UNIVERSIDAD NACIONAL

SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico

TESIS PARA OBTAR EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR: Bachiller Joel Jaynis Lopez Vara

Asesor: Dr. MAXIMILIANO EPIFANIO ASIS LÓPEZ

Huaraz - Perú

2023

UNIVERSIDAD NACIONAL
SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO
"Una Nueva Universidad para el Desarrollo"
ESCUELA ACADEMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
AV. CENTENARIO N° 200 – TELÉFONO (043) 640020 ANEXO 1913
HUARAZ – ANCASH – PERÚ

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N°002-2023

Los Miembros del Jurado de la Revisión y Sustentación de la Escuela Académico Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias, designados mediante Resolución de Consejo de Facultad N° 305-2023-UNASAM-FC; se reunieron el día 20 de diciembre de 2023, a horas 5:00 p.m. en el Auditorio de la Facultad de Ciencias en Acto Público para evaluar la Sustentación de Tesis, presentado por el:

Bachiller : **LOPEZ VARA JOEL JAYNIS**

Tesis Titulada : **"ARITMÉTICA DIFUSA CON NORMA TRIANGULAR DEL PRODUCTO ALGEBRAICO"**

Después de la Sustentación y las respuestas a las preguntas, el Jurado lo declara APTO para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, con el calificativo de DIECISEIS (16)

En señal de conformidad y para constancia, firmamos la presente ACTA, siendo las 6:20pm del mismo día y año.

Huaraz, 20 de diciembre de 2023

Mag. Vladimir Giovanni RODRIGUEZ SABINO
Presidente

Mag. Kleber TRINIDAD GARGATE
Secretario

Dr. Maximiliano Epifanio ASIS LOPEZ
Vocal

Dr. Maximiliano Epifanio ASIS LOPEZ
Asesor

Anexo de la R.C.U N° 126 -2022 -UNASAM

ANEXO 1

INFORME DE SIMILITUD.

El que suscribe (asesor) del trabajo de investigación titulado:

Aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico

Presentado por: Bachiller Joel Jaynis Lopez Vara

con DNI N°: 72087818

para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Informo que el documento del trabajo anteriormente indicado ha sido sometido a revisión, mediante la plataforma de evaluación de similitud, conforme al Artículo 11 ° del presente reglamento y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de : ...19 %... de similitud.

Evaluación y acciones del reporte de similitud de los trabajos de los estudiantes/ tesis de pre grado (Art. 11, inc. 1).

Porcentaje			
Trabajos de estudiantes	**Tesis de pregrado**	**Evaluación y acciones**	Seleccione donde corresponda ◉
Del 1 al 30%	Del 1 al 25%	Esta dentro del rango aceptable de similitud y podrá pasar al siguiente paso según sea el caso.	◉
Del 31 al 50%	Del 26 al 50%	Se debe devolver al estudiante o egresado para las correcciones con las sugerencias que amerita y que se presente nuevamente el trabajo.	○
Mayores a 51%	Mayores a 51%	El docente o asesor que es el responsable de la revisión del documento emite un informe y el autor recibe una observación en un primer momento y si persistiese el trabajo es invalidado.	○

Por tanto, en mi condición de Asesor/ Jefe de Grados y Títulos de la EPG UNASAM/ Director o Editor responsable, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera hoja del reporte del software anti-plagio.

Huaraz, 08/02/2023

FIRMA

Apellidos y Nombres: Maximilian Epifanio Asis Lopez

DNI N°: 10763091

Se adjunta:

1. Reporte completo Generado por la plataforma de evaluación de similitud

Dedicado a mí por ser el principal promotor para la realización de esta investigación.

a mi madre que estuvo para mi en todo momento, a mis hermanas.

A mi asesor que gracias a el esta investigación se lleve acabo.

A mis profesores que siempre me inculcaron a seguir.

Agradecimiento

Primeramente agrader a Dios por su amor incondicional.

Nuestro agradecimiento a la prestigiosa Universidad Santiago Ántunez de Mayolo por permitirme ser parte de ella .

A nuestros docentes, por involucrarse y transmitir sus conocimientos con la motivacion siempre de cumplir nuestros objetivos.

A mi Asesor por ayudarme e inculcarme en esta investigacion, cuyo proposito tiene valor de ayudar con el conocimiento de un tema e seguir impulsando las ideas que ay en ellas y por supuesto seguir mejorandolas.

Resumen

En la segunda mitad del siglo XX (1965-2023), la teoría de conjuntos difusos emergió como un concepto matemático innovador en el ámbito del procesamiento de la información. Rápidamente evolucionó hasta consolidarse como una disciplina científica bien establecida, abarcando tanto la investigación teórica como la aplicación práctica. El enfoque principal de esta disciplina es establecer fundamentos para las fórmulas explícitas en la aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico. La aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico se centra en desarrollar fórmulas explícitas para productos en diversas aplicaciones. Además, se exploran y analizan las propiedades específicas de la aritmética difusa. Se presta especial atención al comportamiento de la norma triangular del producto algebraico, también conocida como t-norma producto, en contraste con la ya conocida norma triangular mínima o t-norma mínima. La investigación se clasifica como básica, siendo descriptivo-teórica y abarcando todo el proceso necesario para alcanzar los resultados esperados. Este enfoque es esencial para continuar explorando áreas clave de las matemáticas, como conjuntos difusos, números difusos y aritmética difusa. Además, se destaca la importancia de la lógica difusa en aplicaciones tecnológicas e ingeniería. Este estudio proporciona una base valiosa para comprender y avanzar en esta fascinante rama matemática.

Palabras clave: aritmética difusa, aritmética con producto t-nomas, números difusos, conjunto difuso.

Abstract

In the second half of the 20th century (1965-2023), fuzzy set theory emerged as an innovative mathematical concept in the field of information processing. It quickly evolved into a well-established scientific discipline, encompassing both theoretical research and practical application. The main focus of this discipline is to establish foundations for explicit formulas in fuzzy arithmetic with triangular norm of the algebraic product. Algebraic product triangular norm fuzzy arithmetic focuses on developing explicit formulas for products in various applications. Furthermore, the specific properties of fuzzy arithmetic are explored and analyzed. Special attention is paid to the behavior of the triangular norm of the algebraic product, also known as t-product norm, in contrast to the already known minimum triangular norm or t-minimum norm. The research is classified as basic, being descriptive-theoretical and covering the entire process necessary to achieve the expected results. This approach is essential for continuing to explore key areas of mathematics, such as fuzzy sets, fuzzy numbers, and fuzzy arithmetic. Furthermore, the importance of fuzzy logic in technological and engineering applications is highlighted. This study provides a valuable foundation for understanding and advancing this fascinating branch of mathematics.

Keywords: fuzzy arithmetic, arithmetic with product t-nomas, fuzzy numbers, fuzzy set.

Índice de figuras

Lista de símbolos

$[a, b]$	Intervalo de confianza.
U	Conjunto universo
$\mathcal{F}(U)$	Colección de subconjuntos difusos U
$\mathbb{I}$	Conjunto de indices.
$\tilde{a}$	Número difuso.
A	Subconjunto difuso.
μ_A	Función característica del subconjunto de A.
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	Espacio de numeros difusos y convexos.
A_α	α-corte del subconjunto A.
$suppA$	Soporte del subconjunto difuso A.
$coreA$	Núcleo del subconjunto difuso A.
A_1	Núcleo del subconjunto difuso A.
$\bigcup\limits_{i\in\mathbb{I}} A_i$	Unión de subconjuntos difusos A.
$\bigcap\limits_{i\in\mathbb{I}} A_i$	Intersección de subconjuntos difusos A.
$\mathcal{T}$	t-norma.
$\mathcal{T}_P$	t-norma Producto.
$\mathcal{T}_D$	t-norma Drástico.
$\mathcal{T}_L$	t-norma Łukasiewicz.
$\mathcal{T}_M$	t-norma Mínima.
$\ominus_{gH}$	diferencia generalizada de hakuhara

Índice

I. INTRODUCCIÓN

Este estudio se sumerge en el fascinante mundo de los conjuntos y números difusos, elementos esenciales en la teoría de conjuntos difusos. Se define un conjunto difuso como una clase de objetos continuos caracterizada por una función de membresía que varía entre cero y uno (Zadeh, 1965). Paralelamente, un número difuso se sitúa en particiones de la recta real, existiendo en un intervalo cerrado diferente de cero, donde la función de membresía alcanza uno, y dos funciones monótonas y continuas (Klir y Yuan, 1995).

Los intervalos difusos LR, que funcionan con formas izquierda (L) y derecha (R), junto con los intervalos difusos triangulares, representan las formas más simples de cantidades difusas y han sido ampliamente estudiados y aplicados en diversas áreas (Hong, 1994, 2001, 2003).

La investigación se adentra en la aritmética difusa, explorando la norma triangular estricta para conjuntos difusos, estableciendo una métrica en el espacio de conjuntos difusos semicontinuos superiores (USC) (Bielawski y Tabor, 2012, 2021).

Se presenta un método computacional para la aritmética en números difusos triangulares con t-norma de producto, relajando las condiciones de diferencias comunes de las variables de entrada (Seresht y Fayek, 2019). Además, se generalizan resultados a una familia de normas t bajo condiciones suficientes y necesarias (Mesiar, 1996; Marková, 1997). El enfoque inicial de la aritmética difusa se basa en el principio de extensión de Zadeh, utilizando $*$ como representación de operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación y división, entonces dados dos números difusos $\tilde{a}, \tilde{b}$, con su correspondiente función de pertenencia o membresía $(f_{\tilde{a}}, f_{\tilde{b}})$. Este enfoque conduce a la obtención de un tercer número difuso ($\tilde{c} = \tilde{a} * \tilde{b}$) cuya función de pertenencia ($f_{\tilde{c}}$) es el supremo del mínimo de las funciones de pertenencia de los números difusos $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ (Zadeh, 1978).

Investigadores proponen un segundo enfoque utilizando el principio de α-corte para desarrollar las operaciones básicas con números difusos (Klir y Yuan, 1995; Giachetti y Young, 1997; Bodjanova, 2003; Guerra y Stefanini, 2005; Hanss, 2005).

Desde mediados del siglo pasado hasta el presente (1965-2023), la teoría de conjuntos difusos ha evolucionado, estableciéndose como disciplina científica y abarcando subdominios como la lógica difusa, razonamiento aproximado, reconocimiento de patrones difusos, modelado difuso, sistemas expertos y control difuso, y aritmética difusa (Hanss, 2005).

Las aplicaciones, mayormente utilizando la t-norma mínima, reflejan el impacto del principio de extensión de Zadeh (1999).

A pesar de la importancia de la aritmética difusa, su generalización a diferentes tipos de t-normas presenta dificultades prácticas. Se exploran dos enfoques principales: el método de corte α-corte generalizado y el principio de extensión generalizado. Los resultados se comparan con la t-norma mínima y las operaciones drásticas basadas en la t-norma drástica en términos difusos. La resolución de problemas prácticos se facilita mediante aproximaciones adecuadas, revelando una estrecha relación entre la aritmética t-norma producto y la aritmética t-norma Lukasiewicz (Soylu y Aslan, 2021).

A pesar de la limitada investigación y aplicación práctica, la aritmética difusa posee un potencial subestimado. Esto se atribuye a la falta de una teoría organizada y coherente, la carencia de enfoques prácticos para su implementación y la subestimación de su capacidad para abordar problemas del mundo real (Hanss, 2005).

La aritmética con números difusos encuentra aplicaciones en ingeniería y toma de decisiones, destacándose como una herramienta versátil en diversas direcciones. Aunque la t-norma mínima destaca como conector en numerosas aplicaciones, persisten desafíos en la implementación práctica de la aritmética difusa.

Este estudio se sumerge en el complejo terreno de la aritmética difusa, abordando tanto aspectos fundamentales como aplicaciones prácticas en ingeniería y toma de decisiones. A medida que exploramos esta fascinante rama matemática, buscamos desentrañar las complejidades, superar las limitaciones y contribuir al desarrollo de un enfoque más integral y aplicado de la aritmética difusa.

1.1. Marcos teóricos

Conjuntos Difusos

Sabemos que un conjunto es una colección de objetos bien especializados que poseen una propiedad común. Que se puede definir de diferentes maneras:

- Por numeración de los elementos que lo componen. Para un conjunto finito A, de n elementos.
- Por descripción analítica de una propiedad que caracterice a todos los miembros del conjunto.
- La función característica (también llamada función de pertenencia) para definir sus elementos.

Definición 1. ***Función de pertenencia***

Si llamamos $\mu_A : U \to [0,1]$ *a dicha funcion de pertenencia siendo* U *el conjunto universal de posibles valores que puede tomar* x*, tendremos que,*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

asi, un conjunto A *esta completamente definido por el conjunto de pares:*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

Definición 2. ***Conjunto difuso***

Un conjunto difuso A *se define como una función de pertenencia* $\mu_A : U \to [0,1]$ *que enlaza o empareja los elementos de un dominio o universo de discurso* U *con elemento del intervalo* $[0,1]$ *y queda definido como:*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

Asi, cualquier elemento x *en* U *tiene grado de pertenencia* $\mu_A(x) \in [0,1]$.

Subconjuntos difusos

Los conjuntos difusos fue introducido por L. Zadehe, en 1965.y la siguiente difinición esta dada por él. Un conjunto difuso es una clase de objetos con grados continuos de membres´ıa. Entonces, un subconjunto difuso A en un referencial (universo del discurso) U se caracteriza por una función de pertenencia A que asocia con cada elemento $x \in U$ un número real $\mu_A(x) \in [0,1]$, que tiene la interpretación $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de x en el subconjunto difuso A (Zadeh, 1965).

Definición 3. *Un conjunto difuso A (subconjunto difuso de U) es una función*

$$\mu_A : U \to [0,1]$$

donde $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de x al subconjunto difuso A.

Observación: Denotaremos por $\mathcal{F}(U)$ la colección de todos los subconjuntos difusos de U, es decir

$$\mathcal{F}(U) = \{\mu : \ U \to [0,1]\}$$

Operaciones entre subconjuntos difusos

Dados dos conjuntos difusos A, B en U, con sus respectivas funciones de pertenecia μ_A, μ_B, respectivamente. Denotemos $A \subset B$, si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in U$.

NOTA: La función de pertenecia del conjunto vacio ($\emptyset$), esta dada por $\mu_\emptyset(x) = 0$, por lo tanto, el conjunto universo(U), tiene como función de pertenencia $\mu_U(x) = 1, \forall x \in U$, asi mismo podemos afirmar que $\emptyset \subset A$ y que $A \subset U, \forall A$ (de Barros y Bassanezi, 2010).

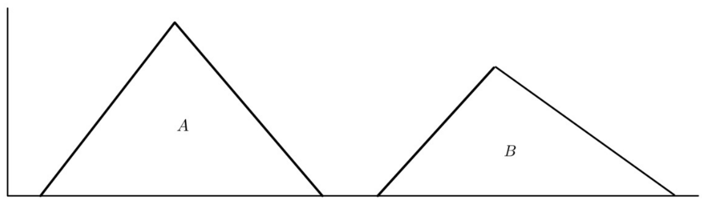

Figura 1: Subconjuntos A y B.

Definición 4. ***Unión***

Sean $A, B \in \mathcal{F}(U)$. La unión de A y B es el subconjunto difuso $\mathcal{F}(U)$, cuya función de pertenencia es dado por

$$\mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$$

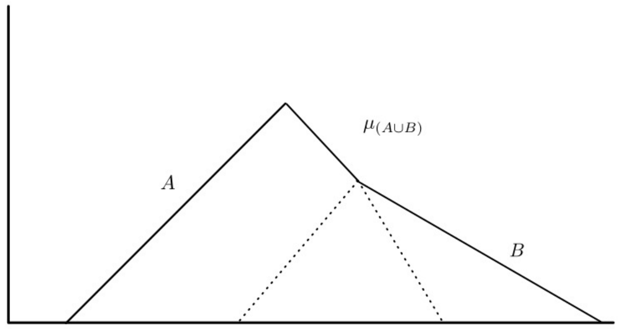

Figura 2: Unión de dos subconjuntos A y B.

Definición 5. ***Intersección***

Sean $A, B \in \mathcal{F}(U)$. La intersección de A y B es el subconjunto difuso $\mathcal{F}(U)$, cuya función de pertenencia es dado por

$$\mu_{A\cap B}(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$$

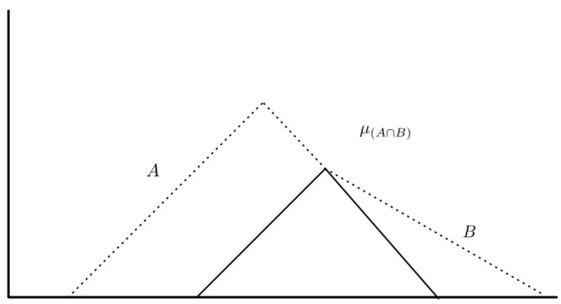

Figura 3: Intersección de dos subconjuntos A y B.

Definición 6. ***Complemento***

Sean $A \in \mathcal{F}(U)$. El complemento de A es el subconjunto difuso A' de U, cuya función de pertenencia es dado por

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in U$$

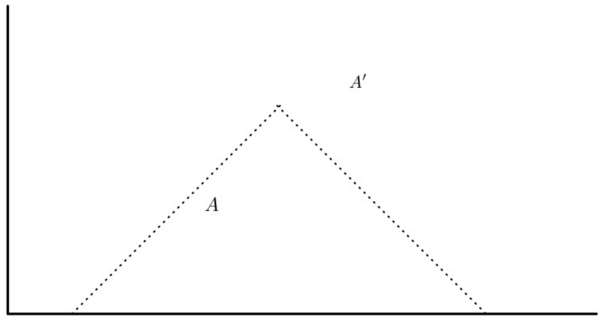

Figura 4: Complemento del subconjunto A.

Definición 7. *Los subconjuntos difusos A y B de U son iguales si sus funciones de pertenencia coinciden, esto es, si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo $x \in U$*

Definición 8. *Un conjunto difuso A es convexo si*

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \text{mín}(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

para todo $x, y \in U$ y para todo $\lambda \in [0,1]$.

Definición 9. *Se define la altura de un conjunto difuso A sobre U, que se denota por $Alt(A)$, como:*

$$Alt(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x)$$

Definición 10. *Para un conjunto finito difuso A, la cardinalidad $|A|$ es definida como:*

$$|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$$

$||A|| = \frac{|A|}{|U|}$ *se llama cardinalidad relativa de $|A|$.*

Uno de los conceptos más importantes de los conjuntos difusos, es el concepto de α-corte (α^+-corte fuerte).

Definición 11. ***(α-corte) ó (α^+-corte)***

Dado un número $\alpha \in [0,1]$ y un conjunto difuso A, definimos el α-corte de A como el conjunto clásico A_α que tiene la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{cuando} \quad \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$A_\alpha = \{x \in U | \mu_A(x) \geq \alpha; 0 < \alpha \leq 1\}$$

$$A_{\alpha^+} = \{x \in U | \mu_A(x) > \alpha\}$$

El α-corte se compone de aquellos elementos cuyo grado de pertenencia supera o iguala a α

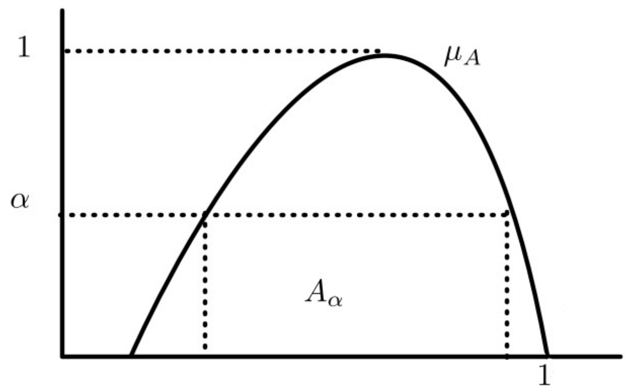

Figura 5: α-corte.

Observación: α^+-corte, es conocido como corte fuerte α de los conjuntos nítidos, es decir: que la función de pertenecia de un conjunto difuso A es creciente respecto a α ($\mu_A(x) > \alpha$).

Definición 12. *El soporte de un conjunto difuso A es el conjunto clásico que contiene todos los elementos de A cuyos grados de pertenencia no son ceros. El cual está definido* *por $S(A)$. Es decir:*

$$S(A) = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}$$

Observacion: En el lenguaje matemático, A_0 es el cierre del soporte de A y es indicado por $\overline{supp}A$. Esta consideración es imprescindible para atender ciertas situaciones teóricas. Note que el conjunto$\{x \in U : \mu_A(x) \geq 0\} = U$ no es necesariamente igual a $A_0 = \overline{supp}A$.

Definición 13. ***Conjunto difuso Singletón***

Un conjunto difuso A se dice singlentón si y solo si su soporte es un único punto $x \in U$ tal que $\mu_A(x) = 1$.

Definición 14. *Si $A_1 = \{x \in U : \mu_A(x) \geq 1\}$ se llama el* ***núcleo*** *del subconjunto difuso A.*

Teorema 15. *Sean A y B subconjuntos difusos de U. Una condición necesaria y suficiente para que $A = B$ es que $A_\alpha = B_\alpha, \forall\alpha \in [0, 1]$.*

Demostración:

Es claro que $A = B \Rightarrow A_\alpha = B_\alpha, \forall\alpha \in [0, 1]$

Supongamos, ahora que: $A_\alpha = B_\alpha, \forall\alpha \in [0, 1]$. Si $A \neq B$ entonces existe $x \in U$ tal que $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$.

Luego, tenemos que $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ **o** $\mu_A(x) > \mu_B(x)$.

Suponiendo $\mu_A(x) > \mu_B(x)$, podemos concluir que $x \in A_{\mu_A(x)}$ y $x \notin B_{\mu_A(x)}$ y por tanto, $A_{\mu_A(x)} \neq B_{\mu_A(x)}$, lo que contradice la hipótesis $A_\alpha = B_\alpha$.

