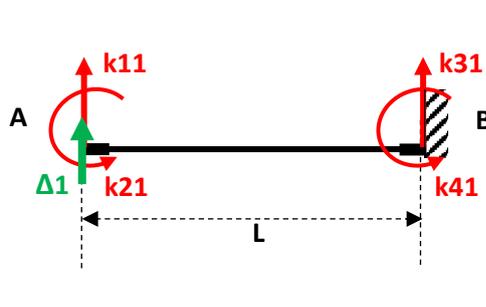
$$\theta_2 = 0 = \int_0^L \frac{1}{EI} (-k_{11} * X + k_{21}) dx = \frac{1}{EI} \left(-k_{11} \frac{L^2}{2} + k_{21} L \right) \rightarrow \frac{k_{11} * L}{2} = k_{21} \quad \dots (II)$$

Reemplazado (II) en (I). Dividiendo al numerador y denominador por GA luego factorizamos L^3 , se da forma para cambiar por el siguiente valor.

$$\phi = \frac{3EIf}{GAL^2}$$

$$k_{11} = \frac{12EI * GA}{GAL^3 + 12EIfL} = \frac{12EI}{L^3(1 + 4\frac{3EIf}{GAL^2})} \rightarrow k_{11} = \frac{12EI}{L^3(1 + 4\phi)} \rightarrow k_{21} = \frac{6EI}{L^2(1 + 4\phi)}$$

Los elementos de la matriz ki1

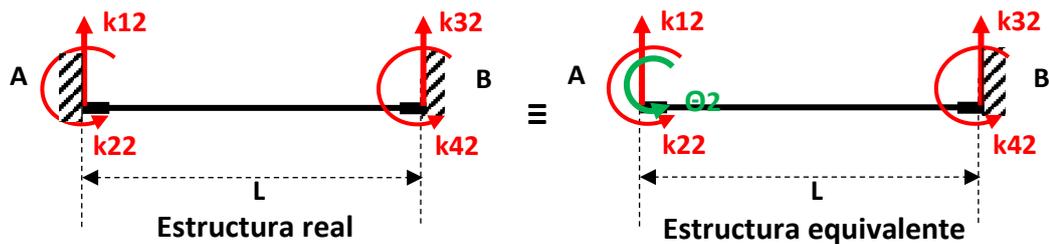


$$k_{i1} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1 + 4\phi)} \\ \frac{6EI}{L^2(1 + 4\phi)} \\ -12EI \\ \frac{6EI}{L^2(1 + 4\phi)} \end{bmatrix}$$

- **Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez ki2.**

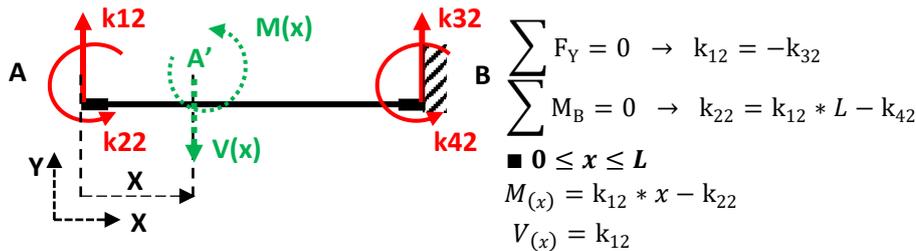
o Cuando $\theta_2=1$ y $\Delta_1=\Delta_3=\theta_4=0$

La estructura puede idealizarse en ambos extremos empotrado sujeto a una carga externa originado por un desplazamiento según las condiciones del problema. Donde k_{ij} son las reacciones o fuerzas de empotramiento de la estructura hiperestática.



○ Sistema de cargas Q

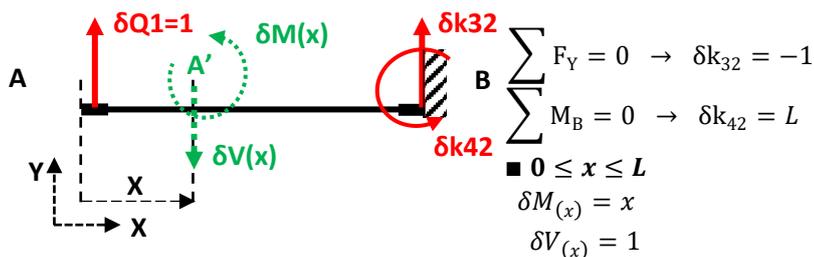
Carga externa originada por un desplazamiento $\Delta_1=0$ y $\theta_2=1$.