Ahora supongamos, $\mu_A(x) < \mu_B(x)$. Se deduce lo siguiente $x \in B_{\mu_A(x)}$ y $x \notin A_{\mu_A(x)}$ y por tanto $B_{\mu_A(x)} \neq A_{\mu_A(x)}$, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto; $A_\alpha = B_\alpha, \forall\alpha \in [0, 1]$

Ejemplo :

Sea $U = [0, 1]$ y A un subconjunto difuso de U cuya función de pertenencia es dada por

$\mu_A(m) = 4(m - m^2)$. Entonces, dado que $4(m - m^2) = \alpha$, tenemos:

$$A_\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\right]$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Aritmética intervalar

Una forma de operar con números difusos es utilizando la aritmética intervalar. Si tenemos $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$ dos intervalos cerrados y acotados de números reales, entonces:

i) Adición de intervalos de confianza

$$I + J = [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

Ejemplo

$$[5, 9] + [7, 2] = [5 + 7, 9 + 3] = [12, 11]$$

ii) Sustracción de intervalos de confianza

$$I - J = [a, b] - [c, d] = [a - c, b - d]$$

Ejemplos

$$[5, 9] - [7, 2] = [5 - 7, 9 - 3] = [-2, 6]$$

iii) Producto de intervalos de confianza

$$I \cdot J = [a, b] \cdot [c, d] = [\text{mín}(ac, ad, bc, bd), \text{máx}(ac, ad, bc, bd)]$$

Ejemplo

Sea $I = [4, 7]$ y $J = [-5, 2]$, entonces:

$$I \cdot J = [\text{mín}(-20, 8, -35, 14), \text{máx}(-20, 8, -35, 14)] = [-35, 14]$$

iv) Inverso de intervalos de confianza.

$$I^{-1} = [a,b]^{-1} = \left[\frac{1}{a} \wedge \frac{1}{b}, \frac{1}{a} \vee \frac{1}{b}\right] \text{excepto para } a \leq 0 \leq b.$$

Si el conjunto difuso esta definido sobre $\mathbb{R}^+$, sería:

$$[a,b]^{-1} = \left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right]$$

Ejemplo

$$I^{-1} = [2,5]^{-1} = \left[\text{mín}(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}), \text{máx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{5})\right] = [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$$

v) División de intervalos de confianza

$$\frac{I}{J} = \frac{[a,b]}{[c,d]} = \left[\text{mín}\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \text{máx}\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)\right]$$

Para el caso particular de $\mathbb{R}^+$, tenemos:

$$\frac{I}{J} = \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{c}\right]$$

Ejemplo

$$\frac{I}{J} = \frac{[9,10]}{[3,5]} = \left[\text{mín}\left(\frac{9}{3}, \frac{9}{5}, \frac{10}{3}, \frac{10}{5}\right), \text{máx}\left(\frac{9}{3}, \frac{9}{5}, \frac{10}{3}, \frac{10}{5}\right)\right] = [\frac{9}{5}, \frac{10}{3}]$$

vi) Dado $k \in \mathbb{R}$,

$$k \cdot I = [\text{mín}(ka, kb), \text{máx}(ka, kb)]$$

◊ Si

$$k \geq 0, k \cdot I = k[a,b] = [ka, kb]$$

◊ Si

$$k < 0, k \cdot I = k[a,b] = [kb, ka]$$

Ejemplo

Sea $I = [5, -7]$

$\Diamond$ Tenemos:

$$3 \geq 0, 3 \cdot I = 3[5,7] = [3(5), 3(7)] = [15, 21]$$

$\Diamond$ Tenemos:

$$-4 < 0, (-4) \cdot I = (-4)[5,-7] = [(-4)(7), (-4)(5)] = [-28, -20]$$

Algunos teoremas del α-cortes (α^+-corte fuerte), encontradas en el libro Klir y Yuan (1995).

Teorema 16. *Sea $A, B \in \mathcal{F}(U)$. entonces las siguientes propiedades son validas para $\alpha, \beta \in [0,1]$:*

(i) $A_{\alpha^+} \subseteq A_\alpha$.

(ii) $\alpha \leq \beta$ *implica* $A_\alpha \supseteq A_\beta$ *y* $A_{\alpha^+} \supseteq A_{\beta^+}$.

(iii) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ *y* $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

(iv) $(A \cap B)_{\alpha^+} = A_{\alpha^+} \cap B_{\alpha^+}$ *y* $(A \cup B)_{\alpha^+} = A_{\alpha^+} \cup B_{\alpha^+}$.

(v) $A'_\alpha = A'_{(1-\alpha)^+}$.

Demostración:

(i) Para cualquier $x \in A_\alpha$; tenemos $A(x) \geq \alpha$, por otra parte $x \in A_{\alpha^+}$, además se sabe que; $A_{\alpha^+} \subseteq A_\alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$, en consecuencia, $A_{\alpha^+} \subseteq a_\alpha$.

(ii) ***Primera inclución***

Para cualquier $x \in A_\alpha$ y $x \in A_{\beta^+}$; tenemos $\alpha \leq \beta$, además, $A_\alpha : \alpha \in [0,1]$ en consecuencia, $A(x) \geq \beta \geq \alpha$, como $A \supseteq A, \forall x \in A$; por lo tanto, $A_\alpha \supseteq A_\beta$.

Segunda inclución

Para cualquier $x \in A_{\alpha^+}$ y $x \in A_{\beta^+}$, tenemos, $\alpha \leq \beta$; además, $A_{\alpha^+} : \alpha \in [0,1]$ en consecuencia, $A(x) > \beta^+ > \alpha^+$, como $A \supseteq A, \forall x \in A$; por lo tanto, $A_{\alpha^+} \supseteq A_{\beta^+}$.

(iii) ***Primera igualdad***

Para cualquier $x \in (A \cap B)_\alpha$; tenemos $(A \cap B)(x) \geq \alpha$ y; por tanto,

$$\text{mín}[A(x), B(x)] \geq \alpha.$$

Esto significa que $A(x) \geq \alpha$ y $B(x) \geq \alpha$.

Esto implica que $x \in A_\alpha \cap B_\alpha$ y en consecuencia, $(A \cap B)_\alpha \subseteq A_\alpha \cap B_\alpha$.

Por el contrario, para cualquier $x \in A_\alpha \cap B_\alpha$, tenemos $x \in A_\alpha$ y $x \in B_\alpha$; es decir, $A(x) \geq \alpha$ y $B(x) \geq \alpha$.

Por lo tanto; $\text{mín}[A(x), B(x)] \geq \alpha$, lo que significa que $(A \cap B)(x) \geq \alpha$. Esto implica que $x \in (A \cap B)_\alpha$ y, en consecuencia, $A_\alpha \cap B_\alpha \subseteq (A \cap B)_\alpha$. Con esto concluye la prueba de que $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

Segunda igualdad

Para cualquier $x \in (A \cup B)_\alpha$; tenemos $(A \cup B)(x) \geq \alpha$ y; por tanto,

$$\text{máx}[A(x), B(x)] \geq \alpha.$$

Esto significa que $A(x) \geq \alpha$ y $B(x) \geq \alpha$.

Esto implica que $x \in A_\alpha \cup B_\alpha$ y, en consecuencia, $(A \cup B)_\alpha \subseteq A_\alpha \cup B_\alpha$.

Por el contrario, para cualquier $x \in A_\alpha \cup B_\alpha$, tenemos $x \in A_\alpha$ y $x \in B_\alpha$; es decir, $A(x) \geq \alpha$ y $B(x) \geq \alpha$.

Por lo tanto; $\text{máx}[A(x), B(x)] \geq \alpha$, lo que significa que $(A \cup B)(x) \geq a$. Esto implica que $x \in (A \cup B)_\alpha$ y, en consecuencia, $A_\alpha \cup B_\alpha \subseteq (A \cup B)_\alpha$. Con esto concluye la prueba de que $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

(iv) ***Primera igualdad***

Para cualquier $x \in (A \cap B)_{\alpha^+}$; tenemos $(A \cap B)(x) > \alpha^+$ y; por tanto,

$$\text{mín}[A(x), B(x)] > \alpha^+.$$

Esto significa que $A(x) > \alpha^+$ y $B(x) > \alpha^+$.

Esto implica que $x \in A_{\alpha^+} \cap B_{\alpha^+}$ y, en consecuencia, $(A \cap B)_{\alpha^+} \subseteq A_{\alpha^+} \cap B_{\alpha^+}$.

Por el contrario, para cualquier $x \in A_{\alpha^+} \cap B_{\alpha^+}$, tenemos $x \in A_\alpha$ y $x \in B_{\alpha^+}$; es decir, $A(x) > \alpha^+$ y $B(x) > \alpha^+$.

Por lo tanto; $\text{mín}[A(x), B(x)] > \alpha^+$, lo que significa que $(A \cap B)(x) > \alpha$. Esto implica que $x \in (A \cap B)_{\alpha^+}$ y, en consecuencia, $A_{\alpha^+} \cap B_{\alpha^+} \subseteq (A \cap B)_{\alpha^+}$. Con esto concluye la prueba de que $(A \cap B)_{\alpha^+} = A_{\alpha^+} \cap B_{\alpha^+}$.

Segunda igualdad

Para cualquier $x \in (A \cup B)_{\alpha^+}$, tenemos $(A \cup B)(x) > \alpha^+$ y; por tanto,

$$\text{máx}[A(x), B(x)] > \alpha^+.$$

Esto significa que $A(x) > \alpha^+$ y $B(x) > \alpha^+$.

Esto implica que $x \in A_{\alpha^+} \cup B_{\alpha^+}$ y, en consecuencia, $(A \cup B)_{\alpha^+} \subseteq A_{\alpha^+} \cup B_{\alpha^+}$.

Por el contrario, para cualquier $x \in A_{\alpha^+} \cup B_{\alpha^+}$, tenemos $x \in A_{\alpha^+}$ y $x \in B_{\alpha^+}$; es decir, $A(x) > \alpha^+$ y $B(x) > \alpha^+$.

Por lo tanto; $\text{máx}[A(x), B(x)] > \alpha^+$, lo que significa que $(A \cup B)(x) > \alpha^+$. Esto implica que $x \in (A \cup B)_{\alpha^+}$ y, en consecuencia, $A_{\alpha^+} \cup B_{\alpha^+} \subseteq (A \cup B)_{\alpha^+}$. Con esto concluye la prueba de que $(A \cup B)_{\alpha^+} = A_{\alpha^+} \cup B_{\alpha^+}$.

(v) Para cualquier $x \in A'_\alpha$, tenemos $1 - A(x) = A'(x) \geq \alpha$; es decir, $A(x) \leq 1 - \alpha$. Esto significa que $x \notin A_{(1-\alpha)^+}$ y, claramente, $x \in A'_{(1-\alpha)^+}$; en consecuencia, $A'_\alpha \subseteq A'_{(1-\alpha)^+}$.

En cambio, para cualquier $x \in A'_{(1-\alpha)^+}$, tenemos $x \notin A_{(1-\alpha)^+}$.

Por tanto, $A(x) \leq 1 - \alpha$ y $1 - A(x) \geq \alpha$.

Eso es, $A'(x) \geq \alpha$, lo que significa que $x \in A'_\alpha$.

Por lo tanto, $A'_{(1-\alpha)^+} \subseteq A'_\alpha$ y; en consecuencia $A'_\alpha = A'_{(1-\alpha)^+}$

Observación: La proposición **(v)** muestra que el complemento difuso estándar no es cortable ni fuerte. Eso es,

$$(\tilde{A})_\alpha \neq \tilde{A}_\alpha; \text{ y } (\tilde{A})_{\alpha^+} \neq \tilde{A}_{\alpha^+}$$

en general. Esto no es sorprendente ya que los conjuntos difusos violan, por definición, las dos propiedades básicas del complemento de conjuntos nítidos, la ley de contradicción y la ley del medio excluido. A pesar de su connotación negativa, la propiedad **(v)** describe una característica interesante del complemento difuso estándar: El α-corte del complemento de A es siempre el mismo que el complemento del corte fuerte $(1-\alpha)$-corte de A.

El siguiente teorema, es para cuando estas operaciones se aplican a una familia infinita de conjuntos difusos (Klir y Yuan, 1995).

Teorema 17. *Sea $A_i \in \mathcal{F}(U), \forall i \in \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ es un conjunto de indices. Entonces,*

(i) $\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha} \subseteq \left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_\alpha$ *y* $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha} \subseteq \left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_\alpha$.

(ii) $\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha^+} \subseteq \left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_{\alpha^+}$ *y* $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha^+} \subseteq \left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_{\alpha^+}$.

Demostración:

(i) **Primero:** Demostramos la igualdad para uniones de conjuntos.

$$\forall x \in U;\ x \in \bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha}$$

Si existe algún $i_0 \in \mathbb{I}$ tal que $x \in A_{i_0\alpha}$, es decir; $A_{i_0\alpha} \geq \alpha$.

Esta desigualdad se cumple si,

$$\sup_{i\in\mathbb{I}} A_i(x) \geq \alpha$$

La cual es equivalente a,

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)(x) \geq \alpha$$

Esto es,

$$x \in \left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_\alpha$$

por lo tanto;

$$\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha} \subseteq \left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_\alpha .$$

Segundo: Demostramos la igualdad para intersección de conjuntos.

$$\forall \;\; x \in \left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_\alpha$$

Se tiene

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)(x) \geq \alpha$$

Esto es:

$$\inf_{i\in\mathbb{I}} A_i(x) \geq \alpha$$

Entonces; Para cualquier $i \in \mathbb{I}, A_i(x) \geq \alpha$ es decir; $x \in A_{i_\alpha}$ Por lo tanto;

$$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_{i_\alpha}$$

Luego,

$$\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha} \subseteq \left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_\alpha .$$

(ii) **Primero:** Demostramos la igualdad para uniones de conjuntos.

$$\forall x \in U; \;\; x \in \bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha^+}$$

Si existe algún $i_0 \in \mathbb{I}$ tal que $x \in A_{i_0\alpha^+}$, es decir; $A_{i_0\alpha^+} > \alpha$.

Esta desigualdad se cumple si,

$$\sup_{i\in\mathbb{I}} A_i(x) > \alpha$$

La cual es equivalente a,

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)(x) > \alpha$$

Esto es,

$$x \in \left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_{\alpha^+}$$

por lo tanto;

$$\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha^+} \subseteq \left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right)_{\alpha^+} .$$

Segundo: Demostramos la igualdad para intersección de conjuntos.

$$\forall \;\; x \in \left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i \right)_{\alpha^+}$$

Se tiene

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i \right)(x) > \alpha$$

Esto es,

$$\inf_{i\in\mathbb{I}} A_i(x) > \alpha$$

Entonces; Para cualquier $i \in \mathbb{I}, A_i(x) > \alpha$,es decir, $x \in A_{i\alpha^+}$ Por lo tanto;

$$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha^+}$$

Luego,

$$\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_{i\alpha^+} \subseteq \left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i \right)_{\alpha^+}.$$

Observación: Para demostrar que las inclusiones de conjuntos en **(i)** y **(ii)** no pueden reemplazarse con igualdades, basta con encontrar ejemplos en los que se violen las supuestas igualdades.

Ejemplo 1:

Dado un conjunto universal arbitrario U, definamos; $A_i \in \mathcal{F}(U)$, por

$$A_i(x) = 1 - \frac{1}{i}$$

Para todo $x \in U$ y alli $i \in \mathbb{N}$.

Entonces, para cualquier $x \in U$,

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i \right)(x) = \sup_{i\in\mathbb{I}} A_i(x) = \sup_{i\in\mathbb{I}} \left(1 - \frac{1}{i} \right) = 1$$

Sea $\alpha = 1$; entonces,

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i \right)_1 = U.$$

Sin embargo, para cualquier $i \in \mathbb{N}, A_{i1} = \emptyset$, porque, para cualquier $x \in U$,

$$A_i(x) = 1 - \frac{1}{i} < 1$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_{i1} = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \emptyset = \emptyset \neq U = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i \right)_1$$

Esto implica que podemos estudiar operaciones entre conjuntos difusos mediante las operaciones correspondientes sobre el intervalo unitario real (Bede, 2013).

Las operaciones entre conjuntos difusos mediante las operaciones correspondientes en el intervalo unitario, definiéndose las operaciones de conjuntos difusos puntualmente. La siguiente definición, encontrada en Trillas (1979).

Definición 18. *Una función $N : [0,1] \to [0,1]$ se llama negación si $N(0) = 1, N(1) = 0$ y N es no creciente $(x \leq y \Rightarrow N(x) \geq N(y))$. Una negación se llama **negación estricta** si es estrictamente decreciente $(x < y \Rightarrow N(x) > N(y))$ y continua.*

Observación: Una negación estricta se dice que es una **negación fuerte**, si también es involutiva, es decir,$N(N(x)) = x$.

Definición 19. *Si $A \in \mathcal{F}(U)$ es un conjunto difuso, entonces el complemento de N se define puntualmente como $N(A)(x) = N(A(x))$*

Observación: Una notación alternativa para cualquier negación $N(x)$ es $\bar{x}$. El siguiente teorema, nos habla de negacion fuerte de una función (Trillas, 1979).

Teorema 20. *Una función $N : [0,1] \to [0,1]$ es una negación fuerte si y sólo si existe una función automorfista continua invertible $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ con inversa continua φ^{-1} tal que $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$*

Desmostración:

($\Leftarrow$) Dado φ, un automorfismo de $[0,1]$, consideramos $N(x) = \varphi^{-1}(1-\varphi(x))$. Entonces N es obviamente continua.

Además,

$$N(0) = \varphi^{-1}(1-\varphi(0)) = \varphi^{-1}(1) = 1$$

$$N(1) = \varphi^{-1}(1-\varphi(1)) = \varphi^{-1}(0) = 0,$$

y

$$N(N(x)) = \varphi^{-1}(1-\varphi(\varphi^{-1}(1-\varphi(x))))$$

$$= \varphi^{-1}(1-1+\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x.$$

Para demostrar que N es estrictamente decreciente, observamos que φ aumenta, $1-\varphi$ disminuye y φ^{-1} aumenta.

Entonces $\varphi^{-1}(1-\varphi(x))$ es estrictamente decreciente. Como conclusión, N es una negación fuerte.

($\Rightarrow$) Si n es una negación estricta, entonces $f(x) = N(x) - x$ es continua,$f(0) = 1$, y $f(1) = -1$.

En cuyo caso existe un $x^* \in (0,1)$ tal que $f(x^*) = 0$, o equivalentemente, $N(x^*) = x^*$, es decir, N tiene un punto fijo.

Ahora sean N_1, N_2 dos negaciones estrictas. Entonces existen $s_1, s_2 \in (0,1)$ tal que $N_1(s_1) = s_1$ y $N_2(s_2) = s_2$.

Sea $t = \frac{s_2}{s_1}$ y $\varphi, \psi : [0,1] \to [0,1]$,

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{x}{t} & si \quad x \leq s_2 \\ N_1^{-1}\left(\dfrac{N_2(x)}{t}\right) & si \quad x > s_2 \end{cases},$$

$$\psi = \begin{cases} tx & si \quad x \leq s_1 \\ N_2\left(tN_1^{-1}(x)\right) & si \quad x > s_1 \end{cases}$$

Afirmamos que $N_2 = \psi \circ N_1 \circ \varphi$.

De hecho, si $x < s_2$ entonces $\frac{x}{t} < \frac{s_2}{t} = s_1$, y $N_1(\frac{x}{t}) > N_1(s_1) = s_1$. Tenemos

$$\psi \circ N_1 \circ \varphi = \psi \left(N_1 \left(\frac{x}{t} \right) \right)$$

$$= N_2 \left[t \cdot N_1^{-1} \left(N_1 \left(\frac{x}{t} \right) \right) \right] = N_2 \left(t \cdot \frac{x}{t} \right) = N_2(x)$$

Si $x \geq s_2$ entonces $N_2(x) \leq N_2(s_2) = s_2 = s_1 t$. Entonces obtenemos $\frac{N_2(s_2)}{t} \leq s_1$.

Tenemos

$$\psi \circ N_1 \circ \varphi(x) = \psi \left[N_1 \left(N_1^{-1} \left(\frac{N_2(x)}{t} \right) \right) \right]$$

$$= \psi \left(\frac{N_2(x)}{t} \right) = t \cdot \frac{N_2(x)}{t} = N_2(x)$$

Como conclusión obtenemos $\psi \circ N_1 \circ \varphi = N_2$.

Sea N_1 la negación estándar $N_1(x) = 1 - x$. Entonces

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{x}{t} & si \quad x \leq s_2 \\ 1 - \dfrac{N_2(x)}{t} & si \quad x > s_2 \end{cases},$$

$$\psi = \begin{cases} tx & si \quad x \leq \dfrac{1}{2} \\ N_2\left(t(1-x)\right) & si \quad x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

y $t = 2s_2$.

Si $x \leq s_2$ donde $\frac{x}{t} \leq \frac{s_2}{t} = \frac{1}{2}$, es decir, $\varphi \leq \frac{1}{2}$ y donde tenemos,

$$\psi \circ \varphi(x) = t\varphi(x) = t \cdot \frac{x}{t} = x.$$

Si $x > s_2$ donde $N_2(x) < N_2(s_2) = s_2$ y donde obtenemos $1 - \frac{N_2(x)}{t} > 1 - \frac{s_2}{t} = \frac{1}{2}$, es decir, $\varphi(x) > \frac{1}{2}$. Teniendo esto en cuenta tenemos

$$\psi \circ \varphi(x) = N_2(t(1_\varphi(x))) = N_2 \left(t \left(\frac{N_2(x)}{t} \right) \right) = N_2(N_2(x)).$$

Si N_2 es una negación fuerte entonces $N_2(N_2(x)) = x$, es decir, $\psi \circ \varphi(x) = x$ y como conclusión $\psi \circ = 1_{[0,1]}$.

Ahora, calculemos $\varphi \circ \psi$.

Si $x \leq \frac{1}{2}$ donde $xt \leq \frac{t}{2} = s_2$ es decir, $\psi(x)\frac{1}{2}$. Donde

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(xt) = \frac{xt}{t} = x$$

Si $x > \frac{1}{2}$ donde $1 - x < \frac{1}{2}$, donde $t(1-x) \leq \frac{t}{2} = s_2$ y $N_2(t(1-x)) \geq N_2(s_2) = s_2$. Donde

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(N_2(t(1-x))) = 1 - \frac{N_2(N_2(t(1-x)))}{t}$$

Si N_2 es una fuerte negación que obtenemos

$$\varphi \circ \psi(x) = 1 - \frac{t(1-x)}{t} = x$$

La continuidad de φ y ψ es fácil de comprobar y obtenemos $\varphi \circ \psi = 1_[0,1]$, es decir, φ y ψ son inversas entre sí ($\psi = \varphi^{-1}$). Como conclusión, si N es una negación fuerte entonces existe un automorfismo $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, tal que $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$.

Observación : $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$ se llama transformada φ de la negación estándar. Las nociones y teoremas sobre normas triangulares las encontramos en Alsina, Schweizer, y Frank (2006).

Norma triangular o t-norma

Una t-norma $\mathcal{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ se extiende naturalmente a la operación $\mathcal{T} : [0,1] \to [0,1]$ por $\mathcal{T}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(x_1, \ldots, x_n - 1))$. Una operación $\mathcal{T} : [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ se llama norma triangular (una t-norma para abreviar), si es asociativa, conmutativo, creciente y tal que 1 es su elemento identidad.

Definición 21. ***Norma triangular o t-norma***

Una t-norma es una función de dos lugares $\mathcal{T} : I^2 \to I$ (es decir, una operación binaria en I ($I = [0,1]$)) que satisface las siguientes condiciones:

(i) *En el límite de* I^2,

$$\mathcal{T}(x,0)=\mathcal{T}(0,x)=0, \mathcal{T}(x,1)=\mathcal{T}(1,x)=x.$$

(ii) $\mathcal{T}$ *no es decreciente en cada lugar, es decir,* $\mathcal{T}(x_1,y_1)\leq\mathcal{T}(x_2,y_2)$, *siempre que* $x_1\leq x_2; y_1\leq y_2$.

(iii) $\mathcal{T}$ *es conmutativo, es decir, para todo,* $x,y\in I$, $\mathcal{T}(x,y)=\mathcal{T}(y,x)$.

(iv) $\mathcal{T}$ *es asociativo, es decir, para todo,* $x,y,z\in I$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(x,y),z)=\mathcal{T}(x,\mathcal{T}(y,z))$.

Observación 1.: Algebraicamente, una t-norma, es una operación de semigrupo conmutativa que conserva el orden en $[0,1]$ con identidad 1 y elemento nulo 0. Geométricamente, la gráfica de una t-norma, es una superficie sobre el cuadrado unitario que está delimitada por el cuadrilátero cuyos vértices son $(0,0,0),(1,0,0),(1,1,1)\ y\ (0,1,0).$, que se eleva tanto horizontal como verticalmente, y que es simétrica con respecto al plano $x=y$. La asociatividad parece no tener una interpretación geométrica simple.

Observación 2.: En vista de la monotonicidad y conmutatividad de $\mathcal{T}$ y del hecho de que $Ran\mathcal{T}\subseteq I$, las condiciones de contorno en **(i)** pueden reemplazarse por la condición única:

(v) Para todo $x\in I$, $\mathcal{T}(x,1)=1$.

Entonces $0\leq\mathcal{T}(x,0)\leq\mathcal{T}(1,0)=0$, de modo que $T(x,0)=0$, y las condiciones restantes se derivan de **(iii)**.Por lo tanto, si $\mathcal{T}$ es continuo y satisface **(i)** y **(iv)**, entonces $\mathcal{T}$ es no decreciente y conmutativo, es decir, satisface **(ii)** y **(iii)**.

Observación 3.:

i) Una t-norma se llama **continua**, si es continua en una función.

ii) Una t-norma se llama **estricta**, si es continua y estrictamente monótona.

iii) Una t-norma se llama **nilpotente**, si es continua y cada x en el intervalo abierto $\langle 0,1\rangle$ es su elemento nilpotente, es decir, hay un numero natural n tal que $\underbrace{x * \ldots * x}_{nveces} = 0$.

iv) Una t-norma se llama *Arquímedes*, si tiene la propiedad de Arquímedes, es decir, si para cada $x, y \in \langle 0,1\rangle$ hay un numero natural n tal que $\underbrace{x * \ldots * x}_{nveces} \leq y$.

El siguiente teorema lo encontramos en Bede (2013).

Teorema 22. *Dada cualquier t-norma $\mathcal{T}$, tenemos $\mathcal{T}(x,0) = 0$, para todo $x \in [0,1]$*

Demostración:

De **(i)** tenemos $\mathcal{T}(0,1) = 0$. Luego de **(ii)** se sigue que

$$\mathcal{T}(0,x) \leq \mathcal{T}(0,1) = 0, \forall\ x \in [0,1],$$

es decir, $\mathcal{T}(0,x) = 0$.

Luego de **(iii)** obtenemos $\mathcal{T}(x,0) = 0$.

Teorema 23. *Tenemos $\mathcal{T}(x,y) \leq x \wedge y$, para cualquier t-norma $\mathcal{T}$, para cualquier $x, y \in [0,1]$*

Demostración:

Tenemos

$$\mathcal{T}(x,y) \leq \mathcal{T}(x,1) = x.$$

También,

$$\mathcal{T}(x,y) = \mathcal{T}(y,x) \leq \mathcal{T}(y,1) = y.$$

Es una conclusión,$\mathcal{T}(x,y) \leq x \wedge y$.

El siguiente ejemplo la encontramos en Zadeh (1965).

Ejemplo:

El mínimo y el máximo.

$$x \wedge y = \text{mín}\{x, y\}$$

junto con la negación estándar $N(x) = 1 - x$, forman un triplete de De Morgan. Este triplete de De Morgan (a menudo llamado norma t-norma Gödel) desempeña un papel especial en la lógica difusa, y Zadeh propuso su uso para conjuntos difusos en (1965). Observemos también que $\wedge$ es la t-norma mayor que se mostró en el teorema anterior.

t-norma de Arquimedes

Sea $\mathcal{T}$ una t-norma, Dado $x \in [0,1]$ definimos:

$$x_{\mathcal{T}(n)} = \mathcal{T}\underbrace{(x,\cdots,x)}_{n-veces} = \mathcal{T}(x_{\mathcal{T}(n-1)}, x),\ n \geq 2$$

Definición 24. *Sea la t-norma $\mathcal{T}$,*

(i) Se dice que una t-norma $\mathcal{T}$ es continua si es continua como función del intervalo unitario.

(ii) Se dice que una t-norma $\mathcal{T}$ es de Arquímedes. Si;

$$\lim_{n\to\infty} x_{\mathcal{T}(n)} = 0$$

Tenemos el siguiente teorema en Bede (2013).

Teorema 25. *Si $\mathcal{T}$ es una t-norma de Arquimedes, entonces,*

$$\mathcal{T}(x,x) < x,\ \forall\ x \in (0,1)$$

Demostración:

Suponga, lo contrario, es decir; que $x_{\mathcal{T}(2)} = \mathcal{T}(x,x) \geq x$ para algún $x \in (0,1)$.

Entonces se tiene.

$$x_{\mathcal{T}(3)} = \mathcal{T}(\mathcal{T}(x,x),x) \geq \mathcal{T}(x,x) \geq x$$

y por inducción se tiene,

$$x_{\mathcal{T}(n)} = \mathcal{T}\underbrace{(x,\cdots,x)}_{n-veces} \geq x$$

Que $\lim_{n\to\infty} x_{\mathcal{T}(n)} \geq x$, lo cual es una contradicción.

Observación: Generalmente, una t-norma de Arquímedes no necesita ser continua.

Si una t-norma es continua y de Arquímedes, obtenemos la siguiente caracterización:

Teorema 26. *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma continua. Entonces $\mathcal{T}$ es Arquímedes si y sólo si $\mathcal{T}(x,x) < x, \ \forall \ x \in (0,1)$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Por el **Teorema 10**, Si $\mathcal{T}$ es de Arquimedes entonces se cumple:

$$\mathcal{T}(x,x) < x, \ \forall \ x \in (0,1).$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{T}$ cumple la condición $\mathcal{T}(x,x) < x, \ \forall \ x \in (0,1)$ y que $\mathcal{T}$ es continua. Entonces tenemos,

$$x_{\mathcal{T}(n)} = \mathcal{T}\underbrace{(x,\cdots,x)}_{n-veces} = \mathcal{T}(\mathcal{T}(x,x),\underbrace{(x,\cdots,x)}_{(n-2)-veces}) < \mathcal{T}\underbrace{(x,\cdots,x)}_{(n-1)-veces} = x_{\mathcal{T}(n-1)}$$

Entonces, la secuencia $x_{\mathcal{T}(n)}$ es decreciente (estricto). Además, $x_{\mathcal{T}(n)}$ esta acotado desde abajo por 0. Entonces, $x_{\mathcal{T}(n)}$ es una secuencia convergente.

Sea $y = \lim_{n\to\infty} x_{\mathcal{T}(n)}$.

Supongamos que $y > 0$. Entonces

$$x_{\mathcal{T}(2n)} = \mathcal{T}(x_{\mathcal{T}(n)}, x_{\mathcal{T}(n)})$$

y como $\mathcal{T}$ es continua, tenemos;

$$\lim_{n\to\infty} x_{\mathcal{T}(2n)} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}(x_{\mathcal{T}(n)}, x_{\mathcal{T}(n)}) = \mathcal{T}\left(\lim_{n\to\infty} x_{\mathcal{T}(n)}, \lim_{n\to\infty} x_{\mathcal{T}(n)}\right)$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} x_{\mathcal{T}(2n)}$ también es y, obtenemos $y = \mathcal{T}(y,y)$. Pero a partir de la hipótesis, $\mathcal{T}(y,y) < y$, obtenemos una contradicción.

Definición 27. *Una t-norma $\mathcal{T}$ es estricta, si es continua en I^2 y estrictamente creciente en cada lugar en $(0,1]^2$, de modo que*

$$\mathcal{T}(x_1,y) < \mathcal{T}(x_2,y), \ \textit{siempre que } x_1 < x_2, y > 0,$$

y

$$\mathcal{T}(x, y_1) < \mathcal{T}(x, y_2), \ \textit{siempre que } x > 0, y_1 < y_2$$

Observación: El ordenamiento natural en I induce un ordenamiento parcial del conjunto de todas las funciones desde I^2 a I y, en particular, del conjunto de todas las t-noras. En consecuencia, decimos que $\mathcal{T}_1$ es más débil que $\mathcal{T}_2$ o $\mathcal{T}_2$; es más fuerte que $\mathcal{T}_1$; en consecuencia, $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, si

$$\mathcal{T}_1(x, y) \leq \mathcal{T}_2(x, y) \ \ \forall (x, y) \in I^2$$

y

$$\mathcal{T}_1(x_0, y_0) < \mathcal{T}_2(x_0, y_0), \text{ para algún } (x_0, y_0) \in I^2.$$

Si $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$ o $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, en consecuencia, $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.

Las t-normas mas importantes son:

La operación mínima (t-norma mínima)

$$\mathcal{T}_M(a, b) = \text{mín}(a, b)$$

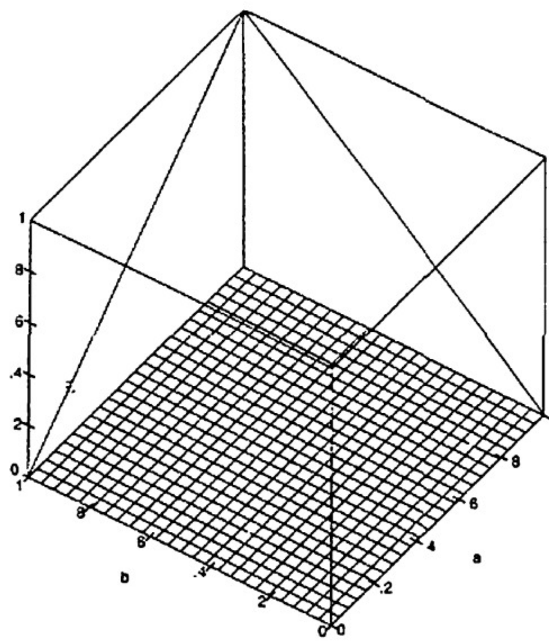

Figura 6: t-norma mínima

El producto algebraico (Producto t-norma)

$$\mathcal{T}_P(a, b) = a \cdot b$$

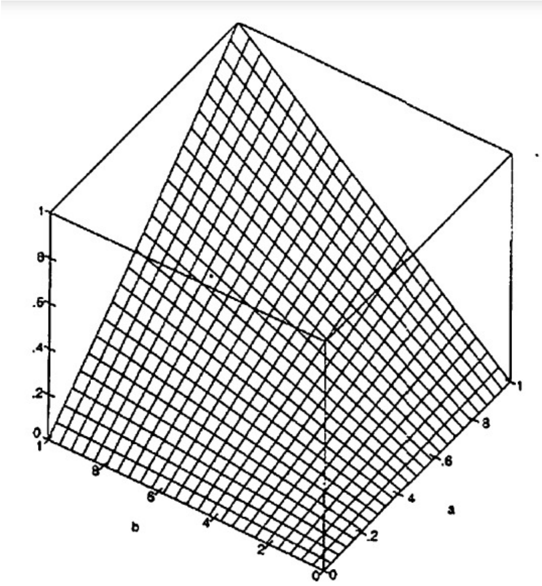

Figura 7: Producto t-norma

La t norma de Łukasiewicz

$$\mathcal{T}_L(a, b) = \text{máx}(a + b - 1, 0)$$

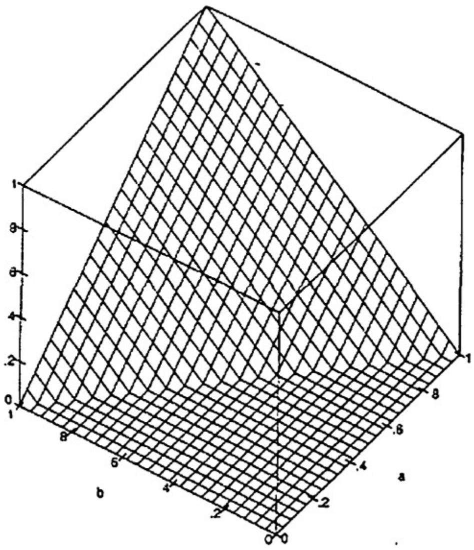

Figura 8: t norma de Łukasiewicz

Observación: La t-norma producto drástico

$$\mathcal{T}_D(a,b) = \begin{cases} a, \ si, \ \ b = 1 \\ b, si, \ \ a = 1 \\ 0, \ en \ otro \ caso) \end{cases}$$

Que es discontinua y es la menor de todas las t-normas.

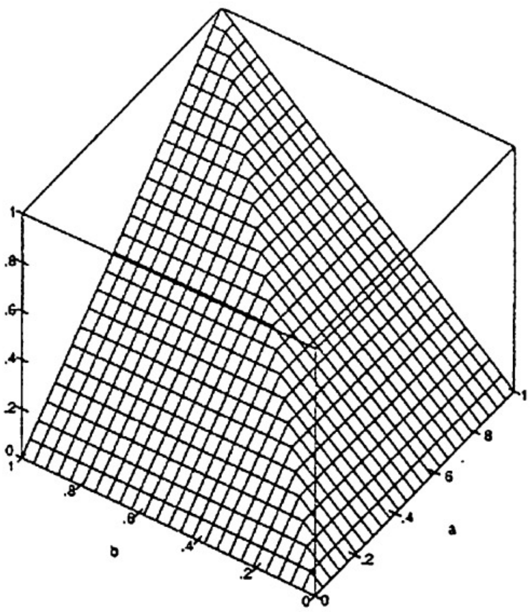

Figura 9: t-norma producto drástico

Donde las imagenes se obtuvieron de Klir y Yuan (1995).

Teorema 28. ***Orden de las t-normas***

- *La norma t-drástica es la norma t mas pequeña puntual y la mínima es la norma t más grande puntual:*

$$\mathcal{T}_D(a,b) \leq \mathcal{T}_L(a,b) \leq \mathcal{T}(a,b) \leq \mathcal{T}_P(a,b) \leq \mathcal{T}_M(a,b)$$

para cualquier norma $\mathcal{T}$ y $\forall a, b \in [0,1]$.

- *Para cada t-norma $\mathcal{T}$, el numero 0 actúa como elemento nulo:*

$$\mathcal{T}(a,0)=0\ \forall a\in[0,1]$$

Demostración:

Simplemente, observamos que las siguientes desigualdades, $0<\mathcal{T}(x.y)\leq\mathcal{T}(x,1)$ y $0\leq\mathcal{T}(x,y)\leq\mathcal{T}(1,y)$ y por el **(i)** de la definición 4. Se tiene:

$$\mathcal{T}_D(a,b)\leq\mathcal{T}_L(a,b)\leq\mathcal{T}(a,b)\leq\mathcal{T}_P(a,b)\leq\mathcal{T}_M(a,b)$$

Definición 29. *Un poset ($\mathcal{T}$,$\leq$) es un retículo si cualquier par de elementos $\mathcal{T}_D,\mathcal{T}_M\in\mathcal{T}$ posee máxima cota inferior y mínima cota superior.*

Observación 1.: En particular, la t-norma $\mathcal{T}_D$ es la más debíl y la t-norma $\mathcal{T}_M$ es la más fuerte, o en otras palabras, que $\mathcal{T}_D$ y $\mathcal{T}_M$ son respectivamente el mínimo y supremo de poset($\mathcal{T}$,$\leq$).

Observación 2.: La ordenación parcial habitual de las t-normas es puntual, es decir,

$$\mathcal{T}_1\leq\mathcal{T}_2\ si\ \mathcal{T}_1(a,b)\leq\mathcal{T}_2(a,b)\forall a,b\in[0,1]$$

Observación 3.: Dado que $\mathcal{T}$ es associativo, para cada $x\in I$, las $\mathcal{T}$-potencias de x pueden definirse recursivamente por:

Definición 30. $x^1=x\ y\ x^{n+1}=\mathcal{T}(x^n,x)\forall n>0,n\in\mathbb{Z}$

Inducciones sencillas producen que, para todo $m,n\geq 1$,obtenemos;

$$x^{m+n}=\mathcal{T}(x^m,x^n)=\mathcal{T}(x^n,x^m)$$

y

$$x^{mn}=(x^m)^n=(x^n)^m$$

Además,de la definición 6; se puede extender a enteros no negativos definiendo $x^0=1\forall x\neq 0$ entonces para todo $x\neq 0$,$x^{m+n}=\mathcal{T}(x^m,x^n)=\mathcal{T}(x^n,x^m)$ y $x^{mn}=(x^m)^n=(x^n)^m$, se extiende a todos los enteros no negativos m, n.

Para $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ y $n \geq 1$, $x^n = x$ para $\mathcal{T} = \mathcal{T}_P$, x^n es la n-ésima potencia ordinaria de x, y para $\mathcal{T} = \mathcal{T}_L$,$x^n = \text{máx}(nx - n + 1, 0)$ (cuando existe una posibilidad de confusión, escribimos $x^n_{\mathcal{T}}$ en lugar de simplemente x^n) Decimos que una función $\mathcal{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es creciente si $\mathcal{T}(x,y) \leq \mathcal{T}(w,z)$ para todo $(x,y),(w,z) \in [0,1] \times [0,1]$ tal que $x \leq w$ y $y \leq z$.

Definición 31. *Una t-norma es una función $\mathcal{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisface las siguientes propiedades:*

a) Conmutatividad:$\mathcal{T}(a,b) = \mathcal{T}(b,a),\ \forall a,b \in [0,1]$

b) Asociatividad: $\mathcal{T}(a,\mathcal{T}(b,c)) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(a,b),c),\ \forall a,b,c \in [0,1]$

c) Elemento de identidad:$\mathcal{T}(a,1) = a,\ \forall a \in [0,1]$

d) Monotonicidad:$\mathcal{T}(a,c) \leq \mathcal{T}(b,c),\ si\ a \leq b,\ \forall a,b,c \in [0,1]$

Teorema 32. *Una t-norma $\mathcal{T}_1$ pertenece a la familia de otra t-norma $\mathcal{T}$, y se expresa $\mathcal{T} \in F(\mathcal{T})$, si existe un automorfismo de orden en $[0,1]$;*

$$\varphi : [0,1] \to [0,1]$$

Es estrictamente creciente, con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$ tal que

$$\mathcal{T}_\varphi(a,b) = \varphi^{-1}(\mathcal{T}(\varphi(a),\varphi(b))), \forall a,b \in [0,1]$$

Definición 33. ***Subconjuntos de t-normas***

- ♠ *La t-norma $\mathcal{T}_M$ a la que solo pertenece ella misma $F(\mathcal{T}_M) = \{\text{mín}(a,b)\}$; es la única idempotente y es continua.*

- ♠ *La t-norma $\mathcal{T}_P, F(\mathcal{T}_P)$; son estrictamente positivas (si $a.b > 0$,entonces $\mathcal{T}_P(a,b) > 0$) y continuas.*

♠ *Lukasiewicz, $F(\mathcal{L})$, no son estrictamente positivas, pero si continuas.*

Observación: Todas las t-normas continuas perteneces a una de estas familias, o son una t-norma ordinal, es decir, una t-norma definida de la forma:

$$\mathcal{T}(a,b) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)\mathcal{T}_i((\dfrac{(x-a_i)}{(b_i-a_i)}), (\dfrac{(y-a_i)}{(b_i-a_i)}), \; si(a,b) \in [a_1, b_i]^2 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mín}(a,b), \; en\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde los $[a_i, b_i]$ con $i = 1, \ldots, n$ son conjuntos disjuntos del intervalo $[0,1]$, y para cada i, $\mathcal{T}_i$ es una t-norma.

Definición 34. ***Diagonal de una t-norma $\mathcal{T}$***

La diagonal de una t-norma T es la función $\delta_{\mathcal{T}} : I \to I$ definida por $\delta_{\mathcal{T}}(x) = \mathcal{T}(x,x)$. Las iteraciones de $\delta_{\mathcal{T}}$ son las funciones $\delta_{\mathcal{T}}^n$, definidas recursivamente por $\delta_{\mathcal{T}}^0 = j_I$ y $\delta_{\mathcal{T}}^{n+1} = \delta_{\mathcal{T}} o \delta_{\mathcal{T}}^n$

Teorema 35. ***Teorema de caracterización de t-norma***

Sea I una operación binaria en el intervalo unitario. Entonces, I es una t-norma de Arquímedes si existe un generador decreciente f tal que

$$I(a,b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b)), \quad \forall a, b \in [0,1]$$

Demostración: la encontramos en el libro, (Klir y Yuan, 1995).

1.2. Justificación

Esta investigación se desarrolla con un objetivo claro: ampliar el conocimiento en una área que, hasta ahora, ha recibido una atención limitada en el ámbito investigativo. Enfocamos nuestros esfuerzos en la descripción de conjuntos difusos y números borrosos, centrándonos particularmente en la aritmética difusa en la recta real.

La aritmética difusa en la recta real representa un componente esencial para cualquier investigación en este campo. Aunque las operaciones algebraicas básicas son conocidas, esta área presenta restricciones y propiedades únicas que han motivado la realización de este trabajo. Nuestro propósito es comprender a fondo estas propiedades, especialmente en lo que respecta a la norma triangular del producto algebraico.