○ Sistema de cargas $\delta Q_1=1$

$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

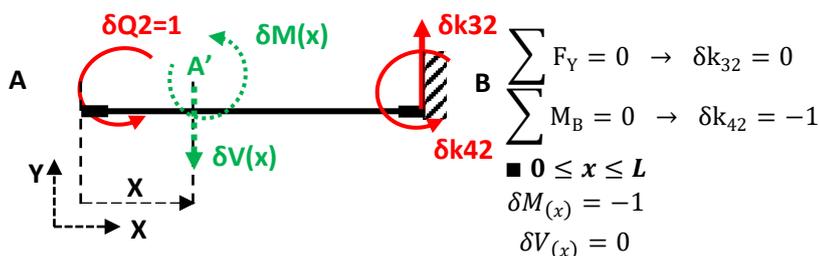
...Aplicando el nuevo teorema



○ Sistema de cargas $\delta Q_2=1$

$$\frac{\partial(q_i)}{\partial \delta Q_i} = \delta q_i \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_i = 1$$

...Aplicando el nuevo teorema



○ Desplazamiento por condiciones de contorno.

Fuerzas internas (q_i) bajo el primer sistema de carga externas (Q). Fuerzas internas virtuales (δq_i) bajo el segundo sistema de cargas ($\delta Q_1=1$).

Aplicando el nuevo teorema

$$\Delta_1 = \int \frac{M(x)}{I * E} * \delta M(x) * dx + \int \frac{k_1 * V(x)}{A * G} * \delta V(x) * dx \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_1 = 1$$

$$\Delta_1 = \int_0^L \frac{1}{EI} * (k_{12} * X - k_{22}) * (X) dx + \int_0^L \frac{f}{GA} * (k_{12}) * (1) dx$$

$$\Delta_1 = 0 = \frac{1}{EI} \int_0^L (k_{12} * X^2 - k_{22} * X) dx + \frac{f}{GA} \int_0^L (k_{12}) dx$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(k_{12} * \frac{L^3}{3} - k_{22} * \frac{L^2}{2} \right) + \frac{f}{GA} * (k_{12}) * L = \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{f * L}{GA} \right) * k_{12} - \frac{L^2}{2EI} * k_{22}$$

$$\frac{L^2}{2EI} * k_{22} = \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{f * L}{GA} \right) * k_{12} \rightarrow k_{22} = \left(\frac{2L}{3} + \frac{2L * 3EIf}{3GAL^2} \right) * k_{12}$$

Dando forma para cambiar por el siguiente valor.

$$\emptyset = \frac{3EIf}{GAL^2} \rightarrow k_{22} = \frac{2L}{3} (1 + \emptyset) * k_{12} \quad \dots (I)$$

Fuerzas internas (qi) bajo el primer sistema de carga externas (Q). Fuerzas internas virtuales (δqi) bajo el segundo sistema de cargas (δQ2=1).

Aplicando el nuevo teorema

$$\theta_2 = \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x})}{\mathbf{I} * \mathbf{E}} * \delta \mathbf{M}(\mathbf{x}) * d\mathbf{x} + \int \frac{\mathbf{k}_1 * \mathbf{V}(\mathbf{x})}{\mathbf{A} * \mathbf{G}} * \delta \mathbf{V}(\mathbf{x}) * d\mathbf{x} \quad \leftrightarrow \quad \delta Q_2 = 1$$

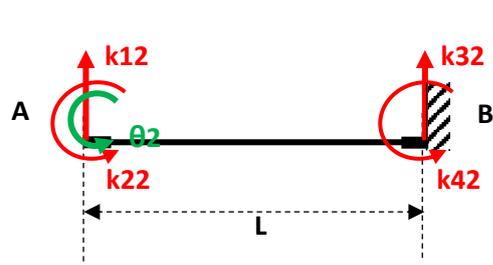
$$\theta_2 = \int_0^L \frac{1}{EI} * (k_{12} * X - k_{22}) * (-1) dx + \int_0^L \frac{f}{GA} * (k_{12}) * (0) dx$$

$$\theta_2 = 1 = \int_0^L \frac{1}{EI} (-k_{12} * X + k_{22}) dx \rightarrow 1 = \frac{1}{EI} \left(-k_{12} \frac{L^2}{2} + k_{22} L \right) \quad \dots (II)$$

Reemplazado (I) en (II).

$$1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{2L^2}{3} (1 + \emptyset) k_{12} - k_{12} \frac{L^2}{2} \right) \rightarrow k_{12} = \frac{6EI}{L^2(1 + 4\emptyset)} \rightarrow k_{22} = \frac{4EI(1 + \emptyset)}{L(1 + 4\emptyset)}$$

Los elementos de la matriz ki2

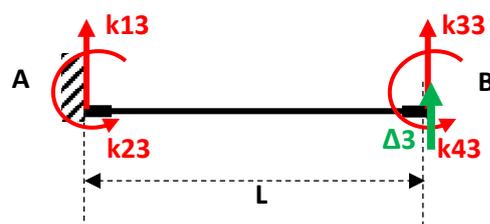


$$k_{i2} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2(1 + 4\emptyset)} \\ \frac{4EI(1 + \emptyset)}{L(1 + 4\emptyset)} \\ -6EI \\ \frac{L^2(1 + 4\emptyset)}{2EI(1 - 2\emptyset)} \\ \frac{L(1 + 4\emptyset)}{L(1 + 4\emptyset)} \end{bmatrix}$$

- **Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez ki3.**
 ○ Cuando $\Delta_3=1$ y $\Delta_1=\theta_2=\theta_4=0$

La estructura es simétrica respecto a los grados de libertad y a la rigidez que se presenta cuando se analiza e K_{i1} y k_{i2} . Solo se tendría que ver los signos en función de la dirección de los grados de libertad.