El valor fundamental de este trabajo radica en la posibilidad de explorar y entender diferentes formas de incorporar la aritmética difusa en relación con la norma triangular del producto algebraico. Esta incorporación abre nuevas perspectivas en el ámbito matemático, destacando su importancia, especialmente en aplicaciones tecnológicas.

La relevancia de esta investigación se manifiesta al detallar, analizar e informar sobre los efectos de agregar el operador de producto t-norma en la aritmética difusa. Además, buscamos profundizar en las definiciones del t-norma y comprender la esencia del producto t-norma.

Destacamos la importancia global de la aritmética difusa en diversos campos matemáticos y su capacidad para proporcionar soluciones tangibles en el mundo real. Esta investigación no solo contribuirá al conocimiento teórico, sino que también ofrecerá perspectivas prácticas que podrían tener un impacto significativo en la comprensión de fenómenos matemáticos y su aplicabilidad en la vida cotidiana.

1.3. Planteamiento del problema

En la mayoría de las aplicaciones de aritmética difusa, la t-norma mínima ($\mathcal{T}_M$) se utiliza como conector, siguiendo el principio de extensión de Zadeh (1974). Sin embargo, la aritmética difusa con diferentes tipos de t-normas, una generalización de la extensión de Zadeh que reemplaza el operador mínimo por una t-norma, enfrenta desafíos prácticos considerables. La complejidad radica en los supremos de infinitas combinaciones para cada punto único resultante en la definición del principio de extensión. Por otro lado, para t-normas y operaciones específicas, se han obtenido resultados simples y útiles, como en el caso de la suma con la t-norma de producto ($\mathcal{T}_P$) (Fullér, 1991; Fullér y Keresztfalvi, 1992).

Existen dos enfoques principales para abordar la aritmética difusa t-norma: el método de corte α-corte generalizado y el principio de extensión generalizado, ambos con complejidades equivalentes. Se compararán los resultados con $\mathcal{T}_M$ y las operaciones drásticas basadas en la t-norma $\mathcal{T}_w$ en términos difusos. Para superar la falta de preservación de la norma, se proponen aproximaciones adecuadas. Además, se calcularán las distancias entre las aproximaciones y los resultados originales, revelando una estrecha relación entre la aritmética $\mathcal{T}_P$ y la aritmética $\mathcal{T}_w$ (Soylu y Aslan, 2021).

La contribución clave de este estudio radica en el minucioso análisis y descripción de la Aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico. Se proporcionarán herramientas aritméticas específicas destinadas a aplicaciones prácticas, y se indagará en los principios fundamentales que guían el funcionamiento interno de la aritmética difusa.

1.3.1. Formulación del problema

¿Cuáles son las fórmulas explícitas en la aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico?

1.4. Objetivo general

Fundamentar las fórmulas explícitas en la aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico

1.4.1. Objetivos específicos

- Revisar los fundamentos de conjuntos difusos y números difusos.
- Revisar los fundamentos de la aritmética difusa con norma mínimo
- Analizar las propiedades de la aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico

1.5. Hipótesis Significativa

no aplica

1.6. Hipótesis Nula

no aplica

II. MATERIALES Y MÉTODOS

La consideración de algunas variables no ha sido de tanta importancia, por lo cual no se han utilizado. Dado que se trata de una investigación básica descriptiva, las variables distintas a la investigación no han sido incorporadas.

2.1.Variables

2.1.1. Variables dependiente

No aplica

2.1.2. Variables independiente

No aplica

2.2. Operacionalización de las variables

2.3. Definición Conceptual

No aplica

2.4. Definición Operacionas

No aplica

III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de estudio

La investigación se clasifica como básica debido a su naturaleza descriptiva y teórica. En este enfoque, se emplean definiciones y teoremas previamente conocidos con el único propósito de alcanzar el resultado esperado de la investigación.

3.2. El diseño de investigación

Análisis-síntesis y se realizaran los siguientes pasos:

- Antecedentes
- Conjuntos y números difusos
- Aritmética difusa con números difusos
- t-nomas y producto t-norma
- Aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico.

3.3. Población y muestra

Artículos y Libros

3.4. Técnicas e instrumentos y recolección de datos.

La recolección de datos la realizamos a través de fuentes como "Google Scholar, Springer, Scielo, entre otros".

3.5. Técnica de análisis y prueba de hipótesis

Dado que no se tuvo una hipótesis, se llevó a cabo un análisis detallado de cada artículo encontrado y utilizado en esta investigación.

IV. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Números difusos

Introduciremos a continuación un caso particular de conjunto difuso llamado número difuso, que es una extensión del concepto de número real y la principal herramienta de este trabajo. Recordemos que $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.

La siguiente definición de un número difuso, esta dada por Diamond y Kloeden (2000).

Definición 36. ***Número Difuso***

Considere un subconjunto difuso de la recta real, $\tilde{u} : \mathbb{R} \to [0, 1]$*. Entonces* $\tilde{u}$ *es un número difuso, si satisface la siguientes propiedades:*

(i) $\tilde{u}$ *es normal, es decir:* $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ *con* $\tilde{u}(x_0) = 1$

(ii) $\tilde{u}$ *es convexo difuso, es decir:* $(\tilde{u}(tx+(1-t)y) \geq \text{mín}\{\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)\},\ \forall\, t \in [0, 1],\ x, y \in \mathbb{R})$

(iii) $\tilde{u}$ *es semicontinuo superior en* $\mathbb{R}$*,es decir:* $(\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ *tal que* $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x_0) < \epsilon, |x - x_0| < \delta)$

(iv) $\tilde{u}$ *tiene soporte compacto, es decir,* $cl\{x \in \mathbb{R}; \tilde{u}(x) > 0\}$ *es compacto, donde* $cl(A)$ *denota la clausura del conjunto* A*.*

Denotemos por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ al espacio de los números difusos.

Definición 37. *El inverso aditivo de un número difuso* $\tilde{u}$ *se denota por* $-\tilde{u}$ *y tiene la siguiente función de pertenencia,*

$$\mu_{-\tilde{u}}(x) = \mu_{\tilde{u}}(-x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Definición 38. *El recíproco de un número difuso* $\tilde{u}$ *se denota por* $\tilde{u}^{-1}$ *y tiene la siguiente función de pertenencia*

$$\mu_{\tilde{u}^{-1}}(x) = \mu_{\tilde{u}}(\frac{1}{x}), \forall x \in \mathbb{R}$$

Definición 39. *El núcleo de un número difuso* $\tilde{u}$ *se denota por* $core(\tilde{u})$ *y se define como,*

$$core(\tilde{u}) = x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{u}}(x) = 1$$

Definición 40. *El soporte de un número difuso* $\tilde{u}$ *se denota por* $supp(\tilde{u})$ *y se define como,*

$$supp(\tilde{u}) = x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{u}}(x) > 0$$

Definición 41. ***Número difuso triangular***

Un número difuso triangular $\tilde{u}$ *denota por* (a_1, b_1, c_1) *tiene la función de pertenencia* $\mu_{\tilde{u}}$ *definida en el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *por,*

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1}, & a_1 \leq x < b_1, \\ \dfrac{c_1 - x}{c_1 - b_1}, & b_1 < x \leq c_1, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sea $\tilde{u} = (a_1, b_1, c_1)$ *un número difuso. Las extensiones izquierda y derecha de este número difuso se denotarán respectivamente por* $\alpha = b_1 - a_1$ *y* $\beta = c_1 - b_1$

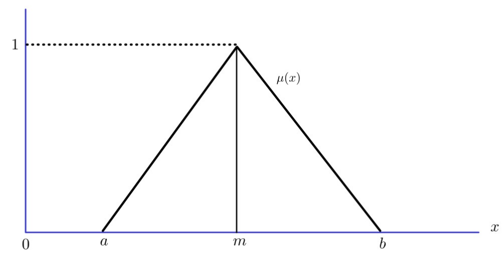

Figura 10: Número difuso triangular.

Definición 42. *La representación LR de un número difuso triangular* $\tilde{u} = (a_1, b_1, c_1)$ *es* $\langle b_1, \alpha, \beta \rangle_{(1-x, 1-x)}$.

Definición 43. $\tilde{u}(t)$ *es un número difuso singlenton para cualquier número real, dado* $t \in \mathbb{R}$.

Observación: Además, los números difusos generalizan los intervalos cerrados. de hecho, si $\mathbb{I}$ denota el conjunto de todos los intervalos reales, entonces $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, donde

$$\mathbb{I} = \{\tilde{u}_{[a,b]}; [a,b] \text{ es un intervalo real}\}$$

El siguiente teorema descrito por Negoiţă y Ralescu (1975).

Teorema 44. ***(Teorema de Apilamiento)***.

Si $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es un número difuso y $\tilde{u}_\alpha$ son sus conjuntos de α-corte, entonces:

i. *$\tilde{u}_\alpha$ es un intervalo cerrado $\tilde{u}_\alpha = [\tilde{u}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^+]$, para cualquier $\alpha \in [0,1]$*

ii. *si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, entonces $\tilde{u}_{\alpha_2} \subset y_{\alpha_1}$.*

iii. *Para cualquier sucesión α_n que converge inferiormente a $\alpha \in (0,1]$,tenemos*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n} = \tilde{u}_\alpha$$

.

iv. *Para cualquier susesión α_n que converge superiormente a 0, tenemos*

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right) = \tilde{u}_{\alpha_0}$$

Demostración:

i) Veamos primero que todos los conjuntos $\tilde{u}_\alpha$ son no vacíos y acotados, ya que $\tilde{u}_1 \neq 0$ y porque $\tilde{u}_0$ esta acotado (un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ esta cerrado y acotado). Sea $\tilde{u}$ un número difuso y $\alpha \in (0,1]$. si $a, b \in \tilde{u}_\alpha$, entonces $\tilde{u}(a) \geq \alpha$ y $\tilde{u}(b) \geq \alpha$. Entonces, de la convexidad difusa, si $t \in [a,b]$ obtenemos

$$\tilde{u}(t) \geq \text{mín}\{\tilde{u}(a), \tilde{u}(b)\} = \alpha$$

es decir, $t \in [a,b]$. Como conclusión $\tilde{u}$ contiene cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ junto con los puntos $[a,b]$ esto significa que $\tilde{u}_\alpha$ es convexo.

Todo lo que queda por demostrar es que $\tilde{u}_\alpha$ es cerrado.

La semicontinuidad superior implica que si $\tilde{u}(t_0) < \alpha$, entonces hay un intervalo abierto W con $t_0 \in W$ tal que $\tilde{u}(t) < \alpha, \forall t \in W$.

Inmediatamente se deduce que el conjunto $\{t : \tilde{u}(t) < \alpha\}$ es abierto y luego tiene un complemento cerrado, es decir, $\tilde{u}_\alpha$ es cerrado. en la recta real, los conjuntos cerrados convexos son intervalos cerrados, por lo que $\tilde{u}_\alpha$ es un intervalo cerrado para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.

ii) Se comprueba que (ii) se cumple. De hecho, si $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ entonces si $t \in \tilde{u}_{\alpha_2}$ entoces $\tilde{u}(t) \geq \alpha_2 \geq \alpha_1$ y asi, $t \in \tilde{u}_{\alpha_1}$. Si $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_2 = 0$ entonces la demostración (ii)es inmediata.

iii) Sea $\alpha_n \to \alpha$ no decreciente. Entonces $\tilde{u}_{\alpha_n} \subseteq \tilde{u}_{\alpha_{n-1}}$, es una sucesión decreciente de intervalos cerrados $\tilde{u}_{\alpha_n} = [\tilde{u}^-_{\alpha_n}, \tilde{u}^+_{\alpha_n}]$. Entonces vemos que $\tilde{u}^-_{\alpha_n}, \tilde{u}^+_{\alpha_n}$ convergen, en cuyo caso $\tilde{u}^-_{\alpha_n} \to \alpha, \tilde{u}^+_{\alpha_n} \to \alpha$ y

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}$$

Tenemos que probar que $\tilde{u}_\alpha = [a, b]$. Para un determinado $t \in [a, b]$ tenemos

$$\tilde{u}(t) \geq \text{mín}\{\tilde{u}(a), \tilde{u}(b)\}$$

Entonces, es suficiente mostrar que $\tilde{u}(a) \geq \alpha$ y $\tilde{u}(b) \geq \alpha$.

Supongamos que $\tilde{u}(a) < \alpha$, entonces como $\tilde{u}$ es semicontinua superior, hay una vecindad W de α, tal que $\tilde{u}(t) < \alpha$.

Esto implica la existencia de un rango $N \in \mathbb{N}$ con $\tilde{u}(\tilde{u}^-_{\alpha_n}) < \alpha$ para cualquier $n \geq N$. Entonces, como $\alpha_n \to \alpha$ obtenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{u}(\tilde{u}^-_{\alpha_n}) < \alpha_n$ que es una contradicción. Luego se sigue que $\tilde{u}(a) \geq \alpha$.

De manera similar, podemos mostrar que $\tilde{u}(b) \geq \alpha$, entonces $\tilde{u}(t) \geq \alpha$ y luego $[a, b] \subseteq \tilde{u}_\alpha$. De (ii), tenemos que $\tilde{u}_\alpha \subseteq \tilde{u}_{\alpha_n}$ e implica $\tilde{u}_\alpha \subseteq [a, b]$. Luego, finalmente obtenemos $\tilde{u}_\alpha = [a, b]$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n} = \tilde{u}_\alpha$$

iv) Para (iv) observamos que la inclusión

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n} \subseteq \tilde{u}_\alpha$$

es admitida. Como $\tilde{u}_0$ es cerrado, obtenemos

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right) \subseteq \tilde{u}_0$$

Recíprocamente, $t \in \tilde{u}_0$ implica que hay una secuencia

$$t_n \in x \in \mathbb{R}; \tilde{u}(t) > 0$$

que converge a t. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$t_n \in \tilde{u}_{\alpha_n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n}$$

Entonces obtenemos

$$t_{\in} cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right)$$

Las dos inclusiones conducen a la conclusión requerida.

Otro teorema importante denotado por Negoiţă y Ralescu (1975).

Teorema 45. ***(Teorema de Caracterización)***

Dada una familia de subconjuntos $M_\alpha : \alpha \in [0, 1]$ que satisface las condiciones (i)-(iv).

i. M_α es un intervalo cerrado no vacio para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.

ii. Si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, tenemos $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$

iii. Para cualquier secuencia α_n que converge inferiormente a $\alpha \in (0, 1]$ tenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_\alpha$$

iv. Para cualquier secuencia α_n que converge superiormente a 0, tenemos

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right) = M_0$$

Entonces existe un único $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tal que $\tilde{u}_\alpha = M_\alpha$, para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.

Demostración:

Sea M_α que cumple las propiedades de (i)-(iv). Entonces, definiendo

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \notin M_0 \\ \sup\{\alpha \in [0,1] :\ t \in M_0\} & si\ t \in M_0 \end{cases}$$

Obtenemos un número difuso (es decir, $\tilde{u}$ es un conjunto difuso normal, convexo, semicontinuo superior y con soporte compacto). Los conjuntos de niveles de $\tilde{u}$ son $\tilde{u}_\alpha = M_{\alpha, \alpha \in (0,1]}$ y $\tilde{u}_0 \subseteq M_0$. Ahora probamos estas declaraciones paso a paso.

Normal: Como M_1 no es vacío, para $t \in M_1$ tenemos $\tilde{u}(t_0) = 1$, para algún $t_0 \in M_0$, entonces $\tilde{u}$ es normal.

Convexo difuso: Para probar la convexidad difusa consideramos ahora un elemento fijo en un intervalo fijo $t \in [a, b] \subseteq M_0$. Suponer que

$$\tilde{u}(a) = \alpha_a = \sup\{\alpha : a \in M_\alpha\}$$

y

$$\tilde{u}(b) = \alpha_b = \sup\{\alpha : b \in M_\alpha\}$$

Supongamos que $\alpha_a \leq \alpha_b$. Luego de (ii) tenemos $M_{\alpha_b} \subseteq M_{\alpha_a}$ así que $b \in M_{\alpha_b} \subseteq M_{\alpha_a}$. Ahora dados $a, b \in M_{\alpha_a}$ como M_{α_a} son intervalos cerrados, se sigue que $[a, b] \subseteq M_{\alpha_a}$. Entonces

$$\tilde{u}(t) \geq \alpha_a = \tilde{u}(a) = \text{mín}\{\tilde{u}(a), \tilde{u}(b)\}$$

Se puede seguir, en el caso de que $\alpha_a \geq \alpha_b$.

$$\tilde{u}_\alpha = M_\alpha$$

Ahora probemos que $\tilde{u}_\alpha = \{t : \tilde{u}(t) \geq \alpha\} = M_\alpha$ por doble inclusión.

Sea $\alpha_0 \in (0,1]$ es fijo y $t \in M_{\alpha_0}$. Luego $\alpha_0 \in \{\alpha | t \in M_\alpha\}$. Entonces

$$\tilde{u}(t) = \sup\{\alpha : t \in M_\alpha\} \geq \alpha_0$$

y esto implica $t \in \tilde{u}_{\alpha_0}$. Por lo tanto hemos obtenido $M_{\alpha_0} \subseteq M_{\alpha_0}$.

Para la inclusión simétrica consideramos $t \in \tilde{u}_{\alpha_0}$, es decir, $\tilde{u}(t) > \alpha_0$.

Ahora supongamos que se matiene la desigualdad estricta $\tilde{u}(t) > \alpha_0$.

Entonces $\sup\{t \in M_\alpha\} > \alpha_0$ y existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ con $t \in M_{\alpha_1}$.

Dado que $M_{\alpha_1} \subseteq M_{\alpha_0}$ de acuerdo con (ii), obtenemos $t \in M_{\alpha_0}$ que completa el razonamiento en este caso. Si suponemos

$$\tilde{u}(t) = \alpha_0 = \sup\{\alpha : t \in M_\alpha\}$$

luego existe una secuencia α_n que converge inferiormente a α_0, de modo que

$$t \in M_{\alpha_n}, n \geq 1.$$

De (iii) tenemos

$$t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_{\alpha_0}$$

Como conslusión obtenemos $y_{\alpha_0} \subseteq M_{\alpha_0}$. Así que

$$\tilde{u}_{\alpha_0} = M_{\alpha_0}$$

Semicontinuidad superior: Dado que $\tilde{u}_\alpha = M_\alpha$ están cerrados de acuerdo con (i) tenemos el complemento de $\tilde{u}_\alpha$, que es $\mathbb{R}\backslash\ \tilde{u}_\alpha = t : \tilde{u}(t) < \alpha$ un conjunto abierto. Esto implica que $\tilde{u}$ es semicontinuo superior.

Soporte compacto: Observamos que

$$\tilde{u}_0 = cl\{t : \tilde{u}(t) > 0\} = cl\bigcup_{n=1}^{\infty}\{t : \tilde{u}(t) \geq \alpha_n\} = cl\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$$

es cerrado y tenemos $\tilde{u}_0 = M_0$.

Finalmente obtenemos que $\tilde{u}_0$ es un subconjunto acotado de la recta real. Entonces, es compacto.

Representación de los números difusos

La representación de un número difuso por Goetschel Jr y Voxman (1986).

Teorema 46. ***(Representación-LU)**.*

Sea $\tilde{u}$ un número difuso y sea $\tilde{u}_\alpha = [\tilde{u}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^-] = \{t : \tilde{u}(t) \geq \alpha\}$. Entonces las funciones $\tilde{u}^-, \tilde{u}^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$, definen los puntos finales del conjunto de α-corte, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $\tilde{u}^-(\alpha) = \tilde{u}_\alpha^- \in \mathbb{R}$ *es una función acotada, no decreciente, contínua a la izquierda en* $(0,1]$ *y es contínua por la derecha a* 0.

(ii) $\tilde{u}^+(\alpha) = \tilde{u}_\alpha^+ \in \mathbb{R}$ *es una función acotada, no creciente, contínua a la izquierda en* $(0,1]$ *y es contínua por la derecha a* 0.

(iii) $\tilde{u}_1^- \leq \tilde{u}_1^+$

Demostración: Para un $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dado, y dado $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, del Teorema de Apilamiento, obtenemos $\tilde{u}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{u}_{\alpha_1}$. Entonces, tenemos

$$\tilde{u}_{\alpha_1}^- \leq \tilde{u}_{\alpha_2}^- \leq \tilde{u}_1^- \leq \tilde{u}_1^+ \leq \tilde{u}_{\alpha_2}^+ \leq \tilde{u}_{\alpha_1}^+,$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ lo que implica inmediatamente las propiedades de monotonicidad y **(iii)**. La continuidad a izquierda en $(0,1]$se deriva de la propiedad **(iii)** del Teorema de Apilamiento.

En efecto, sea $\alpha_0 \in (0,1]$ fijo y α_n converge inferiormente a α_0, es decir, $\alpha_n \to \alpha_0$. Luego de la propiedad **(iii)** del Teorema de Apilamiento, obtenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n} = \tilde{u}_{\alpha_n}$$

lo que inmediatamente implica $\tilde{u}_{\alpha_n}^- \to \tilde{u}_{\alpha_0}^-$ y $\tilde{u}_{\alpha_n}^+ \to \tilde{u}_{\alpha_0}^+$, es decir, ambas funciones son contínuas a la izquierda en $\alpha_0 \in (0,1]$ arbitrario.

Para probar la continuidad a la derecha en 0 consideramos $\alpha_n \to 0$, una secuencia que coonverge superiormente a 0. Tenemos

$$\tilde{u}_0 = cl\{t : \tilde{u}(t) > 0\} = cl \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : \tilde{u}(t) \geq \alpha_n\} = cl \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n} \right)$$

como $\tilde{u}_0$ es compacto, es cerrado y acotado, obtenemos $\tilde{u}^-_{\alpha_n} \to \tilde{u}^-_{\alpha_0}$ y $\tilde{u}^+_{\alpha_n} \to \tilde{u}^+_{\alpha_0}$, lo que implica una continuidad por la derecha a 0.

Números difusos L-R

Los llamados números difusos $L - R$ se consideran importante en la teoría de conjuntos difusos. Los números difusos $L-R$ y sus casos particulares, como por ejemplo los números difusos triangulares y trapezoidales, son muy útiles en las aplicaciones (Bede, 2013).

Definición 47. *(Dubois y Prade, 1987)*

Sea $L, R : [0,1] \to [0,1]$ *dos funciones continuas crecientes que cumplen* $L(0) = R(0) = 0, L(1) = R(1) = 1$.

Sea $a_0^- \leq a_1^- \leq a_1^+ \leq a_0^+$ números reales. El conjunto difuso $\tilde{u} : \mathbb{R} \to [0,1]$ es un número difuso $L - R$ si

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < a_0^- \\ L\left(\dfrac{t - a_0^-}{a_0^- - a_1^-}\right) & si\ a_0^- \leq t < a_1^- \\ 1 & si\ a_0^- \leq t < a_1^- \\ R\left(\dfrac{a_0^+ - t}{a_0^+ - a_1^+}\right) & si\ a_0^+ \leq t < a_1^+ \\ 0 & si\ a_0^+ l \leq t \end{cases}$$

simbólicamente, escribimos $\tilde{u} = (a_0^-, a_1^-, a_1^+, a_0^+)_{L-R}$, donde $[a_1^-, a_1^+]$ es el núcleo de $\tilde{u}$, y $\underline{a} = a_1^- - a_0^-, \overline{a} = a_0^+ - a_1^+$ se denomina propagaciona la izquierda y derecha respectivamente. Si $\tilde{u}$ es un número difuso $L - R$, entonces sus conjuntos de α-cortes sepueden calcular como:

$$\tilde{u}_\alpha = [a_0^- + L^{-1}(\alpha)\underline{a}, a_0^+ - R^{-1}(\alpha)\overline{a}].$$

Como un caso particular, obtenemos los números difusos trapezoidales cuando las funciones L y R son lineales. un *número difuso trapezoidal* $\tilde{u}$ puede representarse por el cuádruple $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a \leq b \leq c \leq d$,

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & si\ a \leq t < b \\ 1 & si\ b \leq t \leq c \\ \dfrac{d-t}{d-c} & si\ d < c \end{cases}$$

En este caso, los puntos finales de los conjuntos de α-corte estan dados por

$$\tilde{u}_\alpha^- = a + \alpha(b - a)$$

y

$$\tilde{u}_\alpha^+ = d - \alpha(d - c)$$

si $b = c$ en la representación (a, b, c, d), es un número difuso llamado *número difuso triangular*. Entonces el triplete $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \leq b \leq c$ es suficiente para reemplazarlo (Bede, 2013).

4.2. Aritmética difusa

El Principio de Extensíon

Este principio proporciona un método general para ampliar los conocimientos matemáticos claros. Conceptos a cantidades difusas, es decir, permite el dominio de la definición de un mapeo funcional que se extenderá de términos claros a conjuntos difusos como los argumentos de la función.

La siguiente definición la introdujo Zadeh (1978).

Definición 48. *(Principio de extensíon de Zadeh)*

Sea $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ el conjunto de producto universal y F un mapeo funcional de la *forma* $F: U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to Z$ *Que mapea el elemento* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *del producto universal a cada elemento* $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *del conjunto universal* Z*. Además, sea* $\widetilde{A}_1 \subseteq U_1, \widetilde{A}_2 \subseteq U_2, \ldots, \widetilde{A}_n \subset U_n$*, de* n *conjuntos difusos, definidos por la función de pertenencia*

$$\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), \ldots, \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n), x_i \in U_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces la función de pertenencia $\mu_{\widetilde{B}}(z), z \in Z$*, del conjunto difuso* $\widetilde{B} \subseteq Z$ *con* $\widetilde{B} = F(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n)$ *Es definido por:*

$$\mu_{\widetilde{B}(z)} = \begin{cases} \sup\limits_{z=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \min \mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), \ldots, \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n) & si\ \exists z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

De acuerdo con la operación de composición, cuya forma es similar al principio de extensión. el operador supremo puede ser reemplazado por el operador máximo si todos los conjuntos difusos $\widetilde{A}_i$*, tienen conjuntos de soporte finitos* $supp(\widetilde{A}_i), i = 1, 2, ..., n$*.*

En el caso espacial $n = 1$*, donde el conjunto difuso* $\widetilde{A} \subseteq U$ *está definido por la función de pertenencia* $\mu_{\widetilde{A}}(x), x \in U$*, y la función* F *asigna un elemento* x *del conjunto universal* U *al elemento* $z = F(x)$ *del conjunto universal* Z*. la función de pertenencia* $\mu_{\widetilde{B}}(z), z \in Z$*. del conjunto difusa* $\widetilde{B} \subseteq Z$ *con* $\widetilde{B} = F(\widetilde{A})$ *está definido por:*

$$\mu_{\widetilde{B}(z)} = \begin{cases} \sup\limits_{z=F(x)} \mu_{\widetilde{A}}(x) & si\ \exists z = F(x) \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Es importante, para las aplicaciones de los números difusos, tener la posibilidad de realizar cálculos aritméticos.

Observación: Sabemos que A_α es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}$, por lo tanto, es un intervalo cerrado y acotado para cualquier $\alpha \in [0, 1]$ y podemos escribir A_α como:

$$A_\alpha = [A^-(\alpha), A^+(\alpha)]$$

Operaciones aritméticas difusas estándar(α-cortes)

Si $u = (u^-, u^+)$ y $v = (v^-, v^+)$ son dos intervalos difusos dados, las operaciones aritméticas estándar se definen de la siguiente manera:

Definición 49. ***Adición***

Para $\alpha \in [0, 1]$, tenermos;

$$u_\alpha + v_\alpha = [u + v]_\alpha = [u^-_\alpha + v^-_\alpha, u^+_\alpha + v^+_\alpha]$$

Definición 50. ***multiplicación por un escalar***

Sea $k \in \mathbb{R}$ entonces, para $\alpha \in [0, 1]$, tenemos:

$$k(u_\alpha) = (ku)_\alpha = [\text{mín}\{ku^-_\alpha, kv^+_\alpha\}, \text{máx}\{ku^-_\alpha, kv^+_\alpha\}]$$

Definición 51. ***Sustracción:***

En particular, si $k = -1$, $-u_\alpha = (-u)_\alpha = [u^+_\alpha, u^-_\alpha]$

Para $\alpha \in [0, 1]$, tenermos;

$$u_\alpha - v_\alpha = [u - v]_\alpha = [u^-_\alpha - v^-_\alpha, u^+_\alpha - v^+_\alpha]$$

Definición 52. ***Multiplicación y División***

Para $\alpha \in [0, 1]$, tenemos;

$$u_\alpha \cdot v_\alpha = (uv)_\alpha = [(uv)^-_\alpha, (uv)^+_\alpha]$$

Con,

$$(uv)^-_\alpha = \text{mín}\{u^-_\alpha v^-_\alpha, u^-_\alpha v^+_\alpha, u^+_\alpha v^-_\alpha, u^+_\alpha v^+_\alpha\}$$

$$(uv)^+_\alpha = \text{máx}\{u^-_\alpha v^-_\alpha, u^-_\alpha v^+_\alpha, u^+_\alpha v^-_\alpha, u^+_\alpha v^+_\alpha\}$$

Si $[u^-_0, v^+_{0a}] \notin 0$, entonces;

$$\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha = \left[\left(\frac{u}{v}\right)^-_\alpha, \left(\frac{u}{v}\right)^+_\alpha\right]$$

Con,

$$\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^- = \text{mín}\left\{\frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^+}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^+}\right\}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^+ = \text{máx}\left\{\frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^+}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^+}\right\}$$

El siguiente, teorema esta dada por Nguyen (1978).

Teorema 53. *Dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede extender a una función difusa $F : \mathbb{R}_\mathcal{F} \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$, y dado $\tilde{u} \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ podemos determinar $\tilde{v} = F(\tilde{u}) \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ por sus conjuntos de α-corte $\tilde{v}_\alpha = F(\tilde{u}_\alpha)$, $\forall\alpha \in [0,1]$, es decir, tenemos $\tilde{v}_\alpha = [\tilde{v}_\alpha^-, \tilde{v}_\alpha^+]$, donde*

$$\tilde{v}_\alpha^- = \text{ínf}\{f(t) : t \in \tilde{u}_\alpha\}$$

$$\tilde{v}_\alpha^+ = \sup\{f(t) : t \in \tilde{u}_\alpha\}$$

$\tilde{u}_\alpha, \alpha \in [0,1]$ *denota el conjunto α-corte de $\tilde{u}$.*

Demostración:

Primero probaremos que si $\tilde{u}_\alpha$ y $\tilde{v}_\alpha$ son conjuntos de α-corte de los conjuntos difusos $\tilde{u}$ y $\tilde{v} = F(\tilde{u})$ respectivamente, entonces $\tilde{v}_\alpha = f(\tilde{u}_\alpha)$.

El caso $f^{-1}(m) = \emptyset$ se cumple.

Si $f^{-1}(m) = \emptyset$ tenemos $\tilde{v} = F(\tilde{u})$ dado como

$$\tilde{v}(m) = \sup\{\tilde{u}(t) : t \in U, f(t) = m\}.$$

Si $t \in \tilde{u}_\alpha$ entonces $\tilde{u}(t) \geq \alpha$ e implica también que $\tilde{v}(m) \geq \alpha$ y entonces $m = f(t) \in \tilde{v}_\alpha$, es decir, $f(\tilde{u}_\alpha) \subseteq \tilde{v}_\alpha$.

Por otro lado si $\tilde{v}(m) \geq \alpha$ entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $t \in f^{-1}(m)$ tal que

$$\tilde{v}(m) - \epsilon < \tilde{u}(t)$$

Lo que implica $\tilde{u}(t) \geq \alpha$ y así, obtenemos que la extensión de Zadeh satisface $\tilde{v}_\alpha \subseteq f(\tilde{y}_\alpha)$, por lo que finalmente $\tilde{v}_\alpha = f(\tilde{u}_\alpha)$. Entonces, si $\tilde{v}_\alpha = [\tilde{v}_\alpha^-, \tilde{v}_\alpha^+]$, obtenemos

$$\tilde{x}_\alpha^- = \text{ínf}\{f(t) : t \in \tilde{u}_\alpha\}$$

$$\tilde{v}_{\alpha}^{+} = \sup\{f(t) : t \in \tilde{u}_{\alpha}\}$$

Probemos ahora que si $\tilde{u}_{\alpha}$ son conjuntos de α-corte de un número difuso $\tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ entonces $\tilde{x}_{\alpha} = f(\tilde{u}_{\alpha})$ define los conjuntos de α-corte de un número difuso $\tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $\tilde{v} = F(\tilde{u})$.

Para este objetivo demostraremos que $\tilde{v}_{\alpha}$ satisface las hipótesis de la caracterización de Negoita-Ralescu.

Primero observamos que dado $\tilde{u}_{\alpha}$ son intervalos convexos compactos y como f es continuo, obtenemos $\tilde{v}_{\alpha} = f(\tilde{u}_{\alpha})$ convexo compacto.

Esto significa que $\tilde{v}_{\alpha}$ es un intervalo cerrado para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.

Si $\alpha \leq \beta$, entonces, tenemos $\tilde{u}_{\beta} \subseteq \tilde{u}_{\alpha}$. Esto implica

$$\tilde{v}_{\beta} = f(\tilde{u}_{\beta}) \subseteq f(\tilde{u}_{\alpha}) = v_{\alpha}$$

Consideremos la secuencia α_n que converge inferiormente a α. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n} = \tilde{u}_{\alpha}$$

Vamos a demostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{v}_{\alpha_n} = \tilde{v}_{\alpha}$$

es decir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f(\tilde{u}_{\alpha_n}) = f(\tilde{u}_{\alpha})$$

lo cuál es equivalente a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f(\tilde{u}_{\alpha_n}) = f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right)$$

Sea

$$m \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right)$$

Entonces existe un $t \in \tilde{u}_{\alpha_n}$, $\forall n = 1, 2, \cdots$ tal que $m = f(t)$. Entonces $m \in f\tilde{u}_{\alpha_n}, \forall n = 1, 2, \cdots$, es decir;

$$m \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(\tilde{u}_{\alpha_n})$$

Por otro lado, sea;

$$m \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(\tilde{u}_{\alpha_n})$$

Entonces, $m \in f(\tilde{u}_{\alpha_n}), \forall n = 1, 2, \cdots$.

Entonces existe un $t_n \in \tilde{u}_{\alpha_n}$ con $m = f(t_n), \forall n = 1, 2, \cdots$

Como t_n es una secuencia acotada y como $t_n \in \tilde{u}_0$ con $\tilde{u}_0$ compacto, obtenemos la existencia de una subsecuencia $t_{n_k}, k = 1, 2, \cdots$ que converge.

Sea $t = \lim_{k\to\infty} t_{n_k}$. Vemos que $t \in \tilde{u}_\alpha$. De hecho, $\tilde{u}_\alpha \subseteq \tilde{u}_{\alpha_n}, \forall\ n = 1, 2, \cdots$ y si suponemos que $t \notin \tilde{u}_\alpha$ obtenemos que existe k tal que $t \notin \tilde{u}_k$.

Teniendo en cuenta que $t = \lim_{k\to\infty} t_{n_k}$ obtenemos una contradicción. Combinando las dos inclusiones, obtenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{v}_{\alpha_n} = \tilde{v}_\alpha$$

Consideremos la sucesión α_n que converge superiormente a 0.

Entonces se sabe que

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right) = \tilde{u}_0$$

Comprobamos que dado un f contínuo, tenemos $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$, y entonces

$$\tilde{v}_0 = f\left(cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{\alpha_n}\right)\right) \subseteq cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(\tilde{u}_{\alpha_n})\right) \subseteq cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{v}_{\alpha_n}\right)$$

lo que inmediatamente implica

$$\tilde{v}_0 = cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{v}_{\alpha_n}\right)$$

y así se cumplen las hipótesis del Teorema de Caracterización de Negoita y Ralescu. Usando el Teorema, hemos demostrado que $\tilde{v}_\alpha$ son conjuntos de α-cortes de un número difuso, es decir, $\tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

El siguiente, teorema esta dada por Nguyen (1978).

Teorema 54. *Si asumimos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, entonces podemos extenderlo a $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $\tilde{w} = F(\tilde{u}, \tilde{v})$ tiene su conjunto corte*

$$\tilde{w}_\alpha = \{f(t, s) : t \in \tilde{u}_\alpha, s\tilde{v}_\alpha\}$$

Para cualquier $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, *es decir, si* $\tilde{w}_\alpha = [\tilde{w}_\alpha^-, \tilde{w}_\alpha^+]$, *entonces*

$$\tilde{w}_\alpha^- = \text{ínf}\{f(t,s) : t \in \tilde{u}_\alpha, s\tilde{v}_\alpha\}$$

$$\tilde{w}_\alpha^+ = \sup\{f(t,s) : t \in \tilde{u}_\alpha, s\tilde{v}_\alpha\}$$

Demostración:

Primero probemos que si $\tilde{v}_\alpha, \tilde{u}_\alpha$ y $\tilde{w}_\alpha$ son conjuntos α-cortes de los conjuntos difusos $\tilde{v}, \tilde{u}$ y $\tilde{w} = F(\tilde{u}, \tilde{v})$ respectivamente, entonces $\tilde{w}_\alpha = F(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha)$.

El caso $f^{-1}(z) = \emptyset$ se cumple. Si $f^{-1}(z) \neq \emptyset$, tenemos $\tilde{w} = F(\tilde{u}, \tilde{v})$ dado que

$$\tilde{w}(s) = \sup\{\text{mín}\{\tilde{u}(t), \tilde{v}(s)\} : t \in X, s \in Y, f(t,s) = z\}$$

Si $t \in \tilde{y}_\alpha, s \in \tilde{x}_\alpha$entonces $\tilde{u}_\alpha(t) \geq \alpha, \tilde{v}_\alpha(s) \geq \alpha$ y para $z = f(t,s)$ implica también que $\tilde{w}(z) \geq \alpha$, es decir, $f(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha) \subseteq \tilde{w}_\alpha$. Por otro lado, si $\tilde{w}(s) \geq \alpha$ entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $(t,s) \in f^{-1}(z)$ tal que

$$\tilde{w}(z) - \epsilon < \tilde{u}(t) \; y \; \tilde{w}(z) - \epsilon < \tilde{v}(s)$$

lo que implica $\tilde{u}_\alpha(t) \geq \alpha$ y $\tilde{v}_\alpha(s) \geq \alpha$ por lo tanto, obtenemos $\tilde{w}_\alpha = f(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha)$. A partir de ahora el razonamiento es similar al resultado anterior.

Como $\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha$ son intervalos convexos en $\mathbb{R}$ y dado que f es contínua, obtenemos $\tilde{w}_\alpha = f(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha)$ convexo compacto.

Si $\alpha \geq \beta$ entonces, tenemos $\tilde{u}_\beta \subseteq \tilde{u}_\alpha$ y $\tilde{v}_\beta \subseteq \tilde{v}_\alpha$. Esto implica

$$\tilde{w}_\beta = f(\tilde{u}_\beta, \tilde{v}_\beta) \subseteq f(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha) = \tilde{w}_\alpha$$

Sea ahora α_n una secuencia que converge inferiormente a α. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{\alpha_n} = \tilde{w}_\alpha$$

Se puede obtener de una manera similar a la del teorema anterior. Finalmente, si α_n converge superiormente a 0, obtenemos

$$\tilde{w}_0 = cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{\alpha_n}\right)$$

y así, las hipótesis del Teorema de Caracterización de Negoita y Ralescuse cumple y tenemos $\tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

La suma y multiplicación por un escalar

Para $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y $k \in \mathbb{R}$ basándose en el Principio de Extensión de Zadeh, se puede definir la suma de dos números difusos $\tilde{u} + \tilde{v}$ y la multiplicación entre un número real y uno difuso $k \cdot \tilde{u}$.

Luego, según el teorema anterior, dado que la suma y la multiplicación escalar son funciones contínuas, obtenemos,

$$(\tilde{u} + \tilde{v})_\alpha = \{x + y : \ x \in \tilde{u}, y \in \tilde{v}\} = \tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_\alpha$$

$$(k \cdot \tilde{u})_\alpha = \{k \cdot x : \ x \in \tilde{u}_\alpha\} = k \cdot \tilde{u}_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1]$$

donde $\tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_\alpha$ es la suma de dos intervalos (como subconjuntos de $\mathbb{R}$), y $k\tilde{u}_\alpha$ es el producto habitual de un número y un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Entonces, la aritmética difusa extiende la aritmética de intervalos (Bede, 2013).

Ejemplo: Sea $\tilde{u} = (1, 2, 3), \tilde{v} = (2, 3, 5)$ sean números difusos triangulares, entonces $\tilde{u} + \tilde{v} = (3, 5, 8)$. También tenemos $2\tilde{u} = (2, 4, 6)$ y $-2\tilde{v} = (-10, -6, -4)$.

El siguiente teorema trata de las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, dada por Dubois y Prade (1987); Anastassiou y Gal (2001).

Teorema 55. ***Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ con la Suma***

(i) La suma de números difusos es asociativa y conmutativa, es decir,

$$\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{v} + \tilde{u}$$

y

$$(\tilde{u} + \tilde{v}) + \tilde{w} = \tilde{u} + (\tilde{v} + \tilde{w})$$

$\forall \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

(ii) *El conjunto difuso singletón* $0 = U_{\{0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *es el elemento neutro, es decir,*

$$\tilde{u} + 0 = 0 + \tilde{u} = \tilde{u},$$

para cualquier $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

(iii) *Ninguno de* $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ *tiene un opuesto en* $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

(iv) *Para cualquier* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \cdot b \geq 0$ *y cualquier* $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, *tenemos*

$$(a + b) \cdot \tilde{u} = (a \cdot \tilde{u}) + (b \cdot \tilde{u}).$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ *en general, esta propiedad no se cumple.*

(v) *Para cualquier* $k \in \mathbb{R}$ *y* $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, *tenemos*

$$k \cdot (\tilde{u} + \tilde{v}) = k\tilde{u} + k \cdot \tilde{v}.$$

(vi) *Para cualquier* $t, s \in \mathbb{R}$ *y cualquier* $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, *tenemos*

$$(t \cdot s) \cdot \tilde{u} = t \cdot (\tilde{u} \cdot s)$$

Demostracion:

(i) Es facil ver que se cumple la conmutatividad. Sean los números difusos $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$$(\tilde{u} + \tilde{v})_\alpha = \{x + y | x \in \tilde{u}, y \in \tilde{v}\} = \tilde{a}_\alpha + \tilde{v}_\alpha = \tilde{v}_\alpha + \tilde{u}_\alpha = \tilde{v} + \tilde{u}$$

Por lo tanto;

$$\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{v} + \tilde{u}.$$

Ahora veamos la asociatividad. Sean los números difusos $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$$((\tilde{u} + \tilde{v}) + \tilde{w})_\alpha = \{(x + y) + z | x \in \tilde{u}, y \in \tilde{v}, z \in \tilde{w}\} = (\tilde{u} + \tilde{v})_\alpha + \tilde{w}_\alpha$$

$$= \tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_\alpha + \tilde{w}_\alpha = \tilde{u}_\alpha + (\tilde{v} + \tilde{w})_\alpha = (\tilde{u} + (\tilde{v} + \tilde{w}))_\alpha$$

Por lo tanto:

$$(\tilde{u} + \tilde{v}) + \tilde{w} = \tilde{u} + (\tilde{v} + \tilde{w})$$

(ii) El conjunto difuso singletón $0 = U_{\{0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ y sea $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ un número difuso, entonces tenemos,

$$(\tilde{u} + 0)_\alpha = \tilde{u}_\alpha + 0_\alpha = 0_\alpha + \tilde{u}_\alpha = \tilde{u}_\alpha,$$

por lo tanto,

$$\tilde{u} + 0 = 0 + \tilde{u} = \tilde{u}.$$

(iii) Supongamos que $\exists \tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$, tiene un opuesto en $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, entonces, $-\tilde{u}$, por lo tanto; $\tilde{u} + (-\tilde{u}) = 0$, más $0 \notin \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, lo que es una contradicción.

(iv) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \cdot b \geq 0$ y sea $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ un número difuso, tenemos,

$$((a + b) \cdot \tilde{u})_\alpha = (a \cdot \tilde{u})_\alpha + (b \cdot \tilde{u})_\alpha = a\tilde{u}_\alpha + b\tilde{u}_\alpha$$

Por lo tanto;

$$(a + b) \cdot \tilde{u} = (a \cdot \tilde{u}) + (b \cdot \tilde{u}).$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ en general, esta propiedad no se cumple.

(v) Sea $k \in \mathbb{R}$ y los números difusos $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tenemos

$$(k \cdot (\tilde{u} + \tilde{v}))_\alpha = (k\tilde{u})_\alpha + (k \cdot \tilde{v})_\alpha = k\tilde{u}_\alpha + k\tilde{v}_\alpha.$$

Por lo tanto,

$$k \cdot (\tilde{u} + \tilde{v}) = k\tilde{u} + k \cdot \tilde{v}.$$

(vi) Sea $t, s \in \mathbb{R}$ y sea un número difuso $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tenemos

$$((t \cdot s) \cdot \tilde{u})_\alpha = t \cdot (\tilde{u} \cdot s)_\alpha = t \cdot (\tilde{u}_\alpha \cdot s)$$

Por lo tanto,

$$(t \cdot s) \cdot \tilde{u} = t \cdot (\tilde{u} \cdot s)$$

Observación: Como conclusión del Teorema anterior obtenemos que el espacio de números difusos no es un espacio lineal.