Los elementos de la matriz k_{i3}

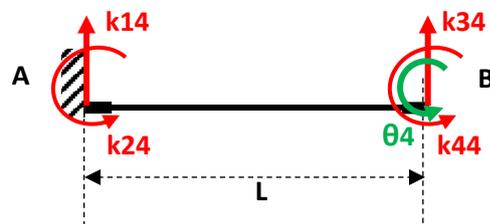


$$k_{i3} = \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12EI \\ L^3(1+4\phi) \\ -6EI \\ 12EI \\ L^3(1+4\phi) \\ -6EI \\ L^2(1+4\phi) \end{Bmatrix}$$

- Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez k_{i4} .

○ Cuando $\theta_4=1$ y $\Delta_1=\theta_2=\Delta_3=0$

Los elementos de la matriz k_{i4}



$$k_{i4} = \begin{Bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ k_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6EI \\ L^2(1+4\phi) \\ 2EI(1-2\phi) \\ L(1+4\phi) \\ -6EI \\ L^2(1+4\phi) \\ 4EI(1+\phi) \\ L(1+4\phi) \end{Bmatrix}$$

- La matriz de rigidez de una viga inextensible con 4gdl

$$|k| = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{Bmatrix}$$

$$|k| = \begin{Bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+4\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{-12EI}{L^3(1+4\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{4EI(1+\phi)}{L(1+4\phi)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{2EI(1-2\phi)}{L(1+4\phi)} \\ \frac{-12EI}{L^3(1+4\phi)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{12EI}{L^3(1+4\phi)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4\phi)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{2EI(1-2\phi)}{L(1+4\phi)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{4EI(1+\phi)}{L(1+4\phi)} \end{Bmatrix} \quad \dots (a)$$

➤ El valor de ϕ es:

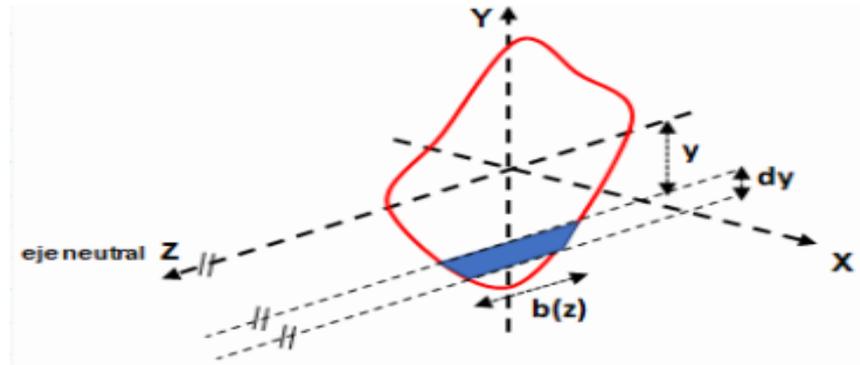
$$\phi = \frac{3EIf}{GAL^2}$$

- E: Módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young.
- I: Momento de inercia o el segundo momento de área.
- f: Factor de forma de una sección transversal.

- G: Módulo de elasticidad transversal o módulo de cizalla.
- A: Área de la sección transversal.
- L: Longitud del elemento estructural.

➤ La matriz de rigidez (a), es determinada bajo la consideración de la viga de Timoshenko. La consideración de Timoshenko hace una aproximación de la distribución real de esfuerzo de forma parabólica, mediante la aproximación por el efecto del factor de forma (f), trasformando a una distribución constante considerado un valor promedio.

La ecuación que define (f) es:



$$f = \iint_A \frac{Q^2}{r^2 \cdot I_z \cdot b(z)^2} dA$$

Diferencial de área:

$$dA = b(z) \cdot dy$$

Donde:

- f: Factor de forma de una sección trasversal.
- Q: Momento estático de área o primer momento de área.
- r: Radio de giro de un área.
- I: Momento de inercia o el segundo momento de área.
- B(z): Ancho de la fibra considerada.

- Caso particular cuando se desprecia o se anula el efecto de corte.

$$\phi = \frac{3EI f}{GA L^2} \cong 0$$

$$|k| = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 4EI & -\frac{6EI}{L^2} & 2EI \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 2EI & -\frac{6EI}{L^2} & 4EI \end{bmatrix}$$