El producto de dos números difusos

El producto $\tilde{w} = \tilde{u} \cdot \tilde{v}$ de números difusos $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$, es definido a base del Principio de Extensíon de Zadeh. Usando el teorema anterior, tenemos que definir sus puntos finales como

$$\tilde{w}_\alpha^- = \text{ínf}\{t \cdot s : \ t \in \tilde{u}_\alpha, s \in \tilde{v}_\alpha\}$$

$$\tilde{w}_\alpha^+ = \sup\{t \cdot s : \ t \in \tilde{u}_\alpha, s \in \tilde{v}_\alpha\}$$

El producto alcnaza sus extremos en las esquinas de su dominio, Entonces

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^- = \text{mín}\{\tilde{u}_\alpha^- \tilde{u}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^- \tilde{v}_\alpha^+, \tilde{u}_\alpha^+ \tilde{v}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^+ \tilde{v}_\alpha^+\}$$

y

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^+ = \text{máx}\{\tilde{u}_\alpha^- \tilde{u}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^- \tilde{v}_\alpha^+, \tilde{u}_\alpha^+ \tilde{v}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^+ \tilde{v}_\alpha^+\}$$

Ejemplo 1:

Sean $\tilde{u} = (0, 2, 4, 6)$ y $\tilde{v} = (2, 3, 8)$. Entonces, sus α-cortes son:

$$\tilde{u}_\alpha^- = 0 + \alpha(2 - 0) = 2\alpha$$

y

$$\tilde{u}_\alpha^+ = 6 - \alpha(6 - 4) = 6 - 2\alpha$$

$$\tilde{v}_\alpha^- = (3 - 2)\alpha + 2 = \alpha + 2$$

y

$$\tilde{v}_\alpha^+ = -(8 - 3)\alpha + 8 = 3 - 5\alpha$$

Entonces, los puntos finales de conjunto α-corte de $\tilde{u} \cdot \tilde{v}$ son

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^- = 2\alpha \cdot (\alpha + 2)$$

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^+ = (6 - 2\alpha) \cdot (8 - 5\alpha)$$

que lleva

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{\alpha=1} = [6, 12], (\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{\alpha=0} = [0, 48].$$

Ejemplo 2: Sean $\tilde{u}, \tilde{v}$ dos números difusos triangulares, con, $\tilde{u} = (a_1, b_2, c_3)$ y $\tilde{v} = (a_2, b_2, c_3)$, con $a_1, b_2 > 0$, calcular sus α-cortes del producto.

Entonces tenemos que sus α-cortes, esta dado por:

$$\tilde{u}_\alpha^- = a_1 + \alpha(b_1 - a_1) = (1-\alpha)a_1 + \alpha b_1$$

y

$$\tilde{u}_\alpha^+ = c_1 - \alpha(c_1 - b_1) = (1-\alpha)c_1 + \alpha b_1$$

y por otro lado

$$\tilde{v}_\alpha^- = a_2 + \alpha(b_2 - a_2) = (1-\alpha)a_2 + \alpha b_2$$

y

$$\tilde{v}_\alpha^+ = c_2 - \alpha(c_2 - b_2) = (1-\alpha)c_2 + \alpha b_2$$

Entonces, el α-corte, del producto $\tilde{u} \cdot \tilde{v}$, son

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^- = [((1-\alpha)a_1 + \alpha b_1) \cdot ((1-\alpha)a_2 + \alpha b_2)]$$

$$= [(1-\alpha)^2 a_1 a_2 + (1-\alpha)\alpha a_1 b_2 + \alpha(1-\alpha) b_1 a_2 + \alpha^2 b_1 b_2]$$

$$= [(1-\alpha)^2 a_1 a_2 + (1-\alpha)\alpha(a_1 b_2 + b_1 a_2) + \alpha^2 b_1 b_2]$$

y

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^+ = [((1-\alpha)c_1 + \alpha b_1) \cdot ((1-\alpha)c_2 + \alpha b_2)]$$

$$= [(1-\alpha)^2 c_1 c_2 + (1-\alpha)\alpha c_1 b_2 + \alpha(1-\alpha) b_1 c_2 + \alpha^2 b_1 b_2]$$

$$= [(1-\alpha)^2 c_1 c_2 + (1-\alpha)\alpha(c_1 b_2 + b_1 c_2) + \alpha^2 b_1 b_2]$$

ahora tenemos que;

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{\alpha=1} = [(b_1 b_2), (b_1 b_2)]$$

y

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{\alpha=0} = [(a_1 a_2), (c_1 c_2)]$$

lo cual concluye el ejercicio.

Ejemplo 3:

Sean $\tilde{u} = (2, 3, 4)$ y $\tilde{v} = (1, 4, 3)$ dos números difusos triangulares, hallar sus α-cortes.

Con el *ejemplo 2*, sin pérdida de generalidad tenemos,

$$\tilde{u}_\alpha^- = 2 + \alpha(3 - 2) = 2 + \alpha$$

y

$$\tilde{u}_\alpha^+ = 4 - \alpha(4 - 3) = 4 - \alpha$$

y por otro lado

$$\tilde{v}_\alpha^- = 1 + \alpha(4 - 1) = 1 + 3\alpha$$

y

$$\tilde{v}_\alpha^+ = 3 - \alpha(3 - 4) = 3 + \alpha$$

Entonces, el α-corte, del producto $\tilde{u} \cdot \tilde{v}$, son

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^- = [(2 + \alpha) \cdot (1 + 3\alpha)]$$

$$= [2 + 7\alpha + 3\alpha^2]$$

y

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha^+ = [(4 - \alpha) \cdot (3 + \alpha)]$$

$$= [12 + \alpha - \alpha^2]$$

por lo tanto, sus α-cortes son:

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{\alpha=1} = [12, 12]$$

y

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{\alpha=0} = [2, 12].$$

Teorema 56. *Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ con la Multiplicación*

(i) El conjunto difuso singleton $1 = X_1 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es el elemento neutro para el producto, es decir, $\tilde{u} \cdot 1 = 1 \cdot \tilde{u} = \tilde{u}$, para cualquier$\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

(ii) Ninguno de $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ tiene inversa en $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ para el producto.

(iii) Para cualquier $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tenemos

$$((\tilde{u} + \tilde{v}) \cdot \tilde{w})_\alpha \subseteq (\tilde{u} \cdot \tilde{w})_\alpha + (\tilde{v} \cdot \tilde{w})_\alpha \forall \alpha \in [0, 1]$$

y, en general, la distributividad no se cumple.

(iv) Para cualquier $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ son tales que ninguno de los soportes de $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ no contiene 0, tenemos

$$\tilde{u} \cdot (\tilde{v} \cdot \tilde{w}) = (\tilde{u} \cdot \tilde{v}) \cdot \tilde{w}.$$

Demostración:

(i) El conjunto difuso singletón $1 = U_{\{1\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ es el elemento neutro para el producto, es decir, $(\tilde{u} \cdot 1)_\alpha = 1 \cdot \tilde{u}_\alpha = \tilde{u}_\alpha$, para cualquier $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Por lo tanto, $\tilde{u} \cdot 1 = 1 \cdot \tilde{u} = \tilde{u}$.

(ii) Supongamos que $\exists \tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$, tiene un opuesto en $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, entonces, $\tilde{u}^{-1}$, por lo tanto; $\tilde{u} \cdot (\tilde{u}^{-1}) = 1$, más $1 \notin \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, lo que es una contradicción.

(iii) Tenemos

$$((\tilde{u} + \tilde{v}) \cdot \tilde{w})^-_\alpha = \text{mín}\{(\tilde{u}^-_\alpha + \tilde{v}^-_\alpha) \cdot \tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^-_\alpha + \tilde{v}^-_\alpha) \cdot \tilde{w}^+_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha + \tilde{v}^+_\alpha) \cdot \tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha + \tilde{v}^+_\alpha) \cdot \tilde{w}^+_\alpha\}$$

$$\geq \text{mín}\{\tilde{u}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha\} + \text{mín}\{\tilde{v}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha\}$$

$$((\tilde{u} + \tilde{v}) \cdot \tilde{w})^+_\alpha = \text{máx}\{(\tilde{u}^-_\alpha + \tilde{v}^-_\alpha) \cdot \tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^-_\alpha + \tilde{v}^-_\alpha) \cdot \tilde{w}^+_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha + \tilde{v}^+_\alpha) \cdot \tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha + \tilde{v}^+_\alpha) \cdot \tilde{w}^+_\alpha\}$$

$$\geq \text{máx}\{\tilde{u}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha\} + \text{máx}\{\tilde{v}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^-_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha \cdot \tilde{w}^+_\alpha\}$$

que combinado con la desigualdad simétrica conduce a

$$((\tilde{u}+\tilde{v})\cdot\tilde{w})_\alpha \subseteq (\tilde{u}\cdot\tilde{w})_\alpha + (\tilde{v}\cdot\tilde{w})_\alpha \forall\alpha\in[0,1], y$$

(iv) Sea $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}\in\mathbb{R}_\mathcal{F}$ son tales que ninguno de los soportes de $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}$ no contiene 0, tenemos,

$$((\tilde{u}\cdot\tilde{v})\cdot\tilde{w})^-_\alpha = \text{mín}\{(\tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{v}^-_\alpha)\cdot\tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{v}^-_\alpha)\cdot\tilde{w}^+_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{v}^+_\alpha)\cdot\tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{v}^+_\alpha)\cdot\tilde{w}^+_\alpha\}$$

$$= \text{mín}\{\tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha\}\cdot\text{mín}\{\tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha\}$$

$$= \text{mín}\{\tilde{u}^-_\alpha\cdot(\tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha), \tilde{u}^-_\alpha\cdot(\tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha), \tilde{u}^+_\alpha\cdot(\tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha), \tilde{u}^+_\alpha\cdot(\tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha)\}$$

y

$$((\tilde{u}\cdot\tilde{v})\cdot\tilde{w})^+_\alpha = \text{máx}\{(\tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{v}^-_\alpha)\cdot\tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{v}^-_\alpha)\cdot\tilde{w}^+_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{v}^+_\alpha)\cdot\tilde{w}^-_\alpha, (\tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{v}^+_\alpha)\cdot\tilde{w}^+_\alpha\}$$

$$= \text{máx}\{\tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{u}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha\}\cdot\text{máx}\{\tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha\}$$

$$= \text{máx}\{\tilde{u}^-_\alpha\cdot(\tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha), \tilde{u}^-_\alpha\cdot(\tilde{v}^-_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha), \tilde{u}^+_\alpha\cdot(\tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^-_\alpha), \tilde{u}^+_\alpha\cdot(\tilde{v}^+_\alpha\cdot\tilde{w}^+_\alpha)\}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{u}_\alpha\cdot(\tilde{v}\cdot\tilde{w})_\alpha = (\tilde{u}\cdot\tilde{v})_\alpha\cdot\tilde{w}_\alpha$$

$$\tilde{u}_\alpha\cdot(\tilde{v}_\alpha\cdot\tilde{w}_\alpha) = (\tilde{u}_\alpha\cdot\tilde{v}_\alpha)\cdot\tilde{w}_\alpha.$$

Observación: El producto basado en extensiones de Zadeh tiene ciertas desventajas. La más importante es que el producto de dos números difusos triangulares o trapezoidales no es trapezoidal triangular, etc. Para mejorar este aspecto se propuso el producto cruzado de números difusos (Ban y Bede, 2003, 2006, 2006).

Observación: Un número difuso es positivo si para el extremo inferior de su núcleo tenemos $\tilde{w}^-_\alpha \geq 0$. También llamamos negativo a un número difuso si $\tilde{w}^+_\alpha \leq 0$. Denotemos por $\mathbb{R}^*_\mathcal{F}$el conjunto de números difusos positivos o negativos, es decir,

$$\mathbb{R}^*_\mathcal{F} = \{\tilde{w}\in\mathbb{R}_\mathcal{F} | 0\notin int(\tilde{w}_1)\},$$

donde $int(\tilde{w}_1)$ denota el conjunto de puntos interiores de $\tilde{w}_1$.

Acontinuación, el siguiente teorema dada por Ban y Bede (2003); Bede y Fodor (2006).

Teorema 57. *Si $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ son números difusos positivos, entonces $\tilde{w} = \tilde{u} \odot \tilde{v}$ es definido por $\tilde{w}_\alpha = [\tilde{w}_\alpha^-, \tilde{w}_\alpha^+]$, donde*

$$\tilde{w}_\alpha^- = \tilde{u}_\alpha^- \tilde{v}_1^- + \tilde{u}_1^- \tilde{v}_\alpha^- - \tilde{u}_1^- \tilde{v}_1^-$$

y

$$\tilde{w}_\alpha^+ = \tilde{u}_\alpha^+ \tilde{v}_1^+ + \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_\alpha^+ - \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_1^+$$

para cada $\alpha \in [0,1]$, es un número difuso positivo.

Demostración:

Tenemos que

$$\tilde{w}_\alpha^+ - \tilde{w}_\alpha^- = (\tilde{u}_\alpha^+ - \tilde{u}_1^-)\tilde{v}_1^+ + (\tilde{u}_1^- - \tilde{v}_\alpha^-)\tilde{v}_1^- + \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_\alpha^+ - \tilde{u}_1^- \tilde{v}_\alpha^- \geq 0$$

Para cada $\alpha \geq 0$, y entonces $\tilde{w}_\alpha = [\tilde{w}_\alpha^-, \tilde{w}_\alpha^+]$, es un intervalo cerrado. Concideremos $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1], \alpha_1 \leq \alpha_2$. Porque $\tilde{u}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{u}_{\alpha_1}$ y $\tilde{v}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{v}_{\alpha_1}$, obtenemos

$$\tilde{w}_{\alpha_1}^- = \tilde{u}_{\alpha_1}^- \tilde{v}_1^- + \tilde{u}_1^- \tilde{v}_{\alpha_1}^- - \tilde{u}_1^- \tilde{v}_1^- \leq \tilde{u}_{\alpha_2}^- \tilde{v}_1^- + \tilde{u}_1^- \tilde{v}_{\alpha_2}^- - \tilde{u}_1^- \tilde{v}_1^- = \tilde{w}_{\alpha_2}^-$$

y

$$\tilde{w}_{\alpha_1}^+ = \tilde{u}_{\alpha_1}^+ \tilde{v}_1^+ + \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_{\alpha_1}^+ - \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_1^+ \leq \tilde{u}_{\alpha_2}^+ \tilde{v}_1^+ + \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_{\alpha_2}^+ - \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_1^+ = \tilde{w}_{\alpha_2}^+$$

Consideremos $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $\alpha \in [0,1]$. Entonces, implican que

$$\tilde{u}_{\alpha_n}^- \tilde{v}_1^- + \tilde{u}_1^- \tilde{v}_{\alpha_n}^- - \tilde{u}_1^- \tilde{v}_1^- \to \tilde{u}_\alpha^- \tilde{v}_1^- + \tilde{u}_1^- \tilde{v}_\alpha^- - \tilde{u}_1^- \tilde{v}_1^-$$

y

$$\tilde{u}_{\alpha_n}^+ \tilde{v}_1^+ + \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_{\alpha_n}^+ - \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_1^+ \to \tilde{u}_\alpha^+ \tilde{v}_1^+ + \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_\alpha^+ - \tilde{u}_1^+ \tilde{v}_1^+$$

entonces, obtenemos que $\tilde{w}_\alpha$ es un número difuso.

Teorema 58. *Sean $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos números difusos.*

(i) Si $\tilde{u}$ es positivo y $\tilde{v}$ es negativo, entonces

$$\tilde{u} \odot \tilde{v} = -(\tilde{u} \odot (-\tilde{v}))$$

es un número difuso negativo.

(ii) Si $\tilde{u}$ es negativo y $\tilde{v}$ es positivo, entonces

$$\tilde{u} \odot \tilde{v} = -(-(\tilde{u}) \odot \tilde{v})$$

es un número difuso negativo.

(iii) Si $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ son negativos, entonces

$$\tilde{u} \odot \tilde{v} = (-\tilde{u}) \odot (-\tilde{v})$$

es un número difuso positivo

Demostración:

(i) Si $\tilde{u}$ es positivo y $\tilde{v}$ es negativo y sea $k = -1$, como $\tilde{v}$ es negativo tenemos $k\tilde{v}$, luego

$$\tilde{u} \odot k\tilde{v} = (\tilde{u}k) \odot k\tilde{v} = k(\tilde{u} \odot k\tilde{v})$$

lo cual tenemos que;

$$\tilde{u} \odot \tilde{v} = -(\tilde{u} \odot (-\tilde{v}))$$

Por lo tanto, $\tilde{u} \odot \tilde{v}$ es un número difuso negativo.

(ii) Si $\tilde{u}$ es negativo y $\tilde{v}$ es positivo, es facil ver que se cumple

$$k\tilde{u} \odot \tilde{v} = k(k\tilde{u} \odot \tilde{v})$$

lo cual,

$$\tilde{u} \odot \tilde{v} = -(-(\tilde{u}) \odot \tilde{v})$$

Por lo tanto, $\tilde{u} \odot \tilde{v}$ es un número difuso negativo.

(iii) Si $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ son negativos, entonces, se cumple

$$k\tilde{u} \odot k\tilde{v} = (k\tilde{u}) \odot (k\tilde{v})$$

Luego,

$$\tilde{u} \odot \tilde{v} = (-\tilde{u}) \odot (-\tilde{v})$$

Por lo tanto, $\tilde{u} \odot \tilde{v}$ es un número difuso positivo.

La operación binaria sobre $\mathbb{R}^*_{\mathcal{F}}$ presentada anteriormente se llama producto cruzado de números difusos.

Tenemos la siguiente definición, dada por Ban y Bede (2003).

Definición 59. ***Producto cruzado***

El producto cruzado se define para cualquier número difuso en

$$\mathbb{R}^{\wedge}_{\mathcal{F}} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R}^*_{\mathcal{F}};\ \textit{existe un único } x_0 \in \mathbb{R} \textit{ tal que } \tilde{u}(x_0) = 1\};$$

por tanto, está bien definido para números difusos triangulares.

Definición 60. *El producto cruzado de dos números difusos triangulares positivos* $\tilde{u} = (a_1, b_1, c_1)$ *y* $\tilde{v} = (a_2, b_2, c_2)$ *es*

$$\tilde{u}\tilde{v} = (a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2, b_1b_2, b_1c_2 + b_2c_1 - b_1c_1).$$

Ejemplo 1:

Si $\tilde{u} = (2, 3, 4)$ y $\tilde{u} = (3, 4, 6)$ dos números difusos triangulares, entonces el producto esta dado por;

$$\tilde{u}\tilde{v} = (2(4) + 3(3) - 3(4), 3(4), 3(6) + 4(4) - 3(4)) = (5, 12, 22).$$

Diferencia de dos números difusos

La diferencia estándar, tiene la propiedad de que $\tilde{u} - \tilde{u} \neq 0$. Esto es un defecto en algunos resultados teóricos y aplicaciones de números difusos. Para evitar este inconveniente se propusieron nuevas diferencias.

Ejemplo:

Veamos un ejemplo trivial. Sea $\tilde{u} = [0, 1]$, tenemos que,

$$\tilde{u} - \tilde{u} = [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1] \neq 0$$

La siguiente definición introducida por Hukuhara (1967), fue uno de los primeros métodos para solucionar el problema anterior de la diferencia ($\tilde{u} - \tilde{u} \neq \{0\}$).
La siguiente definición dada por Hukuhara (1967); Puri y Ralescu (1983)

Definición 61. *La diferencia de Hukuhara (H-diferencia$\ominus_H$) es definido por, Sean $\tilde{u}, \tilde{v}$ dos números difusos,*

$$\tilde{u} \ominus_H \tilde{v} = \tilde{w} \Leftrightarrow \tilde{u} = \tilde{v} + \tilde{w}$$

Si $\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}$ existe, sus α-cortes son

$$[\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}]_\alpha = [\tilde{u}_\alpha^- - \tilde{v}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^+ - \tilde{v}_\alpha^+]$$

Observación: Es fácil verificar que $\tilde{u} \ominus_H \tilde{v} =$ para cualquier número difuso $\tilde{u}$, pero como hemos discutido anteriormente $\tilde{u} - \tilde{u} \neq 0$.
La diferencia Hukuhara rara vez existe, por lo que se propusieron varias alternativas y generalizaciones como, por ejemplo, la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara (Stefanini y Bede, 2009; Stefanini, 2010).

Definición 62. ***La diferencia generalizada de Hukuhara ($\ominus_{g_H}$)***
Dados dos números difusos $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, la diferencia generalizada de Hukuhara (diferencia g_H para abreviar) es el número difuso $\tilde{w}$, si existe, tal que

$$\tilde{u} \ominus_{g_H} \tilde{v} = \tilde{w} \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \tilde{u} = \tilde{v} + \tilde{w} \\ (ii) & \tilde{u} = \tilde{v} - \tilde{w} \end{cases}$$

en términos de α-cortes tenemos;

Corolario 63. *Para algún* $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$*, tenemos*

$$[\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}]_\alpha = [\text{mín}\{\tilde{u}_\alpha^- - \tilde{v}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^+ - \tilde{v}_\alpha^+\}, \text{máx}\{\tilde{u}_\alpha^- - \tilde{v}_\alpha^-, \tilde{u}_\alpha^+ - \tilde{v}_\alpha^+\}]$$

Demostración:

La diferencia generalizada de Hukuhara existe en muchas más situaciones que la diferencia de Hukuhara habitual, pero no siempre existe. Consideramos la siguiente diferencia generalizada (g-diferencia) que presenta algunas ventajas (Stefanini y Bede, 2009; Bede y Stefanini, 2013).

Definición 64. *La diferencia generalizada* $(\ominus_g)$

La diferencia generalizada (g-diferencia para abreviar) de dos números difusos $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *está dada por sus conjuntos* α*-cortes como*

$$[\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}]_\alpha = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} \left([\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta \right), \ \forall \alpha \in [0,1],$$

donde la g_H*-diferencia* $(\ominus_{gH})$ *es con operandos de intervalo* $[\tilde{u}]_\beta$ *y* $[\tilde{v}]_\beta$ *y está bien definida en este caso.*

Acontinuacion veremos los α-cortes de esta diferencia (Bede y Stefanini, 2013).

Teorema 65. *La g-diferencia esta dada por la expresión*

$$[\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}]_\alpha = \left[\inf_{\beta \geq \alpha} \text{mín}\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \text{máx}\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\} \right]$$

Demostración:

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo, Observamos que para cualquier $\beta \geq \alpha$ tenemos

$$[\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta = \left[\text{mín}\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}, \text{máx}\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\} \right]$$

$$\subseteq \left[\inf_{\lambda \geq \beta} \text{mín}\{\tilde{u}_\lambda^- - \tilde{v}_\lambda^-, \tilde{u}_\lambda^+ - \tilde{v}_\lambda^+\}, \sup_{\lambda \geq \beta} \text{máx}\{\tilde{u}_\lambda^- - \tilde{v}_\lambda^-, \tilde{u}_\lambda^+ - \tilde{v}_\lambda^+\} \right]$$

y se deduce que

$$cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} \left([\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta \right)$$

$$\subseteq \left[\inf_{\beta\geq\alpha} \min\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}, \sup_{\beta\geq\alpha} \max\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}\right]$$

Consideremos ahora

$$cl \bigcup_{\beta\geq\alpha} ([\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta)$$
$$= cl \bigcup_{\beta\geq\alpha} [\min\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}, \max\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}]$$

Para cualquier $n \geq 1$, existen

$$a_n \in \{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+ : \beta \geq \alpha\}$$

tal que

$$\inf_{\beta\geq\alpha} \min\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\} > a_n - \frac{1}{n}$$

También existen

$$b_n \in \{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+ : \beta \geq \alpha\}$$

tal que

$$\sup_{\beta\geq\alpha} \max\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\} > b_n + \frac{1}{n}$$

Tenemos

$$cl \bigcup_{\beta\geq\alpha} ([\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta) \supseteq [a_n, b_n], \ \forall n \geq 1$$

y también obtenemos,

$$cl \bigcup_{\beta\geq\alpha} ([\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta) \supseteq \bigcup_{n\geq 1} [a_n, b_n] \supseteq \left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

y finalmente,

$$cl \bigcup_{\beta\geq\alpha} ([\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta)$$
$$\supseteq \left[\inf_{\beta\geq\alpha} \min\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}, \sup_{\beta\geq\alpha} \max\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}\right]$$

concluyendo,

$$\left[\inf_{\beta\geq\alpha} \min\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}, \sup_{\beta\geq\alpha} \max\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}\right]$$
$$= cl \bigcup_{\beta\geq\alpha} ([\tilde{u}]_\beta \ominus_{gH} [\tilde{v}]_\beta)$$

Lo cual el siguiente corolario sigue:

Corolario 66. *Para cualquier número difuso $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, la g-diferencia $\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}$ existe y es un número difuso.*

Demostración:

Según el resultado anterior, si denotamos $\tilde{w}^- = (\tilde{u} \ominus_g \tilde{v})^-$ y $\tilde{w}^+ = (\tilde{u} \ominus_g \tilde{v})^+$ tenemos,

$$\tilde{w}^-(\alpha) = \inf_{\beta \geq \alpha} \{\min\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}\}$$

$$\leq \tilde{w}^+(\alpha) = \sup_{\beta \geq \alpha} \{\max\{\tilde{u}_\beta^- - \tilde{v}_\beta^-, \tilde{u}_\beta^+ - \tilde{v}_\beta^+\}\}$$

Obviamente $\tilde{w}^-$ es acotado y no decreciente, mientras que $\tilde{w}^+$ es acotado y no creciente. Además, $\tilde{w}^-, \tilde{w}^+$ se dejan continuas en $(0, 1]$, ya que $\tilde{u}^- - \tilde{v}^-, \tilde{u}^+ - \tilde{v}^+$ se dejan continuas en $(0, 1]$ y son continuas por la derecha en 0 ya que también lo son las funciones $\tilde{u}^- - \tilde{v}^-, \tilde{u}^+ - \tilde{v}^+$

4.3. Aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico (t-norma)

Adición con el producto t-norma

Sean $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ dos números difusos triangular con $\tilde{a} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\tilde{b} = (a_2, b_2, c_2)$.

Las diferencias de estos números difusos se denotarán mediante, $b_1 - a_1 = \alpha_1$, $c_1 - b_1 = \beta_1, b_2 - a_2 = \alpha_2$ y $c_2 - b_2 = \beta_2$. Para el producto t-norma, se sabe que $supp[\tilde{a} + \tilde{b}] = [a_1 + a_2, c_1 + c_2]$ y $core[\tilde{a} + \tilde{b}] = b_1 + b_2$.

La parte creciente de la función de pertenencia de un número difuso se denomina brevemente el lado izquierdo (L) y el parte creciente del lado derecho (R). El estudio se iniciará con la construcción del lado izquierdo de $\tilde{a} + \tilde{b}$.

Sea x un punto en el dominio del lado izquierdo de la suma, entonces $x \in [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$. Según el principio de extensión de Zadeh el valor de pertenencia de x es

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \bigcup_{x=y+z} \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z)$$

Tenemos tres posibilidades:

- x es la suma de un punto en el dominio del lado izquierdo de $\tilde{a}$ y un punto en el dominio del lado izquierdo de $\tilde{b}(LL)$.
- x es la suma de un punto en el dominio del lado izquierdo de $\tilde{a}$ y un punto en el dominio del lado derecho de $\tilde{b}(LR)$.
- x es la suma de un punto en el dominio del lado derecho de $\tilde{a}$ y un punto en el dominio del lado izquierdo de $\tilde{b}(RL)$.

El valor óptimo para cada caso particular debe calcularse y compararse entre sí. Sin pérdida de generalidad, en todo momento se asume que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $\beta_1 \leq \beta_2$. Las coordenadas $c_L = a_1 + a_2 + 2\alpha_1$ y $c_R = c_1 + c_2 - 2\beta_1$

- **Caso** LL: Sean $y \in [a_1, b_1], z \in [a_2, b_2]$ y $x = y + z$. Hay dos sub casos:

$$x \in [a_1 + a_2, c_L] \; o \; x \in (c_L, b_1 + b_2]$$

  ◇ El subcaso $x \in [a_1 + a_2, c_L]$ se analiza de la siguiente manera.

  Suponiendo que $x = a_1 + a_2 + t$, para un $k \in [0, \alpha_1]$ se puede escribir $y = a_1 + k$ y $z = a_2 + t - k$.

  Se puede observar que los grados de membresía correspondientes son los siguientes,

$$\mu_{\tilde{a}}(y) = \frac{k}{\alpha_1} \; y \; \mu_{\tilde{b}}(z) = \frac{(t-k)}{\alpha_2}$$

  Teniendo en cuenta que es necesario encontrar el valor de,

$$\mu(x) = \bigcup_{x=y+z} \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z)$$

  Se define la siguiente función,

$$f_t(k) = \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z) = \frac{k}{\alpha_1} \cdot \frac{t-k}{\alpha_2} = \frac{tk - k^2}{\alpha_1 \alpha_2}.$$

  Para calcular $\mu(x)$ queda optimizar $f_t(k)$.

  Derivemos $f_t(k)$ $w.r.t.$ k y observemos $\frac{d}{dk}[f_t(k)] = 0$ si $k = \frac{t}{2}$. El valor máximo entonces es,

$$f_t(\frac{t}{2}) = \frac{t^2}{4\alpha_1\alpha_2}$$

Notemos que como $k \in [0, \alpha_1]$ se cumple que $t \in [0, 2\alpha_1]$ y por lo tanto $x \in [a_1 + a_2, c_L]$.

◇ Para el subcaso $x \in (c_L, b_1+b_2]$ tenemos $t > 2\alpha_1$ y esto junto con $k \in [0, \alpha_1]$ lo que significa,

$$\frac{d}{dk}[f_t(k)] = \frac{t-2k}{\alpha_1\alpha_2} > 0$$

Por lo tanto, $f_t(k)$ es creciente con respecto a k y alcanza su máximo en $k = \alpha_1$ con valor $f_t(\alpha_1) = \frac{t-\alpha_1}{\alpha_2}$.

Sustituyendo hacia atrás, $t = x - (a_1 + a_2)$, donde el resultado del caso (LL) se obtiene de la siguiente manera.

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-(a_1+a_2))^2}{4\alpha_1\alpha_2}, & x \in [a_1+a_2, c_L] \\ \dfrac{x-(b_1+a_2)}{\alpha_2}, & x \in [c_L, b_1+b_2] \end{cases}$$

- **Caso** RL:

Sean $y \in [b_1, c_1], z \in [a_2, b_2]$ y $x = y + z$.

Dado que $x \in [b_1 + a_2, b_1 + b_2]$, se puede suponer que $x = b_1 + a_2 + t, y = b_1 + k, z = a_2 + (t-k)$, con las siguientes restricciones $k \in [0, \beta_1]$ y $(t-k) \in [0, \alpha_2]$.

En este caso el correspondiente los valores de membresía son los siguientes,

$$\mu_{\tilde{a}}(y) = \frac{\alpha_1 - k}{\beta_1}, \text{ y } \mu_{\tilde{b}}(z) = \frac{t-k}{\alpha_2}$$

Entonces $f_t(k)$, es

$$f_t(k) = \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z) = \frac{\beta_1 - k}{\beta_1} \cdot \frac{t-k}{\alpha_2}$$

Derivando $w.r.t.$ k, se observa que,

$$\frac{d}{dk}[f_t(k)] = \frac{-((t-k)+(\beta_1-k))}{\beta_1\alpha_2} \leq 0$$

Entonces $f_t(k)$ es una función decreciente y alcanza su valor máximo en $k = 0$.

Para $k = 0, \mu(y).\mu(z) = \frac{t}{\alpha_2}$, hacia atrás, $t = x - (b_1 + a_2)$ el resultado para el caso RL, se obtiene.

$$\mu_2(x) = \frac{x - (b_1 + a_2)}{\alpha_2}, x \in [b_1 + a_2, b_1 + b_2]$$

En este caso la función de pertenencia resultante es lineal.

- **Caso** LR:

Sean $y \in [a_1, b_1], z \in [b_2, c_2]$ y $x = y + z$.

Dado que $x \in [a_1+b_2, b_1+b_2]$, se supone que $x = a_1+b_2+t, y = a_1+(t-k), z = a_2 + \alpha_2 + k$, con las restricciones $k \in [0, \beta_2]$ y $(t - k) \in [0, \alpha_1]$.

En este caso el correspondiente los valores de membresía son los siguientes,

$$\mu_{\tilde{a}}(y) = \frac{t-k}{\alpha_1}, \text{ y } \mu_{\tilde{b}}(z) = \frac{\beta_2 - k}{\beta_2}$$

Entonces $f_t(k)$, es

$$f_t(k) = \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z) = \frac{t-k}{\alpha_1}\frac{\beta_2 - k}{\beta_2}$$

Derivando $f_t(k)$, se observa que,

$$\frac{d}{dk}[f_t(k)] = \frac{-((t-k) + (\beta_2 - k))}{\beta_2\alpha_1} \leq 0$$

Entonces $f_t(k)$ es una función decreciente y alcanza su valor máximo en $k = 0$.

Para $k = 0, \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z) = \frac{t}{\alpha_1}$, hacia atrás, $t = x - (a_1 + b_2)$ el resultado para el caso LR, se obtiene.

$$\mu_3(x) = \frac{x - (a_1 + b_2)}{\alpha_1}, x \in [a_1 + b_2, b_1 + b_2]$$

En este caso la función de pertenencia resultante es lineal.

Como $\mu_{(\tilde{a}+\tilde{b})}(x) = \text{máx}\, \mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x)$, comparemos las funciones μ_1, μ_2, μ_3 en su dominio común.

Teniendo en cuenta que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ es obvio que $\mu_3 \leq \mu_2$ para todo $x \leq b_1 + b_2$ por lo tanto será suficiente comparar μ_1 con μ_2.

La afirmación es que $\mu_2(x) \leq \mu_1(x), \forall x \in \mathbb{R}$, esto se puede verificar observando que la única solución a la ecuación $\mu_1(x) = \mu_2(x)$ es $x_0 = 2\alpha_1 + a_1 + a_2 = c_L$.

El resultado es $\mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1$ y considerando los dominios de estas funciones, completa la discusión.

Observación: Es fácil comprobar que todos los resultados obtenidos anteriormente se pueden transformar simétricamente al lado derecho del número difuso $\tilde{a} + \tilde{b}$.

La conclusión de la discusión se resume en el siguiente teorema (Soylu y Aslan, 2021).

Teorema 67. *Dados dos números triangulares difusos $\tilde{a} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\tilde{b} = (a_2, b_2, c_2)$, sean $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $\beta_1 \leq \beta_2$, la suma $\tilde{a}+\tilde{b}$ bajo el producto t-norma es un número difuso con la siguiente función de pertenencia.*

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \dfrac{((x-(a_1+a_2))^2}{4\alpha_1\alpha_2}, a_1 + a_2 \leq x \leq a_1 + a_2 + 2\alpha_1 \\ \dfrac{x-(b_1+a_2)}{\alpha_2}, a_1 + a_2 + 2\alpha_1 \leq x \leq b_1 + b_2 \\ \dfrac{-x+(b_1+c_2)}{\beta_2}, b_1 + b_2 \leq x \leq c_1 + c_2 - 2\beta_1 \\ \dfrac{(x-(c_1+c_2))^2}{4\beta_1\beta_2}, c_1 + c_2 - 2\beta_1 \leq x \leq c_1 + c_2 \end{cases}$$

Observación: Si $\alpha_1 > \alpha_2$ y/o $\beta_1 > \beta_2$ todos los índices para α, a, b en la parte izquierda del resultado y/o β, b, c en la parte derecha del resultado, se debería intercambiar.

Corolario 68. *Si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces*

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \frac{(x-(a_1+a_2))^2}{4\alpha_1\alpha_2}, \quad \forall x \in [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$$

Corolario 69. *Si $\beta_1 = \beta_2$ entonces*

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \frac{(x-(c_1+c_2))^2}{4\beta_1\beta_2}, \quad \forall x \in [b_1 + b_2, c_1 + c_2]$$

Para visualizar mejor los corolarios, observemos el siguiente ejemplo: (Mesiar, 1996; Soylu y Aslan, 2021).

Ejemplo: (Soylu y Aslan, 2021)

Dado que $\log(1-x)$, el logaritmo de las funciones de forma izquierda y derecha, es cóncavo, la función de pertenencia de $\tilde{a}+\tilde{b}$ es (estableciendo $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2, \beta = \beta_1 = \beta_2$);

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \begin{cases} L^2\left(\dfrac{b_1+b_2-x}{2\alpha}\right), & b_1+b_2-2\alpha \leq x \leq b_1+b_2, \\ R^2\left(\dfrac{x-(b_1+b_2)}{2\beta}\right), & b_1+b_2 \leq x \leq b_1+b_2+2\beta. \end{cases}$$

Esto es igual a;

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \left(1-\left(\dfrac{b_1+b_2-x}{2\alpha}\right)^2\right), & b_1+b_2-2\alpha \leq x \leq b_1+b_2, \\ \left(1-\left(\dfrac{x-(b_1+b_2)}{2\beta}\right)^2\right), & b_1+b_2 \leq x \leq b_1+b_2+2\beta. \end{cases}$$

Dado que $b_1+b_2 = a_1+a_2+2\alpha = c_1+c_2-2\beta$, observamos que;

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-(a_1+a_2)}{2\alpha}\right)^2, & a_1+a_2 \leq x \leq b_1+b_2, \\ \left(\dfrac{x-(c_1+c_2)}{2\beta}\right)^2, & b_1+b_2 \leq x \leq c_1+c_2. \end{cases}$$

Lo cual obtenemos lo descrito en los colorarios anteriores dados.

Ejemplo:(Soylu y Aslan, 2021)

Concideremos los siguientes números difusos $\tilde{a} = (3,6,8) = (a_1,b_1,c_1)$ y $\tilde{b} = (10,14,17) = (a_2,b_2,c_2)$.

Hallando el valor de α y β,

$$\alpha_1 = b_1 - a_1; \alpha_2 = b_2 - a_2; \beta_1 = c_1 - b_1; \beta_2 = c_2 - b_2$$

$$\alpha_1 = 6-3 = 3; \alpha_2 = 14-10 = 4; \beta_1 = 8-6 = 2; \beta_2 = 17-14 = 3$$

Entonces la suma $\tilde{a}+\tilde{b}$, usando el teorema anterior, tenemos;

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x)=\begin{cases}\dfrac{((x-(a_1+a_2))^2}{4\alpha_1\alpha_2}, a_1+a_2\leq x\leq a_1+a_2+2\alpha_1\\ \dfrac{x-(b_1+a_2)}{\alpha_2}, a_1+a_2+2\alpha_1\leq x\leq b_1+b_2\\ \dfrac{-x+(b_1+c_2)}{\beta_2}, b_1+b_2\leq x\leq c_1+c_2-2\beta_1\\ \dfrac{(x-(c_1+c_2))^2}{4\beta_1\beta_2}, c_1+c_2-2\beta_1\leq x\leq c_1+c_2\end{cases}$$

Reemplazando, tenemos,

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x)=\begin{cases}\dfrac{((x-(3+10))^2}{4(3)(4)}, 3+10\leq x\leq 3+10+2(3)\\ \dfrac{x-(6+10)}{4}, 3+10+2(3)\leq x\leq 6+14\\ \dfrac{-x+(6+17)}{3}, 6+14\leq x\leq 8+17-2(2)\\ \dfrac{(x-(8+17))^2}{4(2)(3)}, 8+17-2(2)\leq x\leq 8+17\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-13)^2}{48}, & 13\leq x\leq 19\\ \dfrac{x-16}{4}, & 19\leq x\leq 20\\ \dfrac{-x+23}{3}, & 20\leq x\leq 21\\ \dfrac{(x-25)^2}{24}, & 21\leq x\leq 25.\end{cases}$$

Sabemos que, $supp[\tilde{a}+\tilde{b}]=[a_1+a_2,c_1+c_2]$ y $core[\tilde{a}+\tilde{b}]=b_1+b_2$.

Por lo tanto; obrservar que: $supp(\tilde{a}+\tilde{b})=[13,25]$, además , con $core(\tilde{a}+\tilde{b})=\{20\}$.

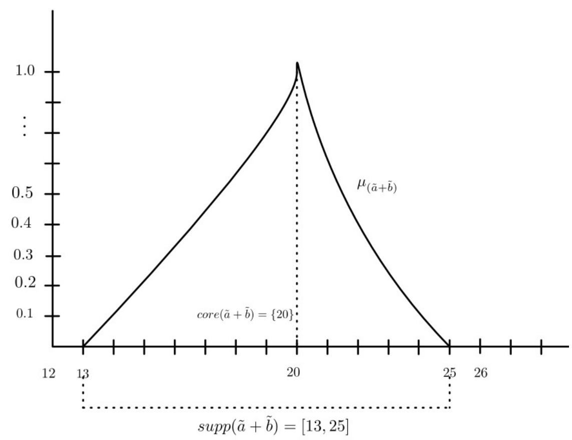

Figura 11: Función de pertenencia de $\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}$.

Multiplicación con el producto t-norma

Suponiendo que $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$, primero se va a describir el lado izquierdo de $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$. obiamente, $supp[\tilde{a} \cdot \tilde{b}] = [a_1a_2, c_1c_2]$ y $core[\tilde{a} \cdot \tilde{b}] = b_1b_2$

Sea x un punto en el dominio del lado izquierdo de la suma ($x \in [a_1a_2, b_1b_2]$). de acuerdo con el Principio de Extención de Zadeh el valor,

$$\mu_{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}(x) = \bigcup_{x=y\cdot z} \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z)$$

tiene que ser calculado, de manera similar al caso de la suma, por ende habra tres casos que serán analizados:

i. **Caso** LL**:** Sea $y \in [a_1, b_1], z \in [a_2, b_2]$ y $x = y \cdot z$

donde la función de pertenencia correspondientes son los siguientes:

$$\mu_{\tilde{a}}(y) = \frac{y - a_1}{\alpha_1}, \quad \mu_{\tilde{b}}(z) = \mu\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x - a_2y}{\alpha_2 y}$$

Definimos,

$$f_x(y) = \mu_{\tilde{a}}(y) \cdot \mu_{\tilde{b}}(z) = \left(\frac{y - a_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{x - a_2y}{\alpha_2 y}\right)$$

el máximo de $f_x(y)$ está determinado por;

$$\frac{d}{dy}[f_x(y)] = 0 \Longleftrightarrow y = \sqrt{\frac{a_1x}{a_2}}$$

luego,

$$f_x\left(\sqrt{\frac{a_1x}{a_2}}\right)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a_1a_2})^2}{\alpha_1\alpha_2}$$

se define

$$\mu_1(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a_1a_2})^2}{\alpha_1\alpha_2}$$

es necesario encontrar un diominio válido para esta función.

Considere las siguientes restricciones:

Dado que $y=\sqrt{\frac{a_1x}{a_2}}$ obtenemos que;

$$a_1\leq\sqrt{\frac{a_1x}{a_2}}\leq b_1\Leftrightarrow a_1a_2\leq x\leq\frac{a_2b_1^2}{a_1}\tag{1}$$

Y dado que $z=\sqrt{\frac{xa_2}{a_1}}$

$$a_1\leq\sqrt{\frac{xa_2}{a_1}}\leq b_1\Leftrightarrow a_2a_1\leq x\leq\frac{b_2^2a_1}{a_2}\tag{2}$$

Combinando (1) y (2) el dominio de μ_1 se obtine como:

$$a_1a_2\leq x\leq\min\left\{\frac{a_1b_2^2}{a_2},\frac{a_2b_1^2}{a_1}\right\}$$

asi el resultado para el caso LL es:

$$\mu_1(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a_1a_2})^2}{\alpha_1\alpha_2},\ x\in\left[a_1a_2,\min\left\{\frac{a_1b_2^2}{a_2},\frac{a_2b_1^2}{a_1}\right\}\right]\tag{3}$$

ii. **Caso** LR**:** Sea $y\in[a_1,b_1],z\in[b_2,c_2]$ y $x=y\cdot z$.

Sustituyendo $y=\frac{x}{z}$ se observa que, $\mu_{\tilde{a}}(\frac{x}{z})=\frac{x-a_1z}{\alpha_1z}$ y $\mu_{\tilde{a}}$ es decreciente respecto a z.

Por otra parte, $\mu_{\tilde{b}}(z)=\frac{b_2+\beta_2-z}{\beta_2}$, también es decresiente respecto a z, por lo que el producto de estas funciones alcanza su valor máximo en el valor mínimo de z que es $z=b_2$.

Ya que;

$$\mu_{\tilde{a}}\left(\frac{x}{b_2}\right),\ \mu_{\tilde{b}}(b_2)=\frac{x-a_1b_2}{\alpha_1b_2}$$

Se puede concluir que en el caso LR la pertenencia es la siguiente función lineal

$$\mu_2(x) = \frac{x - a_1 b_2}{\alpha_1 b_2},\ x \in [a_1 b_2, b_1 b_2] \tag{4}$$

iii. **Caso RL:** Sea $y \in [b_1, c_2], z \in [a_2, b_2]$ y $x = y \cdot z$.

Sustituyendo $z = \frac{x}{y}$ se observa que, $\mu_{\tilde{a}}(y) = \frac{b_1 + \beta_1 - y}{\beta_1}$ esta disminuyendo respecto a y.

Por otra parte,$\mu_{\tilde{b}}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x - \alpha_2 y}{\alpha_2 y}$, es decresiente respecto a y también, por lo que el producto de estas funciones alcanza su valor máximo en el valor mínimo de y que es $y = b_1$.

Ya que;

$$\mu_{\tilde{a}}(b_1) \cdot \mu_{\tilde{b}}(b_1) = \frac{x - a_2 b_1}{\alpha_2 b_1}$$

Se puede concluir que en el caso LR la pertenencia es la siguiente función lineal

$$\mu_3(x) = \frac{x - a_2 b_1}{\alpha_2 b_1},\ x \in [a_2 b_1, b_1 b_2] \tag{5}$$

Ahora las funciones (3), (4) y (5) se comparán en su dominio común.

Lemma 70. *Si*

$$\text{mín}\left\{\frac{a_1 b_2^2}{a_2}, \frac{a_2 b_1^2}{a_1}\right\} = \frac{a_1 b_2^2}{a_2}$$

entonces $\mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1, \forall x \in [a_1 a_2, b_1 b_2]$

Demostración:(Soylu y Aslan, 2021)

Sea

$$\text{mín}\left\{\frac{a_1 b_2^2}{a_2}, \frac{a_2 b_1^2}{a_1}\right\} = \frac{a_1 b_2^2}{a_2}.$$

Por la observación,

$$\frac{a_1 b_2^2}{a_2} \leq \frac{a_2 b_1^2}{a_1} \leftrightarrow a_1 b_2 \leq a_2 b_1$$

Concluimos que la raíz de μ_2 es menor que la raíz de μ_3 y como las funciones se intersectan en $(b_1 b_2, 1)$ se ve que $\mu_3 \leq \mu_2$ en el dominio en discusión.

Por otro lado resolviendo la igualdad $\mu_2 = \mu_1$ se puede observar que la igualdad

$$\frac{x - a_1 b_2}{\alpha_1 b_2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a_1 a_2})^2}{\alpha_1 \alpha_2},$$

conduce a la ecuación cuadrática

$$x(\alpha - b_2) + 2b_2\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{x} - (a_1 b_2 \alpha_2 + b_2 a_1 a_2) = 0,$$

para lo cual el discriminante es

$$(2b_2\sqrt{a_1 a_2})^2 - 4(a_2(a_1 b_2 \alpha_2 + b_2 a_1 a_2)) = 0.$$

Como el discriminante de la ecuación cuadrática es cero, se concluye que μ_2 es tangente a μ_1 y por tanto $\mu_2 \leq \mu_1$.

Por lo tanto:

$$\mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1, \forall x \in [a_1 a_2, b_1 b_2]$$

Una vez que se observa que μ_2 es tangente a μ_1, se puede calcular la coordenada x de la intersección tangente resolviendo la siguiente igualdad,

$$\frac{d}{dx}\mu_1(x) = \frac{d}{dx}\mu_2(x),$$

para obtener la solución

$$x = \frac{a_1 b_2^2}{a_2}.$$

Observación: Es fácil comprobar que todos los resultados obtenidos anteriormente se pueden transformar simétricamente al lado derecho del número difuso $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$.

La conclusión de la discusión se resume en el siguiente teorema (Soylu y Aslan, 2021).

Teorema 71. *Dado dos números difusos triangulares* $\tilde{a} = (a_1, b_1, c_1)$ *y* $\tilde{b} = (a_2, b_2, c_2)$ *su producto* $\tilde{a}\tilde{b}$ *bajo el producto de las t-normas es un número difuso* *con la siguiente funcion de pertenencia:*

$$\mu_{\tilde{a}\tilde{b}}(x)=\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a_1a_2})^2}{\alpha_1\alpha_2}, a_1a_2\leq x\leq \min\left\{\dfrac{a_1b_2^2}{a_2},\dfrac{a_2b_1^2}{a_1}\right\}\\ \dfrac{x-a_1b_2)}{\alpha_1b_2},\dfrac{a_1b_2^2}{a_2}\leq x\leq b_1b_2 \text{ y } a_1b_2\leq a_2b_1\\ \dfrac{x-a_2b_1)}{\alpha_2b_1},\dfrac{a_2b_1^2}{a_1}\leq x\leq b_1b_2 \text{ y } a_2b_1\leq a_1b_2\\ \dfrac{(c_2b_1)-x}{\beta_2b_1}, b_1b_2\leq x\leq \dfrac{c_2b_1^2}{c_1} \text{ y } c_1b_2\leq c_2b_1\\ \dfrac{(c_1b_2)-x}{\beta_1b_2}, b_1b_2\leq x\leq \dfrac{c_1b_2^2}{c_2} \text{ y } c_2b_1\leq c_1b_2\\ \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{c_1c_2})^2}{\beta_1\beta_2}, \max\left\{\dfrac{c_1b_2^2}{c_2},\dfrac{c_2b_1^2}{c_1}\right\}\leq x\leq c_1c_2\end{cases}$$

Corolario 72. *Si* $a_1b_2=a_2b_1$ *entonces* $\frac{x-a_1b_2}{\alpha_1b_2}=\frac{x-a_2b_1}{\alpha_2b_1}$

Demostración:(Soylu y Aslan, 2021)

Sea $a_1b_2=a_2b_1$.

Usamos las identidades $b_2=a_2+\alpha_2$ y $b_1=a_1+\alpha_1$ para observar $a_1\alpha_2=a_2\alpha_1$.

Sumando el término $\alpha_1\alpha_2$, a ambos lados de la última igualdad observamos $\alpha_2b_1=\alpha_1b_2$, y por tanto,

$$\frac{x-a_1b_2}{\alpha_1b_2}=\frac{x-a_2b_1}{\alpha_2b_1}.$$

Entonces obtenemos que $\mu_3=\mu_2$ en su dominio común.

Dado que $a_1b_2=a_2b_1$ también implica

$$\frac{a_1b_2^2}{a_2}=\frac{a_2b_1^2}{a_1}$$

Vemos que sus dominios también son iguales y podemos concluir que $\mu_3=\mu_2$

Corolario 73. *Si* $c_1b_2=c_2b_1$ *entonces* $\frac{c_2b_1-x}{\beta_2b_1}=\frac{c_1b_2-x}{\beta_1b_1},\forall x\in\left[b_1b_2,\frac{c_2b_1^2}{c_1}\right]$

Demostración:(Soylu y Aslan, 2021)

Sea $c_1b_2=c_2b_1$.

Usamos las identidades $b_2=c_2+\beta_2$ y $b_1=c_1+\beta_1$ para observar $c_1\beta_2=c_2\beta_1$.

Sumando el término $\beta_1\beta_2$, a ambos lados de la última igualdad observamos $\alpha_2 b_1 = \alpha_1 b_2$, y por tanto,

$$\frac{c_2 b_1 - x}{\beta_2 b_1} = \frac{c_1 b_2}{\beta_1 b_2}.$$

Entonces obtenemos que $\mu_3 = \mu_2$ en su dominio común.

Dado que $c_1 b_2 = c_2 b_1$ también implica

$$\forall x \in [b_1 b_2, \frac{c_2 b_1^2}{c_1}$$

Vemos que sus dominios también son iguales y podemos concluir que $\mu_3 = \mu_2$.

Observación: Tanto para $\tilde{a} < 0$ como para $\tilde{b} < 0$, la multiplicación se puede realizar por la identidad $\tilde{a}\tilde{b} = (-\tilde{a}) \cdot (-\tilde{b})$. Si $\tilde{a} < 0, \tilde{b} > 0$, entonces $\tilde{a} \cdot \tilde{b} = -((\tilde{a}) \cdot (\tilde{b}))$. Cabe señalar que la división no se puede realizar directamente usando $\tilde{a} \div \tilde{b} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1}$ (Seresht y Fayek, 2019).

Dado el término $\tilde{b}^{-1}$ no será un número difuso triangular.

Para la división, una solución es usar la aproximación tangente de $\tilde{b}^{-1}$(Hanss, 2005) y luego hacer uso de $\tilde{a} \div \tilde{b} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1}$. La aproximación tangente de un número difuso triangular positivo o negativo, $\tilde{b} = (a, b, c)$ es

$$\tilde{b} = \left\langle \frac{1}{b}, \frac{\beta}{b^2}, \frac{\alpha}{b^2} \right\rangle_{1-x}$$

Ejemplo:(Soylu y Aslan, 2021)

Consideramos los números difusos triangulares, $\tilde{a} = (2, 3, 4)$ y $\tilde{b} = (5, 7, 10)$.

Aquí $a_1 b_2 = 14, a_2 b_1 = 15, c_1 b_2 = 28, c_2 b_1 = 30$, además, Hallando el valor de α y β,

$$\alpha_1 = b_1 - a_1; \alpha_2 = b_2 - a_2; \beta_1 = c_1 - b_1; \beta_2 = c_2 - b_2$$

$$\alpha_1 = 3 - 2 = 1; \alpha_2 = 7 - 5; \beta_1 = 4 - 3 = 1; \beta_2 = 10 - 7 = 3$$

ya encontrados los valores de α y β.

Por lo tanto, el producto de $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ mediante el (*teorema 73*), Reemplazando los valores optenemos lo siguiente

$$\mu_{\tilde{a}\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{10})^2}{2}, & 10 \leq x \leq 19{,}6, \\ \dfrac{x-14}{7}, & 19{,}6 \leq x \leq 21, \\ \dfrac{30-x}{9}, & 21 \leq x \leq 22{,}5, \\ \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{40})^2}{3}, & 22{,}5 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Además, recordemos que; $supp[\tilde{a} \cdot \tilde{b}] = [a_1a_2, c_1c_2]$ y $core[\tilde{a} \cdot \tilde{b}] = b_1b_2$

Por lo tanto, el soporte, $supp(\tilde{a} \cdot \tilde{b}) = [10, 40]$ con su núcleo, $core(\tilde{a} \cdot \tilde{b}) = \{21\}$.

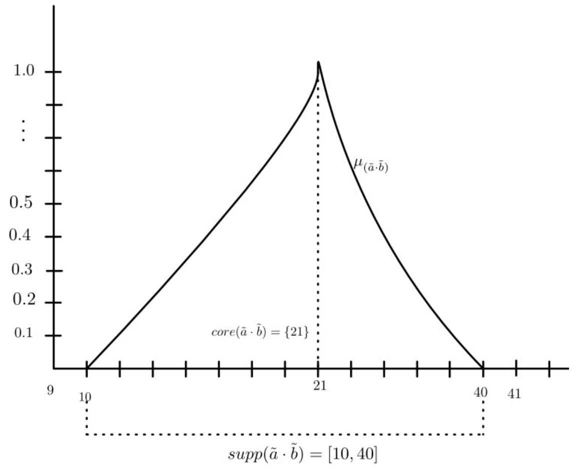

Figura 12: Función de pertenencia de $\mu_{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}$.

Algunas Propiedades Algebraicas

En esta sección revisamos algunas propiedades clave de la aritmética del producto. Las propiedades algebraicas de la $\mathcal{T}$-aritmética de números difusos se estudian en detalle en (Kawaguchi y Da-te, 1994). Aquí enumeramos los resultados modificados para el caso particular de la aritmética de productos. Simplemente probamos algunos de ellos para mostrar cómo se pueden transformar los resultados en (Kawaguchi y Da-te, 1994). Quizás la observación más importante es que la suma (o producto) de dos números difusos normales y convexos es también un número difuso normal y convexo(Soylu y Aslan, 2021).

Teorema 74. *La suma del producto y la multiplicación del producto son conmutativas, es decir, sean* $* \in \{+, \cdot\}$

$$\tilde{a} * \tilde{b} = \tilde{a} * \tilde{b}$$

Demostración:(Soylu y Aslan, 2021)

Sea $\tilde{c} = \tilde{a} * \tilde{b}$, las conmutatividades de $*$ y el producto t-norma implican,

$$\mu_{\tilde{c}} = \sup_{z=x*y} (\mu_{\tilde{a}}(x) \cdot \mu_{\tilde{b}}(y)) = \sup_{z=y*x} (\mu_{\tilde{b}}(y) \cdot \mu_{\tilde{a}}(x)).$$

Teorema 75. *La suma del producto y la multiplicación del producto son asociativos, es decir sean* $* \in \{+, \cdot\}$

$$(\tilde{a} * \tilde{b})\tilde{c} = \tilde{a} * (\tilde{b} * \tilde{c})$$

Demostración: (Soylu y Aslan, 2021)

Sea $\tilde{u} = (\tilde{a}*\tilde{b})\tilde{c}$ y $\tilde{v} = \tilde{a}*(\tilde{b}*\tilde{c})$. Las asociatividades de $*$ y el producto t-norma proporcionan,

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{u}}(t) &= \sup_{t=s*z} ((\sup_{s=x*y} \mu_{\tilde{a}}(x) \cdot \mu_{\tilde{b}}(y)) \cdot \mu_{\tilde{c}(z)}) \\
&= \sup_{t=(x*y)*z} (\mu_{\tilde{a}}(x) \cdot \mu_{\tilde{b}}(y)) \cdot \mu_{\tilde{c}}(z) \\
&= \sup_{t=x*(y*z)} \mu_{\tilde{a}}(x) \cdot (\mu_{\tilde{b}}(y) \cdot \mu_{\tilde{c}}(z)) \\
&= \sup_{t=x*p} (\mu_{\tilde{a}}(x) \cdot (\sup_{p=y*z} \mu_{\tilde{b}}(y) \cdot \mu_{\tilde{c}}(z)) \\
&= \mu_{\tilde{v}}(t).
\end{aligned}$$

Teorema 76. *Los números nítidos* 0 *y* 1 *son elementos neutrales de la suma y multiplicación de productos, respectivamente:*

$$\tilde{a} + 0 = \tilde{a}, \quad \tilde{a} \cdot 1 = \tilde{a}.$$

Teorema 77. *La suma del producto y la multiplicación del producto no son invertibles, es decir, no existen objetos (siempre que* $\tilde{a}$ *no sea nítido)* $\tilde{a}_+$, $\tilde{a}_\times$ *con,*

$$\tilde{a} + \tilde{a}_+ = 0, \quad \tilde{a} \cdot \tilde{a}_\times = 1$$

Teorema 78. *La aritmética del producto es distributiva débil:*

$$\tilde{a} \times (\tilde{b} + \tilde{c}) \subset \tilde{a} \times \tilde{b} + \tilde{a} \times \tilde{c}$$

Obserbación: Kawaguchi y Da-te (1994), incluyen un ejemplo de violación de la distributividad exacta para el caso de la aritmética de productos. A la luz de estas observaciones podemos concluir que los números difusos equipados con aritmética de productos forman monoides conmutativos. La falta de distributividad completa dificulta una estructura de semianillo.

V. CONCLUSIONES

- En el transcurso de este estudio, hemos explorado y analizado las definiciones fundamentales de conjuntos y números difusos, revelando un vasto campo de estudio e investigación por delante.

- La aritmética difusa, al comprender las operaciones básicas presentes en la aritmética clásica, se posiciona como una extensión natural de esta última. Este enfoque abarca y amplía los conceptos tradicionales, consolidando así la aritmética difusa como un marco integral.

- La inclusión de números difuso triangular, en nuestra investigación proporciona un fundamento sólido. La utilización de números triangulares en nuestro trabajo de tesis, junto con la aplicación de la t-norma (norma triangular), ha enriquecido nuestro entendimiento de la aritmética difusa.

- Al detallar fórmulas explícitas para la aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico, hemos contribuido al conocimiento en este campo. Las operaciones de producto-suma y producto-multiplicación se han presentado de manera clara y detallada.

- Es imperativo destacar la importancia de comprender conceptos como conjunto difuso, número difuso, aritmética difusa y aritmética difusa con norma triangular para continuar explorando y avanzando en esta fascinante rama de las matemáticas. Además, subrayamos la relevancia crucial de la lógica difusa en aplicaciones tecnológicas.

- En resumen, estas conclusiones refuerzan la riqueza y amplitud del terreno que abarca la aritmética difusa, al mismo tiempo que resaltan la trascendencia de estos conceptos en el ámbito tecnológico.

VI. RECOMENDACIONES

1) Considerando la extensión de nuestro estudio sobre la aritmética difusa con norma triangular del producto algebraico, se sugiere explorar la aritmética difusa con el número difuso gaussiano utilizando la misma norma triangular o t-norma.

2) Dado que la aritmética difusa es un área que aún se encuentra en desarrollo, se alienta a los investigadores a continuar explorando y contribuyendo a este campo matemático en crecimiento.

3) Se recomienda investigar y desarrollar aplicaciones prácticas de la aritmética difusa en diversos campos, como ingeniería, toma de decisiones y tecnología. Explorar casos de estudio específicos podría proporcionar una comprensión más profunda de cómo la aritmética difusa puede abordar problemas del mundo real.

4) Es importante considerar la interconexión de la aritmética difusa con otras ramas de las matemáticas y disciplinas relacionadas. Explorar sinergias con la lógica difusa, la teoría de conjuntos difusos y otras áreas afines puede enriquecer aún más la comprensión y aplicación de la aritmética difusa.

5) Se sugiere fomentar la colaboración entre investigadores y expertos en aritmética difusa, creando un espacio para el intercambio de ideas, discusiones y la construcción colectiva de conocimiento en esta área.

6) Considerar la divulgación y enseñanza de conceptos de aritmética difusa en entornos educativos. La promoción de la comprensión pública de estos conceptos puede contribuir a su aceptación y aplicación más amplia en diversos sectores.

Referencias Bibliográficas

Alsina, C., Schweizer, B., y Frank, M. J. (2006). *Associative functions: triangular norms and copulas*. World Scientific.

Anastassiou, G. A., y Gal, S. (2001). On a fuzzy trigonometric approximation theorem of weierstrasstype.

Ban, A., y Bede, B. (2003). Cross product of lr-fuzzy numbers and properties. *Anals of Oradea Univ., Fasc. Matem*, *9*, 95-108.

Ban, A., y Bede, B. (2006). Power series of fuzzy numbers with cross product and applications to fuzzy differential equations. *Journal of Concrete & Applicable Mathematics*, *4*(2).

Bede, B. (2013). *Fuzzy analysis*. Springer.

Bede, B., y Fodor, J. (2006). Product type operations between fuzzy numbers and their applications in geology. *Acta Polytechnica Hungarica*, *3*(1), 123-139.

Bede, B., y Stefanini, L. (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, *230*, 119–141.

Bielawski, J., y Tabor, J. (2012). A t-norm embedding theorem for fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *209*, 33–53.

Bielawski, J., y Tabor, J. (2021). Convex hull of a fuzzy set and triangular norms. *Fuzzy Sets and Systems*, *417*, 93–109.

Bodjanova, S. (2003). Alpha-bounds of fuzzy numbers. *Information Sciences*, *152*, 237-266. Descargado de `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025503000549` doi: https://doi.org/10.1016/S0020-0255(03)00054-9

de Barros, L. C., y Bassanezi, R. C. (2010). *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação ....

Diamond, P., y Kloeden, P. (2000). Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis.

En *Fundamentals of fuzzy sets* (p. 583-641). Springer.

Dubois, D., y Prade, H. (1987). The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy sets and systems*, *24*(3), 279-300.

Fullér, R. (1991). On product-sum of triangular fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, *41*(1), 83-87.

Fullér, R., y Keresztfalvi, T. (1992). t-norm-based addition of fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, *51*(2), 155-159.

Giachetti, R. E., y Young, R. E. (1997). A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators. *Fuzzy sets and systems*, *91*(2), 185-202.

Goetschel Jr, R., y Voxman, W. (1986). Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy sets and systems*, *18*(1), 31-43.

Guerra, M. L., y Stefanini, L. (2005). Approximate fuzzy arithmetic operations using monotonic interpolations. *Fuzzy Sets and Systems*, *150*(1), 5-33.

Hanss, M. (2005). *Applied fuzzy arithmetic*. Springer.

Hong, D. H. (1994). A note on product-sum of lr fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, *66*(3), 381–382.

Hong, D. H. (2001). Shape preserving multiplications of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, *123*(1), 81-84.

Hong, D. H. (2003). T-sum of lr fuzzy numbers with unbounded supports. *COMMUNICATIONS-KOREAN MATHEMATICAL SOCIETY*, *18*(2), 385-392.

Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, *10*(3), 205–223.

Kawaguchi, M. F., y Da-te, T. (1994). Some algebraic properties of weakly non-interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, *68*(3), 281–291.

Klir, G., y Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic* (Vol. 4). Prentice hall New Jersey.

Marková, A. (1997). T-sum of lr fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, *85*(3), 379–384.

Mesiar, R. (1996). A note to the t-sum of lr fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, *79*(2), 259–261.

Negoiţă, C. V., y Ralescu, D. A. (1975). *Applications of fuzzy sets to systems analysis.* Springer.

Nguyen, H. T. (1978). A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, *64*(2), 369-380.

Puri, M. L., y Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *91*(2), 552–558.

Seresht, N. G., y Fayek, A. R. (2019). Computational method for fuzzy arithmetic operations on triangular fuzzy numbers by extension principle. *International Journal of Approximate Reasoning*, *106*, 172–193.

Soylu, G., y Aslan, M. (2021). Fuzzy arithmetic with product t-norm. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, *18*(6), 185-197.

Stefanini, L. (2010). A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy sets and systems*, *161*(11), 1564–1584.

Stefanini, L., y Bede, B. (2009). Generalized hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *71*(3-4), 1311–1328.

Trillas, E. (1979). On negation functions in the theory of fuzzy sets. *Stochastica: revista de matemática pura y aplicada*, *3*(1), 47-60.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353.

Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, *1*(1), 3-28.

Zadeh, L. A. (1999). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, *100*, 9-34.